Севда Исмайылова

# МАТЕМАТИКА

# 7

## МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
## ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Утверждено
Министерством образования
Азербайджанской Республики
(Приказ №842
от 24 июля 2014 г.)



Şərq Qərb
1986-cı ildən
East West
since 1986
BAKI
2014

**Севда Исмайылова**
**Математика – 7**
Методическое пособие для учителя
Баку, Издательский Дом “**Şərq-Qərb**”, 2014, 224 стр.

**ISBN** 978-9952-404-12-8

Перевод с азербайджанского языка:
**Гюней Магеррамова**

Редактор:
**Наргиз Гасымзаде**

Рецензент:
**Сеидага Гамидов,**
доктор педагогических наук, профессор

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять по адресу: info@eastwest.az



1986-cı ildən
since 1986
BAKI 2014

## Уважаемые учителя!

Учебный комплект для VII класса, состоящий из Учебника и Методического пособия для учителя, охватывает 5 содержательных линий, утверждённых в курикулуме по математике для общеобразовательных школ Азербайджанской Республики. Учебный комплект написан на основе образовательной программы (курикулума) по предмету математики, требований, предъявляемых к составлению учебников и учебных пособий, и правил, составленных в форме соответствующих инструкций по планированию учебных материалов, определению методов обучения и осуществлению подготовки учителей.

**Учебник** состоит из **5** глав.

Темы, вошедшие в **I главу,** посвящены рациональным числам и действиям над ними. Сюда входят периодические десятичные дроби и действия над ними. В этой главе даются начальные понятия геометрии, понятия аксиомы и теоремы. Объясняется построение биссектрисы угла, понятия биссектрисы, медианы и высоты треугольника и отношения между ними. Для самостоятельного понимания этих тем учащиеся, выполняя задания, данные в разделе «Деятельность» каждой темы, и обсуждая полученные результаты, могут прийти к какому-либо выводу.

Темы, вошедшие во **II главу,** посвящены степеням с натуральным показателем и действиям над ними. Являясь продолжением темы о конгруэнтных фигурах, которая изучалась по математике в VI классе, в VII классе изучаются конгруэнтные треугольники и 3 признака их конгруэнтности. В эту главу были включены формулы простого и сложного процентного роста.

Темы, вошедшие в **III главу**, посвящены многочленам и действиям над ними. Построение серединного перпендикуляра отрезка и разделение отрезка пополам, центральная симметрия – темы, относящиеся к содержательной линии геометрии в III главе. В этой главе учащиеся обучаются определению абсолютной и относительной погрешности результатов измерения.

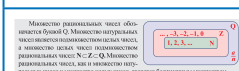
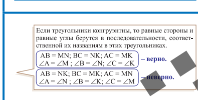
Темы, вошедшие в **IV главу**, охватывают формулы сокращённого умножения и их применение. В этой главе исследуются свойства углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, аксиомы параллельности, свойства углов с соответственно параллельными и перпендикулярными сторонами.

К темам **V главы** относятся линейная функция, её график, линейное уравнение с двумя переменными, система линейных уравнений с двумя переменными, решение задач на составление системы уравнений. В этой главе раскрывается сущность зависимости между длиной пройденного пути и временем, затраченным на прохождение этого пути, при прямолинейном равномерном движении. В конце V главы даётся отношение между сторонами и углами треугольника, признаки конгруэнтности прямоугольного треугольника, сбор информации, и здесь учащиеся знакомятся с некоторыми источниками. Здесь представлены способы презентации собранной информации и связанные с этим упражнения. Исследуются разные методы определения всех благоприятных исходов для осуществления события.

В конце каждой главы для учащихся даны задания под заголовком «Проверьте себя». Эти задания охватывают все темы главы.

**В методическом пособии для учителя** дан образец годового тематического плана по предмету математики за VII класс. Этот образец плана охватывает 34 учебные недели. В начале каждой главы указаны стандарты, которые будут реализовываться при изучении тем, включённых в эту главу. Включённые в главу темы распланированы в соответствии с этапами современного урока. В каждом уроке показано, какому стандарту соответствует тема, форма работы на уроке, методы работы, ресурсы. В некоторых уроках указаны стандарты предметов, с которыми проводится интеграция. В ходе урока постановка проблемы дана в соответствии с разделом **«Деятельность»** данной темы в учебнике. В каждом уроке был поставлен соответствующий исследовательский вопрос, с целью проведения исследования к некоторым заданиям даны руководства и способы их решения. В конце каждого урока представлены образцы, соответствующие четырём уровням оценивания. Во время планирования многих уроков учителям представлены моменты, на которые им **следует обратить внимание**, даны определённые рекомендации под названием **«Дифференциальное обучение»**, касающиеся работы, которая должна проводиться со слабыми и сильными по результатам обучения учащимися. Конечно, представленные образцы уроков не обязательны, это – определённая форма подхода. Каждый учитель самостоятелен в выборе целесообразной формы урока при условии реализации соответствующего стандарта. В методическом пособии для учителя даны образцы малого и большого суммативного оценивания. Учителя при годовом планировании могут продуктивно использовать эти образцы.

## Знакомство с учебником:

| | |
|---|---|
| Деятельность | Задание с целью проведения учащимися самостоятельной деятельности |
| Образец | Образец к теме |
|  | Объяснение темы, правила, определения |
| Упражнения | Упражнения по теме |
|  | Примечания, данные в помощь учащимся |
| Ответы | Ответы некоторых заданий |

## В конце VII класса учащийся:

- читает, записывает, сравнивает и выстраивает рациональные числа, применяет в решении задач свойства объединения и пересечения множеств;
- упрощает выражения со степенью с натуральным показателем, применяет формулы сокращённого умножения;
- применяет в решении простых задач формулы простого процентного роста и сложного процентного роста, в соответствии с бытовой ситуацией строит линейное уравнение или систему двух линейных уравнений с двумя переменными, пишет в виде неравенства двухуровневое выражение, произнесённое устно;
- выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами;
- решает линейное уравнение с одной переменной, уравнение с переменной в модуле и системы двух линейных уравнений с двумя переменными, способом подстановки определяет решение простых неравенств с переменной в модуле, выражает в виде линейной функции зависимость между величинами;
- знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически изображает, применяет теорему о сумме внутренних углов треугольника и свойство внешнего угла;
- делит отрезок пополам, строит серединный перпендикуляр отрезка, биссектрису угла и треугольник по его сторонам, строит фигуру, симметричную заданной фигуре, относительно данной точки, строит график прямой по заданному уравнению $y = kx + b$, определяет точки пересечения этой прямой с координатными осями;
- находит абсолютную и относительную погрешность результата измерения;
- представляет данные в виде диаграммы, гистограммы или графика, определяет границы изменения, проверяет и уточняет прогнозы на основе статистических данных;
- находит число элементарных событий в проводимом опыте и применяет формулу сложения вероятностей.

## Основные стандарты и подстандарты по содержательным линиям

### 1. Числа и действия

**Учащийся:**

*1.1. Применяет числа, различную форму написания чисел, отношения между ними.*

1.1.1. Читает и записывает рациональные числа.

1.1.2. Сравнивает и выстраивает рациональные числа.

1.1.3. Показывает на координатной оси точку, соответствующую рациональному числу.

1.1.4. Применяет в решении задач свойства объединения и пересечения множеств.

*1.2. Применяет математические действия, математические процедуры и их взаимосвязи.*

1.2.1. Находит значение числового выражения, придерживаясь последовательности выполнения действий (в том числе возведение в степень с натуральным показателем).

1.2.2. Применяет свойства степени с натуральным показателем.

1.2.3. Упрощает выражения, включающие степень с натуральным показателем.

1.2.4. Применяет формулы сокращённого умножения при нахождении значения числовых выражений.

1.2.5. Применяет в решении простых задач формулы простого процентного роста и сложного процентного роста.

*1.3. Проводит расчёты, проверяет достоверность полученных результатов.*

1.3.1. Проводит приблизительные расчёты в решении практических задач и проверяет достоверность полученных результатов.

## 2. Алгебра и функции

**Учащийся:**

*2.1. Выражает в алгебраической форме и исследует проблемы, возникающие при разных ситуациях.*

2.1.1. Составляет в соответствии с бытовой ситуацией линейное уравнение или систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

2.1.2. Записывает в виде неравенства двухуровневые выражения, произнесённые устно.

2.1.3. Определяет наличие/отсутствие линейной зависимости между парами координат, данных во множестве рациональных чисел.

*2.2. Выполняет алгебраические процедуры.*

2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.

2.2.2. Решает линейное уравнение с одной переменной, уравнение с переменной под знаком модуля и систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

2.2.3. Определяет способом подстановки решение простого неравенства с переменной в модуле.

*2.3. Выражает в виде функций зависимость между величинами, встречающимися в повседневной жизни.*

2.3.1. Выражает в виде линейной функции зависимость между длиной пройденного пути и временем при прямолинейном равномерном движении и зависимость между температурой по Цельсию и температурой по Фаренгейту.

## 3. Геометрия

**Учащийся:**

*3.1. Исследует признаки и свойства фигур с помощью геометрического изображения, представления и логических суждений.*

3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически их изображает.

3.1.2. Делит отрезок пополам, строит серединный перпендикуляр отрезка, биссектрису угла и треугольник по его сторонам.

3.1.3. Применяет свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

3.1.4. Применяет теорему о сумме внутренних углов треугольника и свойство внешнего угла.
3.1.5. Понимает понятия аксиомы, теоремы, прямой теоремы и обратной теоремы.

*3.2. Применяет геометрические преобразования и симметрию при проблемном решении ситуаций.*

3.2.1. Строит фигуру, симметричную заданной фигуре, относительно данной точки (Центральная симметрия).
3.2.2. Знает и применяет признаки конгруэнтности треугольника.
3.2.3. Строит график прямой, заданный уравнением $y = kx + b$, определяет точки пересечения этой прямой с координатными осями.

## 4. Измерение

**Учащийся:**

*4.1. Понимает значение единиц измерения, использует соответствующие инструменты для измерения.*

4.1.1. Переводит единицы измерения одноименной величины из одной в другую.

*4.2. Проводит вычисления, используя средства измерения и вычисления.*

4.2.1. Находит абсолютную и относительную погрешность результатов измерения.

## 5. Статистика и вероятность

**Учащийся:**

*5.1. Собирает, систематизирует статистические данные, представляет анализ и результат.*

5.1.1. Собирает данные, используя разные методы.
5.1.2. Представляет данные в виде диаграммы, гистограммы или графика.
5.1.3. Определяет границы изменения собранных числовых данных.
5.1.4. Проверяет и уточняет прогнозы на основе статистических данных.

*5.2. Понимает и применяет основные понятия теории вероятности.*

5.2.1. Находит число элементарных событий в проводимом эксперименте и на его основе вычисляет вероятность событий.
5.2.2. Определяет число благоприятных исходов для относительно сложных событий.
5.2.3. Применяет формулу суммы вероятностей.

## Образец годового планирования по предмету математики за VII класс

| № | Тема | Часы | Стандарты |
|---|---|---|---|
| | **Глава I. Рациональные числа. Элементы треугольника** | **30** | |
| 1.1. | Запись и чтение рациональных чисел | **2** | 1.1.1. |
| 1.2. | Числовая ось. Расстояние между двумя точками | **2** | 1.1.3. |
| 1.3. | Бесконечная периодическая десятичная дробь | **2** | 1.1.1. |
| 1.4. | Преобразование периодической десятичной дроби в простую дробь | **3** | 1.1.1. |
| 1.5. | Сравнение рациональных чисел | **2** | 1.1.2. |
| 1.6. | Неравенство | **2** | 2.1.2., 2.2.3. |
| 1.7. | Действия над рациональными числами | **2** | 1.2.1. |
| 1.8. | Множества | **2** | 1.1.4. |
| | Образец малого суммативного оценивания № 1 | **1** | |
| 1.9. | Аксиомы | **2** | 3.1.5. |
| 1.10. | Теорема. Прямая и обратная теоремы | **2** | 3.1.5. |
| 1.11. | Построение биссектрисы угла | **1** | 3.1.2. |
| 1.12. | Биссектрисы треугольника | **2** | 3.1.1. |
| 1.13. | Медианы треугольника | **1** | 3.1.1. |
| 1.14. | Высоты треугольника | **2** | 3.1.1. |
| | Проверьте себя | **1** | |
| | Образец малого суммативного оценивания № 2 | **1** | |
| | **Глава II. Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников** | **30+1** | |
| 2.1. | Степень с натуральным показателем | **2** | 1.2.2. |
| 2.2. | Произведение степеней с одинаковыми основаниями | **1** | 1.2.2. |
| 2.3. | Деление степеней с одинаковыми основаниями | **2** | 1.2.2. |
| 2.4. | Возведение степени в степень | **2** | 1.2.2. |
| 2.5. | Возведение произведения в степень | **1** | 1.2.2. |
| 2.6. | Одночлен и его стандартный вид | **2** | 1.2.2. |
| 2.7. | Возведение частного в степень | **1** | 1.2.2. |
| 2.8. | Выражения со степенью с натуральным показателем | **2** | 1.2.1., 1.2.3. |
| 2.9. | Формула простого процентного роста | **2** | 1.2.5. |
| 2.10. | Формула сложного процентного роста | **2** | 1.2.5. |
| | Образец малого суммативного оценивания № 3 | **1** | |
| 2.11. | Конгруэнтные треугольники | **1** | 3.2.2. |
| 2.12. | Первый признак конгруэнтности треугольников | **2** | 3.2.2. |
| 2.13. | Второй признак конгруэнтности треугольников | **2** | 3.2.2., 4.1.1. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.14. | Свойства равнобедренных треугольников | **2** | 3.1.1. |
| 2.15. | Построение треугольника по трём сторонам | **1** | 3.1.2. |
| 2.16. | Третий признак конгруэнтности треугольников | **2** | 3.2.2. |
| | Проверьте себя | **1** | |
| | Образец малого суммативного оценивания № 4 | **1** | |
| | Образец большого суммативного оценивания № 1 | **1** | |
| | **Глава III. Многочлен. Серединный перпендикуляр** | **23** | |
| 3.1. | Многочлен и его стандартный вид | **1** | 2.2.1. |
| 3.2. | Сложение многочленов | **1** | 2.2.1. |
| 3.3. | Вычитание многочленов | **2** | 2.2.1. |
| 3.4. | Умножение одночлена на многочлен | **1** | 2.2.1. |
| 3.5. | Умножение многочлена на многочлен | **2** | 2.2.1. |
| 3.6. | Разложение многочлена на множители | **1** | 2.2.1. |
| 3.7. | Деление отрезка пополам | **2** | 3.1.2. |
| 3.8. | Серединный перпендикуляр отрезка | **1** | 3.1.2. |
| 3.9. | Перпендикуляр и наклонные | **1** | 3.1.2. |
| 3.10. | Центральная симметрия | **2** | 3.2.1. |
| 3.11. | Тождество. Тождественные преобразования | **1** | 2.2.1. |
| 3.12. | Линейное уравнение с одной переменной | **2** | 2.2.2. |
| 3.13. | Абсолютная погрешность | **2** | 4.2.1., 1.3.1. |
| 3.14. | Относительная погрешность | **2** | 4.2.1., 1.3.1. |
| | Проверьте себя | **1** | |
| | Образец малого суммативного оценивания № 5 | **1** | |
| | **Глава IV. Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности** | **30** | |
| 4.1. | Квадрат суммы и разности двух выражений | **3** | 1.2.4. |
| 4.2. | Разложение на множители с использованием формул квадрата суммы и квадрата разности двух выражений | **2** | 1.2.4. |
| 4.3. | Разность квадратов двух выражений | **3** | 1.2.4. |
| 4.4. | Куб суммы и куб разности двух выражений | **3** | 1.2.4. |
| 4.5. | Разложение на множители суммы кубов двух выражений | **3** | 1.2.4. |
| 4.6. | Разложение на множители разности кубов двух выражений | **2** | 1.2.4. |
| 4.7. | Преобразование выражений | **3** | 1.2.4. |
| | Образец малого суммативного оценивания № 6 | **1** | |
| 4.8. | Углы, образующиеся при пересечении двух прямых третьей | **1** | 3.1.3. |
| 4.9. | Признаки параллельности прямых | **2** | 3.1.3. |
| 4.10. | Аксиома параллельности. Свойства параллельных прямых | **2** | 3.1.3. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.11. | Углы с соответственно параллельными сторонами | **2** | 3.1.3. |
| 4.12. | Углы с соответственно перпендикулярными сторонами | **1** | 3.1.3. |
| | Проверьте себя | **1** | |
| | Образец малого суммативного оценивания № 7 | **1** | |
| | **Глава V. Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность** | **44** | |
| 5.1. | Способы представления функции | **1** | 2.1.3., 5.1.2. |
| 5.2. | Линейная функция и её график | **2** | 2.1.3., 3.2.3. |
| 5.3. | График прямо пропорциональной зависимости | **1** | 2.1.3., 3.2.3. |
| 5.4. | Взаимное расположение графиков линейных функций | **1** | 2.1.3., 3.2.3. |
| 5.5. | Расстояние, время, скорость | **1** | 2.3.1. |
| 5.6. | Измерение температуры | **1** | 2.3.1., 4.1.1. |
| 5.7. | Линейное уравнение с двумя переменными и его график | **2** | 2.1.1., 3.2.3. |
| 5.8. | Система линейных уравнений с двумя переменными и её решение графическим способом | **3** | 2.1.1. |
| 5.9. | Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки | **3** | 2.1.1. |
| 5.10. | Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения | **3** | 2.1.1. |
| 5.11. | Решение задач построением системы линейных уравнений с двумя переменными | **3** | 2.1.1. |
| | Образец малого суммативного оценивания № 8 | **1** | |
| 5.12. | Сумма внутренних углов треугольника | **2** | 3.1.4. |
| 5.13. | Прямоугольный треугольник | **2** | 3.2.2., 3.1.1. |
| 5.14. | Внешний уголнего свойство треугольника | **2** | 3.1.4. |
| 5.15. | Отношения между сторонами и углами треугольника | **1** | 3.1.1. |
| 5.16. | Неравенство треугольника | **2** | 3.1.1. |
| 5.17. | Методы сбора информации | **2** | 5.1.1. |
| 5.18. | Презентация информации. Диаграмма, гистограмма, график | **2** | 5.1.2., 5.1.3. |
| 5.19. | Прогнозирование | **1** | 5.1.4. |
| 5.20. | Число благоприятных исходов для относительно сложных событий | **3** | 5.2.2. |
| 5.21. | Вероятность события | **2** | 5.2.1. |
| 5.22. | Сумма вероятностей | **1** | 5.2.3. |
| | Проверьте себя | **1** | |
| | Образец малого суммативного оценивания № 9 | **1** | |
| | **Повтор** | **11** | |
| | **Образец большого суммативного оценивания № 2** | **1** | |

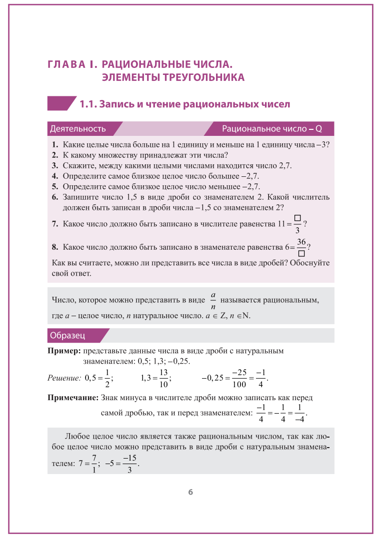
## ГЛАВА I

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

| Стандарт | Учебная единица | Тема | Часы |
|---|---|---|---|
| 1.1.1. | **Глава I . Рациональные числа. Элементы треугольника** | **Урок 1.1.** Запись и чтение рациональных чисел | **2** |
| 1.1.3. | | **Урок 1.2.** Числовая ось. Расстояние между двумя точками | **2** |
| 1.1.1. | | **Урок 1.3.** Бесконечная периодическая десятичная дробь | **2** |
| 1.1.1. | | **Урок 1.4.** Преобразование периодической десятичной дроби в простую дробь | **3** |
| 1.1.2. | | **Урок 1.5.** Сравнение рациональных чисел | **2** |
| 2.1.2., 2.2.3. | | **Урок 1.6.** Неравенство | **2** |
| 1.2.1. | | **Урок 1.7.** Действия над рациональными числами | **2** |
| 1.1.4. | | **Урок 1.8.** Множества | **2** |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 1 | **1** |
| 3.1.5. | | **Урок 1.9.** Аксиомы | **2** |
| 3.1.5. | | **Урок 1.10.** Теорема. Прямая и обратная теоремы | **2** |
| 3.1.2. | | **Урок 1.11.** Построение биссектрисы угла | **1** |
| 3.1.1. | | **Урок 1.12.** Биссектрисы треугольника | **2** |
| 3.1.1. | | **Урок 1.13.** Медианы треугольника | **1** |
| 3.1.1. | | **Урок 1.14.** Высоты треугольника | **2** |
| | | Проверьте себя | **1** |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 2 | **1** |

# Урок 1.1. Запись и чтение рациональных чисел

**Стандарт:** 1.1.1. Читает и записывает рациональные числа.
**Результат обучения:** Читает и записывает рациональные числа.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ



ГЛАВА I. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

1.1. Запись и чтение рациональных чисел

Деятельность | Рациональное число – Q

1. Какие целые числа больше на 1 единицу и меньше на 1 единицу числа –3?
2. К какому множеству принадлежат эти числа?
3. Скажите, между какими целыми числами находится число 2,7.
4. Определите самое близкое целое число большее –2,7.
5. Определите самое близкое целое число меньшее –2,7.
6. Запишите число 1,5 в виде дроби со знаменателем 2. Какой числитель должен быть записан в дроби числа –1,5 со знаменателем 2?
7. Какое число должно быть записано в числителе равенства $11=\frac{\square}{3}$?
8. Какое число должно быть записано в знаменателе равенства $6=\frac{36}{\square}$?

Как вы считаете, можно ли представить все числа в виде дробей? Обоснуйте свой ответ.

Число, которое можно представить в виде $\frac{a}{n}$ называется рациональным, где $a$ – целое число, $n$ натуральное число. $a \in Z$, $n \in N$.

Образец

**Пример:** представьте данные числа в виде дроби с натуральным знаменателем: 0,5; 1,3; –0,25.

*Решение:* $0,5=\frac{1}{2}$; $1,3=\frac{13}{10}$; $-0,25=\frac{-25}{100}=\frac{-1}{4}$.

**Примечание:** Знак минуса в числителе дроби можно записать как перед самой дробью, так и перед знаменателем: $\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}=\frac{1}{-4}$.

Любое целое число является также рациональным числом, так как любое целое число можно представить в виде дроби с натуральным знаменателем: $7=\frac{7}{1}$; $-5=\frac{-15}{3}$.

6

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Деятельность, данная в учебнике, выполняется учащимися коллективно или самостоятельно. В это время условие деятельности может быть спроецировано на экран посредством компьютера. Натуральные, целые, дробные числа учащиеся знают из курса математики за V-VI классы. Выполняя деятельность, они вспоминают множества натуральных, целых чисел, показывают эти числа в виде дроби, и отсюда выводится определение рациональных чисел.

Учитель представляет учащимся схему, отражающую множества натуральных, целых и рациональных чисел, и, задавая вопросы, объясняет им эту схему. К сведению учащихся доводится обозначение множества рациональных чисел знаком Q.

**Исследовательский вопрос:** Как записываются и читаются рациональные числа?

Для проведения исследования учащиеся делятся на группы. Задания № 1-7 выполняются в течение первого урока, задания № 8-12 – в течение второго урока. Учащимися объясняется, к какому множеству относятся результаты, полученные при выполнении данных заданий, и тем самым, во время выполнения заданий осуществляется цель урока, т.е. ответ на исследовательский вопрос.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 7.** Во время решения задания над рациональными числами выполняются действия сложения, вычитания, умножения и деления. С этими действиями учащиеся знакомы из курса математики за VI класс. Самым удобным способом при вычислении является вынесение общего множителя за скобки.

а) $\dfrac{0,15-0,15\cdot 6,4}{-\frac{3}{8}+0,175}=\dfrac{0,15\cdot(1-6,4)}{-0,375+0,175}=\dfrac{0,15\cdot(-5,4)}{-0,2}=\dfrac{-0,81}{-0,2}=\dfrac{8,1}{2}=4,05;\quad 4,05\in Q;$

б) $\dfrac{0,45-0,45\cdot 3,4}{1\frac{1}{2}-1,1}=\dfrac{0,45(1-3,4)}{1,5-11}=\dfrac{0,45(-2,4)}{0,4}=\dfrac{-1,08}{0,4}=\dfrac{-10,8}{4}=-2,7;\quad -2,7\in Q;$

в) $\dfrac{0,47\cdot 3,5-3,5}{\dfrac{1}{8}-1,125}=\dfrac{3,5(0,47-1)}{0,125-1,125}=\dfrac{3,5(-0,53)}{-1}=1,855\in Q$

Учащиеся должны объяснить, к какому числовому множеству относятся полученные ответы. Объясняется, что эти числа являются рациональными, и, записав их в виде дроби, учащиеся отмечают, что они соответствуют определению рациональных чисел.

$$1,855=1\frac{855}{1000}=1\frac{171}{200}=\frac{371}{200}.$$

**Ответ:** а) 4,05; б) –2,7; в) 1,855.

**Упражнение №9.** б) если $x$ = 5,3; $y$ = 0,7, то для вычисления значения выражения $\dfrac{x^2+1,37}{3,1y-0,17}$ вместо переменных в выражении записываем данные значения:

$$\frac{x^2+1,37}{3,1y-0,17}=\frac{5,3^2+1,37}{3,1\cdot 0,7-0,17}=\frac{28,09+1,37}{2,17-0,17}=\frac{29,46}{2}=14,73.$$

**Ответ:** б) 14, 73.

**Упражнение №10.** При выполнении этого задания учащиеся могут работать в группах. Они самостоятельно строят выражения с переменной и вычисляют значение выражения с разными значениями переменной. Оценивается работа групп и вниманию представляются наиболее полные выражения.

**Упражнение №11.** При выполнении задания примеры на каждой строчке можно поручить одной из групп. Представленные группами результаты обсуждаются.

**Упражнение №12.** Это упражнение можно задать в качестве домашнего задания. При выполнении задания вначале составляется таблица. Данные числа последовательно записываются в I-ой строчке и I-ом столбце этой таблицы.

| **x** | $-\frac{7}{12}$ | 0,25 | 2 | $3\frac{5}{11}$ | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{11}{7}$ | $-\frac{11}{12}$ | $\frac{11}{28}$ | $3\frac{1}{7}$ | $5\frac{3}{7}$ | 1,1 |
| $-3\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{24}$ | $-\frac{7}{8}$ | –7 | $-12\frac{1}{11}$ | $-2\frac{9}{20}$ |
| 0,2 | $-\frac{7}{60}$ | 0,05 | 0,4 | $\frac{38}{55}$ | 0,14 |
| –3 | 1,75 | –0,75 | –6 | $-10\frac{4}{11}$ | –2,1 |
| $-\frac{5}{9}$ | $\frac{35}{108}$ | $-\frac{5}{36}$ | $-1\frac{1}{9}$ | $-1\frac{91}{99}$ | $-\frac{7}{18}$ |

Выслушивается мнение учащихся о том, к какому множеству относятся числа, полученные в ответе. В зависимости от уровня класса учитель может попросить учащихся составить такую же таблицу для вычитания и деления.

**Дифференциальное обучение:** Слабые по результатам обучения учащиеся отношение между разным написанием чисел (в виде десятичной дроби, простой дроби) воспринимают с трудом. Поэтому учитель с целью выполнения большего количества заданий на преобразования может составить для таких учащихся дополнительные рабочие листы.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учитель должен стараться, чтобы учащийся во избежание ошибок при преобразовании одного написания рационального числа в другое делал преобразования каждый раз.

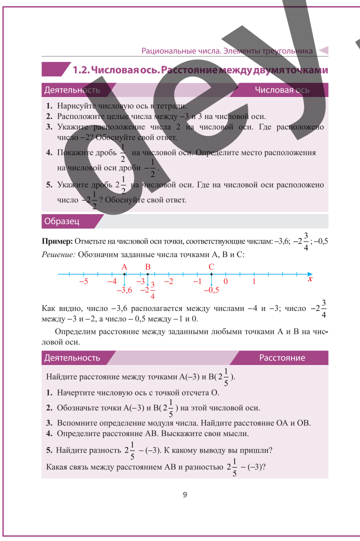
**Обобщение и результат:** Обобщаются знания о записи и чтении рациональных чисел, учитель ещё раз обращает внимание на основные моменты. Снова повторяется преобразование чисел в разных записях в виде дроби.

**Оценивание**

● Запись и чтение рациональных чисел

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в распознавании рациональных чисел;<br>Не осознаёт понятие рациональное число;<br>Делает ошибки в записи рациональных чисел;<br>Не осознаёт, что целые и натуральные числа также являются рациональными числами, и др. |
| Уровень II | Записывает рациональные числа, но не умеет читать, или читает, но не умеет записать;<br>Нуждается в помощи учителя при преобразовании одного написания рациональных чисел в другое или при их чтении. |
| Уровень III | Записывает и читает рациональные числа в разных видах. |
| Уровень IV | Преобразует рациональные числа из одной записи в другую удобными способами, проводит вычисления над рациональными числами. |

## Урок 1.2. Числовая ось. Расстояние между двумя точками


Рациональные числа. Элементы треугольника

1.2. Числовая ось. Расстояние между двумя точками

Деятельность — Числовая ось

1. Нарисуйте числовую ось в тетради.
2. Расположите целые числа между –3 и 3 на числовой оси.
3. Укажите расположение числа 2 на числовой оси. Где расположено число –2? Обоснуйте свой ответ.
4. Покажите дробь $\frac{1}{2}$ на числовой оси. Определите место расположения на числовой оси дроби $-\frac{1}{2}$.
5. Укажите дробь $2\frac{1}{2}$ на числовой оси. Где на числовой оси расположено число $-2\frac{1}{2}$? Обоснуйте свой ответ.

Образец

**Пример:** Отметьте на числовой оси точки, соответствующие числам: –3,6; $-2\frac{3}{4}$; –0,5

*Решение:* Обозначим заданные числа точками A, B и C:



Как видно, число –3,6 располагается между числами –4 и –3; число $-2\frac{3}{4}$ между –3 и –2, а число – 0,5 между –1 и 0.

Определим расстояние между заданными любыми точками A и B на числовой оси.

Деятельность — Расстояние

Найдите расстояние между точками A(–3) и B($2\frac{1}{5}$).

1. Начертите числовую ось с точкой отсчета O.
2. Обозначьте точки A(–3) и B($2\frac{1}{5}$) на этой числовой оси.
3. Вспомните определение модуля числа. Найдите расстояние OA и OB.
4. Определите расстояние AB. Выскажите свои мысли.
5. Найдите разность $2\frac{1}{5}-(-3)$. К какому выводу вы пришли?

Какая связь между расстоянием AB и разностью $2\frac{1}{5}-(-3)$?

9

**Стандарт:** 1.1.3. Показывает на координатной оси точку, соответствующую рациональному числу.

**Результат обучения:** Показывает на числовой оси точку, соответствующую рациональному числу, и находит координаты данных точек, расстояние между двумя точками.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Для объяснения темы в учебнике представлены две деятельности. В первой деятельности требуется отметить на числовой оси рациональные числа, данные в разных записях. Учащийся, осуществляющий эту деятельность, вспоминает всё, что знает о расположении чисел на числовой оси. Определяя точку, соответствующую числу $-2\frac{1}{2}$, называет целые числа, между которыми это число располагается.

При этом учитель может помочь учащимся, указав им определённое направление. Затем учитель объясняет учащимся задание (или похожее на него задание), данное в образце.

Во второй деятельности же расстояние между двумя точками, изображёнными на числовой оси, находится сложением (или вычитанием) длины отрезков. Затем от координат точки, расположенной справа, вычитаются координаты точки, расположенной слева (или находится разница между большей и меньшей координатами). Выслушивается мнение учащихся о полученных результатах.

**Исследовательский вопрос:** Как отмечаются рациональные числа на числовой оси? Как можно определить расстояние между двумя точками, не изображая их на числовой оси?

Проводится исследование. Данные в учебнике задания выполняются в течение 2 урочных часов. Задания могут выполняться в группах или парах. Задания, записанные в рабочих листах, должны быть нацелены на:

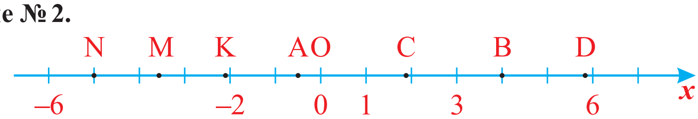
а) обозначение на числовой оси точки с заданными координатами;

б) определение координат точки, заданной на числовой оси;

в) нахождение расстояния между двумя точками посредством числовой оси и нахождение этих точек без их изображения на числовой оси.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.**




Приблизительно определяются координаты точек, отмеченных на рисунке:
N(–5), M(–3,5), K(–2,1), A(–0,5), C(1,9), B(4), D(5,7).
Учащиеся дополнительно отмечают несколько точек и определяют их координаты.

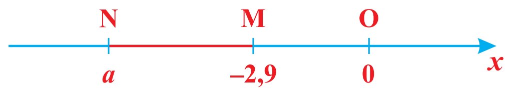
**Упражнение № 3.** В этом задании ничего не говорится о том, какими способами можно найти расстояние между двумя точками. По этой причине учащиеся, определяя расстояние между данными точками, первоначально отмечают эти точки на числовой оси, затем из большей координаты вычитают меньшую. Координаты точек схематично отмечаются на числовой оси.

в)


Согласно рисунку: AB = OB – OA = 22,7 – 10,5 = 12,2.
Не изображая на числовой оси, определяем точку с большей координатой.
22,7 > 10,5. Следовательно, AB = 22,7 – 10,5 = 12,2. **Ответ**: 12,2.

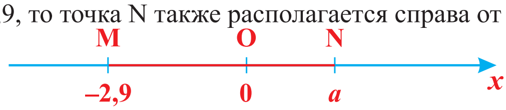
**Упражнение № 4.** а) По условию известно, что MN = 3,54 и M(–2,9). Но ничего не говорится о расположении точек M и N на числовой оси (какая из них находится справа или слева по отношению к другой). Поэтому, выполняя задание, рассматриваются два случая:

**I случай:** На числовой оси точка M располагается справа от точки N. В этом случае точки на числовой оси изображаются нижеследующим образом:




Координаты N обозначаются буквой a: N(a). При вычитании от координаты правой точки (M) на числовой оси координаты левой точки (N) получится:
$-2{,}9 - a = 3{,}54$. Отсюда $a = -2{,}9 - 3{,}54 = -6{,}44$.

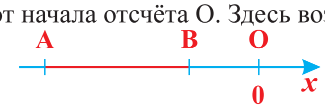
**II случай:** На числовой оси точка N располагается справа от точки M. Поскольку в этом случае 3,54 > 2,9, то точка N также располагается справа от начала отсчёта O:

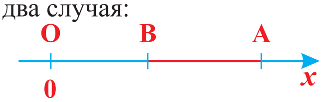



При вычитании от координаты правой точки (N) на числовой оси координаты левой точки (M) получится 3,54:
$a - (-2{,}9) = 3{,}54$ или $a + 2{,}9 = 3{,}54$. Отсюда $a = 3{,}54 - 2{,}9 = 0{,}64$.

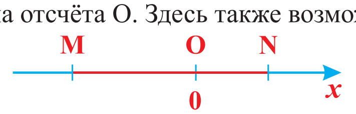
**Ответ**: N(–6,44) или N(0,64).

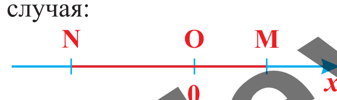
**Упражнение № 8.** а) Поскольку AB = OA – OB, то точки A и B располагаются с одной стороны от начала отсчёта O. Здесь возможны два случая:




б) Если MN = OM + ON, то точки M и N должны располагаться по разные стороны от начала отсчёта O. Здесь также возможны два случая:




**Упражнение № 9.** OA = 14 см, так как OB = 3,5 см и OA = 4 · OB. Поскольку расстояние от начала отсчёта до точки B составляет 3,5 см, то координатами точки B будет 3,5 или – 3,5.

**I случай**: B (3,5) и A(14). Точки A и B располагаются по одну сторону от начала отсчёта: AB = 14 – 3,5 = 10,5 см.

**II случай**: B(3,5) и A(–14). Точки A и B располагаются по разные стороны от начала отсчёта: AB = 3,5 – (–14) = 17,5 см.

**III случай**: B(–3,5) и A(14). Точки A и B располагаются по разные стороны от начала отсчёта: AB = 14 – (–3,5) = 17,5 см.

**IV случай**: B(–3,5) и A(–14). Точки A и B располагаются по одну сторону от начала отсчёта: AB = –3,5 – (–14) = 10,5 см.

**Ответ**: A(14) или A(–14); B(–3,5) или B(3,5); 10,5 см или 17,5 см.

**Упражнение № 13.** В пустые клетки следует записать такие числа, чтобы произведение чисел, расположенных вертикально, горизонтально и по диагонали, было равно 216. Для этого сперва определяется число второй клетки I столбца:
216 : (–3 · (–2)) = 36 и пр.

| | | | |
|---|---|---|---|
| –2 | 9 | –12 | → 216 |
| 36 | –6 | –1 | → 216 |
| –3 | –4 | 18 | → 216 |
| ↓ 216 | ↓ 216 | ↓ 216 | ↘ 216 |

**Дифференциальное обучение**: Учащиеся, показавшие слабые результаты в процессе обучения, испытывают трудности в изображении рациональных чисел на числовой оси. Поскольку ошибки допускаются более всего при обозначении на числовой оси отрицательных чисел, то учащимся, показавшим слабые результаты в процессе обучения, должно задаваться больше заданий такого типа.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** До внимания учащихся доводится, что точки с координатами из многозначных чисел представляются на числовой оси схематично.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз обращая внимание учащихся на способы обозначения на числовой оси рациональных чисел и нахождение расстояния между двумя точками, обобщает пройденное.

**Оценивание**

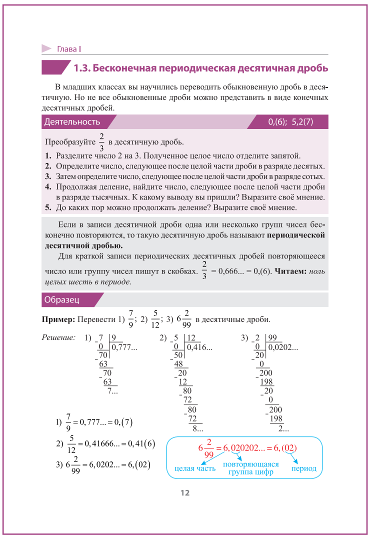
● Изображение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в указании рациональных чисел на числовой оси;<br>При обозначении рациональных чисел на числовой оси не прослеживает их последовательность;<br>При обозначении рациональных чисел на числовой оси путает местами положительные и отрицательные числа. |
| Уровень II | Определяет координаты точек на числовой оси, однако затрудняется в указании на числовой оси точки с координатой, выраженной рациональным числом, нуждается в определённых указаниях при нахождении расстояния между двумя точками. |
| Уровень III | Отмечает на числовой оси точки с заданными координатами и определяет координаты точек. Находит расстояние между двумя точками. |
| Уровень IV | Самостоятельно отмечает на числовой оси точки, соответствующие рациональным числам, самостоятельно и с объяснениями выполняет задания на нахождение расстояния между точками. |

## Урок 1.3. Бесконечная периодическая десятичная дробь

**Стандарт:** 1.1.1. Читает и записывает рациональные числа.
**Результат обучения:** Читает и пишет периодические десятичные дроби.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** ЗХУ, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ
**Интеграция:** География 1.3.2., Азербайджанский язык 1.2.1.


▶ Глава I

**1.3. Бесконечная периодическая десятичная дробь**

В младших классах вы научились переводить обыкновенную дробь в десятичную. Но не все обыкновенные дроби можно представить в виде конечных десятичных дробей.

Деятельность — 0,(6); 5,2(7)

Преобразуйте $\frac{2}{3}$ в десятичную дробь.

1. Разделите число 2 на 3. Полученное целое число отделите запятой.
2. Определите число, следующее после целой части дроби в разряде десятых.
3. Затем определите число, следующее после целой части дроби в разряде сотых.
4. Продолжая деление, найдите число, следующее после целой части дроби в разряде тысячных. К какому выводу вы пришли? Выразите своё мнение.
5. До каких пор можно продолжать деление? Выразите своё мнение.

Если в записи десятичной дроби одна или несколько групп чисел бесконечно повторяются, то такую десятичную дробь называют **периодической десятичной дробью.**

Для краткой записи периодических десятичных дробей повторяющееся число или группу чисел пишут в скобках. $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6)$. **Читаем:** *ноль целых шесть в периоде.*

Образец

**Пример:** Перевести 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $6\frac{2}{99}$ в десятичные дроби.

*Решение:* 1) 7 : 9 = 0,777... 2) 5 : 12 = 0,416... 3) 2 : 99 = 0,0202...

1) $\frac{7}{9} = 0,777... = 0,(7)$

2) $\frac{5}{12} = 0,41666... = 0,41(6)$

3) $6\frac{2}{99} = 6,0202... = 6,(02)$

$6\frac{2}{99} = 6,020202... = 6,(02)$



12

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: Учитель представляет учащимся таблицу ЗХУ с надписью «Дроби» (или проецирует её на экран) и обращается к ним с таким вопросом: В какой форме записываются дробные числа?

| Знаю | Хочу знать | Узнал |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

Учащиеся в первом столбце таблицы записывают всё, что знают о записи разных видов дробей: простой дроби, правильной дроби, неправильной дроби, смешанном числе, десятичной дроби и т.д. Затем во втором столбце учащиеся записывают то, что они хотели бы узнать о дробях. Естественно, что здесь учащимися могут быть записаны разные предложения. Учитель должен постараться, чтобы внимание учащихся было направлено на получение повторения чисел или группы чисел в частном при делении числителя на знаменатель во время преобразования простой дроби в десятичную дробь.

**Исследовательский вопрос**: Как записываются и читаются дроби, в которых при делении числителя на знаменатель частное бесконечно продолжается?

Для проведения исследования учитель раздаёт учащимся рабочие листы. В рабочие листы записываются задания, данные в учебнике, или примеры, представленные учителем. Задания выполняются и представляются группами.

Периодические десятичные дроби бывают двух видов: 1) **чистые периодические десятичные** дроби; 2) **смешанные периодические десятичные** дроби.

**Чистой периодической десятичной дробью** называется десятичная дробь, в написании которой сразу после запятой следует период. Например: 2,(5); 0,(37); 12,(524) и т.д.

**Смешанной периодической десятичной дробью** называется десятичная дробь, в написании которой после запятой через одну или несколько цифр начинается период. Например: 8,7(5); 0,02(63); 4,0(172) и т.д.

3,25(7) – **читаем:** *три целых двадцать пять сотых семь в периоде.*

Если при разложении знаменателя несокращающейся дроби на простые множители, кроме 2 и 5, появляются другие простые множители, то такие дроби при преобразовании в десятичную дробь становятся периодическими десятичными дробями.

**Конечные десятичные дроби:** $\frac{5}{16} = 0,3125$; $\frac{72}{25} = 2,88$; $\frac{19}{50} = 0,38$; $\frac{13}{20} = 0,65$.

**Периодические десятичные дроби:** $\frac{1}{6} = 0,1(6)$; $\frac{5}{12} = 0,41(6)$; $\frac{9}{26} = 0,3(461538)$.

**Объяснение учителя**: Учитель сообщает учащимся о периодических десятичных дробях и их видах. Вниманию учащихся доводится запись и чтение периодических десятичных дробей.

В течение первого и второго урока выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 9.** Данные на рисунке высоты составляют $\frac{2}{15}, \frac{17}{600}, \frac{1}{60}, \frac{4}{375}, \frac{1}{250}$ часть 3000 км.

а) Высота, на которую может подняться воздушный шар: 3000 км $\cdot \frac{1}{60} = 50$ км.

б) Высота расположения звёзд: 3000 км $\cdot \frac{17}{600} = 85$ км.

Высота, на которой происходят метеорологические явления: 3000 км $\cdot \frac{4}{375} = 32$ км.

Высота расположения звёзд больше высоты, на которой происходят метеорологические явления на 85 – 12 = 73 (км).

в) высота 275 км находится между высотой расположения звёзд и высотой появления северного сияния.

Высота $\frac{1000}{70} = 14\frac{2}{7} = 14,(285714)$ (км) высота, на которой происходят метеорологические явления.

Высота $\frac{502}{9} = 55\frac{7}{9} = 55,(7)$ (км) находится между высотой, на которую может подняться воздушный шар, и высотой, на которую поднимается пассажирский самолёт.

г) Высота полёта пассажирского самолёта: 3000 км $\cdot \frac{4}{375} = 32$ (км), высота полёта воздушного шара: 3000 км $\cdot \frac{1}{60} = 50$ (км). Следовательно, высота полёта пассажирского самолёта ниже высоты полёта воздушного шара на 50 – 32 = 18 (км).

**Дифференциальное обучение:** Учащиеся, показавшие слабый результат в процессе обучения, затрудняются в указании периодической части в записи периодической десятичной дроби и преобразовании простой дроби в периодическую десятичную дробь. По этой причине таким учащимся учитель дополнительно может задать выполнение заданий по типу упражнений № 1–4. Учащимся, показавшим хороший результат в процессе обучения, можно дать задания на преобразование более сложных дробей в периодические десятичные дроби.

**Обобщение и результат:** Учитель поручает учащимся, заполнив таблицу ЗХУ, записать в третьем столбце таблицы те знания, которые они получили на уроке. Обобщает изученное о записи и чтении периодических десятичных дробей.

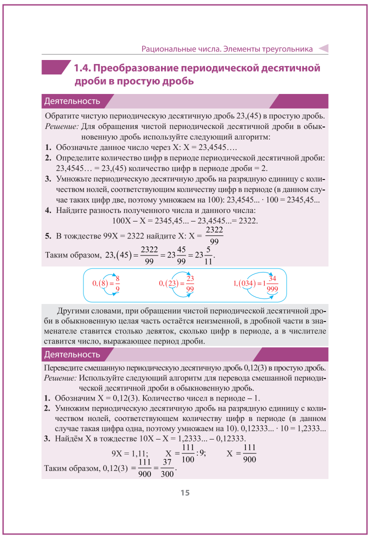
**Оценивание**

● Чтение и запись

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Читает и записывает периодические десятичные дроби, затрудняется в преобразовании простой дроби в периодическую десятичную дробь;<br>Затрудняется в указании на числа, входящие или не входящие в период, в периодических десятичных дробях;<br>Знает правила преобразования простой дроби в периодическую десятичную дробь, но применить не может. |
| Уровень II | Преобразует простую дробь в конечную и периодическую десятичную дробь после указания определённого направления;<br>Преобразует простую дробь в десятичную дробь, но затрудняется в определении её вида (конечная десятичная дробь, чистая или смешанная периодическая десятичная дробь). |
| Уровень III | Самостоятельно преобразует простую дробь в конечную и периодическую десятичную дробь. |
| Уровень IV | Правильно предполагает преобразование простой дроби в конечную или периодическую десятичную дробь и самостоятельно преобразует её;<br>Проявляет творческий подход при преобразовании простой дроби в конечную или периодическую десятичную дробь. |

# Урок 1.4. Преобразование периодической десятичной дроби в простую дробь

**Стандарт:** 1.1.1. Читает и записывает рациональные числа.
**Результат обучения:** Преобразует периодическую десятичную дробь в простую дробь.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** ЗХУ, мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ


Рациональные числа. Элементы треугольника

1.4. Преобразование периодической десятичной дроби в простую дробь

Деятельность

Обратите чистую периодическую десятичную дробь 23,(45) в простую дробь.
*Решение:* Для обращения чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь используйте следующий алгоритм:
1. Обозначьте данное число через X: X = 23,4545….
2. Определите количество цифр в периоде периодической десятичной дроби: 23,4545… = 23,(45) количество цифр в периоде дроби = 2.
3. Умножьте периодическую десятичную дробь на разрядную единицу с количеством нолей, соответствующим количеству цифр в периоде (в данном случае таких цифр две, поэтому умножаем на 100): 23,4545... · 100 = 2345,45...
4. Найдите разность полученного числа и данного числа: $100X - X = 2345,45... - 23,4545... = 2322$.
5. В тождестве 99X = 2322 найдите X: $X = \frac{2322}{99}$

Таким образом, $23,(45) = \frac{2322}{99} = 23\frac{45}{99} = 23\frac{5}{11}$.

$0,(8) = \frac{8}{9}$ $0,(23) = \frac{23}{99}$ $1,(034) = 1\frac{34}{999}$

Другими словами, при обращении чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную целая часть остаётся неизменной, в дробной части в знаменателе ставится столько девяток, сколько цифр в периоде, а в числителе ставится число, выражающее период дроби.

Деятельность

Переведите смешанную периодическую десятичную дробь 0,12(3) в простую дробь.
*Решение:* Используйте следующий алгоритм для перевода смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.
1. Обозначим X = 0,12(3). Количество чисел в периоде – 1.
2. Умножим периодическую десятичную дробь на разрядную единицу с количеством нолей, соответствующем количеству цифр в периоде (в данном случае такая цифра одна, поэтому умножаем на 10). 0,12333... · 10 = 1,2333...
3. Найдём X в тождестве 10X – X = 1,2333... – 0,12333.

$9X = 1,11;$ $X = \frac{111}{100} : 9;$ $X = \frac{111}{900}$

Таким образом, $0,12(3) = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$.

15

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы**: Учитель опять представляет учащимся таблицу ЗХУ, которую использовал на предыдущем занятии (или проецирует на экран), и вновь задаёт им вопрос о том, что бы они хотели знать о дробях. Учащиеся, желающие узнать правила преобразования периодической десятичной дроби в простую дробь, записывают это во второй столбец.

**Исследовательский вопрос**: Как можно преобразовать периодическую десятичную дробь в простую дробь?

Для проведения исследования учащиеся в группах применяют способ, данный в деятельности. В первой деятельности они выполняют алгоритм преобразования чистой периодической десятичной дроби 23,(45) в простую, во второй деятельности – смешанной периодической десятичной дроби 0,12(3) в простую. Результаты представляются на доске и объясняются. Выслушивается мнение учащихся о выполнении этого алгоритма. Затем учитель переходит к объяснению новой темы.

**Объяснение учителя**: Учитель объясняет правила преобразования простых и смешанных периодических десятичных дробей в простую дробь.

В качестве продолжения исследования учащиеся выполняют упражнения, данные в учебнике.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 3.** При выполнении упражнения можно использовать способ, данный в деятельности, или применить правило (краткий способ) преобразования периодической десятичной дроби в простую дробь.

а) Используя ниже представленный способ, преобразуем число 0,(2) в простую дробь:

X = 0,(2)
$10X = 10 \cdot 0,(2) = 2,(2) = 2 + 0,(2)$
$10X - X = 2$
$9X = 2$ $X = \frac{2}{9}$ $0,(2) = \frac{2}{9}$

Краткий способ: $1,(3) = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3}$; $3,(54) = 3\frac{54}{99} = 3\frac{6}{11}$; $21,(23) = 21\frac{23}{99}$; $0,(673) = \frac{673}{999}$;

$$7,(256)=7\frac{256}{999};\ 16,(002)=16\frac{2}{999};\ 0,(0001)=\frac{1}{9999};\ 5,(01)=5\frac{1}{99}.$$

б) согласно правилу, преобразуем число 0,1(3) в простую дробь:

X = 0,1(3)

10X = 10 · 0,1(3) = 1,(3)

10X − X = 1,(3) – 0,1(3) = 1,333... – 0,1333...

9X = 1,2

$X=\frac{1,2}{9}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$ və ya $0,1(3)=\frac{13-1}{90}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$.

Краткий способ: $1,2(5)=1\frac{25-2}{90}=1\frac{23}{90}$; $7,0(4)=7\frac{4}{90}=7\frac{2}{45}$;

$$2,23(7)=2\frac{237-23}{900}=2\frac{214}{900}=2\frac{107}{450}.$$

На основе алгоритма преобразуем число 10,1(45) в простую дробь:

X = 10,1(45) = 10,1454545...

100X – X = 100 · 10,1454545... – 10,1454545...

99X = 1014,54545... – 10,1454545...

99X = 1004,4

$X=\frac{1004,4}{99}=\frac{10044}{990}=10\frac{144}{990}=10\frac{8}{55}$. Поэтому, $10,1(45)=10\frac{144}{990}=10\frac{8}{55}$.

Согласно правилу: $0,25(83)=\frac{2583-25}{9900}=\frac{2558}{9900}=\frac{1279}{4950}$;

$$16,5(02)=16\frac{502-5}{990}=16\frac{497}{990};\quad 0,000(1)=\frac{1}{9000}.$$

**Упражнение № 4.** Выполняя вычисления, следует преобразовать периодическую десятичную дробь в простую.

б) $2,(34)+0,(21)=2\frac{34}{99}+\frac{21}{99}=2\frac{55}{99}=2\frac{5}{9}$;

в) $19,(27)-3,(73)=19\frac{27}{99}-3\frac{27}{99}=18\frac{126}{99}-3\frac{73}{99}=153\frac{53}{99}$;

д) $8,1(6):2\frac{11}{19}=8\frac{16-1}{90}:\frac{49}{19}=8\frac{15}{90}:\frac{49}{19}=8\frac{1}{6}:\frac{49}{19}=\frac{49}{6}\cdot\frac{19}{49}=\frac{19}{6}=3\frac{1}{6}$.

**Упражнение № 6.** В примерах, где участвуют периодические десятичные дроби, применяют также правила нахождения процента числа, его части, а также нахождение числа по заданному проценту и части.

а) $0,(12)\cdot 10\%=\frac{12}{99}\cdot\frac{10}{100}=\frac{2}{33}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{165}$.

б) $25:1,(5)=25:1\frac{5}{9}=25:\frac{14}{9}=25\cdot\frac{9}{14}=\frac{225}{14}=16\frac{1}{14}$.

г) $10,2(7):75\%=10\frac{25}{90}:\frac{75}{100}=10\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{3}=\frac{185}{18}\cdot\frac{4}{3}=\frac{370}{27}=13\frac{19}{27}$.

**Упражнение № 7.** Число, 0,(5) часть которого равна числу 50:

$50:0,(5)=50:\frac{5}{9}=50\cdot\frac{9}{5}=90.$

Число, 15% которого равно 2,1(2): 2,1(2) : 15% = $2\frac{11}{90}:\frac{15}{100}=\frac{191}{90}\cdot\frac{20}{3}=\frac{382}{27}=14\frac{4}{27}.$

$14\frac{4}{27}+90=104\frac{4}{27}.$

**Ответ**: $104\frac{4}{27}.$

**Упражнение № 10.** а) Знаменатель правой стороны уравнения $8,(m)=8\frac{m}{10}$ должен быть равен 9: $8,(m)=8\frac{m}{9}.$

б) В равенстве $0,n(mk)=\frac{\overline{nmk}-m}{999}$ в знаменателе должно быть число 990, а в числителе $\overline{nmk}-n$. $0,n(mk)=\frac{\overline{nmk}-n}{990}.$

**Упражнение № 11.** Для написания чисел 0,($a$) и 7$b$($a$) в виде простой дроби применяются правила преобразования чистой и смешанной периодических дробей в простую дробь.

$0,(a)=\frac{a}{9};\ 7,b(a)=7\frac{\overline{ba}-b}{90}=7\frac{9b+a}{90}.$ Здесь $\overline{ba}=10b+a$ двузначное число.

**Упражнение № 13.** а) $\dfrac{\left(0,333\ldots+\frac{1}{6}\right)\cdot 4}{0,2555\ldots:1,5(3)}=\dfrac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot 4}{\frac{23}{90}:1\frac{48}{90}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 4}{\frac{23}{90}\cdot\frac{90}{138}}=\dfrac{2}{\frac{1}{6}}=12;$

б) $\dfrac{0,777\ldots+0,090909\ldots}{7,4-8\frac{2}{5}}+7,3:21,9=\dfrac{\left(\frac{7}{9}+\frac{9}{99}\right)}{7,4-8,4}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{53}{99};$

в) $\dfrac{\left(0,4111\ldots+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{9}{47}}{0,3(5):0,555\ldots:32}=\dfrac{\left(\frac{37}{90}+\frac{10}{90}\right)\cdot\frac{9}{47}}{\frac{32}{90}:\frac{5}{9}:32}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{32}{90}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{32}}=5;$

г) $\dfrac{\left(0,666\ldots+\frac{1}{3}\right):0,25}{0,12333\ldots:0,0925}+12,5\cdot 0,64=\dfrac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right):0,25}{\frac{111}{900}:\frac{925}{10000}}+\dfrac{125}{10}\cdot\dfrac{64}{100}=\dfrac{4}{\frac{37}{300}\cdot\frac{10000}{925}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{64}{4}=$

$=\dfrac{4}{\frac{37}{3}\cdot\frac{100}{37\cdot 25}}+8=3+8=11.$

**Ответ**: а) 12; б) $-\frac{53}{99}$; в) 5; г) 11.

**Упражнение № 14.** Согласно правилу определяется: $3,(9)=3\frac{9}{9}=4;$

$-2,(99)=-2\frac{99}{99}=-3;\ 6,56(9)=6\frac{569-56}{900}=6\frac{513}{900}=6\frac{57}{100}=6,57.$

Как видно, в периодической десятичной дроби 7,(9999) группа чисел в периоде состоит из бесконечного числа 9. Число 0,9999… очень близкое к 1 и до какого разряда вы не округлили бы это число получится 0,9999… ≈ 1. Поэтому можно записать 7,(9999) = 8; 0,12(99) = 0,13; –3,8(999) = –3,9.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Иногда учащийся забывает правила преобразования смешанной периодической десятичной дроби в простую дробь. Учащийся, выполняя деятельность, данную в учебнике, поэтапно усваивает правило преобразования периодической десятичной дроби в простую. Удобным способом преобразования в простую дробь является также выражение смешанной периодической десятичной дроби в виде суммы слагаемых по разрядам (упражнение № 12).

**Обобщение и результат:** В итоге учащиеся в третий столбец таблицы ЗХУ вписывают правила преобразования периодической десятичной дроби в простую дробь. Учитель обобщает пройденное.

**Оценивание**

● Преобразование

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется преобразовывать периодическую десятичную дробь в простую дробь;<br>При преобразовании периодической десятичной дроби в простую дробь ошибочно в знаменателе записывает единицы разрядов 10, 100, 1000 и т.п.;<br>При преобразовании периодической десятичной дроби в простую не может определить количество 9 и 0 в знаменателе. |
| Уровень II | Преобразует чистую периодическую десятичную дробь в простую дробь, затрудняется в преобразовании смешанной периодической десятичной дроби в простую;<br>Нуждается в указании направления учителем (или товарищами) при преобразовании чистой и смешанной периодических десятичных дробей в простую дробь;<br>Преобразует чистую и смешанную периодические десятичные дроби, но допускает ошибки в проверке верности ответа. |
| Уровень III | Самостоятельно преобразует чистые и смешанные периодические десятичные дроби в простую дробь. |
| Уровень IV | Самостоятельно преобразует чистую и смешанную периодические десятичные дроби путём применения алгоритма и кратким способом в простую дробь и проверяет верность ответа;<br>Проявляет творческий подход при преобразовании и проверке периодической десятичной дроби в простую дробь. |

## Урок 1.5. Сравнение рациональных чисел

**Стандарт:** 1.1.2. Сравнивает и выстраивает рациональные числа.

**Результат обучения:** Сравнивает рациональные числа, выстраивает их в возрастающей и убывающей последовательности.

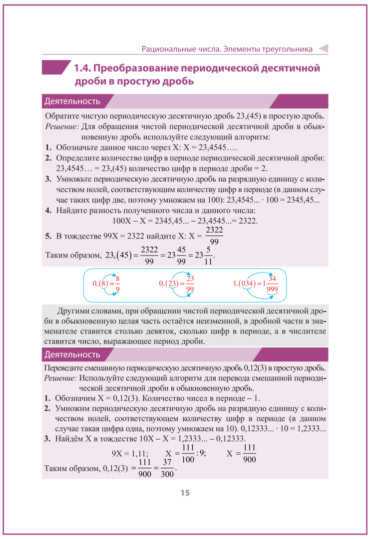
**Форма работы:** коллективная, в группах, индивидуальная.

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: В деятельности в учебнике даны три положения рациональных чисел $a$ и $b$ относительно начала отсчёта О. В каждом случае учащимся следует определить знак чисел $a$ и $b$ и сравнить их. Они знают, как сравнивать числа из курса математики за VI класс. Учитель должен стараться, чтобы учащиеся при выполнении деятельности самостоятельно высказывали свои мысли. В случае затруднения учащегося учитель вместо чисел $a$ и $b$ может записать данные в образце отрицательные дроби, периодические десятичные дроби.


Рациональные числа. Элементы треугольника

1.4. Преобразование периодической десятичной дроби в простую дробь

Деятельность

Обратите чистую периодическую десятичную дробь 23,(45) в простую дробь.
*Решение:* Для обращения чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь используйте следующий алгоритм:
1. Обозначьте данное число через X: X = 23,4545….
2. Определите количество цифр в периоде периодической десятичной дроби: 23,4545… = 23,(45) количество цифр в периоде дроби = 2.
3. Умножьте периодическую десятичную дробь на разрядную единицу с количеством нолей, соответствующим количеству цифр в периоде (в данном случае таких цифр две, поэтому умножаем на 100): 23,4545... · 100 = 2345,45...
4. Найдите разность полученного числа и данного числа:
$$100X - X = 2345{,}45... - 23{,}4545... = 2322.$$
5. В тождестве 99X = 2322 найдите X: $X = \frac{2322}{99}$

Таким образом, $23,(45) = \frac{2322}{99} = 23\frac{45}{99} = 23\frac{5}{11}$.

$0,(8) = \frac{8}{9}$ $\quad 0,(23) = \frac{23}{99}$ $\quad 1,(034) = 1\frac{34}{999}$

Другими словами, при обращении чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную целая часть остаётся неизменной, в дробной части в знаменателе ставится столько девяток, сколько цифр в периоде, а в числителе ставится число, выражающее период дроби.

Деятельность

Переведите смешанную периодическую десятичную дробь 0,12(3) в простую дробь.
*Решение:* Используйте следующий алгоритм для перевода смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь.
1. Обозначим X = 0,12(3). Количество чисел в периоде – 1.
2. Умножим периодическую десятичную дробь на разрядную единицу с количеством нолей, соответствующем количеству цифр в периоде (в данном случае такая цифра одна, поэтому умножаем на 10). 0,12333... · 10 = 1,2333...
3. Найдём X в тождестве 10X – X = 1,2333... – 0,12333.
$$9X = 1{,}11; \quad X = \frac{111}{100} : 9; \quad X = \frac{111}{900}$$
Таким образом, $0,12(3) = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$.

15

**Исследовательский вопрос**: Каким правилам следует придерживаться при сравнении рациональных чисел?

При проведении исследования рекомендуется, чтобы учащиеся работали в группах или индивидуально.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 1.** В таблице, данной в учебнике, записаны обратные и противоположные числа. Некоторые из них записаны верно, некоторые нет. Учащимся следует вместо ошибочных чисел записать верные (выделенные в таблице красным цветом числа являются ошибочными).

| № | число | обратное | противоположное | № | число | обратное | противоположное |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| а) | $-0{,}8$ | $\frac{4}{5}$ | $-1\frac{1}{4}$ | г) | $7,(35)$ | $-7\frac{35}{99}$ | $\frac{99}{728}$ |
| б) | $4{,}2$ | $-4\frac{1}{5}$ | $\frac{5}{21}$ | д) | $-1\frac{11}{13}$ | $\frac{24}{13}$ | $-\frac{13}{24}$ |
| в) | $\frac{9}{11}$ | $\frac{-9}{11}$ | $1\frac{2}{9}$ | е) | $21{,}0(3)$ | $-\frac{631}{30}$ | $\frac{30}{631}$ |

**Упражнение № 2.** Для записи заданных чисел в возрастающей последовательности преобразуем их в десятичные дроби:

$\frac{-2}{5} = -0{,}4$ $\qquad \frac{-15}{7} = -2,(142857);$ $\qquad \frac{-4}{15} = -0{,}2(6);$ $\qquad -3\frac{1}{32} = -3{,}03125;$

$0{,}3;$ $\qquad \frac{2}{25} = 0{,}08;$ $\qquad \frac{20}{7} = 2,(857142);$ $\qquad -3,(5).$

Возрастающая последовательность: $-3,(5);\ -3\frac{1}{32};\ \frac{-15}{7};\ \frac{-2}{5};\ \frac{-4}{15};\ \frac{2}{25};\ 0{,}3;\ \frac{20}{7}.$

**Упражнение № 6.** При сравнении рациональных чисел применяются правила сравнения, изученные в VI классе.

а) $\frac{-12}{25}$ və $\frac{-34}{71}$; сравним здесь произведения $-12 \cdot 71$ и $-34 \cdot 25$.

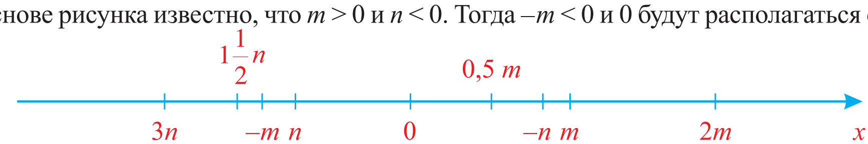
Поскольку $-852 < -850$, то $\frac{-12}{25} < \frac{-34}{71}$.

б) $-2,(42) < -2,42$;  в) $-\frac{7}{90} < 0$;  г) $0,0(56) > 0,0(1)$;

д) $\frac{17}{99} > \frac{-1}{2}$;  е) $0 > -19,(9888)$.

**Упражнение № 8.**


а) Чтобы отметить числа $-m$; $-n$; $2m$; $3n$; $0,5m$; $1\frac{1}{2}n$ на числовой оси, охарактеризуем их. На основе рисунка известно, что $m > 0$ и $n < 0$. Тогда $-m < 0$ и 0 будут располагаться слева.

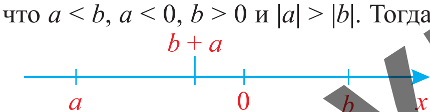



Также поскольку $n < 0$ то $-n > 0$. Число $-n$ будет располагаться справа от 0. Число $2m$ располагается справа от $m$ (в 2 раза длиннее $m$). Число $3n$ в 3 раза длиннее $n$ и располагается слева от $n$. Число $0,5m$ равняется половине $m$ (середина между 0 и $m$). Число $1\frac{1}{2}n$ располагается слева от числа $n$.

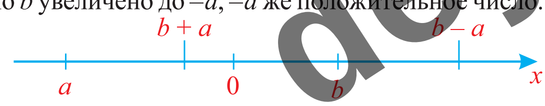
б) поскольку число $n$ отрицательное, то $\frac{1}{3}n > 3n$.

в) $m$ – положительное число. $|0,5m| < |m|$ olar.

**Упражнение № 9.** На основе рисунка известно, что $a < b$, $a < 0$, $b > 0$ и $|a| > |b|$. Тогда число $b + a$ будет располагаться слева от 0.




Число $b - a$ располагается справа от $b$, так как $a$ – отрицательное число и значит $b - a = b + (-a)$. Следовательно, число $b$ увеличено до $-a$, $-a$ же положительное число.




б) Согласно рисунку, $b - a > b + a$.

в) Поскольку по расстоянию число $b + a$ более близко к 0, то $|b + a| < |b - a|$.

**Упражнение № 10.** а) Если модуль какого-либо числа больше модуля другого числа, нельзя с полной уверенностью утверждать, что первое число больше второго. Если $|a| > |b|$, то только при $a > 0$ значит $a > b$.

б) Если модуль любого отрицательного числа больше модуля другого отрицательного числа $a < 0$, $b < 0$ и $|a| > |b|$, то $a < b$.

**Упражнение № 11.** Целесообразно, чтобы это задание выполнялось учащимися в группах. Выполняя это задание, учащиеся должны стараться самостоятельно обосновать свои мысли и использовать примеры.

д) Сумма двух чисел может быть больше одного из слагаемых, и меньше другого из слагаемых.
$a + b > a$ и $a + b < b$ возможно в том случае, если $a$ – отрицательное число.
Например: $a = –5$, $b = 7$. Тогда, $–5 + 7 > –5$ и $–5 + 7 < 7$.

е) Сумма двух чисел может быть больше их произведения. Например, сумма двух чисел может быть больше их произведения, если одно из чисел равно 0 или 1, а другое число будет положительным числом:
$1 + 9 > 1 \cdot 9$; $0 + 12 > 0 \cdot 12$ и т.д.

**Упражнение № 13.** 1) а) Чтобы увеличить число 18 на 20%, следует прибавить к числу 18 20% от этого числа или найти 120% от числа 18:

$18 \cdot 20\% = 18 \cdot \frac{20}{100} = 3,6;$ $18 + 3,6 = 21,6$ или $18 \cdot 120\% = 18 \cdot \frac{120}{100} = 21,6.$

**Ответ**: 21,6.

2) Чтобы число 30,(8) уменьшить на 10%, следует найти 10% от заданного числа и отнять от этого числа полученное число (или найти 90% от числа 30,(8)):

$$30,(8) \cdot 10\% = 30\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{278}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{139}{45} = 3\frac{4}{45}.$$

$$30\frac{8}{9} - 3\frac{4}{45} = 30\frac{40}{45} - 3\frac{4}{45} = 27\frac{36}{45} = 27\frac{4}{5} = 27,8$$

или $30,(8) \cdot 90\% = 30\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{278}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{139}{5} = 27,8.$ **Ответ**: 27,8.

**Дифференциальное обучение:** При сравнении рациональных чисел наиболее сложными моментами для учащихся становится сравнение отрицательных чисел. Для того, чтобы в итоге обучения слабые учащиеся могли лучше сравнивать рациональные числа, учителю следует, определив эти слабые стороны, задать им дополнительные задания.

**Обобщение и результат:** Правила, используемые при сравнении рациональных чисел, ещё раз повторяются и обобщаются учителем.

**Оценивание**

● Сравнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в сравнении и выстраивании рациональных чисел;<br>Сравнивает положительные числа, затрудняется сравнивать отрицательные числа. |
| Уровень II | После определённых указаний сравнивает и выстраивает рациональные числа;<br>Сравнивает два рациональных числа, нуждается в помощи при расположении более двух рациональных чисел в возрастающей и убывающей последовательностях. |
| Уровень III | Самостоятельно сравнивает и выстраивает рациональные числа. |
| Уровень IV | Логически рассуждает при сравнении и выстраивании рациональных чисел. |

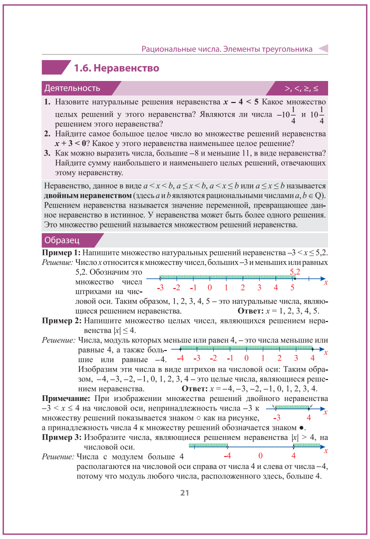
# Урок 1.6. Неравенство

**Стандарт:** 2.1.2. Записывает в виде неравенства двухуровневые выражения, произнесённые устно.
2.2.3. Определяет способом подстановки решение простого неравенства с переменной в модуле.

**Результат обучения:**

1) Записывает устно произнесённое выражение в виде неравенства.
2) Решает способом подстановки простое неравенство с переменной в модуле.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ
**Интеграция:** Азербайджанский язык 1.2.2.


Рациональные числа. Элементы треугольника

1.6. Неравенство

Деятельность $>, <, \geq, \leq$

1. Назовите натуральные решения неравенства $\boldsymbol{x - 4 < 5}$ Какое множество целых решений у этого неравенства? Являются ли числа $-10\frac{1}{4}$ и $10\frac{1}{4}$ решением этого неравенства?
2. Найдите самое большое целое число во множестве решений неравенства $\boldsymbol{x + 3 < 0}$? Какое у этого неравенства наименьшее целое решение?
3. Как можно выразить числа, большие –8 и меньшие 11, в виде неравенства? Найдите сумму наибольшего и наименьшего целых решений, отвечающих этому неравенству.

Неравенство, данное в виде $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ или $a \leq x \leq b$ называется **двойным неравенством** (здесь $a$ и $b$ являются рациональными числами $a, b \in Q$). Решением неравенства называется значение переменной, превращающее данное неравенство в истинное. У неравенства может быть более одного решения. Это множество решений называется множеством решений неравенства.

Образец

**Пример 1:** Напишите множество натуральных решений неравенства $-3 < x \leq 5,2$.
*Решение:* Число $x$ относится к множеству чисел, больших –3 и меньших или равных 5,2. Обозначим это множество чисел штрихами на числовой оси. Таким образом, 1, 2, 3, 4, 5 – это натуральные числа, являющиеся решением неравенства. **Ответ:** $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

**Пример 2:** Напишите множество целых чисел, являющихся решением неравенства $|x| \leq 4$.
*Решение:* Числа, модуль которых меньше или равен 4, – это числа меньшие или равные 4, а также большие или равные –4. Изобразим эти числа в виде штрихов на числовой оси: Таким образом, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 – это целые числа, являющиеся решением неравенства. **Ответ:** $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

**Примечание:** При изображении множества решений двойного неравенства $-3 < x \leq 4$ на числовой оси, непринадлежность числа –3 к множеству решений показывается знаком ○ как на рисунке, а принадлежность числа 4 к множеству решений обозначается знаком ●.

**Пример 3:** Изобразите числа, являющиеся решением неравенства $|x| > 4$, на числовой оси.
*Решение:* Числа с модулем больше 4 располагаются на числовой оси справа от числа 4 и слева от числа –4, потому что модуль любого числа, расположенного здесь, больше 4.

21

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: Деятельность, данная в учебнике, может выполняться учащимися в группах или парах. Учащиеся могут затрудняться в записи выражения, данного в пункте 3 деятельности, в виде неравенства или могут записать неравенство в виде $x > -8$ и $x < 11$. В этом случае учитель может дать определённое направление или рекомендации.
Опыт показывает, что решая неравенство, учащийся, используя числовую ось, понимает его лучше.

**Исследовательский вопрос**: Как определяется множество решений неравенства?

При выполнении исследования выполняются задания в учебнике.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 3.** Выполняя задание, учащийся должен уметь читать данные неравенства. Это поможет ему ещё лучше понять неравенство.
ё) $|x - 2,9| \leq 1$. Чтение: Модуль разности числа $x$ с числом 2,9 равен 1 или меньше 1. Учащийся определяет любое решение неравенства способом подстановки. Например: при $x = 3$ модуль полученного числа 0,1 меньше 1 и т.д.

**Упражнение № 6.** Решая способом подстановки неравенства с переменной в модуле, учащийся вместо переменной должен подставить такое число, чтобы полученное число было верным по отношению к неравенству.

а) В неравенстве $|x + 4,2| < 1,4$ вместо $x$ должно быть записано такое число, чтобы при сложении этого числа с 4,2 модуль их суммы был меньше 1,4. В этом случае число $x$ должно быть меньше числа $1,4 - 4,2 = -2,8$. С другой стороны, число $x$ должно быть больше числа $-1,4 - 4,2 = -5,6$, в противном случае, например при $x = -6$, неравенство $|-6 + 4,2| = 1,8 < 1,4$ будет неверным. При объяснении этих суждений учитель может направить учащихся должным образом.

в) в неравенстве $|10 - x| > 7$ число $x$ должно быть меньше $10 - 7 = 3$. С другой стороны, число $x$ должно быть больше числа $10 + 7 = 17$, чтобы неравенство было верным. Например, $|10 - 18| > 7$ и $|8| > 7$ или $|10 - 2{,}4| = 7{,}6 > 7$.

е) в неравенстве $|x| + 2|x| \geq 42$ $|x|$ и $2|x|$ – подобные слагаемые. Если до сих пор учащиеся не сводили подобные слагаемые, записанные под знаком модуля, сильные учащиеся смогут сделать это с лёгкостью. Тогда $3|x| \geq 42$ и $|x| \geq 14$. В этом неравенстве можно легко определить, что в самом простом случае $x$ может быть числом больше 14 или равным 14. То, что $x$ может быть меньше –14 или равен –14, учащийся может определить путём рассуждения.

**Дифференциальное обучение:** Если слабые учащиеся затрудняются в определении возможных решений неравенств с переменной в модуле, учитель может им задать более лёгкие задания. Например, $|x| > 4$, $|x| < 7$ и др.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Чтобы не было сложностей при решении неравенств с переменной в модуле способом подстановки, учитель может предложить учащимся записать это неравенство без модуля. Если даже это не поможет полному достижению решения, учащийся определит определённую часть решения и создаст основу для решения такого типа неравенств в будущем.

**Обобщение и результат:** Учитель, повторяя всё, обобщает пройденное о решении неравенств способом подстановки.

**Оценивание**

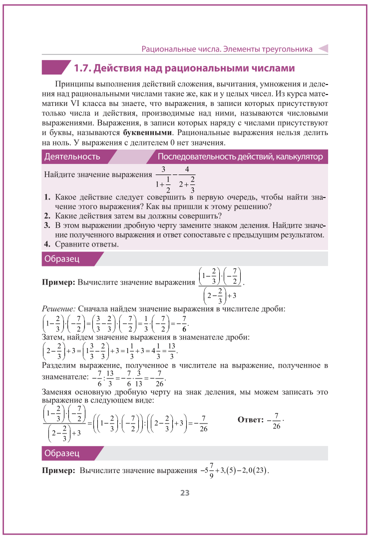
- Выражение
- Решение способом подстановки

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не может выразить неравенством произнесённое устно выражение;<br>Не может правильно решить неравенство с переменной в модуле способом подстановки. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при выражении устно сказанного выражения в виде неравенства;<br>Нуждается в помощи учителя при решении неравенств с переменной в модуле. |
| Уровень III | Записывает в виде неравенства произнесённое устно выражение;<br>Самостоятельно решает неравенство с переменной в модуле способом подстановки. |
| Уровень IV | Записывает в виде неравенства произнесённое устно выражение и читает данное неравенство;<br>Решает с объяснениями неравенства с переменной в модуле способом подстановки. |

## Урок 1.7. Действия над рациональными числами

**Стандарт:** 1.2.1. Находит значение числового выражения, придерживаясь последовательности выполнения действий (в том числе возведение в степень с натуральным показателем).

**Результат обучения:** Находит значение числового выражения, придерживаясь последовательности выполнения действий над рациональными числами.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы**: учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ
**Интеграция:** Информатика 4.1.3.


Рациональные числа. Элементы треугольника

1.7. Действия над рациональными числами

Принципы выполнения действий сложения, вычитания, умножения и деления над рациональными числами такие же, как и у целых чисел. Из курса математики VI класса вы знаете, что выражения, в записи которых присутствуют только числа и действия, производимые над ними, называются числовыми выражениями. Выражения, в записи которых наряду с числами присутствуют и буквы, называются **буквенными**. Рациональные выражения нельзя делить на ноль. У выражения с делителем 0 нет значения.

Деятельность — Последовательность действий, калькулятор

Найдите значение выражения $\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2}}-\dfrac{4}{2+\dfrac{2}{3}}$

**1.** Какое действие следует совершить в первую очередь, чтобы найти значение этого выражения? Как вы пришли к этому решению?
**2.** Какие действия затем вы должны совершить?
**3.** В этом выражении дробную черту замените знаком деления. Найдите значение полученного выражения и ответ сопоставьте с предыдущим результатом.
**4.** Сравните ответы.

Образец

**Пример:** Вычислите значение выражения $\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{7}{2}\right)}{\left(2-\dfrac{2}{3}\right)+3}$.

*Решение:* Сначала найдем значение выражения в числителе дроби:
$\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{7}{6}$.
Затем, найдем значение выражения в знаменателе дроби:
$\left(2-\frac{2}{3}\right)+3=\left(1\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\right)+3=1\frac{1}{3}+3=4\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$.
Разделим выражение, полученное в числителе на выражение, полученное в знаменателе: $-\frac{7}{6}:\frac{13}{3}=-\frac{7}{6}\cdot\frac{3}{13}=-\frac{7}{26}$.
Заменяя основную дробную черту на знак деления, мы можем записать это выражение в следующем виде:
$\dfrac{\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)}{\left(2-\frac{2}{3}\right)+3}=\left(\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\right):\left(\left(2-\frac{2}{3}\right)+3\right)=-\frac{7}{26}$ **Ответ:** $-\frac{7}{26}$.

Образец

**Пример:** Вычислите значение выражения $-5\frac{7}{9}+3,(5)-2,0(23)$.

23

## Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа.
**Постановка проблемы**: Строится алгоритм для нахождения значения заданного в деятельности выражения: $\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2}}-\dfrac{4}{2+\dfrac{2}{3}}$. Первоначально находится значение первой дроби, затем второй, и далее находится разность значений первой и второй дробей. Эту последовательность должны определить учащиеся. Учащиеся класса, разделившись на несколько групп, после объяснений учителя выполняют это задание. В этом же выражении дробь заменим действием деления: $\left(3:\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\right)-\left(4:\left(2+\dfrac{2}{3}\right)\right)$. Нахождение значения этого выражения учитель поручает другим группам. Полученные результаты сравниваются.

Задания, данные в учебнике, выполняются в течение 2 урочных часов. Раздав учащимся рабочие листы, учитель может задать эти задания для выполнения их в группах или самостоятельно.

**Объяснение учителя**: Учитель даёт разъяснения о числовых и буквенных выражениях, значениях, которые могут получить буквенные выражения, выражениях, не имеющих смысла.

**Руководство к некоторым заданиям**:
**Упражнение № 2.** При вычислении значений выражений над рациональными числами совершаются действия.

а) –6,965 +23,3 = 16,335; б) 6,2 · (–1,33) = –8,246; в) 53,4 : (–15) = – 3,56;
г) 60,9 – 88,89 = –27,99; д) 0,78 · (–2,5) = –1,95; е) –16,94 : 2,8 = –6,05;
ё) 99 – 9,904 = 89,096; ж) –0,016 · 0,25 = –0,004; з) 75 : 1,25 = 60.

**Упражнение № 3.**

а) $6\frac{1}{3}-9=6\frac{1}{3}-8\frac{3}{3}=-2\frac{2}{3}$;

б) $\frac{3}{8}:\left(-\frac{6}{32}\right)=-2$;

б) $\frac{9}{14}\cdot(-4,(2))=\frac{9}{14}\cdot\left(-4\frac{2}{9}\right)=\frac{9}{14}\cdot\left(-\frac{38}{9}\right)=-\frac{19}{7}=-2\frac{5}{7}$;

з) $5\frac{1}{3}-7,0(3)=5\frac{1}{3}-7\frac{1}{30}=-1,7$.

**Упражнение № 4.** Выполняя это задание, учащиеся должны уметь определить, что выражения со знаменателем 0 не имеют смысла.

г) $\frac{0,57}{0,08-0,02\cdot 4}=\frac{0,57}{0}$ – у этого выражения нет смысла.

е) $\frac{-12,3+4,1\cdot 3}{7,26-2\cdot 3,13}=\frac{0}{1}=0$ – у этого выражения смысл есть.

В течение второго урока действия над рациональными числами, как правило, производятся с помощью калькулятора.

**Упражнение № 9.** а) 1) (96,5 · 2 + 43,5) : (5,9 – 5,5);

С калькулятором: 5,9 – 5,5 = MS 96,5 *2 + 43,5 / MR =

2) $\frac{2,3\cdot 8-44}{16\cdot 0,5+25}$. С калькулятором: 16 * 0,5 + 25 = MS 23 * 8 – 44/MR =

3) 35 – $(1,2)^2$. С калькулятором: 1,2 * = MS 35 – MR =

4) $\frac{3x-9}{1,5x+5}$. С калькулятором: 1,5 * 2 + 5 = MS 3*$x$ – 9 /MR =

5) 204 · 21 + $(2,4)^2$. С калькулятором: 2,4 * = MS 204 * 21 + MR =

6) $\frac{230:5+24}{6\cdot 2,5-45}$. С калькулятором: 6*2,5 – 45 = MS 230: 5 + 24/MR =

7) ($4^3$ + 103) – 468 : 18. С калькулятором: 468 : 18 = MS 4* = + 103 – MR =

8) (2 · 3,81 + 3)(4 · 3,81 – 2). С калькулятором: 2*3,81 + 3 = MS 4*3,81– 2 =* MR =

9) $\frac{3,2x-1,7}{7+2,6\cdot 3}$. С калькулятором: 7 + 2,6*3 = MS 3,2 *$x$ – 1,7/ MR =

б) 1) 2 * 14 + 6 = MS 3* 12 – 4/MR =; $\frac{3\cdot 12-4}{2\cdot 14+6}$

2) $x$ * = MS 5/6 – 2 + MR =; $\frac{5}{6}-2+x^2$

3) 204/3 = MS 3* = = –63 + MR = ; $3^2-63+\frac{204}{3}$

4) $a$ + 6 = MS 78 * $a$ –7 * MR =; $(78a-7)(a+6)$.

**Дифференциальное обучение:** Учащимся, показавшим слабый результат при обучении, задаются более простые задания на выполнение действий над рациональными числами. Целесообразно будет использовать их умение использовать калькулятор при выполнении заданий. Для учащихся, показавших высокий результат при обучении, можно использовать их навыки работы на компьютере, а именно могут быть заданы задания на вычисление действий над рациональными числами в программе Microsoft Excel.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз обращая внимание на важность соблюдения последовательности действий над рациональными числами, обобщает пройденное.

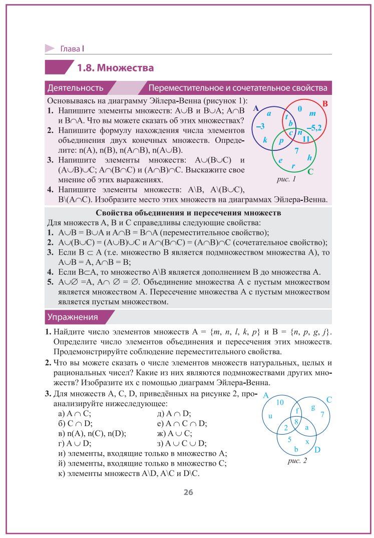
**Оценивание**

● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не знает последовательности совершения действий для нахождения значения выражения;<br>Находит значение выражения без скобок, затрудняется в нахождении значения выражений со скобками. |

| | |
|---|---|
| Уровень II | Знает последовательность действий, не может правильно найти значение выражения. |
| Уровень III | Самостоятельно прослеживает последовательность действий и находит значение выражений. |
| Уровень IV | При выполнении действий находит удобные способы решения. |

## Урок 1.8. Множества


Глава I

1.8. Множества

Деятельность — Переместительное и сочетательное свойства

Основываясь на диаграмму Эйлера-Венна (рисунок 1):
1. Напишите элементы множеств: A∪B и B∪A; A∩B и B∩A. Что вы можете сказать об этих множествах?
2. Напишите формулу нахождения числа элементов объединения двух конечных множеств. Определите: n(A), n(B), n(A∩B), n(A∪B).
3. Напишите элементы множеств: A∪(B∪C) и (A∪B)∪C; A∩(B∩C) и (A∩B)∩C. Выскажите свое мнение об этих выражениях.
4. Напишите элементы множеств: A\B, A\(B∪C), B\(A∩C). Изобразите место этих множеств на диаграммах Эйлера-Венна.


рис. 1

**Свойства объединения и пересечения множеств**

Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:
1. A∪B = B∪A и A∩B = B∩A (переместительное свойство);
2. A∪(B∪C) = (A∪B)∪C и A∩(B∩C) = (A∩B)∩C (сочетательное свойство);
3. Если B ⊂ A (т.е. множество B является подмножеством множества A), то A∪B = A, A∩B = B;
4. Если B⊂A, то множество A\B является дополнением B до множества A.
5. A∪∅ =A, A∩ ∅ = ∅. Объединение множества A с пустым множеством является множеством A. Пересечение множества A с пустым множеством является пустым множеством.

Упражнения

1. Найдите число элементов множеств A = {*m*, *n*, *l*, *k*, *p*} и B = {*n*, *p*, *g*, *j*}. Определите число элементов объединения и пересечения этих множеств. Продемонстрируйте соблюдение переместительного свойства.
2. Что вы можете сказать о числе элементов множеств натуральных, целых и рациональных чисел? Какие из них являются подмножествами других множеств? Изобразите их с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
3. Для множеств A, C, D, приведённых на рисунке 2, проанализируйте нижеследующее:
   а) A ∩ C; д) A ∩ D;
   б) C ∩ D; е) A ∩ C ∩ D;
   в) n(A), n(C), n(D); ж) A ∪ C;
   г) A ∪ D; з) A ∪ C ∪ D;
   и) элементы, входящие только в множество A;
   й) элементы, входящие только в множество C;
   к) элементы множеств A\D, A\C и D\C.


рис. 2

26

**Стандарт:** 1.1.4. Применяет в решении задач свойства объединения и пересечения множеств.
**Результат обучения:** Знает и применяет свойства объединения и пересечения множеств.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ, интерактивная доска
**Интеграция:** Азербайджанский язык 1.2.1., 1.2.2.

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы**: Учащимися выполняется задание, данное в деятельности. Учитель контролирует их работу. Условия деятельности могут выполняться и на доске. Выполняя деятельность, учащиеся вспоминают объединение, пересечение множеств, круги Эйлера, определение числа элементов объединения.

**Исследовательский вопрос**: Какие свойства есть у действий над множествами?

На доске записываются множества A = {*a*, *b*, *m*, *k*, *l*}; B = {*b*, *c*, *d*, *k*, *n*}; C = {*a*, *c*, *m*, *k*}. Учитель делит учащихся класса на 4 группы. Группы проверяют справедливость следующих равенств
I группа: A∪B = B∪A.
II группа: (A∪B)∪C = A∪(B∪C).
III группа: A∩B = B∩A.
IV группа: (A∩B)∩C = A∩(B∩C).
Группы представляют свои работы, и проводится обсуждение.
**Объяснение учителя**: Вниманию учащихся доводится формула:
**n(A∪B) = n(A) + n(B) – n(A∩B).** Для нахождения числа элементов объединения двух конечных множеств и даётся информация о свойствах действий над множествами.
В продолжении исследования, выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 5.** Обозначим абонентов газеты знаком A, а абонентов журнала – знаком B. Согласно условию, n(A) = 75; n(B) = 26; n(A∩B) = 18. Число всех семей, проживающих в здании, равно числу объединения множеств A и B.
n(A∪B) = n(A) + n(B) – n(A∩B) = 75 + 26 – 18 = 83. **Ответ**: 83 семьи.

**Упражнение № 6.** Учащиеся, выполнившие норматив по бегу, относятся к множеству A, учащиеся, выполнившие норматив по прыжкам, относятся к множеству B.

а) Согласно условию, 7 человек выполнили норматив по обоим видам спорта, 11 человек – только по бегу. Следовательно, общее число выполнивших норматив по бегу $11 + 7 = 18$ человек.

б) Общее число у выполнивших норматив по прыжкам в высоту $25 - 11 = 14$ человек.

в) Чтобы найти число выполнивших норматив только по прыжкам в высоту, следует от общего числа отнять число выполнивших норматив по обоим видам спорта: $14 - 7 = 7$ (человек). **Ответ**: а) 18 человек; б) 14 человек; в) 7 человек.

**Упражнение № 7.** Согласно условию, $n(A) = 27$; $n(B) = 35$ и $n(A \cap B) = 6$.
Тогда $n(A \cup B) = 27 + 35 - 6 = 56$. Следовательно, из учащихся $61 - 56 = 5$ человек не коллекционирует ни медали, ни марки. **Ответ**: 5 человек.

**Упражнение № 8.** Согласно условию, $n(A) = 25$, $n(B) = 23$, $n(C) = 12$. Общее число спектаклей, просмотренных учащимися VII класса, $25 + 23 + 12 = 60$. Так как каждый учащийся был на спектакле по 2 раза, то в VII классе $60 : 2 = 30$ учеников.

**Ответ**: 30 учеников.

**Упражнение № 11.** Согласно условию, в группе 20 учащихся и 2 из них не любят ни птиц, ни животных. Следовательно, общее число любящих животных и птиц $20 - 2 = 18$ человек. $n(A \cup B) = 18$, $n(A) = 14$, $n(B) = 10$. Из формулы $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ получается $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$. Следовательно, число учащихся, любящих и животных, и птиц $n(A \cap B) = 14 + 10 - 18 = 6$ человек. **Ответ**: 6 человек.

**Дифференциальное обучение:** Во время решения задач класс делится на группы слабых и сильных учащихся. С учётом уровня каждой группе на рабочих листах даются сгруппированные задания. Выполняя своё задание, сильные учащиеся также проверяют работу учащихся другой группы, дают им необходимые рекомендации. Учитель контролирует их работу. Диаграммы Эйлера-Венна можно наглядно отобразить на интерактивной доске.

**Обобщение и результат:** Повторяя свойства действий над множествами, формулу нахождения элементов объединения множеств, учитель обобщает пройденное.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не знает свойства объединения и пересечения множеств;<br>Затрудняется применять в решении задач свойства объединения и пересечения множеств. |
| Уровень II | Нуждается в определённой помощи при применении свойств объединения и пересечения множеств в решении задач;<br>Применяет свойство перемещения объединения и пересечения множеств, затрудняется в применении свойства группировки. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет в решении задач свойства объединения и пересечения множеств. |
| Уровень IV | Применяет свойства объединения и пересечения множеств разными способами. |

## Образец критериев оценивания для составления заданий для малого суммативного оценивания № 1

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Читает и пишет рациональные числа |
| 2 | На числовой оси отмечает точку, соответствующую рациональному числу |
| 3 | Выстраивает рациональные числа в возрастающей и убывающей последовательностях |
| 4 | Сравнивает рациональные числа |
| 5 | Преобразует периодическую десятичную дробь в простую дробь или простую дробь в периодическую десятичную дробь |
| 6 | Решает неравенства |
| 7 | Решает способом подстановки неравенства с переменной в модуле |

## Образец малого суммативного оценивания № 1

Фамилия: ____________________ Имя: _______________

Количество правильных ответов: ______

Количество неправильных ответов: ___ Оценка: ___

**1**. Какое число следует написать вместо $a$ в нижеприведённом, чтобы получилось верное равенство:

а) $-8=\frac{a}{4}$; б) $1{,}3=\frac{a}{100}$; в) $-\frac{3}{4}=\frac{-15}{a}$;

г) $-4{,}8=\frac{a}{5}$; д) $77=\frac{-7}{a}$; е) $-\frac{a}{23}=46$.

а) __ б) __ в) __ г) __ д) __ е) ___

**2**. Напишите такие числа, чтобы каждое из них было:

а) и рациональным, и натуральным числом: ______________________

б) рациональным числом, но не целым числом: ____________

**3**. Вычислите значение выражения:

$3\frac{1}{3}-4\frac{3}{5}+1{,}7=$

**4**. Вычислите значение выражения $\frac{m^2-2m}{1{,}5m}$ при $m=-3$.

______________________________________

______________________________________

**5**. Отметьте на числовой оси точки, соответствующие данным числам.

$-3{,}5$; $-1{,}8$; $1\frac{1}{5}$; $0$; $-2$; $3\frac{1}{2}$; $2{,}3$.

**6**. Найдите расстояние между двумя заданными точками:

а) A(–4,9) и B(2,1)__________________

б) M(–8) и N(–14)__________________

в) K(–7658) и P(9)__________________

**7**. Найдите $x$, если расстояние между точками A(13) и B($x$) равно 25 см.

______________________________________

______________________________________

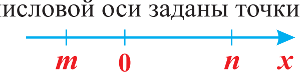
**8**. Данные числа расставьте в возрастающей последовательности:

$-8$; $2{,}5(7)$; $1{,}8$; $-6{,}4$; $2\frac{1}{3}$; ; $-3{,}(2)$; $0{,}5(4)$

Возрастающая последовательность:__

______________________________________

**9**. На числовой оси заданы точки $m$ и $n$:




Сравните числа $-m$ и $n$.

______________________________________

**10**. Напишите целые отрицательные решения неравенства $-3 < x \le 4$.

______________________________________

**11**. Напишите несколько чисел, удовлетворяющих неравенству $|x-5{,}2|<2$.

______________________________________

**12**. Заданные периодические десятичные дроби преобразуйте в простую дробь:

а) 3,(4) = ____________________________

б) 0,(12) = ___________________________

в) 1,2(8) = ___________________________

**13**. Данные дроби покажите в виде периодической десятичной дроби:

а) $\frac{5}{12}=$ б) $\frac{8}{9}=$ в) $\frac{16}{45}=$

**14**. Вычислите значения выражений:

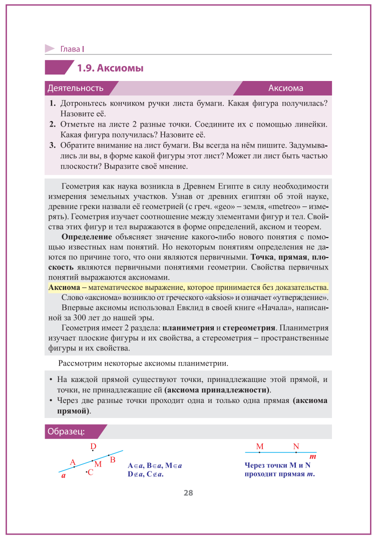
а) $\dfrac{\frac{1}{3}-0{,}1(4)}{\frac{5}{6}:2{,}(3)}=$ б) $\dfrac{2{,}5+1{,}3\cdot 2{,}5}{-2{,}3\cdot 5}=$

**15**. Если n(A) = 22, n(B) = 34 и n(A $\cap$ B) = 11 то, n(A $\cup$ B) = ?

______________________________________

______________________________________

## Урок 1.9. Аксиомы


Глава I

1.9. Аксиомы

Деятельность | Аксиома

1. Дотроньтесь кончиком ручки листа бумаги. Какая фигура получилась? Назовите её.
2. Отметьте на листе 2 разные точки. Соедините их с помощью линейки. Какая фигура получилась? Назовите её.
3. Обратите внимание на лист бумаги. Вы всегда на нём пишите. Задумывались ли вы, в форме какой фигуры этот лист? Может ли лист быть частью плоскости? Выразите своё мнение.

Геометрия как наука возникла в Древнем Египте в силу необходимости измерения земельных участков. Узнав от древних египтян об этой науке, древние греки назвали её геометрией (с греч. «geo» – земля, «metreo» – измерять). Геометрия изучает соотношение между элементами фигур и тел. Свойства этих фигур и тел выражаются в форме определений, аксиом и теорем.

**Определение** объясняет значение какого-либо нового понятия с помощью известных нам понятий. Но некоторым понятиям определения не даются по причине того, что они являются первичными. **Точка**, **прямая**, **плоскость** являются первичными понятиями геометрии. Свойства первичных понятий выражаются аксиомами.

**Аксиома** – математическое выражение, которое принимается без доказательства.

Слово «аксиома» возникло от греческого «aksios» и означает «утверждение».

Впервые аксиомы использовал Евклид в своей книге «Начала», написанной за 300 лет до нашей эры.

Геометрия имеет 2 раздела: **планиметрия** и **стереометрия**. Планиметрия изучает плоские фигуры и их свойства, а стереометрия – пространственные фигуры и их свойства.

Рассмотрим некоторые аксиомы планиметрии.

- На каждой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей **(аксиома принадлежности)**.
- Через две разные точки проходит одна и только одна прямая **(аксиома прямой)**.

Образец:

$A \in a$, $B \in a$, $M \in a$
$D \notin a$, $C \notin a$.

Через точки M и N проходит прямая *m*.

28

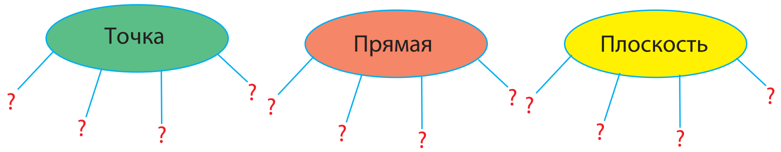
**Стандарт:** 3.1.5. Понимает понятие аксиомы, теоремы, прямой теоремы и обратной теоремы.
**Результат обучения:** Осознаёт понятие аксиомы, излагает аксиомы планиметрии.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** кластер, мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ
**Интеграция:** Азербайджанский язык 1.2.2.

### Ход урока:

Учащиеся знакомы с элементами геометрии с младших классов. Знают понятия точки, прямой, плоскости и выполняли разные задания.

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: В подготовленной на доске или программе Microsoft Power Point презентации записываются слова «точка», «прямая» и «плоскость».




Учитель предлагает учащимся высказать своё мнение о каждом понятии. Выслушивает мнение учащихся об изображении этих понятий, их названиях, свойствах. Учитель проводит с учащимися обсуждение о возможном определении этих понятий. Выслушиваются ответы учащихся.

**Объяснение учителя**: Учитель доводит до внимания учащихся, что эти понятия принимаются без определения и являются первоначальными понятиями математики. Даётся информация об определении, аксиоме, разделах содержательной линии геометрии, элементах планиметрии и стереометрии.

**Исследовательский вопрос**: Какие аксиомы являются аксиомами планиметрии и как они применяются??

Для проведения исследования учащиеся класса делятся на 4 группы.
1 группе выдаются рабочие листы с нижеприведёнными аксиомами.

- Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей **(аксиома принадлежности)**.
- Через любые две точки можно провести одну и только одну прямую **(аксиома прямой).**

II группе выдаются рабочие листы с нижеприведённой аксиомой.

- Из трёх точек, расположенных на одной прямой, одна и только одна лежит между двумя другими **(аксиома расположения точек на прямой).**

III группе выдаются рабочие листы с нижеприведёнными аксиомами.

- Каждый отрезок имеет длину, отличную от нуля, и измеряется определёнными единицами длины **(аксиома измерения отрезка)**.
- Длина отрезка равна сумме длин отрезков, на которые он разбивается любой внутренней точкой **(аксиома сложения отрезков).**

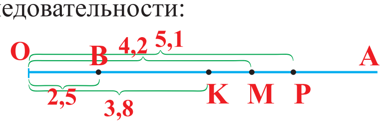
IV группе выдаются рабочие листы с нижеприведёнными аксиомами.

- Каждый угол имеет градусную меру, большую нуля. Развёрнутый угол равен 180° **(аксиома измерения углов)**.
- Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается внутренним лучом **(аксиома сложения углов)**.

Объясняя эти аксиомы, учащиеся каждой группы должны стараться обосновать их на примерах. В рабочие листы можно добавить и задания из учебника. Каждая группа представляет данное им задание, и проводятся обсуждения.

На втором уроке объясняются аксиома деления прямой, аксиома деления отрезка, аксиома деления плоскости, аксиома деления угла.

**Упражнение № 7.** Выполняя это задание, учащиеся убеждаются, что на луче OA с началом в точке O можно выделить отрезки OB, OM, OK и OP, равные 2,5 см, 4,2 см, 3,8 см и 5,1 см. Точки B, M, K и P на луче OA будут расположены в следующей последовательности:





Если примем за координату точки O 0 (нуль), то координатой точки B будет 2,5; точки K – 3,8; точки M – 4,2; точки P – 5,1. Тогда на основе правила нахождения расстояния между двумя точками:

$$BM = 4{,}2 - 2{,}5 = 1{,}7 \text{ см}; \; PM = 5{,}1 - 4{,}2 = 0{,}9 \text{ см}; \; BP = 5{,}1 - 2{,}5 = 2{,}6 \text{ см}.$$

**Ответ**: 1,7 см; 0,9 см; 2,6 см.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Моменты, на которые следует обратить внимание: учащийся должен уметь определить связь между нахождением расстояния между двумя точками и аксиомой деления отрезка. Учитель должен стараться, чтобы учащиеся не зубрили аксиомы, а осознавали и умели применять.

**Обобщение и результат:** Учитель вновь повторяет аксиомы планиметрии, доводит до внимания учащихся важность использования аксиом.

**Оценивание**

● Осознание

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в осознании понятии аксиомы;<br>Не может выражать аксиомы;<br>При выражении путает аксиомы. |
| Уровень II | Осознаёт понятие аксиомы, выражает некоторые аксиомы планиметрии, но затрудняется выразить все аксиомы;<br>Выражает аксиомы, но затрудняется применить на примерах. |
| Уровень III | Выражает и объясняет аксиомы планиметрии. |
| Уровень IV | Обосновывает на примерах при объяснении аксиомы планиметрии. |

## Урок 1.10. Теорема. Прямая и обратная теоремы


Рациональные числа. Элементы треугольника

1.10. Теорема. Прямая и обратная теоремы

Деятельность — Теорема, условие, утверждение, доказательство

1. Нарисуйте развёрнутый угол AOB.
2. Нарисуйте внутри этого угла луч OC. Назовите полученные углы. Выскажите свои мысли об их сумме.
3. Что вы можете сказать об ∠BOC, если ∠AOC равен 25°? Обоснуйте свои мысли.

**Теорема** – такое математическое утверждение, правильность которого выводят путём логических рассуждений на основе заранее известных верных утверждений. Эти рассуждения называются **доказательством**. «Теорема» древнегреческое слово, означает «доказательство, взгляд, точка зрения». Теорема состоит из двух частей, называющихся **«условие»** и **«утверждение»**. Часть теоремы, выражающая данные, называется условием, а часть, требующая доказательства, называется утверждением.

Условия теоремы → Заданная часть

Утверждение теоремы → Часть, требующая доказательства

Доказательство теоремы → Доказательство обычно проводится двумя путями:
1. Утверждение теоремы выводится из условий путём логического рассуждения.
2. Доказывается путём обратного предположения. В этом случае предполагается, что утверждение теоремы ошибочно и получают результат, противоречащий условию.

Теорема — Свойство смежных углов

***Сумма смежных углов равна 180°.***

**Условие теоремы:** ∠AOB и ∠BOC смежные углы.

**Утверждение теоремы:** ∠AOB + ∠BOC = 180°.

**Доказательство:** согласно условию ∠AOB и ∠BOC смежные углы (рис. 1).



*рис. 1.*

*Докажите самостоятельно.*

Используйте свойство развернутого угла и аксиому деления угла.

31

**Стандарт:** 3.1.5. Понимает понятия аксиомы, теоремы, прямой теоремы и обратной теоремы.
**Результат обучения:** Осознаёт понятие теоремы, прямой и обратной теоремы.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ
**Интеграция:** Азербайджанский язык 1.2.2.

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: Деятельность, данная в учебнике, выполняется учащимися. В это время учитель должен стараться, чтобы учащиеся назвали правило о сумме смежных углов, пройденное ими в VI классе. Затем учитель обращается с вопросом «Как вы можете обосновать правило о том, что сумма смежных углов равна 180°?». Выслушивает мнение учащихся.

**Объяснение учителя**: Учитель даёт информацию о понятиях теоремы, условия, утверждения. Объясняет, какими способами проводится доказательство. Правило нахождения суммы смежных углов выражается в виде теоремы. Обмениваясь с учащимися мнениями, учитель объясняет, как определить условие и утверждение этой теоремы. Доказательство теоремы поручается учащимся. Давая определённое направление, учитель должен достичь того, чтобы учащиеся (в виде групп) сумели доказать утверждение. Здесь доводится до внимания учащихся использование свойства развёрнутого угла и аксиомы деления угла. Мнение групп выслушивается и оценивается.

На следующем этапе выполняется вторая деятельность и в данном предложении (учитель может дать и другие предложения), поменяв местами условие и утверждение, учащимися называется обратное ему предложение. Затем, поменяв местами условие и утверждение теоремы о сумме смежных углов, называется обратная теорема: «Углы, сумма которых равна 180°, являются смежными», выслушивается мнение учащихся о верности / неверности этого предложения. Деятельность может быть осуществлена в группах.

Для интересного проведения урока можно с помощью компьютера проецировать разные бытовые ситуации и события могут быть представлены в виде предложений (если ласточки летают низко, это к дождю; если рыбки в аквариуме беспокойно плавают, возможно землетрясение и т.д.).

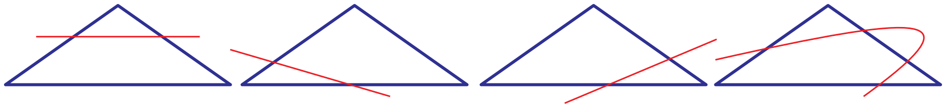
Учитель даёт информацию об обратной теореме.

Третья деятельность, данная в учебнике, выполняется группами, вспоминается пройденное учащимися в VI классе о свойстве вертикальных углов. Затем свойство вертикальных углов выражается в виде теоремы. Доказательство теоремы поручается учащимся, поделённым на группы. Учитель доводит до внимания учащихся, чтобы при доказательстве они использовали теорему о сумме смежных углов.

В течение второго урока выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 3.** Предложение, данное в этом задании, называется аксиомой Туси-Паша. Учащиеся наглядно могут обосновать, что прямая, пересекающая любую сторону треугольника, может пересечь только одну из оставшихся сторон треугольника.



В случае, когда прямая параллельна одной из сторон треугольника, объяснение аксиомы ясно: у параллельных прямых нет общей точки. Если прямая пересечёт другие две стороны треугольника, то это не прямая, а кривая.

Во время объяснения этой задачи исторические сведения о Насреддине Туси можно представить с помощью компьютера:

*Считающийся «шахом науки» Насреддин Туси родился в городе Тус в 1201 году. Получив первоначальное образование у отца, затем он завершил своё образование у последователей известных учёных того времени – Ибн Сины и Бахманьяра. Полученные глубокие знания в скором времени делают Туси известным в научном мире. Насреддин Туси является автором более 100 книг по астрономии, физике, медицине, истории, минералогии, математике, экономике, географии, музыке и другим областям науки. Из них можно указать на «Интерпретация знаков», «Правила геометрии», «О круге и цилиндре», «Конические сечения Аполлония», «Квадратура круга Архимеда», «Произведение «Сферика» Менелая», «Об астролябии», «Воспоминания об астрономии», «О представлении», «О вечности и бесконечности вселенной», «Алмагеста Птолемея», «Изоляция», «Ахлаги-Насри», «Джавахирнаме», «О стоимости», «30 глав», «История Багдада», «Трактат об отражении и преломлении света», «Оптика Евклида», «Трактат об изучении радуги», «Книга о драгоценных камнях», «Законы медицины» и др. произведения. Многие произведения великого учёного-энциклопедиста ждут своих исследователей. Его произведения были распространены в разных точках мира. Их можно увидеть в музеях и библиотеках Баку, Парижа, Берлина, Вены, Кембриджа, Оксфорда, Лейпцига, Мюнхена, Флоренции, Каира, Стамбула, Москвы, Санкт-Петербурга, Казани и др.*

*Великий азербайджанский учёный Насреддин Туси умер во время путешествия 25 июня 1274 года в Багдаде и был захоронен там в «Джума мечети» в ногах могилы 7-го Имама Мусы Ибн Джафари-Садига.*

**Дифференциальное обучение:** Учитель может составить рабочие листы в соответствии с уровнем каждого учащегося. В этих рабочих листах даются разные предложения и даётся задание составить для этих предложений обратные им предложения. Сильные учащиеся могут сами выбрать предложения.

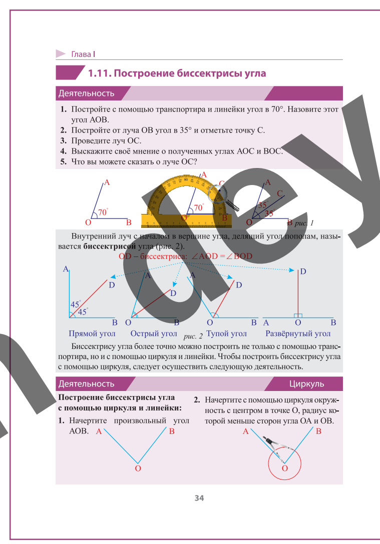
**Обобщение и результат:** Повторяя изученное о понятиях теоремы, прямой и обратной теоремы, учитель обобщает пройденное.

**Оценивание**

- Осознание

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется осознать понятия теоремы, обратной теоремы;<br>Не осознаёт понятия теоремы, её условия и утверждения, доказательства;<br>Не может различать условие и утверждение теоремы;<br>Не может назвать обратную теореме теорему. |
| Уровень II | Называет обратную теорему теоремы, не может определить её верность/неверность;<br>Затрудняется в доказательстве теоремы. |
| Уровень III | Составляет и доказывает обратную теорему (предложение) теоремы (или любого предложения). |
| Уровень IV | Самостоятельно выполняет доказательство теоремы (предложения) и обратной теоремы (предложения) |

## Урок 1.11. Построение биссектрисы угла


Глава I

1.11. Построение биссектрисы угла

Деятельность

1. Постройте с помощью транспортира и линейки угол в 70°. Назовите этот угол AOB.
2. Постройте от луча OB угол в 35° и отметьте точку C.
3. Проведите луч OC.
4. Выскажите своё мнение о полученных углах AOC и BOC.
5. Что вы можете сказать о луче OC?


*рис. 1*

Внутренний луч с началом в вершине угла, делящий угол пополам, называется **биссектрисой** угла (рис. 2).


*рис. 2*

Биссектрису угла более точно можно построить не только с помощью транспортира, но и с помощью циркуля и линейки. Чтобы построить биссектрису угла с помощью циркуля, следует осуществить следующую деятельность.

Деятельность — Циркуль

**Построение биссектрисы угла с помощью циркуля и линейки:**

1. Начертите произвольный угол AOB.
2. Начертите с помощью циркуля окружность с центром в точке O, радиус которой меньше сторон угла OA и OB.



34

**Стандарт:** 3.1.2. Делит отрезок пополам, строит серединный перпендикуляр отрезка, биссектрису угла и треугольник по его сторонам.

**Результат обучения:** строит биссектрису угла с помощью линейки и циркуля.

**Форма работы:** индивидуальная работа

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ, интерактивная доска

**Интеграция:** Информатика 2.2.2.

### Ход урока:

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Каждый учащийся индивидуально выполняет деятельность, данную в учебнике. С помощью транспортира строится угол 70° и делится лучом OC пополам. При выполнении этой операции учитель должен подходить к каждому учащемуся, просмотреть работу каждого. Учитель может выполнить ту же работу на доске или на заранее подготовленной программе на компьютере. В итоге, выполнив деятельность, учащиеся построят биссектрису угла с помощью транспортира.

**Объяснение учителя**: Учитель даёт информацию о биссектрисе и показывает на разных видах углов их биссектрисы.

**Исследовательский вопрос**: Как можно построить биссектрису угла с помощью линейки и циркуля?

Чтобы провести исследование учащиеся должны выполнить вторую деятельность. Учитель или любой учащийся, по указанию учителя, могут выполнить эту деятельность на доске или на компьютере.

После проведения построения проверяется работа каждого учащегося и учителем оценивается точность построения. Учащиеся должны уметь сказать алгоритм проведения построения.

В продолжении исследования выполняются задания из учебника. Учитель раздает каждому учащемуся рабочие листы с заданиями, учитывающими уровень каждого учащегося. Используя интерактивную доску, можно наглядно показать построение биссектрисы угла.

**Дифференциальное обучение:** Слабые учащиеся могут затрудняться в построении биссектрисы угла. С таким учащимся можно работать, посадив его с сильным учащимся в пару (слабый + сильный). Во время построения следует обратить внимание на навыки использования учащимися циркуля.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз обращая внимание учащихся на построение с помощью циркуля, проводит обобщение.

**Оценивание**

● Построение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется построить биссектрису угла с помощью циркуля;<br>Навыки владения циркулем слабые;<br>Строя биссектрису, отмечает точку пересечения кругов, но не может довести построение биссектрисы до конца. |
| Уровень II | Не может точно построить биссектрису угла;<br>Если даже построит биссектрису неверно, говорит об этом на основе неравных углов. |
| Уровень III | Точно строит биссектрису угла с помощью циркуля. |
| Уровень IV | Точно строит биссектрису угла и обосновывает свои мысли. |

## Урок 1.12. Биссектрисы треугольника

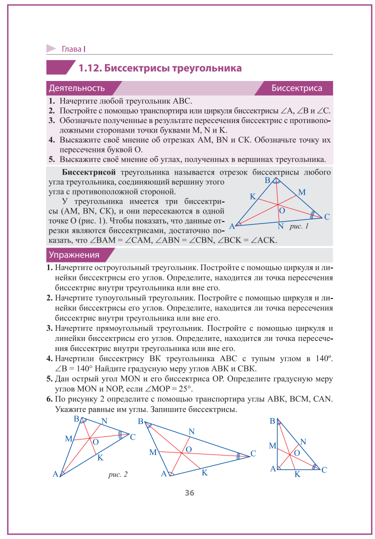
**Стандарт:** 3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически их изображает.

**Результат обучения:** Знает отношения между биссектрисами треугольника и геометрически их изображает.

**Форма работы:** индивидуальная работа

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ


Глава I

1.12. Биссектрисы треугольника

Деятельность — Биссектриса

1. Начертите любой треугольник ABC.
2. Постройте с помощью транспортира или циркуля биссектрисы ∠A, ∠B и ∠C.
3. Обозначьте полученные в результате пересечения биссектрис с противоположными сторонами точки буквами M, N и K.
4. Выскажите своё мнение об отрезках AM, BN и CK. Обозначьте точку их пересечения буквой O.
5. Выскажите своё мнение об углах, полученных в вершинах треугольника.

**Биссектрисой** треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с противоположной стороной.

У треугольника имеется три биссектрисы (AM, BN, CK), и они пересекаются в одной точке O (рис. 1). Чтобы показать, что данные отрезки являются биссектрисами, достаточно показать, что ∠BAM = ∠CAM, ∠ABN = ∠CBN, ∠BCK = ∠ACK.


рис. 1

Упражнения

1. Начертите остроугольный треугольник. Постройте с помощью циркуля и линейки биссектрисы его углов. Определите, находится ли точка пересечения биссектрис внутри треугольника или вне его.
2. Начертите тупоугольный треугольник. Постройте с помощью циркуля и линейки биссектрисы его углов. Определите, находится ли точка пересечения биссектрис внутри треугольника или вне его.
3. Начертите прямоугольный треугольник. Постройте с помощью циркуля и линейки биссектрисы его углов. Определите, находится ли точка пересечения биссектрис внутри треугольника или вне его.
4. Начертили биссектрису BK треугольника ABC с тупым углом в 140º. ∠B = 140° Найдите градусную меру углов ABK и CBK.
5. Дан острый угол MON и его биссектриса OP. Определите градусную меру углов MON и NOP, если ∠MOP = 25°.
6. По рисунку 2 определите с помощью транспортира углы ABK, BCM, CAN. Укажите равные им углы. Запишите биссектрисы.


рис. 2

36

### Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: Каждый учащийся индивидуально выполняет деятельность, данную в учебнике. Учащиеся уже знают, как строить биссектрису угла. Согласно условию деятельности биссектрисы трёх углов треугольника должны строиться с помощью циркуля или транспортира. Определяется точка пересечения биссектрис (по треугольнику). До внимания учащихся доводится определение биссектрисы.

**Исследовательский вопрос**: Как располагаются биссектрисы треугольника?

Для проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 1.** В этом задании каждый учащийся чертит любой остроугольный треугольник. С помощью циркуля строит биссектрисы углов. Измеряет градусную меру углов, возникших при появлении биссектрисы, и проверяет точность построения. Определяет место точки пересечения биссектрис, т.е. её наличие в пределах или за пределами треугольника.

**Упражнение № 6.** На основе рисунков, данных в задании, у каждого треугольника ABK, BCM, NAC измеряются углы с помощью транспортира. Определяются равные углы. Записываются названия биссектрис: AN, BK, CM.

**Дифференциальное обучение:** Целесообразно, чтобы слабые и сильные учащиеся работали в парах. В этом случае слабые учащиеся могут улучшить свои результаты, а также у учащихся формируются навыки совместной работы.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Возникает вопрос о том, в какой точке биссектриса треугольника пересекает противоположную сторону. Здесь важным моментом является то, что учащимся следует объяснить важность того, что главное не точка, которая появляется при пересечении биссектрисы с противоположной стороной, а то, что биссектриса делит угол пополам.

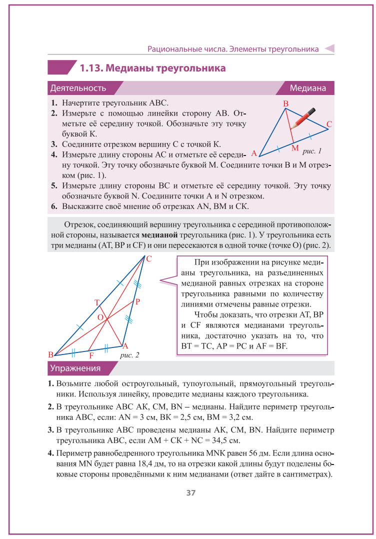
**Обобщение и результат:** Обобщая пройденное, учитель ещё раз доводит до внимания учащихся наличие у треугольника трёх биссектрис, точки их пересечения и размещения её, независимо от вида треугольника, внутри треугольника.

### Оценивание

● Изображение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не знает, как располагаются биссектрисы треугольника, затрудняется в изображении;<br>Неправильно изображает биссектрисы треугольника. |
| Уровень II | Знает, как располагаются биссектрисы треугольника, изображая, допускает определённые ошибки. |
| Уровень III | Знает, как располагаются биссектрисы треугольника, самостоятельно изображает их. |
| Уровень IV | Самостоятельно изображает и объясняет биссектрисы треугольника. |

# Урок 1.13. Медианы треугольника


Рациональные числа. Элементы треугольника

1.13. Медианы треугольника

Деятельность — Медиана

1. Начертите треугольник ABC.
2. Измерьте с помощью линейки сторону AB. Отметьте её середину точкой. Обозначьте эту точку буквой K.
3. Соедините отрезком вершину C с точкой K.
4. Измерьте длину стороны AC и отметьте её середину точкой. Эту точку обозначьте буквой M. Соедините точки B и M отрезком (рис. 1).
5. Измерьте длину стороны BC и отметьте её середину точкой. Эту точку обозначьте буквой N. Соедините точки A и N отрезком.
6. Выскажите своё мнение об отрезках AN, BM и CK.


рис. 1

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника (рис. 1). У треугольника есть три медианы (AT, BP и CF) и они пересекаются в одной точке (точке O) (рис. 2).


рис. 2

При изображении на рисунке медианы треугольника, на разъединенных медианой равных отрезках на стороне треугольника равными по количеству линиями отмечены равные отрезки.

Чтобы доказать, что отрезки AT, BP и CF являются медианами треугольника, достаточно указать на то, что BT = TC, AP = PC и AF = BF.

Упражнения

1. Возьмите любой остроугольный, тупоугольный, прямоугольный треугольники. Используя линейку, проведите медианы каждого треугольника.
2. В треугольнике ABC AK, CM, BN – медианы. Найдите периметр треугольника ABC, если: AN = 3 см, BK = 2,5 см, BM = 3,2 см.
3. В треугольнике ABC проведены медианы AK, CM, BN. Найдите периметр треугольника ABC, если AM + CK + NC = 34,5 см.
4. Периметр равнобедренного треугольника MNK равен 56 дм. Если длина основания MN будет равна 18,4 дм, то на отрезки какой длины будут поделены боковые стороны проведёнными к ним медианами (ответ дайте в сантиметрах).

37

**Стандарт:** 3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически их изображает.
**Результат обучения:** Знает свойство медиан треугольника и геометрически их изображает.
**Форма работы:** индивидуальная работа, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, интерактивная доска, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы**: Каждый учащийся самостоятельно выполняет деятельность, данную в учебнике. До объяснения учащимся понятия медианы треугольника, выполняется процесс построения медианы. Сторона любого треугольника делится линейкой пополам и серединная точка отрезка соединяется с противоположной вершиной. Таким образом строится медиана треугольника.

**Исследовательский вопрос**: Какие отношения между медианами и сторонами, от которых они строятся?

С целью проведения исследования упражнение № 1 из учебника выполняется группами. Каждая группа строит медианы одного из видов треугольника и объясняет, на какие части они делят противоположную сторону. Наглядно построить медианы треугольника можно с помощью интерактивной доски.

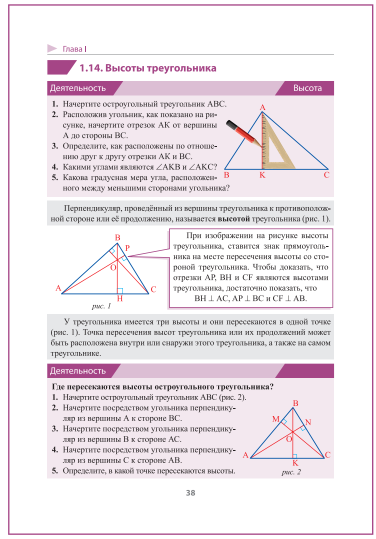
**Обобщение и результат:** Обобщая пройденное, учитель ещё раз доводит до внимания учащихся наличие в треугольнике трёх медиан, точки их пересечения и размещения её независимо от вида треугольника внутри треугольника.

**Оценивание**

● Изображение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не знает отношения между медианами треугольника, затрудняется в изображении. |
| Уровень II | Знает отношения между медианами треугольника, допускает определённые ошибки при изображении. |
| Уровень III | Знает отношения между медианами треугольника, самостоятельно изображает. |
| Уровень IV | Знает отношения между медианами треугольника, самостоятельно изображает и объясняет. |

# Урок 1.14. Высоты треугольника


Глава I

1.14. Высоты треугольника

Деятельность — Высота

1. Начертите остроугольный треугольник ABC.
2. Расположив угольник, как показано на рисунке, начертите отрезок AK от вершины A до стороны BC.
3. Определите, как расположены по отношению друг к другу отрезки AK и BC.
4. Какими углами являются ∠AKB и ∠AKC?
5. Какова градусная мера угла, расположенного между меньшими сторонами угольника?



Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к противоположной стороне или её продолжению, называется **высотой** треугольника (рис. 1).



рис. 1

При изображении на рисунке высоты треугольника, ставится знак прямоугольника на месте пересечения высоты со стороной треугольника. Чтобы доказать, что отрезки AP, BH и CF являются высотами треугольника, достаточно показать, что BH ⊥ AC, AP ⊥ BC и CF ⊥ AB.

У треугольника имеется три высоты и они пересекаются в одной точке (рис. 1). Точка пересечения высот треугольника или их продолжений может быть расположена внутри или снаружи этого треугольника, а также на самом треугольнике.

Деятельность

**Где пересекаются высоты остроугольного треугольника?**

1. Начертите остроугольный треугольник ABC (рис. 2).
2. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины A к стороне BC.
3. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины B к стороне AC.
4. Начертите посредством угольника перпендикуляр из вершины C к стороне AB.
5. Определите, в какой точке пересекаются высоты.



рис. 2

38

**Стандарт:** 3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически их изображает.

**Результат обучения:** Знает свойство высот треугольника и геометрически их изображает.

**Форма работы:** индивидуальная работа

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: Учащиеся самостоятельно выполняют деятельность, данную в учебнике. Чтобы построить высоту треугольника, следует из вершины к противоположной стороне провести перпендикуляр. Проведение перпендикуляра с помощью угольника учащиеся знают из уроков VI класса. Поэтому при выполнении этого задания им не сложно будет использовать угольник. Учитель должен проследить за работой каждого ученика, при необходимости оказать помощь. При выполнении деятельности следует использовать остроугольный треугольник.

**Исследовательский вопрос**: Где в зависимости от вида треугольника располагается точка пересечения высот или прямых, на которых располагаются эти высоты?

Для проведения исследования учащиеся класса делятся на 3 группы.

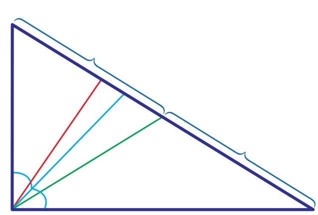
I группа выполняет вторую деятельность (построение высот остроугольного треугольника), II группа – третью деятельность (построение высот прямоугольного треугольника), III группа – четвёртую деятельность (построение высот тупоугольного треугольника). После выполнения задания группами, выслушивается их мнение, обсуждается место расположения точки пересечения для каждого случая.

Учитель должен стараться, чтобы работа третьей группы обсуждалась дольше и была доведена до внимания учащихся.

В продолжение исследования выполняются задания из учебника.

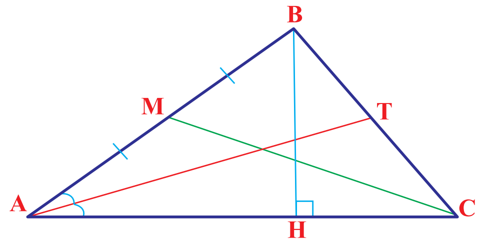
**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 2.** Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника строятся высота, медиана и биссектриса. Эти элементы, проведённые из единой вершины треугольника, строятся в определённой последовательности. По построению учащиеся определяют, что высота более короткая, биссектриса немного длиннее высоты, а медиана длиннее обеих.



**Упражнение №5.** В треугольнике ABC построены биссектриса AT, высота BH и медиана CM. Предложения можно дополнить нижеприведённым:

а) если AT биссектриса, то, $\angle BAT = \angle CAT$.
б) если CM медиана, то BM = AM.
в) если BH высота, то отрезки BH и AC являются перпендикуляром. $BH \perp AC$.




Поменяв местами условие с утверждением в предложениях, запишем:
а) если $\angle BAT = \angle CAT$, то AT – биссектриса.
б) если BM = AM, то CM – медиана.
в) если $BH \perp AC$, то BH – высота. Каждое из этих предложений верно.

**Упражнение №8.** В треугольнике на рисунке AM – высота, AP – биссектриса, AK – медиана. Выполняя предыдущие задания, учащиеся уже это определили. На основе рисунка проделав необходимые измерения, учащиеся могут убедиться в верности их суждений.

**Дифференциальное обучение:** Согласно деятельности учебника строятся высоты разных видов треугольника. Практика показывает, что учащиеся затрудняются в нахождении точки пересечения высот тупоугольного треугольника. По этой причине класс по результатам обучения можно разделить на 3 группы. 1 группа – слабые учащиеся – строят высоты прямоугольного треугольника, вторая группа – средние учащиеся – остроугольного треугольника, третья группа – сильные учащиеся – тупоугольного треугольника. Каждая группа представляет свою работу в классе. Учитель может довести до сведения учащихся об их разделении по успеваемости.

**Обобщение и результат:** Обобщая пройденное, учитель ещё раз напоминает учащимся о наличии в треугольнике трёх высот, точке их пересечения и размещении её независимо от вида треугольника внутри или за пределами треугольника. Ещё раз подчёркивает, что в тупоугольном треугольнике высоты острых углов доводятся до удлинения противоположных сторон.

**Оценивание**

● Изображение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не знает свойство высот треугольника, затрудняется в изображении. |
| Уровень II | Знает свойство высот треугольника, допускает определённые ошибки при изображении. |
| Уровень III | Знает свойство высот треугольника, самостоятельно изображает. |
| Уровень IV | Знает свойство высот треугольника, самостоятельно изображает и объясняет. |

## Образец критериев оценивания для составления заданий для малого суммативного оценивания №2

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Применяет аксиомы планиметрии |
| 2 | Знает понятия теоремы и обратной теоремы, называет предложение, обратное заданному предложению |
| 3 | Строит биссектрису угла |
| 4 | Строит биссектрисы треугольника |
| 5 | Строит медианы треугольника |
| 6 | Строит высоты треугольника |

## Образец малого суммативного оценивания № 2

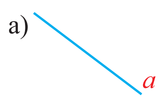
Фамилия: ____________________ Имя:_____________

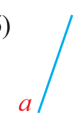
Количество правильных ответов: _____

Количество неправильных ответов: ___ Оценка:___

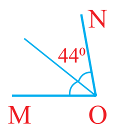
**1**. Начертите любую прямую *a* и отметьте не принадлежащие ей точки A и B таким образом, чтобы эти точки относительно *a* были:

а) в одной полуплоскости;
б) в разных полуплоскостях.

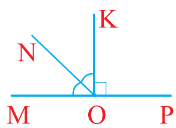
а) 


б) 


**2**. На основе рисунков определите градусную меру угла MON.




$\angle MON =$

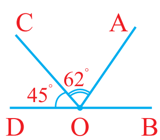


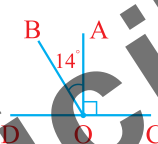

$\angle MON =$

**3**. Изображены медианы AK, BM и CN треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если AM = 5 см, BN = 3,6 см, CK = 2,2 см.

______________________________________
______________________________________
______________________________________
______________________________________

**4**. На основе рисунков определите градусную меру угла AOB:

а) 

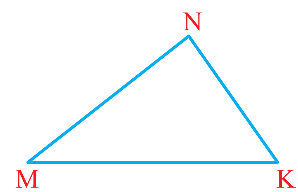

б) 


______________________________________
______________________________________
______________________________________

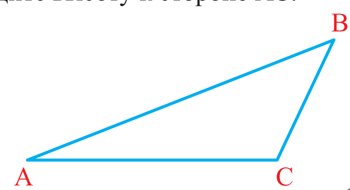
**5**. Биссектрисы треугольника делят его углы соответственно на 35°, 45° и 10°. Найдите углы треугольника.

______________________________________
______________________________________

**6**. Используя угольник, постройте высоты данного треугольника MNK.




**7**. Из вершины B треугольника ABC проведите высоту к стороне AC.



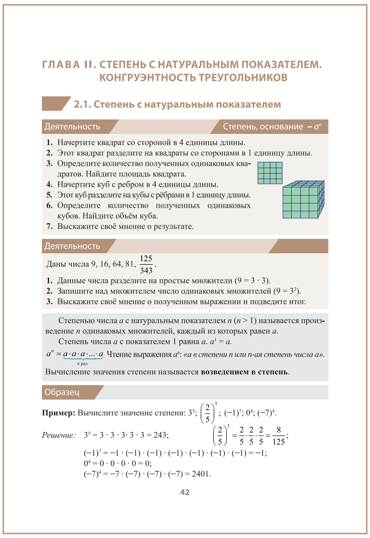

**8**. Постройте угол в 80° и постройте его биссектрису.

## ГЛАВА II

# СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. КОНГРУЭНТНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

| Стандарт | Учебная единица | Тема | Часы |
|---|---|---|---|
| 1.2.2. | Глава II. Степень с натуральным показателем. Свойства конгруэнтности треугольников | **Урок 2.1.** Степень с натуральным показателем | **2** |
| 1.2.2. | | **Урок 2.2.** Произведение степеней с одинаковым основаниями | **1** |
| 1.2.2. | | **Урок 2.3.** Деление степеней с одинаковыми основаниями | **2** |
| 1.2.2. | | **Урок 2.4.** Возведение степени в степень | **2** |
| 1.2.2. | | **Урок 2.5.** Возведение произведения в степень | **1** |
| 1.2.2. | | **Урок 2.6.** Одночлен и его стандартный вид | **2** |
| 1.2.2. | | **Урок 2.7.** Возведение частного в степень | **1** |
| 1.2.1., 1.2.3. | | **Урок 2.8.** Выражения со степенью с натуральным показателем | **2** |
| 1.2.5. | | **Урок 2.9.** Формула простого процентного роста | **2** |
| 1.2.5. | | **Урок 2.10.** Формула сложного процентного роста | **2** |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 3 | **1** |
| 3.2.2. | | **Урок 2.11.** Конгруэнтные треугольники | **1** |
| 3.2.2. | | **Урок 2.12.** Первый признак конгруэнтности треугольников | **2** |
| 3.2.2., 4.1.1. | | **Урок 2.13.** Второй признак конгруэнтности треугольников | **2** |
| 3.1.1. | | **Урок 2.14.** Свойства равнобедренных треугольников | **2** |
| 3.1.2. | | **Урок 2.15.** Построение треугольника по трём сторонам | **1** |
| 3.2.2. | | **Урок 2.16.** Третий признак конгруэнтности треугольников | **2** |
| | | Проверьте себя | **1** |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 4 | **1** |
| | | Образец большого суммативного оценивания № 1 | **1** |

# Урок 2.1. Степень с натуральным показателем



ГЛАВА II. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. КОНГРУЭНТНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

2.1. Степень с натуральным показателем

Деятельность | Степень, основание – $a^n$

1. Начертите квадрат со стороной в 4 единицы длины.
2. Этот квадрат разделите на квадраты со сторонами в 1 единицу длины.
3. Определите количество полученных одинаковых квадратов. Найдите площадь квадрата.
4. Начертите куб с ребром в 4 единицы длины.
5. Этот куб разделите на кубы с рёбрами в 1 единицу длины.
6. Определите количество полученных одинаковых кубов. Найдите объём куба.
7. Выскажите своё мнение о результате.

Деятельность

Даны числа 9, 16, 64, 81, $\frac{125}{343}$.

1. Данные числа разделите на простые множители ($9 = 3 \cdot 3$).
2. Запишите над множителем число одинаковых множителей ($9 = 3^2$).
3. Выскажите своё мнение о полученном выражении и подведите итог.

Степенью числа $a$ с натуральным показателем $n$ ($n > 1$) называется произведение $n$ одинаковых множителей, каждый из которых равен $a$.

Степень числа $a$ с показателем 1 равна $a$. $a^1 = a$.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ Чтение выражения $a^n$: *«a в степени n или n-ая степень числа a»*.

Вычисление значения степени называется **возведением в степень**.

Образец

**Пример:** Вычислите значение степени: $3^5$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; $(-1)^7$; $0^4$; $(-7)^4$.

*Решение:* $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$;

$(-1)^7 = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

$0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;

$(-7)^4 = -7 \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = 2401$.

42

**Стандарт:** 1.2.2. Применяет свойства степени с натуральным показателем.

**Результат обучения:** Демонстрирует знания понятия степени с натуральным показателем.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Интеграция:** Информатика 4.1.3

### Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа**.**

**Постановка проблемы**: Учитель на доске или на экране компьютера представляет запись $a^2$ и $a^3$. Спрашивает мнение учащихся об этих записях и записывает их ответы рядом с каждым выражением. Затем выполняется первая деятельность, данная в учебнике. На основе деятельности понятия квадрата и куба числа определяются на фигурах квадрата и куба. Длина стороны в 1 единицу измерения одного квадрата площадью 1 кв. единица и, поскольку число таких квадратов 16, площадь большого квадрата равна 16 кв. единицам. По тому же правилу, длина ребра в 1 единицу измерения одного куба объёмом 1 кубическая единица и число таких кубов 64. Следовательно, объём большого куба составляет 64 кубические единицы.

Данные во второй деятельности числа представлены способом простого разложения на множители в виде произведения этих множителей.

Затем выполняется третья деятельность. Данное число представлено в виде суммы разрядных слагаемых. Выслушивается мнение учащихся о записи $a \cdot 10^n$, полученной в результате представления в виде степени разрядных единиц.

**Объяснение учителя**: Учитель даёт информацию учащимся о понятии степени с натуральным показателем, её записи и прочтении. Объясняет учащимся стандартную запись числа.

**Исследовательский вопрос:** Что такое степень с натуральным показателем, как определяется её основание и степень?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 4.**

г) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$;  е) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = -\frac{64}{125}$;

д) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243}$;   ё) $(1,(5))^2 = \left(1\frac{5}{9}\right)^2 = \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{196}{81}$.

**Упражнение № 6.** В этом задании разъясняется правило возведения в степень с помощью калькулятора. Целесообразно использовать калькулятор при возведении в степень многозначных чисел.

а) $4{,}12^3 \Rightarrow 4{,}12* = = 69{,}934528 \approx 69{,}9$;   $4{,}12^3 \approx 69{,}9$.
б) $(-0{,}78)^5 \Rightarrow 0{,}78* = = = = 0{,}2887174368 \approx 0{,}3$;   $(-0{,}78)^5 \approx -0{,}3$.
г) $2{,}08^3 : 1{,}56 = 8{,}998912 : 1{,}56 = 5{,}7685(3) \approx 5{,}8$.
д) $1{,}67^3 \cdot 4{,}7 = 4{,}657463 \cdot 4{,}7 = 21{,}8900761 \approx 21{,}9$.
ж) $2{,}73^5 \cdot 27{,}4 \approx 4154{,}9$.
з) $(1{,}29 + 8{,}052)^3 = 9{,}342^3 = 815{,}30402 \approx 815{,}3$.

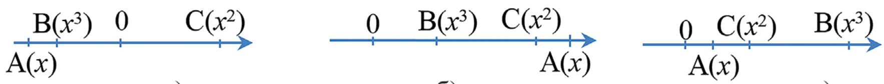
**Упражнение № 8.** Заполняя таблицу, учащиеся должны обращать внимание на повторяющиеся цифры степеней с основанием 2 и 3. Анализируя это свойство, определяется, что последняя цифра значений степеней с основаниями 2, 3, 7, 8, повторяется через каждые 4 последовательные натуральные степени:
1) $2^1 = 2$,  $2^2 = 4$,  $2^3 = 8$,  $2^4 = 16$,  $2^5 = 32$.
2) $3^1 = 3$,  $3^2 = 9$,  $3^3 = 27$,  $3^4 = 81$,  $3^5 = 243$.
3) $8^1 = 8$,  $8^2 = 64$,  $8^3 = 512$,  $8^4 = 4096$,  $8^5 = 32768$.
Согласно этому свойству, определим последнюю цифру значения степени: последней цифрой значения степени $2^{18}$ будет 4, так как, включаясь в 16 степень, период полностью повторяется, в следующем периоде последней цифрой значения второй степени является 4. По тому же принципу, последней цифрой значения $3^{25}$ будет 3; последней цифрой значения $4^{89}$ – 4; последней цифрой значения $5^{100}$ – 5; последней цифрой значения $10^{99}$ – 0; последней цифрой значения $8^{54}$ – 4.

**Упражнение № 10**. б) если $a = \left(-\frac{3}{4}\right)$, то найдём значение выражения $a^4 - a^2$:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^4 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{81}{256} - \frac{9}{16} = \frac{81}{256} - \frac{144}{256} = -\frac{63}{256}.$$

**Упражнение № 14**. а) если $n$ – чётное число, то расставим данные числа в возрастающей последовательности: $0^n$; $0{,}6^n$; $(-1{,}7)^n$; $(-5)^n$; $7^n$.
б) если $n$ – нечётное число, то расставим данные числа в возрастающей последовательности: $(-5)^n$; $(-1{,}7)^n$; $0^n$; $0{,}6^n$; $7^n$.
**Упражнение № 15**. а) в неравенстве $(-7)^n > (-5)^n$ $n$ – чётное число, так как только при чётном $n$ будет $-7 < -5$, $(-7)^n > (-5)^n$.
б) в неравенстве $(-7)^n < (-5)^n$ $n$ – нечётное число.
в) в неравенстве $(-7)^n > 5^n$ $n$ – чётное число.
д) в неравенстве $7^n > 5^n$ невозможно утверждать о чётности или нечётности $n$.
е) в неравенстве $7^n > (-5)^n$ невозможно утверждать о чётности и нечётности $n$, при любом значении $n$ неравенство будет верным.
**Упражнение № 16.** а) Учащийся, рассматривая первую числовую ось, должен обратить внимание на то, что точка с координатой $x^2$ находится справа от начала отсчёта, а точка

с координатой $x^3$ – слева от начала отсчёта. То есть $x^2 > 0$ b $x^3 < 0$, следовательно, $x < 0$. С другой стороны, точка B($x^3$) относительно точки C($x^2$) ближе к 0. Следовательно, точка A($x$) на числовой оси расположена между числами –1 и 0.




а) б) в)

б) Во втором случае обе точки располагаются справа от 0. Следовательно, $x > 0$. Но точка C($x^2$) правее относительно точки B($x^3$). Тогда точка A($x$) располагается между числами 0 и 1.
в) В третьем случае обе точки расположены справа от 0. Следовательно, $x > 0$. Точка C($x^2$) располагается левее точки B($x^3$). Тогда число $x$ также больше 1: $x > 1$. Точка A($x$) на числовой оси будет располагаться справа от 1.

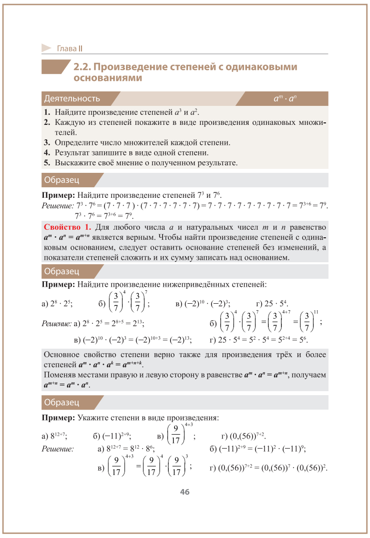
**Упражнение № 17.** Для выстраивания чисел в возрастающей последовательности без проведения вычислений, следует помнить, что отрицательные числа меньше положительных. С другой стороны, основания данных степеней располагаются между числами 0 и 1 или –1 и 0. С увеличением степени у степени с основанием, расположенным между 0 и 1, сама степень уменьшается. С увеличением степени у степени с основанием, расположенным между –1 и 0, степень увеличивается.
а) возрастающая последовательность: $(-0{,}7)^9$; $(-0{,}7)^6$; $(-0{,}7)^2$.
б) возрастающая последовательность: $(-0{,}3)^6$; $(-0{,}3)^4$; $(-0{,}3)^2$.
в) возрастающая последовательность: $\left(-\frac{1}{5}\right)^5$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^4$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$.
г) возрастающая последовательность: $(-0{,}(1))^5$; $(-0{,}(1))^7$; $(-0{,}(1))^2$.

**Обобщение и результат:** Показывая степени с натуральными показателями, основание и показатель, повторяя всё, что было пройдено о стандартном виде числа, учитель проводит обобщение.

**Оценивание**
● Осознание

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в осознании понятия степени с натуральным показателем;<br>Не может вычислить степень с натуральным показателем. |
| Уровень II | Данную степень показывает в виде произведения, допускает определённые ошибки при нахождении степени с натуральным показателем;<br>Показывает степень с натуральным показателем в виде произведения или произведение показывает в виде степени с натуральным показателем, допускает незначительные ошибки. |
| Уровень III | Самостоятельно находит степень числа с натуральным показателем, определяет основание и степень. |
| Уровень IV | Опирается на примеры при нахождении степени с натуральным показателем. |

## Урок 2.2. Произведение степеней с одинаковыми основаниями



Глава II

2.2. Произведение степеней с одинаковыми основаниями

Деятельность $a^m \cdot a^n$

1. Найдите произведение степеней $a^3$ и $a^2$.
2. Каждую из степеней покажите в виде произведения одинаковых множителей.
3. Определите число множителей каждой степени.
4. Результат запишите в виде одной степени.
5. Выскажите своё мнение о полученном результате.

Образец

**Пример:** Найдите произведение степеней $7^3$ и $7^6$.

*Решение:* $7^3 \cdot 7^6 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{3+6} = 7^9$.

$7^3 \cdot 7^6 = 7^{3+6} = 7^9$.

**Свойство 1.** Для любого числа $a$ и натуральных чисел $m$ и $n$ равенство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ является верным. Чтобы найти произведение степеней с одинаковым основанием, следует оставить основание степеней без изменений, а показатели степеней сложить и их сумму записать над основанием.

Образец

**Пример:** Найдите произведение нижеприведённых степеней:

а) $2^8 \cdot 2^5$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^7$; в) $(-2)^{10} \cdot (-2)^3$; г) $25 \cdot 5^4$.

*Решение:* а) $2^8 \cdot 2^5 = 2^{8+5} = 2^{13}$; б) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^7 = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{11}$;

в) $(-2)^{10} \cdot (-2)^3 = (-2)^{10+3} = (-2)^{13}$; г) $25 \cdot 5^4 = 5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$.

Основное свойство степени верно также для произведения трёх и более степеней $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$.

Поменяв местами правую и левую сторону в равенстве $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, получаем $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Образец

**Пример:** Укажите степени в виде произведения:

а) $8^{12+7}$; б) $(-11)^{2+9}$; в) $\left(\frac{9}{17}\right)^{4+3}$; г) $(0,(56))^{7+2}$.

*Решение:* а) $8^{12+7} = 8^{12} \cdot 8^6$; б) $(-11)^{2+9} = (-11)^2 \cdot (-11)^9$;

в) $\left(\frac{9}{17}\right)^{4+3} = \left(\frac{9}{17}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{17}\right)^3$; г) $(0,(56))^{7+2} = (0,(56))^7 \cdot (0,(56))^2$.

46

**Стандарт:** 1.2.2. Применяет свойства степеней с натуральным показателем.

**Результат обучения:** Находит произведение степеней с натуральным показателем.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы

### Ход урока:

На изучение темы отводится 1 час**.**

**Постановка проблемы**: Деятельность, данная в учебнике, может выполняться парами. Учитель задаёт найти произведение $a^3 \cdot a^2$, каждая степень показывается в виде произведения одинаковых множителей: $(a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a)$. При раскрытии скобки получается степень $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$. Таким образом, учащиеся сами определяют, что $a^3 \cdot a^2 = a^5$. Об этом равенстве выслушивается мнение учащихся. В следующем вопросе вместо $a$ учитель может записать любое число (как это дано в образце из учебника).

Основываясь на деятельность и образцы, учитель спрашивает мнение учащихся о нахождении произведения степеней. Выслушивается мнение учащихся и свойство даётся в виде формулы для двух и более множителей.

**Исследовательский вопрос:** Как применяется правило нахождения произведения степеней с натуральным показателем?

С целью проведения исследования задания из учебника могут быть розданы на рабочих листах учащимся, поделённым на группы.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 4.** Выполним некоторые задания из таблицы (это задание можно выполнить, раздав по группам):

| | |
|---|---|
| $(-3{,}2x)^2 \cdot (-3{,}2x)^4 = (3{,}2x)^6$ | $(-0{,}6)^4 \cdot (-0{,}6) = (-0{,}6)^5$ |
| $(a-b)^5 \cdot (a-b)^8 = (a-b)^{13}$ | $16^2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16^5 = 16^9$ |
| $(x+2y)^9 \cdot (x+2y)^{10} = (x+2y)^{19}$ | $2{,}3 \cdot 2{,}3^8 \cdot 2{,}3^6 \cdot 2{,}3 = 2{,}3^{16}$ |
| $\left(\frac{4}{3}x\right)^{11} \cdot \left(\frac{4}{3}x\right)^8 \cdot \left(\frac{4}{3}x\right)^9 = \left(\frac{4}{3}x\right)^{28}$ | $(1,(5))^3 \cdot \left(\frac{14}{9}\right)^8 = \left(\frac{14}{9}\right)^{11}$ |

**Упражнение № 5.** Задание так же, как и предыдущее, может быть выполнено в группах:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $2^4 \leftarrow 16$ | $2^5 \leftarrow 32$ | $5^2 \leftarrow 25$ | $2^6 \leftarrow 64$ | $15^2 \leftarrow 225$ |
| $2^7 \leftarrow 128$ | $2^8 \leftarrow 512$ | $4^4 \leftarrow 256$ | $3^3 \leftarrow 27$ | $2^{10} \leftarrow 1024$ |
| $3^4 \leftarrow 81$ | $3^5 \leftarrow 243$ | $19^2 \leftarrow 361$ | $3^6 \leftarrow 729$ | $3^7 \leftarrow 2187$ |

**Упражнение № 6.** Выполняя задания, учащиеся должны уметь показать числа в виде степени 2.

а) $8 \cdot 32 = 2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$;  в) $16 \cdot 64 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} = 1024$;

д) $256 \cdot 64 = 2^8 \cdot 2^6 = 2^{14} = 16384$;  г) $8 \cdot 1024 = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13} = 8192$.

**Упражнение № 8.** Выполняя задание, учащиеся должны суметь показать правую и левую сторону равенства в виде степеней с одинаковыми основаниями. В этом случае определяется значение n в равенствах.

а) $3^n = 27$; $3^3 = 27$, $n = 3$.

б) $2^n = 64$; $2^6 = 64$, $n = 6$.

д) $7^n = 343$; $7^3 = 343$, $n = 3$.

**Упражнение № 9**. Чтобы упростить выражения, применяется свойство нахождения произведения степеней. В качестве помощи учащимся приводится образец в учебнике.

а) $5^{n-2} \cdot 5^n = 5^{n-2+n} = 5^{2n-2}$;  б) $17^{m+1} \cdot 17^{m-1} = 17^{m+1+m-1} = 17^{2m}$.

в) $6^{1-k} \cdot 6^{k+3} = 6^{1-k+k+3} = 6^4$.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учащиеся часто будут использовать степени с натуральными показателями с основаниями 2, 3, 4, 5, …, 10. Составив таблицу значений этих степеней, они могут ею пользоваться. Это в помощь слабым учащимся.

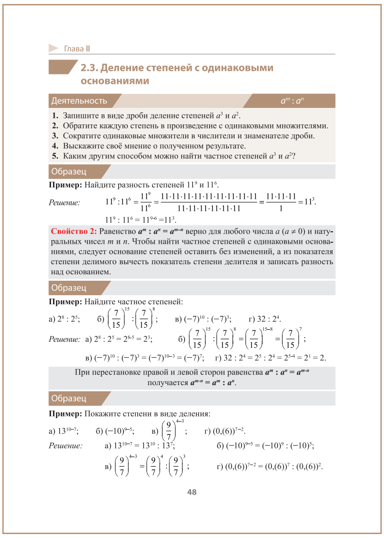
**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз обращая внимание на свойства нахождения степеней с натуральным показателем, обобщает пройденное.

**Оценивание**

● Применение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется вычислить произведение степеней с одинаковыми основаниями;<br>Находя произведение степеней с одинаковыми основаниями, умножает основания или показатели. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при применении правил нахождения произведения степеней с одинаковыми основаниями. |
| Уровень III | Применяет правило нахождения произведения степеней с одинаковыми основаниями. |
| Уровень IV | Самостоятельно применяет правило нахождения степеней с одинаковыми основаниями. |

# Урок 2.3. Деление степеней с одинаковыми основаниями


Глава II

2.3. Деление степеней с одинаковыми основаниями

Деятельность $a^m : a^n$

1. Запишите в виде дроби деление степеней $a^3$ и $a^2$.
2. Обратите каждую степень в произведение с одинаковыми множителями.
3. Сократите одинаковые множители в числители и знаменателе дроби.
4. Выскажите своё мнение о полученном результате.
5. Каким другим способом можно найти частное степеней $a^3$ и $a^2$?

Образец

**Пример:** Найдите разность степеней $11^9$ и $11^6$.

*Решение:* $11^9 : 11^6 = \frac{11^9}{11^6} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11}{11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 11}{1} = 11^3.$

$11^9 : 11^6 = 11^{9-6} = 11^3.$

**Свойство 2:** Равенство $\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$ верно для любого числа $a$ ($a \neq 0$) и натуральных чисел $m$ и $n$. Чтобы найти частное степеней с одинаковыми основаниями, следует основание степеней оставить без изменений, а из показателя степени делимого вычесть показатель степени делителя и записать разность над основанием.

Образец

**Пример:** Найдите частное степеней:

а) $2^8 : 2^5$; б) $\left(\frac{7}{15}\right)^{15} : \left(\frac{7}{15}\right)^{8}$; в) $(-7)^{10} : (-7)^3$; г) $32 : 2^4$.

*Решение:* а) $2^8 : 2^5 = 2^{8-5} = 2^3$; б) $\left(\frac{7}{15}\right)^{15} : \left(\frac{7}{15}\right)^{8} = \left(\frac{7}{15}\right)^{15-8} = \left(\frac{7}{15}\right)^{7}$;

в) $(-7)^{10} : (-7)^3 = (-7)^{10-3} = (-7)^7$; г) $32 : 2^4 = 2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1 = 2$.

При перестановке правой и левой сторон равенства $\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$ получается $\boldsymbol{a^{m-n} = a^m : a^n}$.

Образец

**Пример:** Покажите степени в виде деления:

а) $13^{10-7}$; б) $(-10)^{9-5}$; в) $\left(\frac{9}{7}\right)^{4-3}$; г) $(0,(6))^{7-2}$.

*Решение:* а) $13^{10-7} = 13^{10} : 13^7$; б) $(-10)^{9-5} = (-10)^9 : (-10)^5$;

в) $\left(\frac{9}{7}\right)^{4-3} = \left(\frac{9}{7}\right)^{4} : \left(\frac{9}{7}\right)^{3}$; г) $(0,(6))^{7-2} = (0,(6))^7 : (0,(6))^2$.

48

**Стандарт:** 1.2.2. Применяет свойства степеней с натуральным показателем.

**Результат обучения:** Находит частное степеней с натуральным показателем.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа**.**

**Постановка проблемы**: Деятельность, данная в учебнике, выполняется. Учитель задаёт найти частное $a^3 : a^2$. Частное записывается учащимися в виде дроби и степени преобразовывают в произведение одинаковых множителей:

$$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a$$

Выслушивается мнение учащихся о полученном результате. Проводятся обсуждения, как можно найти частное $a^3 : a^2$ другим способом. Свойство нахождения частного степеней с одинаковыми основаниями выражается в виде формулы или правила.

Выполняя следующую деятельность, учащиеся анализируют свойство степени с показателем нуль. Учащиеся, определившие, что здесь $a^3 : a^3 = 1$ (частное одинаковых чисел равно 1) и, с другой стороны, $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$ должны прийти к выводу, что $a^0 = 1$.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Может возникнуть вопрос о том, зачем изучать в этой теме степень $a^0$ если нуль не является натуральным числом. Возникает запись $a^n : a^n = a^0$ при вычислении частного степеней с одинаковыми основаниями и показателями. В этом случае целесообразно обратить внимание учащихся на свойство равенства этой степени 1.

**Исследовательский вопрос:** Как применяется свойство нахождения частного степеней с натуральным показателем?

С целью проведения исследования задания из учебника раздаются на рабочих листах учащимся, поделённым на группы.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 6.**

г) $\frac{3^9 \cdot 27}{3^5 \cdot 81} = (3^9 \cdot 3^3) : (3^5 \cdot 3^4) = 3^{12} : 3^9 = 3^3 = 27;$

d) $\frac{16 \cdot 2^{19}}{2^{22}} = (2^4 \cdot 2^{19}) : 2^{22} = 2^{23} : 2^{22} = 2^1 = 2;$

ё) $\frac{5^{17} \cdot 125}{5^7 \cdot 625} = (5^{17} \cdot 5^3) : (5^7 \cdot 5^4) = 5^{20} : 5^{11} = 5^9;$

з) $\dfrac{(0,(21))^{15}}{(0,(21))^{14}} \cdot \dfrac{\left(4\dfrac{5}{7}\right)^{8}}{\left(4\dfrac{5}{7}\right)^{7}} = \left(\left(\dfrac{21}{99}\right)^{15} : \left(\dfrac{21}{99}\right)^{14}\right) \cdot \left(\left(\dfrac{33}{7}\right)^{8} : \left(\dfrac{33}{7}\right)^{7}\right) = \left(\dfrac{7}{33}\right)^{1} \cdot \left(\dfrac{33}{7}\right)^{1} = \dfrac{7}{33} \cdot \dfrac{33}{7} = 1;$

и) $\dfrac{(0,7)^{9} \cdot \dfrac{7}{10}}{(0,7)^{7} \cdot \left(\dfrac{7}{10}\right)^{2}} = (0,7^{9} \cdot 0,7^{1}) : (0,7^{7} \cdot 0,7^{2}) = 0,7;.$

**Упражнение № 8.** а) $c^2 \cdot * = c^8$; $* = c^6$, в) $cc^7 \cdot * = c^{18}$ ; $c^8 \cdot * = c^{18}$ ; $* = c^{10}$,
б) $ccc \cdot * = c^{10}$ ; $c^3 \cdot * = c^{10}$ ; $* = c^7$, е) $* \cdot c^{15} \cdot c^3 = c^{43}$; $* = c^{25}$.

**Упражнение № 10.** Исследуя данную таблицу, вычислим значение X:

| № | A | B | C | X |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | –3 | –1,2 | $(A^3 + B^2) \cdot C^2 = (4^3 + (-3)^2) \cdot (-1,2)^2 = 73 \cdot 1,44 = 105,12$ |
| 2 | 5 | 7 | –139 | $2^A - B^2 + C^0 = 2^5 - 7^2 + (-139)^0 = 32 - 49 + 1 = -16$ |
| 3 | $\dfrac{4}{5}$ | $-1\dfrac{1}{4}$ | 0 | $A^3\left(B^2+100^C\right) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\left(-1\dfrac{1}{4}\right)^2 + 100^0\right) = \dfrac{164}{125}$. |

**Упражнение № 14.** В выражении $a^{n+1} : a^m$ вместо $m$ и $n$ следует записать такое число, чтобы показатель степени был равен а) 8. То есть: $a^{n+1} : a^m = a^8$. Отсюда вытекает: $n + 1 - m = 8$ и $n - m = 7$. Как видно, в равенстве есть две переменные. Учащийся сам должен выбрать числа, которые запишет вместо $n$ и $m$. Например: $n = 18{,}6$ и $m = 11{,}6$.

**Дифференциальное обучение**: Вычисляя частное степеней с одинаковыми основаниями, учащиеся могут испытывать определённые трудности, выполняя задания упражнения № 6. Учащимся, затрудняющимся решать такого рода задания, можно дать дополнительные примеры.

а) $(49 \cdot 343) : (7^2 \cdot 2401)$; б) $\dfrac{36 \cdot 216}{6^2 \cdot 1296}$; в) $\dfrac{81 \cdot 3^7 \cdot 9}{3^4 \cdot 3^5}$; г) $\dfrac{125 \cdot 625}{5^6 \cdot 25}$;.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз подчеркнув свойство нахождения частного степеней с натуральным показателем, обобщает пройденное. Обобщая пройденное о степени с нулевым показателем, учитель объясняет причины, по которым несмотря на то, что нуль не является натуральным числом, рассматриваются степени с показателем нуль.

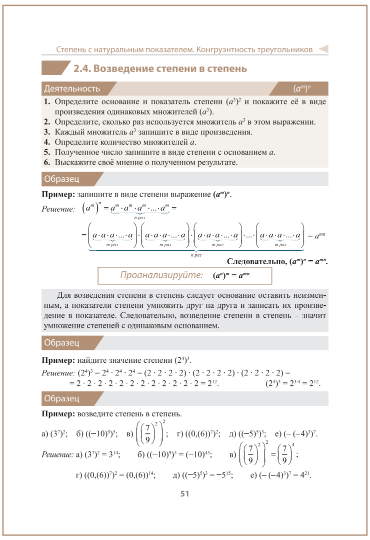
**Оценивание**

- Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в применении в решении упражнения правила нахождения частного степеней с одинаковыми основаниями;<br>При нахождении частного степеней с одинаковыми основаниями делит основания или показатели. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при применении правила нахождения частного степеней с одинаковыми основаниями. |

| | |
|---|---|
| Уровень III | Самостоятельно применяет правило нахождения частного степеней с одинаковыми основаниями. |
| Уровень IV | Творчески применяет правило нахождения частного степеней с одинаковыми основаниями. |

## Урок 2.4. Возведение степени в степень


Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников

**2.4. Возведение степени в степень**

Деятельность $(a^m)^n$

1. Определите основание и показатель степени $(a^3)^2$ и покажите её в виде произведения одинаковых множителей ($a^3$).
2. Определите, сколько раз используется множитель $a^3$ в этом выражении.
3. Каждый множитель $a^3$ запишите в виде произведения.
4. Определите количество множителей $a$.
5. Полученное число запишите в виде степени с основанием $a$.
6. Выскажите своё мнение о полученном результате.

Образец

**Пример:** запишите в виде степени выражение $(a^m)^n$.

*Решение:* $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot ... \cdot a^m}_{n\ раз} =$

$$= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m\ раз}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m\ раз}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m\ раз}) \cdot ... \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m\ раз})}_{n\ раз} = a^{mn}$$

**Следовательно, $(a^m)^n = a^{mn}$.**

Проанализируйте: $(a^n)^m = a^{mn}$

Для возведения степени в степень следует основание оставить неизменным, а показатели степени умножить друг на друга и записать их произведение в показателе. Следовательно, возведение степени в степень – значит умножение степеней с одинаковым основанием.

Образец

**Пример:** найдите значение степени $(2^4)^3$.

*Решение:* $(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}$.   $(2^4)^3 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

Образец

**Пример:** возведите степень в степень.

а) $(3^7)^2$; б) $((-10)^9)^5$; в) $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^2\right)^2$; г) $((0,(6))^7)^2$; д) $((-5)^5)^3$; е) $(-(-4)^3)^7$.

*Решение:* а) $(3^7)^2 = 3^{14}$; б) $((-10)^9)^5 = (-10)^{45}$; в) $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^4$;
г) $((0,(6))^7)^2 = (0,(6))^{14}$; д) $((-5)^5)^3 = -5^{15}$; е) $(-(-4)^3)^7 = 4^{21}$.

51

**Стандарт:** 1.2.2. Применяет свойства степеней с натуральным показателем.

**Результат обучения:** Умеет возводить степень в степень.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа**.**

**Постановка проблемы**: Ставится проблема упростить степень $(a^3)^2$. Учитель задаёт учащимся определить основание и показатель степени. Выслушиваются ответы учащихся. Записывается, как $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3$. Определяется, что основание $a^3$ тоже является степенью. Следующим шагом является запись степени $a^3$ в виде произведения $a \cdot a \cdot a$. Таким образом, результат анализа записывается на доске, как $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$.

Выслушивается мнение учащихся об этой записи. В результате, учащиеся определяют, что при возведении степени в степень следует умножать показатели степени.

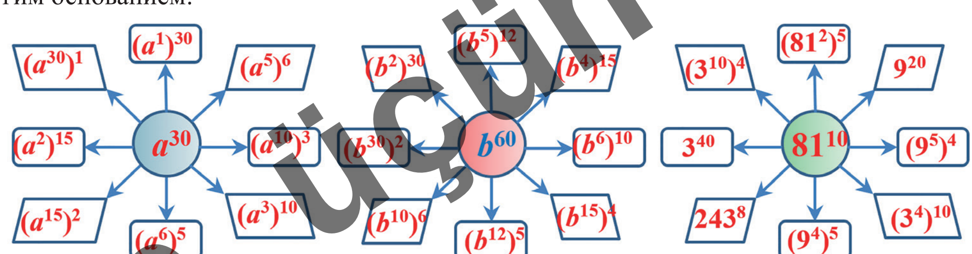
Следующим шагом следует доказать равенство $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$**,** данное в качестве образца в учебнике, чтобы записать его в виде формулы возведение степени в степень.

**Исследовательский вопрос**: Как применяется свойство возведения степени в степень?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются на рабочих листах, розданных учащимся, поделённым на группы.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 5.** Покажем разными способами данные степени в виде степени с другим основанием:



**Упражнение № 6**. При выполнении этого задания, у учащихся формируются творческие навыки. Задание можно выполнить в группах или парах. Каждая группа выполняет свою работу и объясняет её.

а) $(a^2)^2 \cdot (a)^3 = a^7$; б) $(k)^4 \cdot (k^2)^3 = k^{10}$; в) $(c^5)^2 \cdot (c)^3 = c^{13}$;
г) $(a^3)^5 \cdot (a^2)^4 = a^{23}$; д) $(k^2)^2 \cdot (k)^3 = k^7$; е) $(c)^2 \cdot (c^3)^3 = c^{11}$.

**Упражнение № 7**. Для сравнения степеней $4^{10}$ и $8^7$ их нужно преобразовать в степени с одинаковыми основаниям: $4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$ и $8^7 = (2^3)^7 = 2^{21}$, таким образом, $4^{10} < 8^7$. По такому же принципу решаются другие примеры:

а) $3^8$ и $27^3 = (3^3)^3 = 3^9$, поэтому, $3^8 < 27^3$. б) $8^9 = (2^3)^9 = 2^{27} < 2^{28}$.
в) $25^3 = (5^2)^3 = 5^6$ и $125^2 = (5^3)^2 = 5^6$, поэтому, $25^3 = 125^2$.
г) $36^4 = (6^2)^4 = 6^8$ и $216^2 = (6^3)^2 = 6^6$, поэтому, $36^4 > 216^2$.

**Упражнение № 9.** б) $x \cdot (7^2 \cdot 9) = 49 \cdot 3^6$; $x = \dfrac{7^2 \cdot 3^6}{7^2 \cdot 3^2} = 3^4$; $x = 81$.
в) $2^4 \cdot 2^x = 2^{17}$, $2^x = 2^{17} : 2^4$, $2^x = 2^{13}$, $x = 13$.

**Дифференциальное обучение:** Учащиеся затрудняются в преобразовании степеней с разными основаниями в степени с одинаковыми основаниями. Поэтому им следует задавать больше примеров (если это возможно) на преобразование степеней с разными основаниями в степени с одинаковыми основаниями.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз обращая внимание на свойство возведения степени в степень, обобщает пройденное.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в применении свойства возведения степени в степень; Возводя степень в степень, складывает показатели или возводит показатель в степень. |
| Уровень II | Нуждается в определённом руководстве при возведении степени в степень. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет свойство возведения степени в степень. |
| Уровень IV | Творчески применяет свойство возведения степени в степень. |

## Урок 2.5. Возведение произведения в степень

**Стандарт:** 1.2.2. Применяет свойства степеней с натуральным показателем.
**Результат обучения:** Применяет свойства возведения произведения в степень.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы

**Ход урока:**

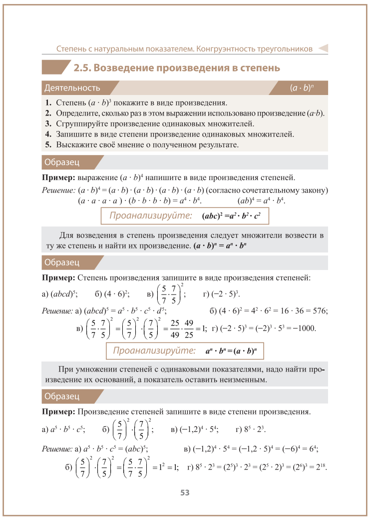
На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы**: Учитель задаёт учащимся исследовать степень $(a \cdot b)^3$. В этом выражении определяется основание и показатель.

Три раза записывается произведение множителя ($ab$).
$(a \cdot b)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3b^3$.

Выслушивается мнение учащихся об этом выражении. После того, как учащиеся назовут свойство возведения произведения в степень, учитель разъясняет это правило. До внимания учащихся доводится формула $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$.

Анализ равенства $\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ из учебника поручается учащимися. Учащиеся класса делятся на группы и вокруг этого вопроса проводится исследование. Во время исследования число $n$ может быть заменено любым натуральным числом: $n = 3$.
$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = (ab)\,(ab)\,(ab) = (ab)^3$.


Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников

## 2.5. Возведение произведения в степень

Деятельность $(a \cdot b)^n$

1. Степень $(a \cdot b)^3$ покажите в виде произведения.
2. Определите, сколько раз в этом выражении использовано произведение $(a \cdot b)$.
3. Сгруппируйте произведение одинаковых множителей.
4. Запишите в виде степени произведение одинаковых множителей.
5. Выскажите своё мнение о полученном результате.

Образец

**Пример:** выражение $(a \cdot b)^4$ напишите в виде произведения степеней.

*Решение:* $(a \cdot b)^4 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ (согласно сочетательному закону)
$(a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = a^4 \cdot b^4$. $(ab)^4 = a^4 \cdot b^4$.

Проанализируйте: $\boldsymbol{(abc)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$

Для возведения в степень произведения следует множители возвести в ту же степень и найти их произведение. $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Образец

**Пример:** Степень произведения запишите в виде произведения степеней:

а) $(abcd)^5$; б) $(4 \cdot 6)^2$; в) $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2$; г) $(-2 \cdot 5)^3$.

*Решение:* а) $(abcd)^5 = a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 \cdot d^5$; б) $(4 \cdot 6)^2 = 4^2 \cdot 6^2 = 16 \cdot 36 = 576$;
в) $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{25}{49} \cdot \frac{49}{25} = 1$; г) $(-2 \cdot 5)^3 = (-2)^3 \cdot 5^3 = -1000$.

Проанализируйте: $\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

При умножении степеней с одинаковыми показателями, надо найти произведение их оснований, а показатель оставить неизменным.

Образец

**Пример:** Произведение степеней запишите в виде степени произведения.

а) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5$; б) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2$; в) $(-1{,}2)^4 \cdot 5^4$; г) $8^5 \cdot 2^3$.

*Решение:* а) $a^5 \cdot b^5 \cdot c^5 = (abc)^5$; в) $(-1{,}2)^4 \cdot 5^4 = (-1{,}2 \cdot 5)^4 = (-6)^4 = 6^4$;
б) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}\right)^2 = 1^2 = 1$; г) $8^5 \cdot 2^3 = (2^5)^3 \cdot 2^3 = (2^5 \cdot 2)^3 = (2^6)^3 = 2^{18}$.

53

**Исследовательский вопрос**: Как применяется возведение произведения в степень?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 4.** Обоснуем нижеследующие предложения:

а) Квадраты противоположных чисел равны, поскольку квадратом отрицательного числа является положительное число: $(-5)^2 = 5^2 = 25$;

б) Кубы противоположных чисел – противоположные числа, поскольку числом куба отрицательных чисел является отрицательное число, а число куба положительных чисел – положительное число;

в) Вообще степени противоположных чисел с чётными показателями всегда равны друг другу (если показатель одно и то же чётное число) $(-7)^6 = 7^6$.

Степени противоположных чисел с нечётными показателями всегда противоположно равны друг другу (если показатель одно и то же нечётное число) $(-7)^5 = 7^5$.

**Упражнение № 5.** В этом задании учащиеся, увеличив в несколько раз длину сторон квадрата, рассматривают во сколько раз увеличивается площадь квадрата, а также, увеличив в несколько раз длину ребра куба, рассматривают во сколько раз увеличивается объём куба.

| **Длина стороны квадрата** | **Площадь квадрата** | **Как изменилась площадь?** | **Длина ребра куба** | **Объём куба** | **Как изменился объём?** |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a^2$ | Если сторона увеличилась в 2 раза (3 раза), площадь увеличивается в 4 раза (в 9 раз), т.е. площадь квадрата увеличится на квадрат длины его стороны. | $a$ | $a^3$ | Если ребро увеличилась в 2 раза (3 раза), объём увеличивается в 8 раз (в 27 раз), т.е. объём куба увеличится на куб длины его ребра. |
| $2a$ | $4a^2$ | | $2a$ | $8a^3$ | |
| $3a$ | $9a^2$ | | $3a$ | $27a^3$ | |
| 5 см | 25 см² | 1) $10 = 2 \cdot 5$<br>$100 = 4 \cdot 25$<br>2) $20 = 4 \cdot 5$<br>$400 = 16 \cdot 25$ | 2 см | 8 см³ | 1) $8 = 4 \cdot 2$<br>$512 = 64 \cdot 8$<br>2) $12 = 6 \cdot 2$<br>$1728 = 216 \cdot 8$ |
| 10 см | 100 см² | | 8 см | 512 см³ | |
| 20 см | 400 см² | | 12 см | 1728 см³ | |

Следовательно, если сторона квадрата увеличиться (уменьшится) в $k$ раз, его площадь увеличится (уменьшится) в $k^2$ раз, ребро куба увеличится (уменьшится) в $k$ раз, его объём увеличится (уменьшится) в $k^3$ раз.

**Упражнение № 7.**

в) $25x^2y^4 = (5xy^2)^2$; д) $\dfrac{64}{169}r^8 = \left(\dfrac{8}{13}r^4\right)^2$; е) $81a^4b^8 = (3ab^2)^4$;

ж) $(20 + 44)a^3 = 64a^3 = (4a)^3$; з) $\dfrac{-125}{216}x^{18} = \left(\dfrac{-5}{6}x^6\right)^3$.

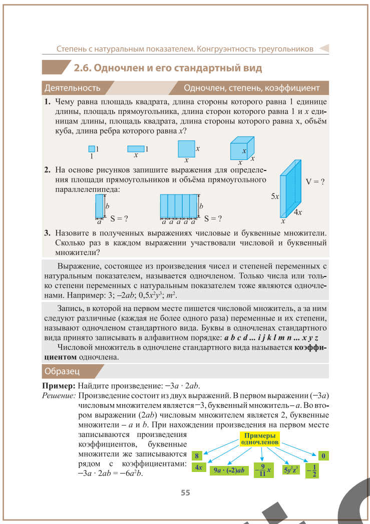
**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз отмечая свойство возведения произведения в степень, обобщает пройденное.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в применении свойства возведения произведения в степень;<br>Возводя произведение в степень, показатели умножает или складывает. |
| Уровень II | Нуждается в определённом руководстве при применении свойства возведения произведения в степень. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет свойство возведения произведения в степень. |
| Уровень IV | Применяет с объяснениями свойства возведения произведения в степень. |

## Урок 2.6. Одночлен и его стандартный вид



Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников

**2.6. Одночлен и его стандартный вид**

Деятельность | Одночлен, степень, коэффициент

1. Чему равна площадь квадрата, длина стороны которого равна 1 единице длины, площадь прямоугольника, длина сторон которого равна 1 и $x$ единицам длины, площадь квадрата, длина стороны которого равна x, объём куба, длина ребра которого равна $x$?

2. На основе рисунков запишите выражения для определения площади прямоугольников и объёма прямоугольного параллелепипеда:

S = ? S = ? V = ?

3. Назовите в полученных выражениях числовые и буквенные множители. Сколько раз в каждом выражении участвовали числовой и буквенный множители?

Выражение, состоящее из произведения чисел и степеней переменных с натуральным показателем, называется одночленом. Только числа или только степени переменных с натуральным показателем тоже являются одночленами. Например: 3; $-2ab$; $0,5x^2y^3$; $m^2$.

Запись, в которой на первом месте пишется числовой множитель, а за ним следуют различные (каждая не более одного раза) переменные и их степени, называют одночленом стандартного вида. Буквы в одночленах стандартного вида принято записывать в алфавитном порядке: ***a b c d ... i j k l m n ... x y z***

Числовой множитель в одночлене стандартного вида называется **коэффициентом** одночлена.

Образец

**Пример:** Найдите произведение: $-3a \cdot 2ab$.

*Решение:* Произведение состоит из двух выражений. В первом выражении ($-3a$) числовым множителем является $-3$, буквенный множитель – $a$. Во втором выражении ($2ab$) числовым множителем является 2, буквенные множители – $a$ и $b$. При нахождении произведения на первом месте записываются произведения коэффициентов, буквенные множители же записываются рядом с коэффициентами: $-3a \cdot 2ab = -6a^2b$.



55

**Стандарт:** 1.2.2. Применяет свойства степеней с натуральным показателем.

**Результат обучения:** Применяет в одночлене свойства степеней с натуральным показателем.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

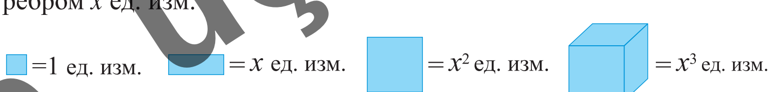
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

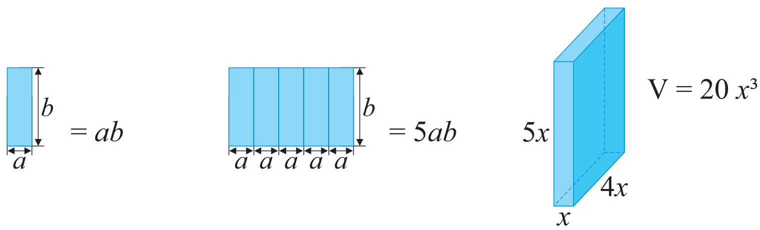
**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: Учитель посредством компьютера на экране демонстрирует квадрат площадью 1 кв. единица со стороной в единицу измерения (ед. изм.), прямоугольник площадью $x$ кв. единиц со сторонами 1 и $x$ ед. изм., квадрат площадью $x^2$ кв. единиц со стороной $x$ ед. изм., куб объёмом $x^3$ кв. единиц с ребром $x$ ед. изм.



На следующем этапе учащиеся определяют площадь и объём геометрических фигур, данных в учебнике:




Выслушивается мнение учащихся о числовых и буквенных множителях полученных выражений.

**Объяснение учителя**: После того, как выслушивается мнение учащихся, учитель даёт информацию об одночлене, его стандартном виде, степени и коэффициенте.

**Исследовательский вопрос**: Как в одночленах применяются свойства степеней с натуральным показателем?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 4.** При выполнении задания, используются свойства нахождения произведения степеней с натуральным показателем, возведения в степень.

г) $14yx^2yx\cdot\left(-\frac{5}{7}xy\right)=14\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)x^2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y=-10x^4y^3$; коэффициент –10, степень 7.

д) $(5ab)^3\cdot(-0{,}2a^2b)^2=125\cdot 0{,}04\,a^3\cdot a^4\cdot b^3\cdot b^2=5a^7b^5$; коэффициент 5, степень 12.

е) $12{,}5(-n)b\cdot(0{,}2bn^2)^3=12{,}5\cdot 0{,}008b\cdot b^3\cdot(-n)\cdot n^6=-0{,}1b^4n^7$; коэффициент –0,1, степень 11.

**Упражнение № 6.** При выполнении задания обращается внимание на степень выражения в скобках с правой стороны равенства и одночлен записывается в виде степени с таким же показателем.

а) $64n^{12}d^{20}=(8n^6d^{10})^2$;

б) $6\frac{1}{4}a^{18}b^6=\left(\frac{5}{2}a^9b^3\right)^2$;

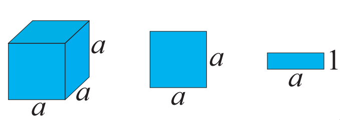
в) $-\frac{1}{125}m^3n^3k^6=\left(-\frac{1}{5}mnk^2\right)^3$;

г) $-32x^{10}y^{15}=(-2x^2y^3)^5$;

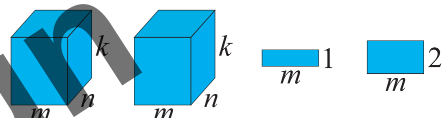
д) $0{,}0081a^4b^8c^{12}=(0{,}3ab^2c^3)^4$;

е) $0{,}008p^9k^{21}=(0{,}2p^3k^7)^3$.

**Упражнение № 10.** Площадь и объём фигур записывается в виде выражения и находится произведение полученных одночленов:

а) 


$a^3\cdot a^2\cdot a=a^6$

б) 


$mnk\cdot mnk\cdot m\cdot 2m=2m^4n^2k^2$

**Упражнение № 11.** Для определения одночлена, который будет записан вместо буквы $M$, используется свойство нахождения частного степеней.

а) $M\cdot 5a^3b=20a^7b^4c^2$; $\quad M=\frac{20a^7b^4c^2}{5a^3b}=4a^4b^3c^2$

б) $-6c^4k^5 \cdot M = 3bc^9k^{10}$; $\quad M = \dfrac{3bc^9k^{10}}{-6c^4k^5} = -0,5bc^5k^5$

в) $M \cdot (2nx^8)^2 = 6n^2x^{20}y$; $\quad M = \dfrac{6n^2x^{20}y}{4n^2x^{16}} = 1,5x^4y$

е) $M \cdot M \cdot M = 27\,x^{12}y^{15}$; $\quad M^3 = (3x^4y^5)^3, \quad M = 3x^4y^5$

**Упражнение № 13.** б) С формулой вычисления объёма цилиндра $V = S_{ot}\,h$ учащиеся знакомы из курса математики за VI класс. На основе рисунка диаметр основания равен $d = 14x^2$, т.е. радиус $r = 7x^2$, высота $h = 1\frac{3}{7}x$ и $\pi \approx 3,14$. По формуле $S_{ot} = \pi r^2$ найдём площадь основания: $S_{ot} = \pi r^2 \approx 3,14 \cdot (7x^2)^2 = 153,86\,x^4$. Таким образом, объём цилиндра:

$$V = 153,86x^4 \cdot 1\frac{3}{7}x = 153,86 \cdot \frac{10}{7}x^4 \cdot x = 219,8x^5$$

**Ответ**: $V = 219,8\,x^5$ кубическая единица.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** При записи одночлена в стандартном виде было принято записывать переменные в алфавитном порядке. Но если алфавитный порядок не прослеживается, это не говорит о записи одночлена не в стандартном виде.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает применение в одночлене свойств степени с натуральным показателем, ещё раз напоминая, отмечает коэффициент одночлена, правила нахождения степени, приведения его в стандартный вид.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в применении в одночленах свойств степени с натуральным показателем;<br>При нахождении произведения одночленов определяет коэффициент, но не может записывать произведение переменных в виде степени. |
| Уровень II | Допускает механические ошибки в применении в одночленах свойств степени с натуральным показателем. |
| Уровень III | Применяет в одночленах свойства степени с натуральным показателем. |
| Уровень IV | Самостоятельно применяет в одночленах свойства степеней с натуральным показателем. |

## Урок 2.7. Возведение частного в степень

**Стандарт:** 1.2.2. Применяет свойства степеней с натуральным показателем.
**Результат обучения:** Применяет свойство возведения частного в степень.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы

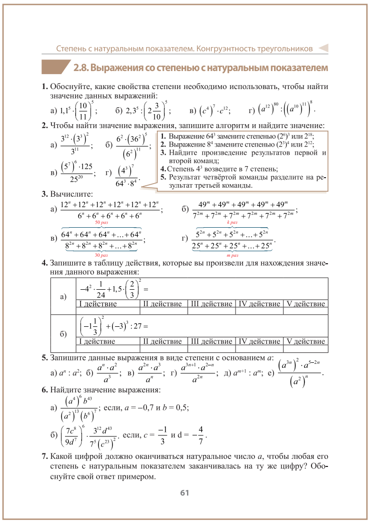
**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час**.**

**Постановка проблемы**: Рассматривается степень $\left(\frac{x}{y}\right)^2$, данная в деятельности учебника. Выполняя деятельность, учащиеся добиваются следующего результата: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x}{y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2}$. Выслушивается мнение учащихся о полученном выражении.

**Объяснение учителя**: После того, как выслушано мнение учащихся, учитель доводит до их внимания свойство возведения частного в степень.

**Исследовательский вопрос:** Как применяется возведение частного в степень?



Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников

**2.8. Выражения со степенью с натуральным показателем**

**1.** Обоснуйте, какие свойства степени необходимо использовать, чтобы найти значение данных выражений:

а) $1{,}1^5 \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^5$; б) $2{,}3^5 : \left(2\frac{3}{10}\right)^5$; в) $\left(c^4\right)^7 \cdot c^{12}$; г) $\left(a^{12}\right)^{80} : \left(\left(a^{10}\right)^{11}\right)^8$.

**2.** Чтобы найти значение выражения, запишите алгоритм и найдите значение:

а) $\frac{3^{12} \cdot \left(3^3\right)^2}{3^{11}}$; б) $\frac{6^2 \cdot \left(36^2\right)^5}{\left(6^2\right)^{11}}$; в) $\frac{\left(5^7\right)^6 \cdot 125}{25^{20}}$; г) $\frac{\left(4^3\right)^7}{64^3 \cdot 8^4}$.

1. Выражение $64^3$ замените степенью $(2^6)^3$ или $2^{18}$;
2. Выражение $8^4$ замените степенью $(2^3)^4$ или $2^{12}$;
3. Найдите произведение результатов первой и второй команд;
4. Степень $4^3$ возведите в 7 степень;
5. Результат четвёртой команды разделите на результат третьей команды.

**3.** Вычислите:

а) $\frac{12^n+12^n+12^n+12^n+12^n+12^n}{6^n+6^n+6^n+6^n+6^n}$; б) $\frac{49^m+49^m+49^m+49^m+49^m}{7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}}$;

в) $\frac{\overbrace{64^n+64^n+64^n+\ldots+64^n}^{50\ раз}}{\underbrace{8^{2n}+8^{2n}+8^{2n}+\ldots+8^{2n}}_{30\ раз}}$; г) $\frac{\overbrace{5^{2n}+5^{2n}+5^{2n}+\ldots+5^{2n}}^{k\ раз}}{\underbrace{25^n+25^n+25^n+\ldots+25^n}_{m\ раз}}$.

**4.** Запишите в таблицу действия, которые вы произвели для нахождения значения данного выражения:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| а) | $-4^2 \cdot \frac{1}{24} + 1{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ | | | | |
| | I действие | II действие | III действие | IV действие | V действие |
| | | | | | |
| б) | $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2 + (-3)^3 : 27 =$ | | | | |
| | I действие | II действие | III действие | IV действие | V действие |
| | | | | | |

**5.** Запишите данные выражения в виде степени с основанием $a$:

а) $a^n : a^2$; б) $\frac{a^n \cdot a^2}{a^3}$; в) $\frac{a^{2n} \cdot a^3}{a^n}$; г) $\frac{a^{3n+1} \cdot a^{2-n}}{a^{2n}}$; д) $a^{m+1} : a^m$; е) $\frac{\left(a^{3n}\right)^2 \cdot a^{5-2n}}{\left(a^2\right)^n}$.

**6.** Найдите значение выражения:

а) $\frac{\left(a^4\right)^6 b^{43}}{\left(a^2\right)^{13} \left(b^6\right)^7}$; если, $a = -0{,}7$ и $b = 0{,}5$;

б) $\left(\frac{7c^8}{9d^7}\right)^6 \cdot \frac{3^{12} d^{43}}{7^5 \left(c^{23}\right)^2}$. если, $c = \frac{-1}{3}$ и $d = -\frac{4}{7}$.

**7.** Какой цифрой должно оканчиваться натуральное число $a$, чтобы любая его степень с натуральным показателем заканчивалась на ту же цифру? Обоснуйте свой ответ примером.

61

С целью проведения исследования учащиеся делятся на 2 группы. Группам даются задания под заголовком «Исследуй», данные в учебнике.

В продолжение исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 6.** а) Если $X = \frac{2}{7}$ и Y = 0,1, определим значение выражения

$$Z = X^2 \cdot 0{,}49 + Y^3 \cdot 430. \qquad Z = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 0{,}49 + 01^3 \cdot 430$$

Чтобы найти значение Z, запишем алгоритм:

1. Возведите дробь $\frac{2}{7}$ во 2 степень;
2. Преобразуйте $0{,}49 = \frac{49}{100}$ и результат первого шага умножьте на $\frac{49}{100}$;
3. Результат второго шага запишите в виде десятичной дроби;
4. Возведите число 0,1 в 3 степень;
5. Результат четвёртого шага умножьте на 430;
6. Сложите результаты третьего и пятого шагов.

$$Z = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot 0{,}49 + 01^3 \cdot 430 = \frac{4}{49} \cdot \frac{49}{100} + 0{,}001 \cdot 430 = 0{,}04 + 0{,}43 = 0{,}47$$

**Ответ**: Z = 0,47.

г) Если X = 2 и Y = 24, найдём значение выражения $Z = X^4 \cdot 3^3 : 18 + Y^2$:

$$Z = 2^4 \cdot 3^3 : 18 + 24^2.$$

Алгоритм:
1. Возведите число 2 в четвёртую степень;
2. Возведите число 3 в третью степень;
3. Умножьте результаты первого и второго шагов;
4. Результат третьего шага разделите на 18;
5. Найдите квадрат числа 24;
6. Сложите результаты четвёртого и пятого шагов.

$Z = 2^4 \cdot 3^3 : 18 + 24^2 = 16 \cdot 27 : 18 + 576 = 600.$ **Ответ**: 600.

**Упражнение № 8.** Для решения уравнений примените свойство степени:

б) $$\frac{\left(y^{51}\right)^3:\left(y^{16}\right)^3}{\left(y^2\right)^{61}:\left(y^4\right)^{19}\cdot\left(y^{29}\right)^2}=1993$$

$$\frac{y^{153}:y^{48}}{y^{122}:y^{76}\cdot y^{58}}=1993$$

$$\frac{y^{105}}{y^{104}}=1993$$

$$y=1993$$

**Ответ**: 1993.

г) $$\frac{\left(m^9\right)^{22}\cdot\left(m^{32}\right)^3}{\left(m^{45}\right)^3\cdot\left(m^3\right)^{53}:m}=1995$$

$$\frac{m^{198}\cdot m^{96}}{m^{135}\cdot m^{159}:m}=1995$$

$$\frac{m^{294}}{m^{293}}=1995$$

$$m=1995$$

**Ответ**: 1995.

**Дифференциальное обучение:** Слабые учащиеся при возведении частного в степень иногда возводят числитель в степень, забывают знаменатель или наоборот. С целью устранения такого рода ошибок слабых учащихся учитель может задать им побольше заданий такого типа.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает особенности применения свойств возведения частного в степень.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в применении свойств возведения частного в степень. |
| Уровень II | Нуждается в определённых указаниях при применении свойств возведения частного в степень. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет свойства возведения частного в степень. |
| Уровень IV | Творчески применяет свойства возведения частного в степень. |

## Урок 2.8. Выражения со степенью с натуральным показателем

**Стандарт:** 1.2.1. Находит значение числового выражения, придерживаясь последовательности выполнения действий (в том числе возведение в степень с натуральным показателем).

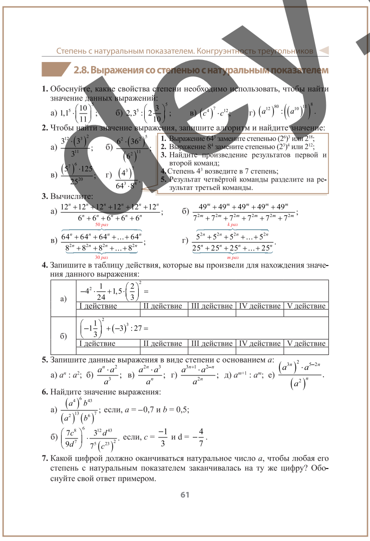
1.2.3. Упрощает выражения, включающие степень с натуральным показателем.

**Результат обучения:** Упрощает числовые и буквенные выражения со степенью с натуральным показателем.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы



Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников

2.8. Выражения со степенью с натуральным показателем

**1.** Обоснуйте, какие свойства степени необходимо использовать, чтобы найти значение данных выражений:

а) $1{,}1^5\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^5$; б) $2{,}3^5:\left(2\frac{3}{10}\right)^5$; в) $\left(c^4\right)^7\cdot c^{12}$; г) $\left(a^{12}\right)^{80}:\left(\left(a^{10}\right)^{11}\right)^8$.

**2.** Чтобы найти значение выражения, запишите алгоритм и найдите значение:

а) $\frac{3^{12}\cdot\left(3^3\right)^2}{3^{11}}$; б) $\frac{6^2\cdot\left(36^2\right)^5}{\left(6^2\right)^{11}}$; в) $\frac{\left(5^7\right)^6\cdot125}{25^{20}}$; г) $\frac{\left(4^3\right)^7}{64^3\cdot8^4}$.

1. Выражение $64^3$ замените степенью $(2^6)^3$ или $2^{18}$;
2. Выражение $8^4$ замените степенью $(2^3)^4$ или $2^{12}$;
3. Найдите произведение результатов первой и второй команд;
4. Степень $4^3$ возведите в 7 степень;
5. Результат четвёртой команды разделите на результат третьей команды.

**3.** Вычислите:

а) $\frac{12^n+12^n+12^n+12^n+12^n+12^n}{6^n+6^n+6^n+6^n+6^n}$; б) $\frac{49^m+49^m+49^m+49^m+49^m}{7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}}$;

в) $\frac{\overbrace{64^n+64^n+64^n+\ldots+64^n}^{50\text{ раз}}}{\underbrace{8^{2n}+8^{2n}+8^{2n}+\ldots+8^{2n}}_{30\text{ раз}}}$; г) $\frac{\overbrace{5^{2n}+5^{2n}+5^{2n}+\ldots+5^{2n}}^{k\text{ раз}}}{\underbrace{25^n+25^n+25^n+\ldots+25^n}_{m\text{ раз}}}$.

**4.** Запишите в таблицу действия, которые вы произвели для нахождения значения данного выражения:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| а) | $-4^2\cdot\frac{1}{24}+1{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=$ | | | | |
| | I действие | II действие | III действие | IV действие | V действие |
| | | | | | |
| б) | $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2+(-3)^3:27=$ | | | | |
| | I действие | II действие | III действие | IV действие | V действие |
| | | | | | |

**5.** Запишите данные выражения в виде степени с основанием $a$:

а) $a^n:a^2$; б) $\frac{a^n\cdot a^2}{a^3}$; в) $\frac{a^{2n}\cdot a^3}{a^n}$; г) $\frac{a^{3n+1}\cdot a^{2-n}}{a^{2n}}$; д) $a^{m+1}:a^m$; е) $\frac{\left(a^{3n}\right)^2\cdot a^{5-2n}}{\left(a^2\right)^n}$.

**6.** Найдите значение выражения:

а) $\frac{\left(a^4\right)^6b^{43}}{\left(a^2\right)^{13}\left(b^6\right)^7}$; если, $a=-0{,}7$ и $b=0{,}5$;

б) $\left(\frac{7c^8}{9d^7}\right)^6\cdot\frac{3^{12}d^{43}}{7^5\left(c^{23}\right)^2}$. если, $c=\frac{-1}{3}$ и d $=-\frac{4}{7}$.

**7.** Какой цифрой должно оканчиваться натуральное число $a$, чтобы любая его степень с натуральным показателем заканчивалась на ту же цифру? Обоснуйте свой ответ примером.

61

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа**.**

Учащиеся изучили разные свойства степени с натуральным показателем. В течение этого урока будут заниматься применением в одном выражении разных свойств степени с натуральным показателем. Здесь станет возможным определить и оценить общие знания учащихся относительно свойств степеней с натуральным показателем и последовательности выполнения действий.

Задания из учебника могут выполняться парами или в группах. В зависимости от уровня класса учитель в рабочие листы может добавить дополнительные задания, помогающие достичь цели.

**Исследовательский вопрос:** Как упрощаются выражения со степенью с натуральным показателем?

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** Чтобы найти значение выражения, каждый учащийся должен уметь написать алгоритм. При этом учащийся демонстрирует свои знания о последовательности выполнения действий, а также у него формируются навыки связной речи, умения строить предложения.

а) **Алгоритм**:
1. Степень $3^3$ возведите во 2 степень;
2. Найдите произведение результата первого шага со степенью $3^{12}$;
3. Результат второго шага разделите на степень $3^{11}$.

**Вычисление**: $\dfrac{3^{12}\cdot\left(3^3\right)^2}{3^{11}}=\dfrac{3^{12}\cdot 3^6}{3^{11}}=\dfrac{3^{18}}{3^{11}}=3^7$

б) $\dfrac{6^2\cdot\left(36^2\right)^5}{\left(6^2\right)^{11}}=\dfrac{6^2\cdot 36^{10}}{6^{22}}=\dfrac{6^2\cdot 6^{20}}{6^{22}}=1$.

в) $\dfrac{\left(5^7\right)^6\cdot 125}{25^{20}}=\dfrac{5^{42}\cdot 5^3}{5^{40}}=\dfrac{5^{45}}{5^{40}}=5^5$

**Ответ**: а) $3^7$; б) 1; в) $5^5$.

**Упражнение № 3.** Выполняя задание, учащиеся, используя преобразования суммы одинаковых слагаемых в произведение, упрощают выражения в числителе и знаменателе.

а) $\dfrac{12^n+12^n+12^n+12^n+12^n+12^n}{b^n+b^n+b^n+b^n+b^n}=\dfrac{6}{5}\cdot\left(\dfrac{12}{6}\right)^n=1,2\cdot 2^n$;

б) $\dfrac{49^m+49^m+49^m+49^m+49^m}{7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}+7^{2m}}=\dfrac{5\cdot 49^m}{6\cdot 7^{2m}}=\dfrac{5\cdot 49^m}{6\cdot 49^m}=\dfrac{5}{6}$;

в) $\dfrac{\overbrace{64^n+64^n+64^n+\ldots+64^n}^{50\ раз}}{\underbrace{8^{2n}+8^{2n}+8^{2n}+\ldots+8^{2n}}_{30\ раз}}=\dfrac{50\cdot 64^n}{30\cdot 64^n}=1\dfrac{2}{3}$.

**Ответ:** а) 1,2 · 2$n$; б) $\dfrac{5}{6}$; в) $1\dfrac{2}{3}$.

**Упражнение № 5.** Выполняя задание, учащиеся демонстрируют навыки применения свойств степени с натуральным показателем в упрощении буквенных выражений.

г) $\dfrac{a^{3n+1}\cdot a^{2-n}}{a^{2n}}=a^{3n+1+2-n-2n}=a^{3};$ е) $\dfrac{\left(a^{3n}\right)^{2}\cdot a^{5-2n}}{\left(a^{2}\right)^{n}}=\dfrac{a^{6n}\cdot a^{5-2n}}{a^{2n}}=a^{6n+5-2n-2n}=a^{2n+5}.$

**Ответ**: г) $a^3$; е) $a^{2n+5}$.

**Упражнение № 6.** Выполняя это задание, учащиеся находят значение буквенного выражения при заданном значении переменной. Однако до того, как найти значение выражения, они должны упростить его.

а) Если $a = -0,7$ и $b = 0,5$, то:

$$\frac{\left(a^{4}\right)^{6}b^{43}}{\left(a^{2}\right)^{13}\left(b^{6}\right)^{7}}=\frac{a^{24}b^{43}}{a^{26}b^{42}}=\frac{b}{a^{2}}=\frac{0,5}{(-0,7)^{2}}=\frac{0,5}{0,49}=\frac{50}{49}=1\frac{1}{49}.$$

б) Если $c=-\dfrac{1}{3}$ и $d=-\dfrac{4}{7}$, то:

$$\left(\frac{7c^{8}}{9d^{7}}\right)^{6}\cdot\frac{3^{12}d^{43}}{7^{5}\left(c^{23}\right)^{2}}=\frac{7^{6}c^{48}}{9^{6}d^{42}}\cdot\frac{3^{12}d^{43}}{7^{5}c^{46}}=\frac{7^{6}\cdot3^{12}\cdot c^{48}\cdot d^{43}}{7^{5}\cdot3^{12}\cdot c^{46}\cdot d^{42}}=7c^{2}d=7\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=-\frac{4}{9}.$$

**Ответ**: а) $1\dfrac{1}{49}$; б) $-\dfrac{4}{9}$.

**Дифференциальное обучение:** В течение этого урока с целью улучшения обучения учитель очередной раз останавливается на вопросах, вызывающих затруднения у учащихся, и составляет рабочие листы на основе этих заданий.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз обращая внимание на способы и средства упрощения числовых и буквенных выражений со степенью с натуральным показателем, проводит обобщение.

**Оценивание**

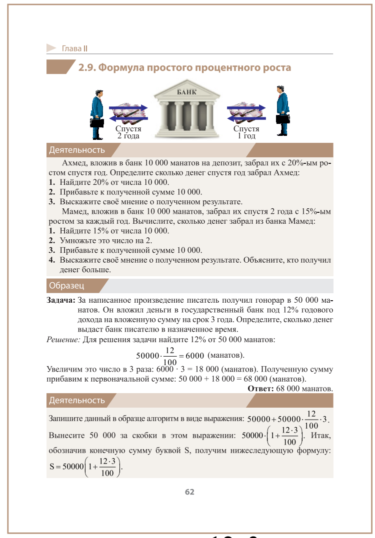
● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в упрощении числовых и буквенных выражений со степенью с натуральным показателем;<br>Находит значение числовых выражений со степенью с натуральным показателем, но не может упрощать буквенные выражения. |
| Уровень II | Допускает механические ошибки при упрощении числовых и буквенных выражений со степенью с натуральным показателем. |
| Уровень III | Самостоятельно упрощает числовые и буквенные выражения со степенью с натуральным показателем. |
| Уровень IV | Самостоятельно упрощает удобными способами числовые и буквенные выражения со степенью с натуральным показателем. |

## Урок 2.9. Формула простого процентного роста

**Стандарт**: 1.2.5. Применяет в решении простых задач формулы простого процентного роста и сложного процентного роста.

**Результат обучения:** Применяет в решении простых задач формулу простого процентного роста.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ


Глава II

2.9. Формула простого процентного роста



Деятельность

Ахмед, вложив в банк 10 000 манатов на депозит, забрал их с 20%-ым ростом спустя год. Определите сколько денег спустя год забрал Ахмед:
1. Найдите 20% от числа 10 000.
2. Прибавьте к полученной сумме 10 000.
3. Выскажите своё мнение о полученном результате.

Мамед, вложив в банк 10 000 манатов, забрал их спустя 2 года с 15%-ым ростом за каждый год. Вычислите, сколько денег забрал из банка Мамед:
1. Найдите 15% от числа 10 000.
2. Умножьте это число на 2.
3. Прибавьте к полученной сумме 10 000.
4. Выскажите своё мнение о полученном результате. Объясните, кто получил денег больше.

Образец

**Задача:** За написанное произведение писатель получил гонорар в 50 000 манатов. Он вложил деньги в государственный банк под 12% годового дохода на вложенную сумму на срок 3 года. Определите, сколько денег выдаст банк писателю в назначенное время.

*Решение:* Для решения задачи найдите 12% от 50 000 манатов:

$$50000\cdot\frac{12}{100}=6000 \text{ (манатов).}$$

Увеличим это число в 3 раза: 6000 · 3 = 18 000 (манатов). Полученную сумму прибавим к первоначальной сумме: 50 000 + 18 000 = 68 000 (манатов).

**Ответ:** 68 000 манатов.

Деятельность

Запишите данный в образце алгоритм в виде выражения: $50000+50000\cdot\frac{12}{100}\cdot 3$. Вынесите 50 000 за скобки в этом выражении: $50000\cdot\left(1+\frac{12\cdot 3}{100}\right)$. Итак, обозначив конечную сумму буквой S, получим нижеследующую формулу: $S=50000\left(1+\frac{12\cdot 3}{100}\right)$.

62

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа**.**

**Постановка проблемы:** Решением задач на нахождение процента учащиеся занимались по курсу математики за VI класс. Деятельность, данная в учебнике, относится к нахождению процента. Согласно данным условиям, учащиеся сравнивают сумму, полученную из банка Ахмедом и Мамедом.

На следующем этапе задача, данная в образце в учебнике, выводится на экран компьютера и исследуется путём решения. Составляется выражение, соответствующее условию задачи, и приводится в виде $S = 50000(1+\frac{12\cdot 3}{100})$. Если в этом выражении начальная сумма будет $S_0 = 5000$, годовой процент r = 12%, $n = 3$ – время, на которое положены деньги на хранение, то получится следующая формула простого процентного роста:

$$S = S_0(1+\frac{rn}{100})$$

Выведение этой формулы важно в результате исследования самими учащимися. В этом случае учащиеся лучше понимают суть формулы.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Иногда начальная сумма со временем уменьшается. В этом случае выше приведённая формула записывается в виде $S = S_0(1-\frac{rn}{100})$. Например: Сумма, положенная на счёт для обслуживания клиентов, со временем уменьшается в обмен на указанные услуги. В этом случае начальная сумма бывает больше последующей.

**Исследовательский вопрос**: Как применяется формула простого процентного роста?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются в группах.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение 1.** Чтобы в формулах $S = S_0(1+\frac{rn}{100})$ и $S = S_0(1-\frac{rn}{100})$ определить $n$, r и $S_0$, следует это задание разделить между группами.

**I группа**: В каждой формуле определяет $n$.

а) $S = S_0(1+\frac{rn}{100})$; $\quad S = S_0 + S_0\frac{rn}{100}$; $\quad S - S_0 = \frac{S_0 rn}{100}$; $\quad n = \frac{100(S-S_0)}{S_0 r}$;

б) $S = S_0(1-\frac{rn}{100})$; $\quad S = S_0 - S_0\frac{rn}{100}$; $\quad S_0 - S = \frac{S_0 rn}{100}$. $\quad n = \frac{100(S_0-S)}{S_0 r}$.

**II группа**: В каждой формуле определяет $r$.

а) $S = S_0(1+\frac{rn}{100})$; $S = S_0 + S_0\frac{rn}{100}$; $S - S_0 = \frac{S_0 rn}{100}$; $r = \frac{100(S-S_0)}{S_0 n}$.

б) $S = S_0(1-\frac{rn}{100})$; $S = S_0 - S_0\frac{rn}{100}$; $S_0 - S = \frac{S_0 rn}{100}$. $r = \frac{100(S_0 - S)}{S_0 n}$.

**III группа:** В каждой формуле определяет $S_0$.

а) $S = S_0(1+\frac{rn}{100})$; $S_0 = S:(1+\frac{rn}{100})$; $S_0 = S:\frac{100+rn}{100}$; $S_0 = S\cdot\frac{100}{100+rn}$; $S_0 = \frac{100S}{100+rn}$.

б) $S = S_0(1-\frac{rn}{100})$; $S_0 = S:(1-\frac{rn}{100})$; $S_0 = S:\frac{100-rn}{100}$; $S_0 = S\cdot\frac{100}{100-rn}$; $S_0 = \frac{100S}{100-rn}$;

Преобразуя формулы, учитель может дать группам определённое направление.

**Упражнение № 2.** Согласно условию, начальная сумма $S_0$ = 300 манатов, $r$ = 30%, $n$ = 5.

Согласно формуле простого процентного роста, $S_0 = S_0(1+\frac{rn}{100}) = 300(1+\frac{30\cdot 5}{100}) = 750$.

Следовательно, суждение Айтен верно. **Ответ**: 750 манат.

**Упражнение № 3.** а) По условию известно, что $n$ = 8 годам, S = 2000 манатов, $S_0$ = 1000 манатов $r$ = ?

Определим из формулы $r$ $S = S_0(1+\frac{rn}{100})$ : $S = S_0 + S_0\frac{rn}{100}$; $S - S_0 = \frac{S_0 rn}{100}$; $r = \frac{100(S-S_0)}{S_0 n}$.

Определим из формулы $r$: $r = \frac{100(2000-1000)}{1000\cdot 8} = 12,5\%$

**Ответ**: 12,5%.

б) По условию известно, что $r$ = 18%, S = 7316 манатов, $n$ = 1 год. Из формулы простого процентного роста $S_0$ определим: $S_0 = \frac{100S}{100+rn} = \frac{100\cdot 7316}{100+18\cdot 1} = \frac{731600}{118} = 6200$.

Если 6200 манатов вложить в банк на год с 20% годовых, через 2 года получится следующая сумма:

$$S_0 = 6200(1+\frac{20\cdot 2}{100}) = 8680 \text{ (ман.)}$$

**Ответ**: 6200 манатов, 8680 манатов.

**Упражнение № 4.** Для заполнения таблицы используется формула простого процентного роста.

1) **I банк**: $S_0$ = 3000 (ман.), $n$ = 2 (года), S = 3840 (ман.), $r$ = ?

$$r = \frac{100(S-S_0)}{S_0\cdot n} = \frac{100(3840-3000)}{3000\cdot 2} = 14\%$$

2) **II банк**: $r$ = 25%, $n$ = 4 (года), S = 4000 (ман.), $S_0$ = ?

$$S_0 = \frac{100S}{100+rn} = \frac{100\cdot 4000}{100+25\cdot 4} = 2000 \text{ (ман.)}$$

3) **III банк**: $r$ = 15,3%, $S_0$ = 5000 (ман.), S = 7295 (ман.), $n$ = ?

$$n = \frac{100(S-S_0)}{S_0 n} = \frac{100(7295-5000)}{5000\cdot 15,3} = \frac{229500}{76500} = 3 \text{ года}$$

4) **IV банк**: $r$ =11,5%, $S_0$ = 7000 (ман.), $n$ = 10 (лет), S = ?

$$S = S_0(1+\frac{rn}{100}) = 7000(1+\frac{11,5\cdot 10}{100}) = 15050 \text{ (ман.)}$$

Основываясь на таблицу, рассмотрим следующие вопросы:

а) Сумма в 3000 манатов, вложенная в I банк на 1 год, увеличится до 3420 манатов.

$$S = S_0(1+\frac{rn}{100}) = 3000(1+\frac{1\cdot 14}{100}) = 3420 \text{ (ман.)}$$

б) Определим, сколько процентов на сумму в 7000 манатов должен выдать III банк за 6 месяцев:

Согласно условию: $S_0$ = 7000 (ман.), $n$ = 6 (месяцев) = 0,5 (года), $r$ = 15,3%.

$$S = S_0(1+\frac{rn}{100}) = 7000(1+\frac{15,3\cdot 0,5}{100}) = 7535,5 \text{ (ман.)}$$

в) Определим, какую сумму должен будет выплатить II банк за начальную сумму, указанную в таблице, через четыре года с 20% ростом каждый год:

$$S = S_0\left(1+\frac{rn}{100}\right) = 2000\left(1+\frac{20\cdot 4}{100}\right) = 3600 \text{ (ман.)}$$

**Ответ**: а) 3420 манатов; б) 7535,5 манатов; в) 3600 манатов.

**Примечание:** Учащимся можно задать подготовить презентацию о функционирующих в Азербайджане банках.

**Упражнение № 7.** Согласно условию, $S_0$ = 4500 (манатов), $n$ = 6 (месяцев) = 0,5 (года). Известно, что каждый месяц выплачивается 800 манатов, следовательно, в течение 6 месяцев Самир должен будет выплатить в банк 6 · 800 = 4800 манатов. По истечении шести месяцев Самир переплатит в банк 4800 – 4500 = 300 (манатов). S = 4800 (манатов). Опираясь на формулу, вычислим процент:

$$r = \frac{100(S-S_0)}{S_0} = \frac{100(4800-4500)}{4500\cdot 0,5} \approx 13\%$$

| № | Дата | Начальный баланс | Сумма выплаты | Основная сумма | Разница | Конечный баланс |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 10.06.2013 | 4800 | 800 | 750 | 50 | 4000 |
| **2** | 10.07.2013 | 4000 | 800 | 750 | 50 | 3200 |
| **3** | 10.08.2013 | 3200 | 800 | 750 | 50 | 2400 |
| **4** | 10.09.2013 | 2400 | 800 | 750 | 50 | 1600 |
| **5** | 10.10.2013 | 1600 | 800 | 750 | 50 | 800 |
| **6** | 10.11.2013 | 800 | 800 | 750 | 50 | – |
| **Итого** | | | 4800 | 4500 | 300 | – |

**Ответ:** 13,3%.

**Упражнение № 8.** Иногда формулу $S = S_0(1+\frac{rn}{100})$ дают в виде $S = S_0(1+r\%\cdot n)$.

Дробь $\frac{r}{100}$ в первой формуле во второй формуле дана, как $r$ %.

По тому же принципу вместо $S = S_0(1 - \frac{rn}{100})$ записывается формула $S = S_0(1 - r\% \cdot n)$.

Отсюда: $n = \dfrac{S - S_0}{S_0 \cdot r}$ vә ya $n = \dfrac{S_0 - S}{S_0 \cdot r}$

а) $S = 500$, $S_0 = 2500$, $r\% = 10\% = 0{,}1$. Поскольку в этом случае начальная сумма больше конечной суммы, используется формула $S = S_0(1 - r\% \cdot n)$.

$$n = \frac{S_0 - S}{S_0 \cdot r} = \frac{2500 - 500}{2500 \cdot 0{,}1} = 8 \text{ (лет)}.$$

б) $S = 2500$, $S_0 = 500$, $r\% = 25\% = 0{,}25$.

$$n = \frac{S - S_0}{S_0 \cdot r} = \frac{2500 - 500}{500 \cdot 0{,}25} = 16 \text{ (лет)}$$

**Ответ**: а) 8 лет, б) 16 лет.

**Упражнение №9.** а) Согласно условию, $S_0 = 1000$ (манатов), $r\% = 5\% = 0{,}05$, $S = 800$ (манатов), $n = ?$ Используем формулу $S = S_0(1 - r\% \cdot n)$:

$$n = \frac{S_0 - S}{S_0 \cdot r} = \frac{1000 - 800}{1000 \cdot 0{,}05} = 4 \text{ (месяца)}$$

г) $S_0 = 1000$ (манатов), $r\% = 5\% = 0{,}05$, $S = 100$ (манатов), $n = ?$

$$n = \frac{S_0 - S}{S_0 \cdot r} = \frac{1000 - 100}{1000 \cdot 0{,}05} = 18 \text{ (месяцев)}$$

**Ответ**: а) 4 месяца, г) 18 месяцев.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз повторив формулу простого процентного роста и способы её применения, обобщает пройденное.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется применять в решении простых задач формулу простого процентного роста. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при применении в решении задач формулы простого процентного роста. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет в решении простых задач формулу простого процентного роста. |
| Уровень IV | Применяет удобными способами в решении простых задач формулу простого процентного роста. |

## Урок 2.10. Формула сложного процентного роста

**Стандарт:** 1.2.5. Применяет в решении простых задач формулы простого и сложного процентного роста.

**Результат обучения:** Применяет в решении простых задач формулу сложного процентного роста.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

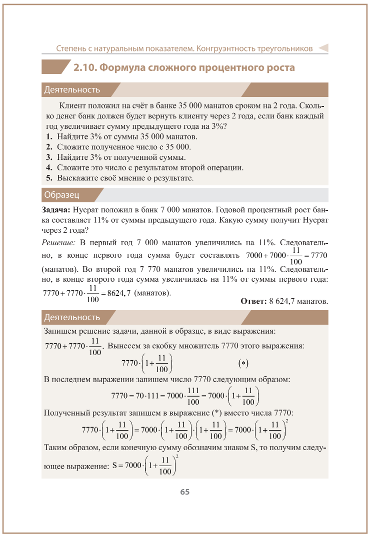
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

### Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа**.**

**Постановка проблемы:** Выполняя деятельность, данную в учебнике, учащиеся определяют конечную сумму, находя, в отличие от формулы простого процентного роста, определённый процент, на который увеличивается сумма каждый год по сравнению с предыдущим годом. Учащиеся высказывают мнение о том, чем отличается это вычисление от формулы простого процентного роста.

На следующем этапе условие задачи, данной в образце из учебника, проецируется на экран компьютера и исследуется. Строится выражение, соответствующее условию задачи и приводится в вид $S = 7770 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)$.


Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников

2.10. Формула сложного процентного роста

Деятельность

Клиент положил на счёт в банке 35 000 манатов сроком на 2 года. Сколько денег банк должен будет вернуть клиенту через 2 года, если банк каждый год увеличивает сумму предыдущего года на 3%?

1. Найдите 3% от суммы 35 000 манатов.
2. Сложите полученное число с 35 000.
3. Найдите 3% от полученной суммы.
4. Сложите это число с результатом второй операции.
5. Выскажите своё мнение о результате.

Образец

**Задача:** Нусрат положил в банк 7 000 манатов. Годовой процентный рост банка составляет 11% от суммы предыдущего года. Какую сумму получит Нусрат через 2 года?

*Решение:* В первый год 7 000 манатов увеличились на 11%. Следовательно, в конце первого года сумма будет составлять $7000 + 7000 \cdot \frac{11}{100} = 7770$ (манатов). Во второй год 7 770 манатов увеличились на 11%. Следовательно, в конце второго года сумма увеличилась на 11% от суммы первого года: $7770 + 7770 \cdot \frac{11}{100} = 8624,7$ (манатов).

**Ответ:** 8 624,7 манатов.

Деятельность

Запишем решение задачи, данной в образце, в виде выражения:

$7770 + 7770 \cdot \frac{11}{100}$. Вынесем за скобку множитель 7770 этого выражения:

$$7770 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) \qquad (*)$$

В последнем выражении запишем число 7770 следующим образом:

$$7770 = 70 \cdot 111 = 7000 \cdot \frac{111}{100} = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)$$

Полученный результат запишем в выражение (*) вместо числа 7770:

$$7770 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right) = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)^2$$

Таким образом, если конечную сумму обозначим знаком S, то получим следующее выражение: $S = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)^2$

65

Преобразуя $7770 = 70 \cdot 111 = 7000 \cdot \frac{111}{100} = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)$, выражение принимает вид

$S = 7770 = 7000 \cdot \left(1 + \frac{11}{100}\right)^2$. Если в этом выражении начальная сумма $S_0 = 7000$, годовой процентный рост r = 11%, если $n = 2$ – срок, на который положены деньги в банк, то формула сложного процентного роста получится:

$$S = S_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Эта формула выводится во время исследования совместно с учащимися.

**Исследовательский вопрос**: При каких случаях применяется формула сложного процентного роста?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются группами.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 2.** Согласно формуле простого процентного роста, $S_0 = 50000$ (ман.), $r = 7$ %, $n = 3$, $S = 50000\left(1 + \frac{7 \cdot 3}{100}\right) = 60500$ (ман.).

Согласно формуле сложного процентного роста: $S_0 = 50000$ (ман.), $r = 10$ %, $n = 2$,

$$S = S_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 50000\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 = 60500 \text{ (ман.)}.$$

Как видно, сумма оказалась одинаковой. Поскольку коммерческий банк выдаёт эту сумму на более краткий срок, этот банк приносит клиентам больше выгоды.

**Упражнение № 4.** а) Какая сумма получится из суммы, вложенной в I и II банк на условиях простого процентного роста в конце срока?

**I банк**: $r\% = 15\% = 0,15$, $S_0 = 3000$ (ман.), $n = 1$ (месяц) $= \frac{1}{12}$ (года)

$$S = S_0(1 + r\% \cdot n) = 3000\left(1 + 0{,}15 \cdot \frac{1}{12}\right) = 3037{,}5 \text{ (ман.)}$$

**II банк**: $r\%$ = 11,5% = 0,115, $S_0$ = 3000 (ман.), $n$ = 12 (месяцев) = 1 (год)
$S = S_0 (1 + r\%n)$ = 3000 (1 + 0,115 · 1) = 3345 (ман.).

б) Какая сумма получится из суммы, вложенной в III и IV банк на условиях сложного процентного роста в конце срока?

**III банк**: $r\%$ = 12,3%, $S_0$ = 5000 (манатов), $n$ = 2 (года)

$$S = S_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 5000(1 + 0{,}123)^2 = 6305{,}645 \text{ (ман.)}$$

**IV банк**: $r\%$ = 14%, $S_0$ = 10000 (манатов), $n$ = 3 (года)

$$S = S_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = 1000(1 + 0{,}14)^3 = 14815{,}44 \text{ (ман.)}$$

в) Согласно условию, $S_0$ = 4000 (манатов), $r\%$ = 15%, $n$ = 2 (года), S = ?
По формуле простого процентного роста: S = 4000 (1 + 0,15 · 2) = 5200 (ман.).
По формуле сложного процентного роста: S = 4000 $(1 + 0{,}15)^2$ = 5290 (ман.)
Как видно, формула сложного процентного роста более выгодна, т.к. 5290 > 5200.

**Упражнение № 7.** Согласно условию, $r\%$ = 12,5%, $S_0$ = 5000 (ман.).

а) Если $n$ = 6 (месяцев) = 0,5 (года), тогда S = 5000 (1 + 0,125 · 0,5) = 5312,5 (ман.).
б) Если $n$ = 15 (месяцев) = 1,25 (года), тогда S = 5000 (1 + 0,125 · 1,25) = 5781,25 (ман.).

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Формулы простого и сложного процентного роста чаще всего применяются в банковских операциях. Учащиеся должны уметь определить по условию задачи, какую формулу им следует применить. Учитель должен довести до их сведения, что банки при принятии депозитов используют, в основном, формулу простого процентного роста, а при выдачи кредита – формулу сложного процентного роста. Слабые учащиеся с трудом выполняют вычисления по формулам простого и сложного процентного роста. Учитель, учитывая их уровень, составляет для них более лёгкие задания.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз повторяя формулу сложного процентного роста и задачи, в которых она применяется, обобщает пройденное.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется применять в решении простых задач формулу сложного процентного роста. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при применении в решении простых задач формулы сложного процентного роста. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет в решении простых задач формулу сложного процентного роста. |
| Уровень IV | Применяет удобным способом в решении простых задач формулу сложного процентного роста. |

## Образец критериев для составления заданий для малого суммативного оценивания №3

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Применяет свойство степени с натуральным показателем |
| 2 | Упрощает выражения со степенью с натуральным показателем |
| 3 | Применяет в решении задач формулу простого процентного роста |
| 4 | Применяет в решении задач формулу сложного процентного роста |

## Образец малого суммативного оценивания № 3

Фамилия: ____________________ Имя:____________

Количество правильных ответов: _____

Количество неправильных ответов: ___ Оценка:___

**1.** Напишите произведение в виде степени с натуральным показателем:

а) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x =$

б) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 =$

в) $(-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5) =$

г) $\frac{-5}{8} \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-5}{8} \cdot \frac{-5}{8} =$

**2.** Запишите число в стандартном виде и укажите его состав:

134,5 = __________ Состав:_______

25,897 =__________ Состав:_______

0,09 =____________ Состав:_______

**3.** Вычислите:

а) $64 \cdot 2^3 : 16 =$__________________

б) $81 : 3^3 \cdot 3^5 =$ __________________

**4.** Определите последнюю цифру значения степени $9^{99}$:

________________________________

**5.** Определите последнюю цифру значения степени *a*.

$a^{n+5} \cdot a^{8-n} : a^9 =$

**6.** Запишите выражения в виде степени:

а) $\left(\frac{1}{5}x\right)^{10} : \left(\frac{1}{5}x\right)^{6} \cdot \left(\frac{1}{5}x\right)^{12} =$

________________________________

б) $(-m)^{14} \cdot (-m)^{16} : (-m)^{16} =$

________________________________

________________________________

**7.** В данных выражениях вместо $x$ запишите такое число, чтобы получилось верное равенство.

а) $(3^6)^x = 3^{18}$, $x =$ ________

б) $(a^x)^{14} = 3^{70}$, $x =$ ________

в) $(7^4)^x \cdot 7^9 = 7^{21}$, $x =$ ________

**8.** Данное выражение возведите в степень:

$(-5a^2bc^4)^2 =$ ______________________

**9.** Запишите произведение в виде степени:

$25m^8n^6 =$ ________________________

**10.** Найдите произведение одночленов, запишите его коэффициент и степень:

$0,5b \cdot \frac{1}{8}c^2 \cdot (-16b) =$

Коэффициент:____ Степень:_____

**11.** Запишите дроби в виде степени:

а) $\frac{a^9}{b^9} =$ б) $\frac{9a^4}{25} =$

в) $-\frac{1}{27} =$ г) $-\frac{(5a)^{10}}{(7b)^6} =$

**12.** Вычислите:

а) $-2^3 + (-4)^2 =$ ________________

б) $4^3 - 7 \cdot (-2^3) =$ ______________

в) $6^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-5\frac{1}{4}\right) =$

**13.** Найдите значение выражения при $a = -0,21$ и $b = 1,6$.

$$\frac{\left(a^3\right)^5 \cdot b^7}{\left(a^2\right)^7 \cdot \left(b^2\right)^3} =$$

**14.** Самир вложил 1500 манатов в банк с годовым процентным ростом в 15% от вложенной суммы. Сколько денег должен будет вернуть банк Самиру через 5 лет?

________________________________

________________________________

________________________________

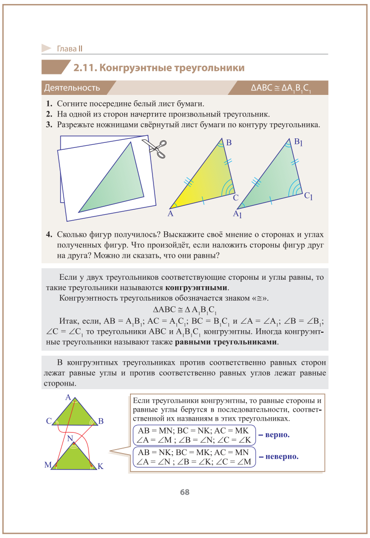
**15.** В какую сумму превратится 4000 манатов через 2 года, если их вложить в банк с 10% ростом от суммы каждого предыдущего года?

________________________________

________________________________

________________________________

# Урок 2.11. Конгруэнтные треугольники



Глава II

2.11. Конгруэнтные треугольники

Деятельность $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$

1. Согните посередине белый лист бумаги.
2. На одной из сторон начертите произвольный треугольник.
3. Разрежьте ножницами свёрнутый лист бумаги по контуру треугольника.



4. Сколько фигур получилось? Выскажите своё мнение о сторонах и углах полученных фигур. Что произойдёт, если наложить стороны фигур друг на друга? Можно ли сказать, что они равны?

Если у двух треугольников соответствующие стороны и углы равны, то такие треугольники называются **конгруэнтными**.

Конгруэнтность треугольников обозначается знаком «≅».

$$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$$

Итак, если, $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$; $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$ то треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны. Иногда конгруэнтные треугольники называют также **равными треугольниками**.

В конгруэнтных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы и против соответственно равных углов лежат равные стороны.



Если треугольники конгруэнтны, то равные стороны и равные углы берутся в последовательности, соответственной их названиям в этих треугольниках.

$AB = MN$; $BC = NK$; $AC = MK$
$\angle A = \angle M$; $\angle B = \angle N$; $\angle C = \angle K$ – **верно.**

$AB = NK$; $BC = MK$; $AC = MN$
$\angle A = \angle N$; $\angle B = \angle K$; $\angle C = \angle M$ – **неверно.**

68

**Стандарт:** 3.2.2. Знает и применяет признаки конгруэнтности треугольников.

**Результат обучения:** Определяет свойства конгруэнтных треугольников.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** выведение понятия, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, ножницы, белый лист

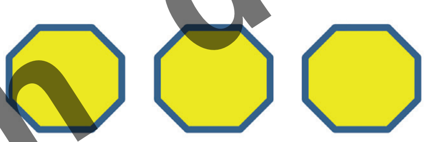
### Ход урока:

На изучение темы отводится 1 час**.**

**Постановка проблемы:** Из курса младших классов учащиеся имеют представление о конгруэнтных (равных) фигурах. После проведения опроса об этих фигурах каждый учащийся выполняет деятельность, данную в учебнике. Ножницами вырезается треугольник, нарисованный на белом листе, сложенном вдвое (или больше). Исследуется, какими фигурами являются полученные на каждом согнутом листе треугольники. Учащиеся, наложив друг на друга эти треугольники, высказывают своё мнение об их соответствующих сторонах и углах. Таким образом, выводится понятие равных (конгруэнтных) треугольников.

**Объяснение учителя**: До внимания учащихся доводится определение, название, обозначение конгруэнтных треугольников. Во время называния конгруэнтных треугольников учитель особо доводит до сведения учащихся о последовательности букв.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** В математике под равенством чисел имеется в виду разное написание одного числа. Например, запись $0{,}5 = \frac{1}{2}$. Равные две фигуры на первый взгляд кажутся абсолютно одинаковыми. Как, например, приведённые ниже на рисунке фигуры: в результате движения (перемещения, поворота, обращения) эти фигуры так можно расположить друг на друге, чтобы их все соответствующие точки совпадали, тогда эти фигуры равны. Но эти фигуры не одинаковы, каждая из них – отдельная фигура. Поэтому под конгруэнтностью фигур также понимается их равность. Этот момент важно донести до учащихся (если даже братья-близнецы очень похожи друг на друга, но они – разные люди).



**Исследовательский вопрос:** Какими особенностями обладают конгруэнтные фигуры?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 3.** В названиях конгруэнтных треугольников прослеживается определённая последовательность. В данных на рисунке треугольниках равные углы отмечены равным количеством дуг. Называя треугольники, учащиеся должны уметь определять на основе числа дуг, указывающих на равенство углов, последовательность букв.

а) $\Delta ABC \cong \Delta FED$, так как $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle D$.

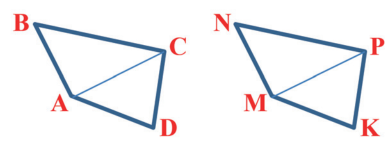
б) $\Delta CBA \cong \Delta DEF$, так как $\angle C = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle A = \angle F$.

в) $\Delta BAC \cong \Delta CDB$, так как $\angle ABC = \angle BCD$, $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ACB = \angle CBD$.

г) $\Delta BED \cong \Delta BCA$, так как $\angle DBE = \angle ABC$, $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle E$.

**Упражнение № 5.** При изображении треугольника ABC, конгруэнтного треугольнику MON, размещение числа клеток и точек вершин должно быть таким, как показано на рисунке.

**Упражнение № 6.** Известно, что четырёхугольники ABCD и MNPK конгруэнтны (равны). Полученные здесь конгруэнтные треугольники:
$\Delta ABC \cong \Delta MNP$, $\Delta ADC \cong \Delta MKP$.




**Дифференциальное обучение:** Слабые учащиеся затрудняются давать названия конгруэнтным треугольникам или указывать равные стороны и углы. С целью устранения этих затруднений учитель может составить на рабочих листах для этих учащихся дополнительные задания. Сильные учащиеся в заданиях о конгруэнтных треугольниках могут изображать их в более сложной ситуации.

**Обобщение и результат:** учитель обобщает пройденное о конгруэнтных треугольниках.

**Оценивание**

● Определение

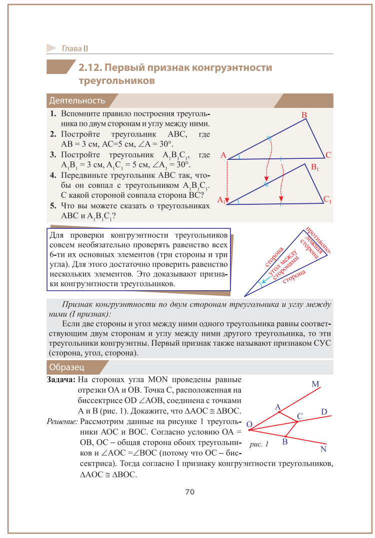
| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в определении признаков конгруэнтности треугольников;<br>Показывает конгруэнтные треугольники, но не умеет правильно определить равные стороны и углы;<br>Не умеет определить соответствующие стороны и углы. |
| Уровень II | Допускает некоторые ошибки при определении признаков конгруэнтности треугольников;<br>Определяет конгруэнтные треугольники, определяет с помощью учителя равные стороны и углы. |
| Уровень III | Самостоятельно определяет равные стороны и углы конгруэнтных треугольников. |
| Уровень IV | Определяет признаки конгруэнтности треугольников в более сложных ситуациях. |

## Урок 2.12. Первый признак конгруэнтности треугольников

**Стандарт:** 3.2.2. Знает и применяет признак конгруэнтности треугольников.
4.1.1. Переводит единицы измерения одноименной величины из одной в другую.

**Результат обучения:**
1) Знает и применяет первый признак конгруэнтности треугольников.
2) Переводит единицы длины из одной в другую.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ


Глава II

2.12. Первый признак конгруэнтности треугольников

Деятельность

1. Вспомните правило построения треугольника по двум сторонам и углу между ними.
2. Постройте треугольник ABC, где AB = 3 см, AC=5 см, $\angle A = 30°$.
3. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, где $A_1B_1 = 3$ см, $A_1C_1 = 5$ см, $\angle A_1 = 30°$.
4. Передвиньте треугольник ABC так, чтобы он совпал с треугольником $A_1B_1C_1$. С какой стороной совпала сторона BC?
5. Что вы можете сказать о треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$?



Для проверки конгруэнтности треугольников совсем необязательно проверять равенство всех 6-ти их основных элементов (три стороны и три угла). Для этого достаточно проверить равенство нескольких элементов. Это доказывают признаки конгруэнтности треугольников.



*Признак конгруэнтности по двум сторонам треугольника и углу между ними (I признак):*

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответствующим двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны. Первый признак также называют признаком СУС (сторона, угол, сторона).

Образец

**Задача:** На сторонах угла MON проведены равные отрезки OA и OB. Точка C, расположенная на биссектрисе OD $\angle AOB$, соединена с точками A и B (рис. 1). Докажите, что $\Delta AOC \cong \Delta BOC$.

*Решение:* Рассмотрим данные на рисунке 1 треугольники AOC и BOC. Согласно условию OA = OB, OC – общая сторона обоих треугольников и $\angle AOC = \angle BOC$ (потому что OC – биссектриса). Тогда согласно I признаку конгруэнтности треугольников, $\Delta AOC \cong \Delta BOC$.



*рис. 1*

70

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа**.**

**Постановка проблемы:** На предыдущем уроке из бумаги были вырезаны конгруэнтные треугольники. Учащие, выполняющие деятельность, данную в учебнике, на этих треугольниках, определяют, что вершины B и C одного треугольника соответственно накладываются на вершины $B_1$ и $C_1$ другого треугольника. То есть в результате перестановки они становятся свидетелями полного совпадения треугольников, у которых две стороны и угол между ними одного треугольника накладываются на две стороны и угол между ними другого треугольника.

На изображённом в презентации, подготовленной на компьютере или на доске, треугольнике демонстрируются стороны треугольника и угол между ними. Учитель обращается к учащимся, чтобы добиться у них объяснения о результатах исследования. Мнение учащихся выслушивается и учитель объясняет первый признак конгруэнтности треугольников.

**Исследовательский вопрос:** Как применяется первый признак конгруэнтности треугольников?

С целью проведения исследования задания из учебника целесообразно раздаются по группам.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 3.** Известно, что $\Delta ABC \cong \Delta KLM \cong \Delta DEF$. В этом случае
$AB = KL = DE$, $AC = KM = DF$, $BC = LM = EF$,
$\angle A = \angle K = \angle D$, $\angle B = \angle L = \angle E$, $\angle C = \angle M = \angle F$. Следовательно, таблица должна быть заполнена нижеследующим образом.

| **ΔABC** | **AB = 6 см; BC = 12 см; ∠B = 105°** | **AB = 7,5 мм; AC = 1,4 мм; ∠A = 53°** |
|---|---|---|
| **Δ KLM** | KL = 6 см; LM = 12 см; ∠L = 105° | KL = 7,5 мм; KM = 1,4 мм; ∠K = 53° |
| **ΔDEF** | DE = 6 см; EF = 12 см; ∠E = 105° | DE = 7,5 мм; DF = 1,4 мм; ∠D = 53° |

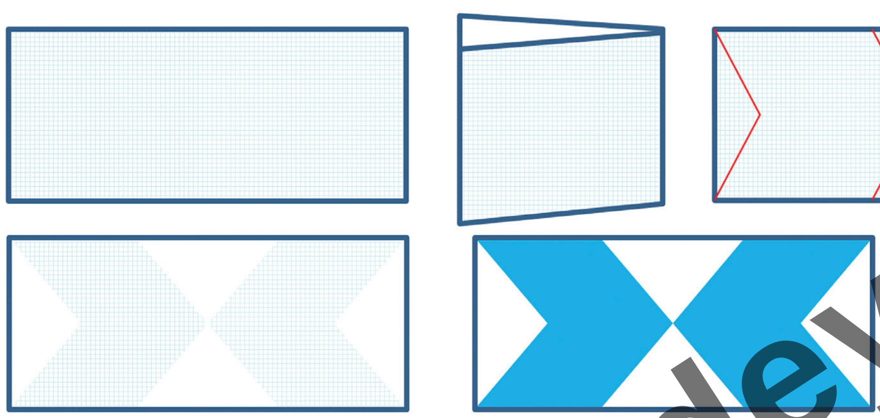
**Упражнение № 4.** Согласно рисунку, можно записать $\Delta ABC \cong \Delta MKL$.

Чтобы ΔABC ≅ ΔKLM, следует вершину M заменить K, вершину K заменить M.

**Упражнение № 7.** Чтобы продолжить измерения, дети после того, как измерили расстояния AC и BC, должны отложить от точки C в противоположную сторону (по прямой) отрезок, равный AC и BC. CD = AC и EC = BC. Полученные в этом случае треугольники ABC и EDC будут конгруэнтными треугольниками. Поскольку у конгруэнтных треугольников стороны и углы равны, то длина AB = ED и будет искомой шириной озера.

**Упражнение № 8.** Как продолжение предыдущего упражнения, это задание выполняется на конкретных длинах. Применяя связь между единицами длины, учащийся выполняет задание.

**Упражнение № 11.** Известно, что фигура, данная на рисунке, первоначально была четырёхугольником. Соединив края фигуры, как это показано на рисунке, учащийся наглядно может увидеть четырёхугольник. При этом внутри фигуры появляются конгруэнтные треугольники. Чтобы получить эту фигуру, сверните листок в виде четырёхугольника по линии сгиба вдвое. На одной его стороне начертите линии так, как показано на рисунке (красным цветом). Свёрнутый листок разрежьте по линиям. При раскрытии полученного листа получится фигура, данная в учебнике. Дети могут закрасить узор.



Дополнительно учащимся можно задать, чтобы они из конгруэнтных треугольников сделали другие узоры.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз повторяя первый признак конгруэнтности треугольников, обобщает пройденное об их применении.

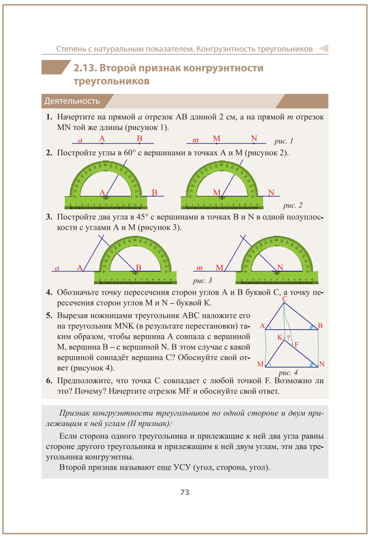
**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает I признак конгруэнтности треугольников, затрудняется в его применении;<br>Не умеет переводить одну единицу длины в другую. |

| | |
|---|---|
| Уровень II | Знает I признак конгруэнтности треугольников, допускает незначительные ошибки при применении;<br>Переводя одну единицу длины в другую, делает незначительные ошибки. |
| Уровень III | Знает I признак конгруэнтности треугольников и самостоятельно применяет;<br>Самостоятельно переводит одну единицы длины в другую. |
| Уровень IV | Знает I признак конгруэнтности треугольников и творчески применяет;<br>Обосновывает перевод одной единицы длины в другую. |

## Урок 2.13. Второй признак конгруэнтности треугольников


Степень с натуральным показателем. Конгруэнтность треугольников

2.13. Второй признак конгруэнтности треугольников

Деятельность

1. Начертите на прямой *a* отрезок AB длиной 2 см, а на прямой *m* отрезок MN той же длины (рисунок 1).

*рис. 1*

2. Постройте углы в 60° с вершинами в точках A и M (рисунок 2).

*рис. 2*

3. Постройте два угла в 45° с вершинами в точках B и N в одной полуплоскости с углами A и M (рисунок 3).

*рис. 3*

4. Обозначьте точку пересечения сторон углов A и B буквой C, а точку пересечения сторон углов M и N – буквой K.
5. Вырезав ножницами треугольник ABC наложите его на треугольник MNK (в результате перестановки) таким образом, чтобы вершина A совпала с вершиной M, вершина B – с вершиной N. В этом случае с какой вершиной совпадёт вершина C? Обоснуйте свой ответ (рисунок 4).

*рис. 4*

6. Предположите, что точка C совпадает с любой точкой F. Возможно ли это? Почему? Начертите отрезок MF и обоснуйте свой ответ.

*Признак конгруэнтности треугольников по одной стороне и двум прилежащим к ней углам (II признак):*

Если сторона одного треугольника и прилежащие к ней два угла равны стороне другого треугольника и прилежащим к ней двум углам, эти два треугольника конгруэнтны.

Второй признак называют еще УСУ (угол, сторона, угол).

73

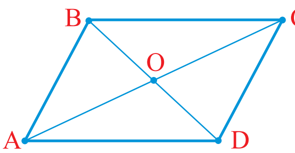
**Стандарт:** 3.2.2. Знает и применяет признак конгруэнтности треугольников.
4.1.1. Переводит единицы измерения одноименной величины из одной в другую.
**Результат обучения:**
1) Знает и применяет первый признак конгруэнтности треугольников.
2) Переводит единицы длины из одной в другую.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.
**Постановка проблемы:** С целью изучения темы учащиеся выполняют деятельность, данную в учебнике. Строится два треугольника по одной стороне и двум углам. Один из полученных треугольников вырезается и накладывается на другой треугольник. Учащиеся высказывают своё мнение об этом.
**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Учащиеся обсуждают о верности/неверности возможности совпадения точки C не с K, а с точкой F (показанной в деятельности). В этом случае в помощь учащимся проводится отрезок MF. У учащихся спрашивают мнение об углах KMN и FMN (согласно условию, оба этих угла не могут быть равны углу A в 60°). Выслушивается мнение учащихся и учитель объясняет второй признак конгруэнтности треугольников. С помощью компьютера или на треугольнике демонстрируются противоположные, прилегающие стороны и углы.

**Исследовательский вопрос**: Как применяется второй признак конгруэнтности треугольников?

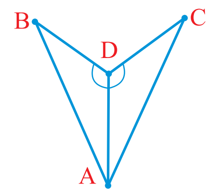
С целью проведения исследования задания из учебника выполняются в группах.
**Руководство к некоторым заданиям**:



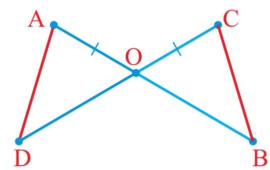

**Упражнение № 3.** Чтобы доказать $\Delta COB \cong \Delta AOD$, надо обосновать, что одна сторона и прилежащие к ней два угла этих треугольников равны. Известно, что $AO = OC$, $\angle OCB = \angle OAD$.

Основываясь на равенство вертикальных углов, ∠BOC = ∠AOD, следовательно, сторона OC и прилежащие к ней углы OCB и BOC ΔCOB соответственно равны стороне O и прилежащей к ней углам CAD и AOD ΔAOD. Согласно второму признаку конгруэнтности треугольников, ΔCOB ≅ ΔAOD.

**Упражнение № 5.** Если отрезок AD является биссектрисой ∠CAB, то ∠DAB = ∠DAC. Следовательно, сторона AD и прилежащие к ней два угла треугольника ABD соответственно равны стороне AD (общая сторона) и прилежащим к ней углам треугольника ACD. Таким образом, ΔADB ≅ ΔADC.




**Упражнение № 7.** Важно начертить рисунок, соответствующий условию задачи. Известно, что равные по длине отрезки AB и CD пересекаются в точке O и AO = OC.



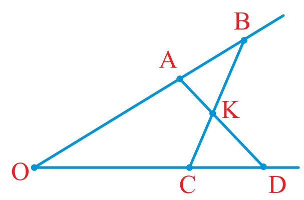

а) Поскольку углы AOD и COB являются вертикальными, то они равны. Поскольку AB = CD и AO = OC, то OD = OB. Следовательно, две стороны и угол между ними в треугольниках AOD и COB равны (признак СУС), т.е. ΔBOC ≅ ΔDOA-dır.

б) Поскольку ΔBOC ≅ ΔDOA, то соответственные углы равны, т.е. ∠ABC = ∠ ADC.

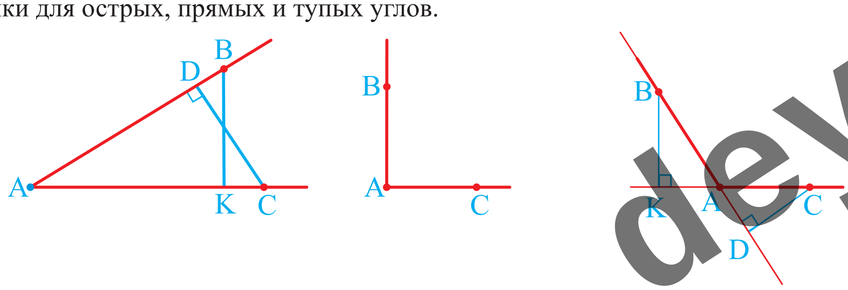
**Упражнение № 8.** а) Согласно условию, OA = OC и OB = OD. Следовательно, ΔAOD ≅ ΔCOB. Тогда соответствующие стороны этих треугольников равны, в особом случае AD = BC.

в) Поскольку ΔAOD ≅ ΔCOB, то ∠OAD = ∠OCB.

Тогда смежные углы этих углов будут ∠DAB = ∠BCD.




**Упражнение № 9.** Опираясь на данные условия, рисуются рисунки для острых, прямых и тупых углов.




1) По условию AB = AC и ∠ADC = ∠AKB. Угол A является общим углом для обоих треугольников, тогда ∠ABK = ∠ACD. Таким образом, все три угла треугольников ABK и ACD равны, т.е. эти треугольники конгруэнтны. Тогда сторона BK ΔABK соответственно равна стороне CD ΔACD.

2) При ∠BAC= 90° эти перпендикуляры совпадают с отрезками AB и AC. То, что они равны, дано в условии.

3) В тупом угле же перпендикуляры, проведённые из точек B и C, проведены к прямым AC и AB. В этом случае углы BAK и CAD – вертикальные углы: ∠BAK = ∠CAD. Тогда в этом случае треугольники ABK и ACD конгруэнтны. Т.е., BK = CD.

**Объяснение учителя**: Учитель информирует, что величину угла можно обозначить градусом, минутой, секундой, объясняет отношения между этими единицами. На примерах показывает преобразования.

Вниманию учащихся доводится $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, $1' = \dfrac{1^\circ}{60}$, $1'' = \dfrac{1^\circ}{3600}$. Для выполнения этих преобразований можно подготовить задания:

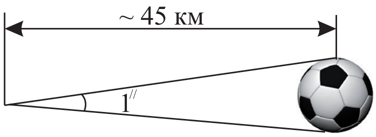
$45^\circ = \ldots\,'$, $120' = \ldots^\circ$, $12^\circ10'\,5^{6''} + 40^\circ25'45''$, $50^\circ - 16^\circ43'$ и др.

До внимания учащихся доводятся правила выражения градусов, записанных в виде десятичной дроби, минутами и секундами:

$12{,}5^\circ = 12^\circ + 0{,}5^\circ = 12^\circ + 30' = 12^\circ30'$,

$$156^\circ25' = 156^\circ + 25' = 156^\circ + \left(\frac{25}{60}\right)^\circ \approx 156{,}42^\circ,$$

$$42^\circ34'55'' = 42^\circ + \left(\frac{34}{60}\right)^\circ + \left(\frac{55}{3600}\right)^\circ \approx 42^\circ + 0{,}6^\circ + 0{,}02^\circ = 42{,}62^\circ.$$




*$1''$ берётся примерно за видимый угол футбольного мяча с расстояния в 45 км.*

**Упражнение № 12.** а) $73{,}4^\circ = 73^\circ + 0{,}4^\circ = 73^\circ + 0{,}4 \cdot 60' = 73^\circ + 24' = 73^\circ24'$;

$66{,}2^\circ = 66^\circ + 0{,}2^\circ = 66^\circ + 0{,}2 \cdot 60' = 66^\circ + 12' = 66^\circ12'$;

$125{,}1^\circ = 125^\circ + 0{,}1^\circ = 125^\circ + 6' = 125^\circ6'$;

$41{,}93^\circ = 41^\circ + 0{,}9^\circ + 0{,}03^\circ = 41^\circ + 0{,}9 \cdot 60' + 0{,}03 \cdot 3600'' = 41^\circ + 54' + 108'' =$
$= 41^\circ54' + 1'48'' = 41^\circ55'48''$; $12{,}5^\circ = 12^\circ + 0{,}5^\circ = 12^\circ + 30' = 12^\circ30'$.

б) $12^\circ36' = 12^\circ + 36' = 12^\circ + 36 \cdot \dfrac{1}{60} = 12^\circ + 0{,}6^\circ = 12{,}6^\circ$;

$$44^\circ16'25'' = 44^\circ + 16' + 25'' = 44^\circ + 16 \cdot \frac{1^\circ}{60} + 25 \cdot \frac{1^\circ}{3600} \approx 44^\circ + 0{,}26^\circ + 0{,}007^\circ = 44{,}267^\circ \approx 44{,}3^\circ.$$

$$54^\circ30'' = 54^\circ + 30 \cdot \frac{1^\circ}{3600} = 54^\circ + \frac{1^\circ}{120} = 54^\circ + 0{,}09^\circ = 54{,}09^\circ \approx 54{,}1^\circ$$

$$135^\circ56'10'' = 135^\circ + 56' + 10'' = 135^\circ + 56 \cdot \frac{1^\circ}{60} + 10 \cdot \frac{1^\circ}{3600} \approx 135^\circ + 0{,}93^\circ + 0{,}003^\circ = 135{,}933^\circ \approx 136^\circ$$

**Упражнение № 13**. Выполните вычисления:

а) $7^\circ15' + 16^\circ30' = 23^\circ45'$; b) $46^\circ25' - 17^\circ59'' = 46^\circ24'60'' - 17^\circ59'' = 29^\circ24'1''$;

в) $150^\circ21'12'' + 51^\circ16'51'' = 201^\circ37'63'' = 201^\circ38'3''$;

г) $42^\circ18' - 25^\circ10'' = 41^\circ59'60'' - 25^\circ10'' = 16^\circ59'50''$;

д) $175^\circ13' - 101^\circ43'' = 175^\circ12'60'' - 101^\circ43'' = 74^\circ12'17''$;

е) $98^\circ15'' - 53^\circ45' = 97^\circ60'15'' - 53^\circ45' = 44^\circ15'15''$;

ё) $23^\circ36' \cdot 2 = 46^\circ72' = 47^\circ12'$;

ж) $24{,}5^\circ - 6^\circ7' + 32{,}1^\circ = 24{,}5^\circ + 32{,}1^\circ - 6^\circ7' = 56{,}6^\circ - 6^\circ7' = 56^\circ + 0{,}6^\circ - 6^\circ7' =$
$= 56^\circ + 36' - 6^\circ7' = 56^\circ36' - 6^\circ7' = 50^\circ29'$;

з) $77^\circ19' - 56{,}4^\circ = 77^\circ19' - (56^\circ + 0{,}4^\circ) = 77^\circ19' - (56^\circ + 24') = 77^\circ19' - 56^\circ24' =$
$= 76^\circ79' - 56^\circ24' = 20^\circ55'$.

**Упражнение № 14.** Углы треугольника ABC равны 15,8° и 44°53′. Чтобы определить третий угол треугольника, от 180° следует вычесть сумму двух этих углов:

$180° - (15{,}8° + 44°53') = 180° - (15° + 0{,}8° + 44°53') = 179°60' - (15°48' + 44^0 53') =$
$= 179^0 60' - 59^0 101' = 179^0 60' - 60^0 41' = 119^0 19'$.

**Ответ**: 119°19′.

**Обобщение и результат:** Учитель, ещё раз повторяя второй признак конгруэнтности треугольников, обобщает пройденное об их применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает II признак конгруэнтности треугольников, затрудняется в применении, не может переводить одну единицу измерения угла в другую. |
| Уровень II | Знает II признак конгруэнтности треугольников, при применении делает механические ошибки, допускает определённые ошибки при переводе одной единицы измерения угла в другую. |
| Уровень III | Знает II признак конгруэнтности треугольников и самостоятельно применяет, не допуская ошибок, переводит одну единицу измерения угла в другую. |
| Уровень IV | Знает II признак конгруэнтности треугольников и творчески применяет, самостоятельно переводит одну единицу измерения угла в другую. |

## Урок 2.14. Свойства равнобедренных треугольников

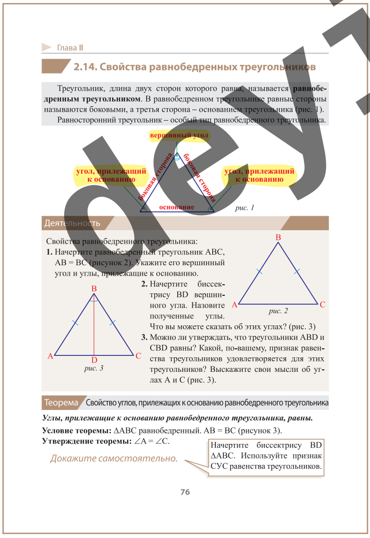
**Стандарт:** 3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически изображает.

**Результат обучения:** Знает и применяет свойства равнобедренных треугольников.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ


Глава II

2.14. Свойства равнобедренных треугольников

Треугольник, длина двух сторон которого равна, называется **равнобедренным треугольником**. В равнобедренном треугольнике равные стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием треугольника (рис. 1).

Равносторонний треугольник – особый тип равнобедренного треугольника.


рис. 1

Деятельность

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Начертите равнобедренный треугольник ABC, AB = BC (рисунок 2). Укажите его вершинный угол и углы, прилежащие к основанию.
2. Начертите биссектрису BD вершинного угла. Назовите полученные углы. Что вы можете сказать об этих углах? (рис. 3)
3. Можно ли утверждать, что треугольники ABD и CBD равны? Какой, по-вашему, признак равенства треугольников удовлетворяется для этих треугольников? Выскажите свои мысли об углах A и C (рис. 3).


рис. 2

рис. 3

Теорема Свойство углов, прилежащих к основанию равнобедренного треугольника

***Углы, прилежащие к основанию равнобедренного треугольника, равны.***

**Условие теоремы:** $\Delta ABC$ равнобедренный. AB = BC (рисунок 3).

**Утверждение теоремы:** $\angle A = \angle C$.

Докажите самостоятельно.

Начертите биссектрису BD $\Delta ABC$. Используйте признак СУС равенства треугольников.

76

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** До начала изучения темы, в презентации, подготовленной на компьютере (или на доске), демонстрируется равнобедренный треугольник, его боковые стороны и основание, вершины и углы, прилегающие к основанию. Затем выполняется деятельность, данная в учебнике. Основываясь на деятельность, учащиеся строят биссектрису вершинного угла и высказывают своё мнение о полученных треугольниках ABD и CBD. Согласно первому признаку конгруэнтности треугольников, обосновывают конгруэнтность этих треугольников. Учитель рассуждает вместе с учащимися о том, что из конгруэнтности этих треугольников вытекает равенство ещё некоторых элементов этих треугольников.

Учащиеся озвучивают мысль также о равенстве углов, прилегающих к основанию. Таким образом, получается свойство равенства углов, прилегающих к основанию равнобедренного треугольника.

**Объяснение учителя**: Учитель выражает свойство равенства углов, прилегающих к основанию равнобедренного треугольника, в виде теоремы. Уточняются условие и утверждение теоремы.

Доказательство теоремы поручается учащимся. В действительности, выполняя деятельность, они уже доказывают эту теорему.

На следующем этапе выполняется вторая деятельность. Здесь определяется, что медиана, проведённая из вершины равностороннего треугольника, делит его на два конгруэнтных треугольника (по признаку СУС). Из конгруэнтности этих треугольников учащиеся определяют, что углы ABD и CBD тоже равны, т.е. медиана BD является также биссектрисой. Затем опять из конгруэнтности треугольников учащиеся определяют, что углы ADB и CDB являются смежными и равными углами, т.е. $\angle ADB = \angle CDB = 90°$. Следовательно, медиана BD также является высотой. Таким образом, определяется свойство того, что медиана равнобедренного треугольника является также его биссектрисой и высотой.

**Объяснение учителя**: Учитель свойство медианы равнобедренного треугольника выражает в виде теоремы. Уточняются условие и утверждение теоремы.

Доказательство теоремы поручается учащимся (во время выполнения деятельности доказательство осуществлено).


**14.** Сеймур утверждает, что равнобедренный треугольник SCP с вершинным углом в 60° также является равносторонним. По-вашему, он прав? Обоснуйте свой ответ (рис. 11).



*рис. 11*

**15. Практическая работа.** Учащиеся класса делятся на три группы.

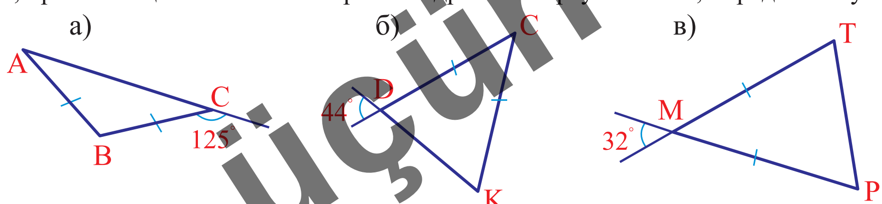
**I группа:** Проводит из вершины A равнобедренного

**Исследовательский вопрос:** Как применяются свойства равнобедренного треугольника?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

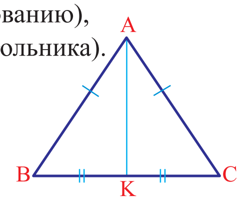
**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 11.** Основываясь на рисунок, учащиеся для определения углов каждого треугольника вспоминают свойства смежных, вертикальных углов, применяя свойство углов, прилегающих к основанию равнобедренного треугольника, определяют углы.




а) Согласно свойству смежных углов, $\Delta ABC$ $\angle ACB = 180° - 125° = 55°$,

$\angle ACB = \angle BAC = 55°$ (по наличию углов, прилегающих к основанию),
$\angle B = 180° - (55° + 55°) = 70°$ (по сумме внутренних углов треугольника).




б) Согласно свойству вертикальных углов, $\Delta DKC$ $\angle CDK = 44°$,
$\angle CKD = \angle CDK = 44°$ (углы, прилегающие к основанию),
$\angle B = 180° - (44° + 44°) = 92°$.

в) Согласно свойству вертикальных углов, $\Delta TMP$ $\angle TMP = 32°$,
$\angle MTP = \angle MPT = (180° - 32°) : 2 = 74°$.

**Ответ**: а) 55°, 55°, 70°. б) 44°, 44°, 92°. в) 32°, 74°, 74°.

**Упражнение № 13.** Согласно условию, $P_{ABC} = 48$ см, $P_{ABK} = 36$ см, AB = AC. Если известно, что AK – медиана, то BK = KC.
Следовательно, P = AB + BC + AC = 2AB + BK + KC = 2AB + 2BK, 2 (AB + BK) = 48.
Отсюда AB + BK = 24 см.
Тогда $\Delta ABK$ AK = $P_{ABK}$ – (AB + BK) = 36 – 24 = 12 см. **Ответ**: 12 см.

**Упражнение № 17.** При выполнении задания данный угол первоначально следует принять за вершинный угол, второй раз – как прилегающий к основанию угол.

а) Если вершинный угол будет равен 58°, то каждый из углов, прилегающих к основанию будет (180° – 58°) : 2 = 61°.
Если угол, прилегающий к основанию, будет равен 58°, и второй угол, прилегающий к основанию, будет 58°, то вершинный угол составит 180° – 2 · 58° = 64°.

**Ответ**: 58°, 61°, 61° или 64°, 58°, 58°.

**Дифференциальное обучение:** Слабые учащиеся если даже не смогут доказать свойство равнобедренных треугольников, должны уметь применить его в простых ситуациях. Эти свойства равнобедренного треугольника – самые применяемые свойства в решении задач. По этой причине важно, чтобы каждый учащийся знал их.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о свойствах равнобедренного треугольника и их применении.

**Оценивание**

● Применение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Знает, но не может применить свойства равнобедренного треугольника. |
| Уровень II | Знает свойства равнобедренного треугольника, но допускает определённые ошибки при их применении. |
| Уровень III | Знает и самостоятельно применяет свойства равнобедренного треугольника. |
| Уровень IV | Знает, применяет и обосновывает свои мысли о свойствах равнобедренного треугольника. |

## Урок 2.15. Построение треугольника по трём сторонам

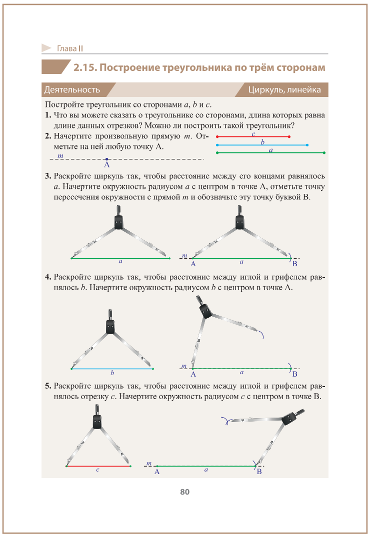
**Стандарт:** 3.1.2. Делит отрезок пополам, строит серединный перпендикуляр отрезка, биссектрису угла и треугольник по его сторонам.

**Результат обучения:** Строит треугольник по трём сторонам.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, циркуль, линейка, оборудование ИКТ



Глава II

2.15. Построение треугольника по трём сторонам

Деятельность — Циркуль, линейка

Постройте треугольник со сторонами $a$, $b$ и $c$.

1. Что вы можете сказать о треугольнике со сторонами, длина которых равна длине данных отрезков? Можно ли построить такой треугольник?
2. Начертите произвольную прямую $m$. Отметьте на ней любую точку A.
3. Раскройте циркуль так, чтобы расстояние между его концами равнялось $a$. Начертите окружность радиусом $a$ с центром в точке A, отметьте точку пересечения окружности с прямой $m$ и обозначьте эту точку буквой B.
4. Раскройте циркуль так, чтобы расстояние между иглой и грифелем равнялось $b$. Начертите окружность радиусом $b$ с центром в точке A.
5. Раскройте циркуль так, чтобы расстояние между иглой и грифелем равнялось отрезку $c$. Начертите окружность радиусом $c$ с центром в точке B.

80



**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час**.**

**Постановка проблемы:** Деятельность, данная в учебнике, выполняется каждым учащимся индивидуально и выполняется построение треугольника по трём сторонам. При необходимости учитель, контролируя работу учащихся, может дать определённое направление. Для точного выполнения построения каждый учащийся должен знать, как правильно пользоваться циркулем.

Целью урока является построение треугольника по трём сторонам. Для достижения этой цели учитель должен быть внимателен к работе каждого учащегося.

После деятельности выполняются задания из учебника.

**Исследовательский вопрос:** Как строится треугольник по трём сторонам?

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** а) Из рисунка ясно, что первоначально на прямой $m$ отмечается точка K. Концы циркуля раскрываются в соответствии с длиной отрезка $a$, с точкой K в центре циркулем строится окружность с радиусом $a$ и тем самым отмечается точка N – точка пересечения окружности с прямой $m$. Затем не изменяя расстояния между концами циркуля, чертится вторая окружность радиусом $a$ с центром в точке N. Точка пересечения этих окружностей отмечается M. Точки K, N и M последовательно соединяются. Полученный ΔKMN – равнобедренный треугольник (обосновывается учащимися).

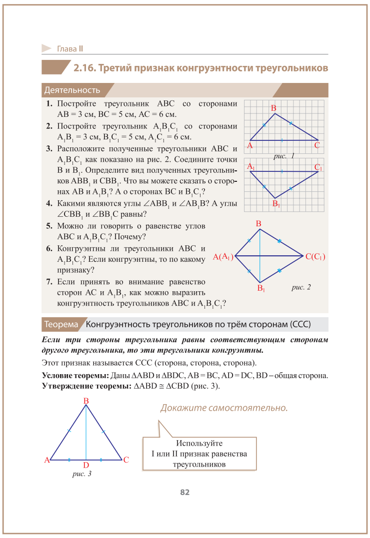
**Обобщение и результат:** Учитель, повторяя правило построения треугольника по трём сторонам, обобщает пройденное.

**Оценивание**

- Построение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется строить треугольник по трём сторонам. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при построении треугольника по трём сторонам. |
| Уровень III | Самостоятельно строит треугольник по трём сторонам. |
| Уровень IV | Строит треугольник по трём сторонам и объясняет построение. |

# Урок 2.16. Третий признак конгруэнтности треугольников


Глава II

2.16. Третий признак конгруэнтности треугольников

Деятельность

1. Постройте треугольник ABC со сторонами AB = 3 см, BC = 5 см, AC = 6 см.
2. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами $A_1B_1$ = 3 см, $B_1C_1$ = 5 см, $A_1C_1$ = 6 см.
3. Расположите полученные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ как показано на рис. 2. Соедините точки B и $B_1$. Определите вид полученных треугольников $ABB_1$ и $CBB_1$. Что вы можете сказать о сторонах AB и $A_1B_1$? А о сторонах BC и $B_1C_1$?
4. Какими являются углы $\angle ABB_1$ и $\angle AB_1B$? А углы $\angle CBB_1$ и $\angle BB_1C$ равны?
5. Можно ли говорить о равенстве углов ABC и $A_1B_1C_1$? Почему?
6. Конгруэнтны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$? Если конгруэнтны, то по какому признаку?
7. Если принять во внимание равенство сторон AC и $A_1B_1$, как можно выразить конгруэнтность треугольников ABC и $A_1B_1C_1$?

рис. 1

рис. 2

Теорема Конгруэнтность треугольников по трём сторонам (ССС)

***Если три стороны треугольника равны соответствующим сторонам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.***

Этот признак называется ССС (сторона, сторона, сторона).

**Условие теоремы:** Даны $\Delta ABD$ и $\Delta BDC$, AB = BC, AD = DC, BD – общая сторона.
**Утверждение теоремы:** $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (рис. 3).

рис. 3

*Докажите самостоятельно.*

Используйте I или II признак равенства треугольников

82

**Стандарт:** 3.2.2. Знает и применяет признаки конгруэнтности треугольников.
**Результат обучения:** Знает и применяет третий признак конгруэнтности треугольников.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, ножницы, лист, гвоздь, молоток, деревянные доски, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа**.**
**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. При этом начерченные в тетради в клетку одинаковые треугольники располагаются так, как показано на рисунке 2. Основываясь на деятельность, на основе предыдущих признаков конгруэнтности треугольников определяется, что треугольники с равными сторонами также являются конгруэнтными.


Деятельность — Доска, гвоздь, молоток

1. Концы двух досок, наложив друг на друга, скрепите гвоздём. Другие концы досок, оставив подвижными, меняйте в разные положения:
2. Объясните, почему концы этих досок подвижны. Что можно сделать, чтобы они оставались неподвижными? Что вы понимаете под свойством прочности треугольника? Как это свойство используется в быту?

**Объяснение учителя**: Учитель выражает признак конгруэнтности треугольников по трём сторонам в виде теоремы. Доказательство теоремы поручается учащимся. Учитель может определённым образом направить учащихся, использующих для доказательства примечание и рисунок 3. На следующем этапе деятельность выполняется практически. Две доски, соединённые с одного конца гвоздём, прикрепляются к доске. Другие концы досок остаются свободными. В этом случае доски можно двигать. Но их невозможно двигать, если закрепить к этим концам третью доску. Выслушивается мнение учащихся о свойстве устойчивости треугольника и использовании его на практике, приводятся примеры. На компьютере демонстрируются примеры по использованию треугольника.

**Исследовательский вопрос**: Как применяется третий признак конгруэнтности треугольника?

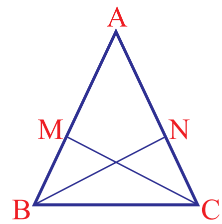
С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**
**Упражнение № 7.** Известно, что $\Delta ABC \cong \Delta KPM \cong \Delta DEF$. Известно, что AB = KP = DE, AC = KM = DF, BC = PM = EF.
Имея это в виду, можно дополнить таблицу.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\Delta ABC$ | AB = 10 см<br>AC = 6 см<br>BC = 11 см | AB = 5 мм<br>AC = 9 мм<br>BC = 8 мм | BC = 17 мм<br>AC = 17 мм<br>AB = 20 мм |

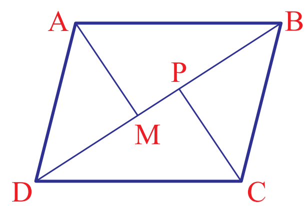
| | | | |
|---|---|---|---|
| ΔKPM | KP = 10 см<br>KM = 6 см<br>PM = 11 см | MK = 5 мм<br>KP = 9 мм<br>PM = 8 мм | PM = 17 мм<br>KM = 17 мм<br>KP = 20 мм |
| ΔDEF | DE = 10 см<br>DF = 6 см<br>EF = 11 см | DE = 5 мм<br>DF = 9 мм<br>EF = 8 мм | EF = 17 мм<br>DF = 17 мм<br>DE = 20 мм |

**Упражнение № 8.** Инструмент, данный в задании, учащиеся могут сконструировать дома. В течение второго урока же с помощью этого инструмента можно построить биссектрису любого угла. Для этого вершина A инструмента накладывается на вершину угла, биссектриса которого будет строиться, стороны треугольника открываются до тех пор, пока не покроют стороны угла (для этого следует передвигать точку D). В этом случае палочка AD будет совпадать с биссектрисой угла.




**Упражнение № 10.** Известно, что BN = CM и BM = CN. Тогда ΔBMC и ΔCNB – конгруэнтные треугольники (по третьему признаку конгруэнтности треугольников). Тогда ∠ABC = ∠ACB, следовательно, ΔABC – равнобедренный. То есть AB = AC.

**Упражнение № 13.** Поскольку AD = BC, AB = CD и BD – общая сторона, то ΔABD ≅ ΔCDB. Тогда соответственные углы ∠DAB = ∠DCB, ∠DBC = ∠BDA, ∠ABD = ∠BDC. Следовательно, ∠BDC = 25°. Отрезки AM и CP – биссектрисы и AM = CP, ∠DAM = ∠MAB и ∠DCP = ∠BCP. Поскольку ∠DAB = ∠DCB, ∠DAM = ∠BCP. Следовательно, ΔADM ≅ ΔCBP, т.е. DM = BP = 3 см.




**Ответ**: ∠BDC = 25°, DM = 3 см.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Изучив третий признак конгруэнтности треугольников, учащиеся определяют его свойство устойчивости и широкое использование этого свойства в быту. Учитель может поручить учащимся подготовить презентацию об инструментах, оборудовании и т.п., где используется это свойство треугольника.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о третьем признаке конгруэнтности треугольников и его применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает III признак конгруэнтности треугольников, затрудняется в применении. |
| Уровень II | Знает III признак конгруэнтности треугольников, но допускает незначительные ошибки в применении. |
| Уровень III | Знает и самостоятельно применяет III признак конгруэнтности треугольников. |
| Уровень IV | Знает и, обосновывая, применяет III признак конгруэнтности треугольников. |

## Образцы критериев для составления заданий для малого суммативного оценивания №4

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Определяет конгруэнтные треугольники |
| 2 | Знает и применяет в решении задач признаки конгруэнтности треугольников |
| 3 | Знает и применяет свойства равнобедренного треугольника |
| 4 | Строит треугольник по трём сторонам |

## Образец малого суммативного оценивания № 4

Фамилия: ____________________ Имя:____________

Количество правильных ответов: _____

Количество неправильных ответов: ___ Оценка:___

**1**. Если $\Delta BDK \cong \Delta AMP$, то запишите равные стороны и равные углы.

______________________________________

______________________________________

**2.** Выразите первый признак конгруэнтности треугольников:

______________________________________

______________________________________

______________________________________

**3.** Известно, что $\Delta ABC \cong \Delta DEK$. Если AB = 42 мм, AC = 6 см, EK = 0,08 м, то определите периметр каждого треугольника.

______________________________________

______________________________________

**4.** Даны $\Delta MKP$ и $\Delta ABD$. Что можно сказать об этих треугольниках, если AB = 34 дм, MK = 3,4 м, $\angle M = 45°$ и $\angle A = 45°$, MP = 190 мм, AD = 19 дм?

______________________________________

______________________________________

**5.** ABC – равнобедренный треугольник. При условии, что угол, прилегающий к основанию треугольника, равен 43°, определите, чему равны оставшиеся два угла.

______________________________________

______________________________________

______________________________________

**6.** Длина высоты AD, проведённой из вершины A равнобедренного треугольника ABC, равна 2,3 см, длина основания BC – 5,6 см. При условии, что периметр треугольника ABD равен 8,1 см, найдите периметр треугольника ABC.

______________________________________

______________________________________

______________________________________

**7.** Известно, что $\Delta ABD \cong \Delta MNP$. При условии, что AB = 145 мм, MP = 11,3 см, BD = 3,8 см, найдите сумму периметров этих треугольников.

______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

**8**. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник со сторонами 2,4 см, 1,7 см и 1,5 см.

**9.** В равнобедренном треугольнике медиана равна 12 см. Сколько миллиметров будут составлять высота и биссектриса этого треугольника?

______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

## Образец большого суммативного оценивания № 1

**1.** Найдите расстояние между точками A и B: A(–214,6) и B(202,1).

**2.** Основываясь на данные условия, сравните степень $a^n$ с нулём:

- $a > 0$
  - $n$ чётное число → $a^n \quad 0$
  - $n$ нечётное число → $a^n \quad 0$
- $a < 0$
  - $n$ чётное число → $a^n \quad 0$
  - $n$ нечётное число → $a^n \quad 0$

**3.** Данные дроби запишите в виде десятичных дробей. Напишите вид периодической десятичной дроби:

$\frac{7}{15} =$ $\qquad 2\frac{5}{24} =$ $\qquad \frac{11}{18} =$ $\qquad 1\frac{7}{16} =$ $\qquad \frac{9}{21} =$

**4.** Преобразуйте периодические десятичные дроби в простые дроби:

2,(5) = $\qquad$ 0, 9(1) = $\qquad$ 3,01(3) = $\qquad$ 0,7(53) =

**5.** Выполните вычисления:

24,(8) + 11,0(4) – 9,(123) =

**6.** Постройте биссектрису данного угла (рисунок 1):

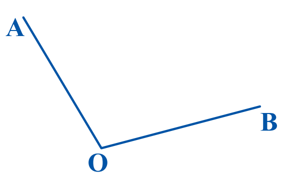


*рисунок 1*

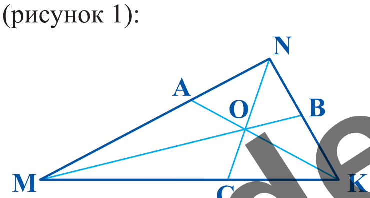


*рисунок 2*

**7.** Отрезки KA, NC и MB – биссектрисы треугольника MNK (рисунок 2). Найдите углы NMB, MBN, NCK при условии, что $\angle MNK = 66°$, $\angle MKA = 32°$:

**8.** Проведите высоту и медиану из вершины A треугольника ABC (рисунок 3).

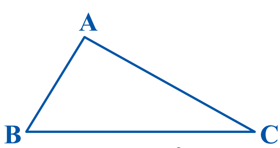


*рисунок 3*

**9.** Если длины сторон треугольника будут 12,4 см, 164 мм и 1,52 дм, на какие длины поделятся эти стороны, если к ним провести медианы?

**10.** Упростите выражение:

$(2^6)^2 : 2^{10} + 3^8 : (3^2)^4 - 125 \cdot 25^3 : 5^5 =$

**11.** Турал вложил 1500 манатов в банк с годовым доходом в 5% от первоначальной суммы и через 3 года взял 50% от скопленной суммы. Сколько денег будет на счету у Турала через 5 лет?

**12.** Напишите свои мысли о треугольниках ABC и MNK при условии, что AB = 8 см 2 мм, MN = 43 мм, NK = 8,2 см, AC = 65 мм, MK = 0,65 дм.

**13.** При условии, что один из углов равнобедренного треугольника равен 50°, найдите другие углы.

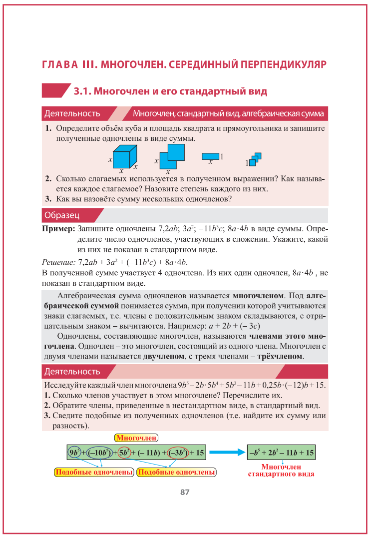
## ГЛАВА III

## МНОГОЧЛЕН. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

| Стандарт | Учебная единица | Тема | Часы |
|---|---|---|---|
| 2.2.1. | Глава III. Многочлен. Серединный перпендикуляр | **Урок 3.1.** Многочлен и его стандартный вид | **1** |
| 2.2.1. | | **Урок 3.2.** Сложение многочленов | **1** |
| 2.2.1. | | **Урок 3.3.** Вычитание многочленов | **2** |
| 2.2.1. | | **Урок 3.4.** Умножение одночлена на многочлен | **1** |
| 2.2.1. | | **Урок 3.5.** Умножение многочлена на многочлен | **2** |
| 2.2.1. | | **Урок 3.6.** Разложение многочлена на множители | **1** |
| 3.1.2. | | **Урок 3.7.** Деление отрезка пополам | **2** |
| 3.1.2. | | **Урок 3.8.** Серединный перпендикуляр отрезка | **1** |
| 3.1.2. | | **Урок 3.9.** Перпендикуляр и наклонные | **1** |
| 3.2.1. | | **Урок 3.10.** Центральная симметрия | **2** |
| 2.2.1. | | **Урок 3.11.** Тождество. Тождественные преобразования | **1** |
| 2.2.2. | | **Урок 3.12.** Линейное уравнение с одной переменной | **2** |
| 4.2.1., 1.3.1. | | **Урок 3.13.** Абсолютная погрешность | **2** |
| 4.2.1., 1.3.1. | | **Урок 3.14.** Относительная погрешность | **2** |
| | | Проверьте себя | **1** |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 5 | **1** |

# Урок 3.1. Многочлен и его стандартный вид

**Стандарт:** 2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.
**Результат обучения:** Знает многочлен и приводит к стандартному виду.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ



ГЛАВА III. МНОГОЧЛЕН. СЕРЕДИННЫЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

3.1. Многочлен и его стандартный вид

Деятельность | Многочлен, стандартный вид, алгебраическая сумма

1. Определите объём куба и площадь квадрата и прямоугольника и запишите полученные одночлены в виде суммы.
2. Сколько слагаемых используется в полученном выражении? Как называется каждое слагаемое? Назовите степень каждого из них.
3. Как вы назовёте сумму нескольких одночленов?

Образец

**Пример:** Запишите одночлены $7{,}2ab$; $3a^2$; $-11b^3c$; $8a \cdot 4b$ в виде суммы. Определите число одночленов, участвующих в сложении. Укажите, какой из них не показан в стандартном виде.

*Решение:* $7{,}2ab + 3a^2 + (-11b^3c) + 8a \cdot 4b$.
В полученной сумме участвует 4 одночлена. Из них один одночлен, $8a \cdot 4b$ , не показан в стандартном виде.

Алгебраическая сумма одночленов называется **многочленом**. Под **алгебраической суммой** понимается сумма, при получении которой учитываются знаки слагаемых, т.е. члены с положительным знаком складываются, с отрицательным знаком – вычитаются. Например: $a + 2b + (-3c)$

Одночлены, составляющие многочлен, называются **членами этого многочлена**. Одночлен – это многочлен, состоящий из одного члена. Многочлен с двумя членами называется **двучленом**, с тремя членами – **трёхчленом**.

Деятельность

Исследуйте каждый член многочлена $9b^5 - 2b \cdot 5b^4 + 5b^2 - 11b + 0{,}25b \cdot (-12)b + 15$.
1. Сколько членов участвует в этом многочлене? Перечислите их.
2. Обратите члены, приведенные в нестандартном виде, в стандартный вид.
3. Сведите подобные из полученных одночленов (т.е. найдите их сумму или разность).

Многочлен

$9b^5 + (-10b^5) + 5b^2 + (-11b) + (-3b^2) + 15 \rightarrow -b^5 + 2b^2 - 11b + 15$

Подобные одночлены | Подобные одночлены | Многочлен стандартного вида

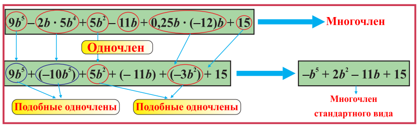
87

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Геометрические фигуры, данные в деятельности учебника, выводятся на экран компьютера (или используется рисунок в учебнике). Учащиеся знакомы с этими фигурами из урока «Одночлены». На основе деятельности учащиеся записывают выражение $x^3 + 2x^2 + x + 3$ и высказывают мнение о слагаемых (одночленах).

После выполнения деятельности на экран выводится данный в учебнике многочлен и




на нём исследуется многочлен, его члены, стандартный вид, сведение подобных одночленов, степень многочлена. Учитель даёт необходимые объяснения. Выполняются образец и вторая деятельность.

**Исследовательский вопрос**: Как преобразуется в стандартный вид многочлен нестандартного вида?

Для проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 6.**
г) $5a \cdot 4b^2 - 0{,}8b \cdot 4b^2 - 2ab \cdot 3b + b \cdot 3b^2 - 1 = \underline{20ab^2} - \underline{3{,}2b^3} - \underline{6ab^2} + \underline{3b^3} - 1 = 14ab^2 - 0{,}2b^3 - 1$.
Степень многочлена – 3, самостоятельный член – 1.

**Упражнение № 8.** Учащиеся алгоритм, данный в блок-схеме, первоначально записывают с помощью переменных. Затем вместо переменных в полученном многочлене они записывают числа и преобразуют многочлен в числовое выражение, и вычисляют значение выражения. Каждый алгоритм можно осуществить, поручив его выполнение отдельной группе.

1) $a^2 - 3a + 4{,}23$. Каждый учащийся вместо переменной $a$ может вписать любое целое число. Например: $a = -15$, $(-15)^2 - 3 \cdot (-15) + 4{,}23 = 274{,}23$.
   Здесь выполняется линейный алгоритм.
2) На основе второй схемы выполняется алгоритм с ответвлениями. Добавляемая дробь может быть записана в виде дроби (правильная или неправильная простая дробь)

или десятичной дроби. На основе условного алгоритма следует выполнить алгоритм с левой стороны блок-схемы с ответом «да», с правой стороны – с ответом «нет».

**Левая сторона:** $x^3 + 2x - 12$. Каждый учащийся вместо переменной $x$ может записать простую дробь. Например: при условии $x = \frac{3}{4}$,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 2\cdot\frac{3}{4} - 12 = \frac{27}{64} + \frac{3}{2} - 12 = \frac{123}{64} - 12 = -10\frac{5}{64}.$$

**Правая сторона:** $100b - b^2$. Каждый учащийся вместо переменной $b$ может записать простую дробь. Например: при условии $b = 0{,}23$, $100 \cdot 0{,}23 - 0{,}23^2 = 22{,}9471$.

Вычисления могут проводиться и калькулятором.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** В некоторых заданиях одночлены даны в виде моделей геометрических фигур. Выполняя эти задания, учащиеся ещё раз вспоминают понятия площади и объёма. Учитель доводит до внимания учащихся понятие алгебраической суммы одночленов с помощью геометрических фигур.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о многочлене, его стандартном виде, степени, коэффициентах, самостоятельном члене.

**Оценивание**

● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Показывает степень, члены многочлена, затрудняется привести его в стандартный вид. |
| Уровень II | Приводит многочлен в стандартный вид после определённого направления, самостоятельно показывает степень, члены. |
| Уровень III | Самостоятельно приводит многочлен в стандартный вид, показывает степень, члены. |
| Уровень IV | Объясняя, приводит многочлен в стандартный вид, даёт широкую информацию о степени, членах. |

## Урок 3.2. Сложение многочленов

**Стандарт:** 2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.

**Результат обучения:** Учащийся находит сумму многочленов.

**Форма работы:** коллективная и работа в группах

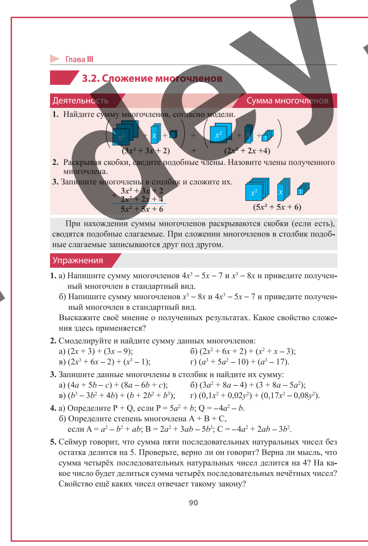
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ, геометрические фигуры, вырезанные из картона

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Модели, данные в деятельности учебника, презентуются с помощью компью-



Глава III

3.2. Сложение многочленов

Деятельность — Сумма многочленов

1. Найдите сумму многочленов, согласно модели.

$(3x^2 + 3x + 2)$ + $(2x^2 + 2x + 4)$

2. Раскрывая скобки, сведите подобные члены. Назовите члены полученного многочлена.

3. Запишите многочлены в столбик и сложите их.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x + 2 \\ +\; 2x^2 + 2x + 4 \\ \hline 5x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

$(5x^2 + 5x + 6)$

При нахождении суммы многочленов раскрываются скобки (если есть), сводятся подобные слагаемые. При сложении многочленов в столбик подобные слагаемые записываются друг под другом.

Упражнения

1. а) Напишите сумму многочленов $4x^3 - 5x - 7$ и $x^3 - 8x$ и приведите полученный многочлен в стандартный вид.
   б) Напишите сумму многочленов $x^3 - 8x$ и $4x^3 - 5x - 7$ и приведите полученный многочлен в стандартный вид.
   Выскажите своё мнение о полученных результатах. Какое свойство сложения здесь применяется?
2. Смоделируйте и найдите сумму данных многочленов:
   а) $(2x + 3) + (3x - 9)$; б) $(2x^2 + 6x + 2) + (x^2 + x - 3)$;
   в) $(2x^3 + 6x - 2) + (x^3 - 1)$; г) $(a^3 + 5a^2 - 10) + (a^3 - 17)$.
3. Запишите данные многочлены в столбик и найдите их сумму:
   а) $(4a + 5b - c) + (8a - 6b + c)$; б) $(3a^2 + 8a - 4) + (3 + 8a - 5a^2)$;
   в) $(b^3 - 3b^2 + 4b) + (b + 2b^2 + b^3)$; г) $(0{,}1x^2 + 0{,}02y^2) + (0{,}17x^2 - 0{,}08y^2)$.
4. а) Определите P + Q, если $P = 5a^2 + b$; $Q = -4a^2 - b$.
   б) Определите степень многочлена A + B + C,
   если $A = a^2 - b^2 + ab$; $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$; $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$.
5. Сеймур говорит, что сумма пяти последовательных натуральных чисел без остатка делится на 5. Проверьте, верно ли он говорит? Верна ли мысль, что сумма четырёх последовательных натуральных чисел делится на 4? На какое число будет делиться сумма четырёх последовательных нечётных чисел? Свойство ещё каких чисел отвечает такому закону?

90

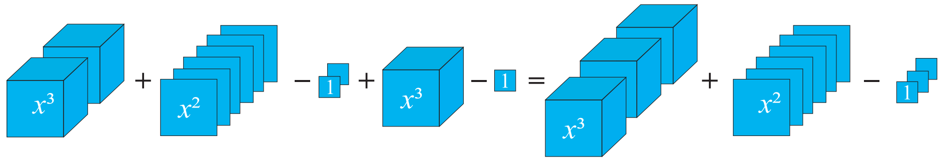
тера и учащимися производится действие сложения многочленов. Преобразование подобных слагаемых наглядно выполняется на геометрических фигурах. Эти фигуры учитель может вырезать из картона.
После сложения многочленов по модели, учитель обращает внимание на сложение многочленов в столбик.

**Исследовательский вопрос**: Как находится сумма многочленов?

С целью проведения исследования задания из учебника раздаются на рабочих листах учащимся, разделённым на группы.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** Чтобы изобразить сумму многочленов в виде модели, можно использовать геометрические фигуры. Эти фигуры можно вырезать из картона (модель куба может быть дана в виде рисунка) или используются возможности компьютера.
в) $(2x^3 + 6x – 2) + (x^3 – 1)$.
При изображении разности этих многочленов на геометрических фигурах принимается за $x^3$ – объём куба с ребром $x$ ед. изм., за $x^2$ – площадь большого квадрата со стороной $x$ ед. изм., за 1 кв. ед. – площадь малого квадрата со стороной 1 ед. изм.




С помощью изображения определяется разность и затем представляется математическое написание.

На основе модели, $(2x^3 + 6x – 2) + (x^3 – 1) = 3x^3 + 6x – 3$.

**Упражнение № 3.** При сложении многочленов в столбик важно сложение в одном столбике одинаковых слагаемых, т.е. написание их друг под другом.

**Упражнение № 5.** Задание выполняется группами. Учащиеся должны уметь записать последовательные натуральные числа в виде выражения. Для этого первое натуральное число обозначается $n$ и последующие числа выстраиваются в виде добавления одной единицы: $n$, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$. Записав сумму этих чисел, выражение приводится в стандартный вид: $n + n + 1+ n + 2 + n + 3 + n + 4 = 5n + 10 = 5(n + 2)$.
Таким образом, в последнем произведении участвует множитель 5, следовательно, сумма пяти последовательных натуральных чисел полностью делится на 5.
По тому же принципу можно показать верность предположения, что сумма четырёх последовательных натуральных чисел делится на 4:
$n + n + 1+ n + 2 + n + 3 = 4n + 6 = = 2(2n + 3)$.
Если принять четыре последовательных нечётных числа в виде $2n – 1$; $2n + 1$; $2n + 3$; $2n + 5$, то их сумма: $2n – 1+ 2n + 1+ 2n + 3+ 2n + 5 = 8n + 8= 8(n +1)$. Это выражение делится на 8.
Другие предложения, соответствующие такой закономерности, выдвигаются группами.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о сложении многочленов.

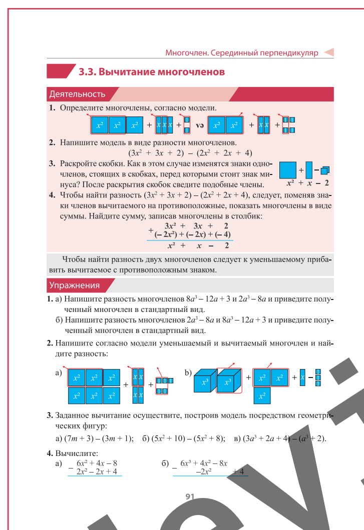
**Оценивание**

● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется найти сумму многочленов.<br>Определяет сумму многочленов на геометрических фигурах, но не может их складывать способом алгебраического сложения. |
| Уровень II | При сложении многочленов допускает незначительные ошибки. |
| Уровень III | Самостоятельно находит сумму многочленов. |
| Уровень IV | Находит удобным способом сумму многочленов. |

## Урок 3.3. Вычитание многочленов

**Стандарт:** 2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.
**Результат обучения:** Находит разность многочленов.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ


Многочлен. Серединный перпендикуляр

3.3. Вычитание многочленов

Деятельность

1. Определите многочлены, согласно модели.

2. Напишите модель в виде разности многочленов.
$(3x^2 + 3x + 2) - (2x^2 + 2x + 4)$

3. Раскройте скобки. Как в этом случае изменятся знаки одночленов, стоящих в скобках, перед которыми стоит знак минуса? После раскрытия скобок сведите подобные члены. $x^2 + x - 2$

4. Чтобы найти разность $(3x^2 + 3x + 2) - (2x^2 + 2x + 4)$, следует, поменяв знаки членов вычитаемого на противоположные, показать многочлены в виде суммы. Найдите сумму, записав многочлены в столбик:
$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x + 2 \\ + (-2x^2) + (-2x) + (-4) \\ \hline x^2 + x - 2 \end{array}$$

Чтобы найти разность двух многочленов следует к уменьшаемому прибавить вычитаемое с противоположным знаком.

Упражнения

1. а) Напишите разность многочленов $8a^3 - 12a + 3$ и $2a^3 - 8a$ и приведите полученный многочлен в стандартный вид.
б) Напишите разность многочленов $2a^3 - 8a$ и $8a^3 - 12a + 3$ и приведите полученный многочлен в стандартный вид.

2. Напишите согласно модели уменьшаемый и вычитаемый многочлен и найдите разность:

3. Заданное вычитание осуществите, построив модель посредством геометрических фигур:
а) $(7m + 3) - (3m + 1)$; б) $(5x^2 + 10) - (5x^2 + 8)$; в) $(3a^3 + 2a + 4) - (a^3 + 2)$.

4. Вычислите:
а) $\begin{array}{r} - \; 6x^2 + 4x - 8 \\ 2x^2 - 2x + 4 \\ \hline \end{array}$ б) $\begin{array}{r} - \; 6x^3 + 4x^2 - 8x \\ -2x^2 \quad + 4 \\ \hline \end{array}$

91

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Модели, данные в деятельности учебника, представляются посредством компьютера или выполняются с помощью фигур, сделанных из картона. Выполнение вычитания на моделях объясняется учащимися. Преобразуя модели в многочлен, определяют полученную разность $x^2 + x - 2$. Объясняется связь между нахождением разности на моделях и в виде выражения.

На следующем этапе учитель объясняет учащимся способ нахождения разности многочленов в столбик.

**Исследовательский вопрос**: Как определяется разность многочленов и каким выражением является полученный результат?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются на рабочих листах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** На основе модели записываются разности ниже приведённых многочленов:

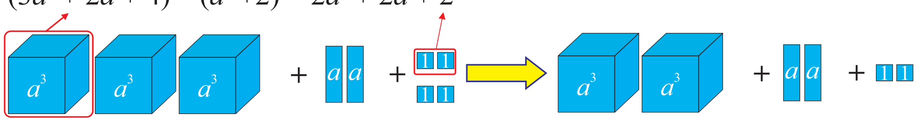
а) $(6x^2 + 4x + 5) - (2x^2 + 2x + 4) = 4x^2 + 2x + 1$.

б) $(2x^3 + 3x^2 + x - 3) - (x^3 + 2x^2) = x^3 + x^2 + x - 3$.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Не для всех многочленов удобно смоделировать сумму и разность многочленов. По этой причине в заданиях из учебника даются задания смоделировать сумму и разность относительно простых многочленов. Способ моделирования облегчает учащимся понимание выполнения действий над многочленами. Целесообразно при моделировании использовать картон, цветную бумагу.

**Упражнение № 3.** в) Принимается, что объём куба с ребром в $a$ ед. изм. равен $a^3$, площадь прямоугольника со сторонами 1 и $a$ ед. изм. – $a$ кв. ед., площадь квадрата со стороной 1 ед. изм. – 1 кв. ед..

$$(3a^3 + 2a + 4) - (a^3 + 2) = 2a^3 + 2a + 2$$



**Упражнение № 8.** Прежде, чем приступить к выполнению задания, у учащихся спрашивают правила нахождения неизвестного слагаемого, уменьшаемого и вычитаемого.

а) $A + (12y^2 + 6y - 1) = -10y + 9$
$A = (-10y + 9) - (12y^2 + 6y - 1)$
$A = -12y^2 - 16y + 10.$

б) $(-6x^2 + 7x - 11) - A = 2x^2 + 2x - 1$
$A = (-6x^2 + 7x - 11) - (2x^2 + 2x - 1)$
$A = -8x^2 + 5x - 10.$

**Упражнение № 10.** Задание может быть выполнено в индивидуальной форме.

в) $(9ax^3 - 5ax^2 + 6ax) - (-3ax^3 - 6ax^2 - 7ax) - (5ax^3 + ax) =$
$= 9ax^3 - 5ax^2 + 6ax + 3ax^3 + 6ax^2 + 7ax - 5ax^3 - ax = 7ax^3 + ax^2 + 12ax.$

г) $(a^3 - 0{,}12b^3) + (0{,}39a^3 - b^3 - 9) + (0{,}01a^3 - 1{,}88b^3 + 11) =$
$= a^3 - 0{,}12b^3 + 0{,}39a^3 - b^3 - 9 + 0{,}01a^3 - 1{,}88b^3 + 11 = 1{,}4a^3 - 3b^3 + 2.$

**Дифференциальное обучение**: При вычитании многочленов важно обращать внимание на знак перед скобками. Слабые учащиеся, приняв во внимание знак, могут допустить ошибку. Учитель должен обращать внимание на это, работая с учащимися.

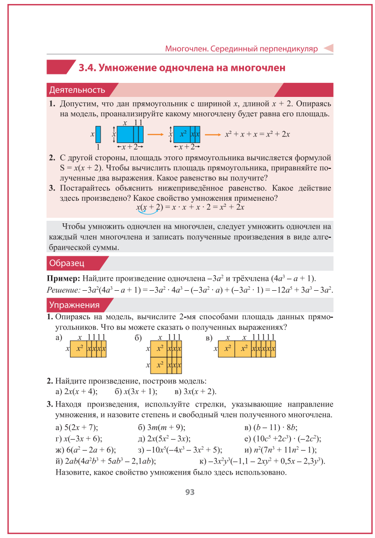
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о правилах вычитания многочленов.

**Оценивание**

● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не учитывает знак перед скобками при вычитании многочленов. Находя разность многочленов, не может преобразовать подобные одночлены. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при нахождении разности многочленов, получает результат после определённых указаний. |
| Уровень III | Самостоятельно находит разность многочленов. |
| Уровень IV | Находит разность многочленов удобным способом. |

# Урок 3.4. Умножение одночлена на многочлен





## 3.4. Умножение одночлена на многочлен

**Деятельность**

1. Допустим, что дан прямоугольник с шириной $x$, длиной $x + 2$. Опираясь на модель, проанализируйте какому многочлену будет равна его площадь.



2. С другой стороны, площадь этого прямоугольника вычисляется формулой $S = x(x + 2)$. Чтобы вычислить площадь прямоугольника, приравняйте полученные два выражения. Какое равенство вы получите?
3. Постарайтесь объяснить нижеприведённое равенство. Какое действие здесь произведено? Какое свойство умножения применено?

$$x(x + 2) = x \cdot x + x \cdot 2 = x^2 + 2x$$

Чтобы умножить одночлен на многочлен, следует умножить одночлен на каждый член многочлена и записать полученные произведения в виде алгебраической суммы.

**Образец**

**Пример:** Найдите произведение одночлена $-3a^2$ и трёхчлена $(4a^3 - a + 1)$.

*Решение:* $-3a^2(4a^3 - a + 1) = -3a^2 \cdot 4a^3 - (-3a^2 \cdot a) + (-3a^2 \cdot 1) = -12a^5 + 3a^3 - 3a^2$.

**Упражнения**

1. Опираясь на модель, вычислите 2-мя способами площадь данных прямоугольников. Что вы можете сказать о полученных выражениях?

а) б) в)



2. Найдите произведение, построив модель:

а) $2x(x + 4)$; б) $x(3x + 1)$; в) $3x(x + 2)$.

3. Находя произведения, используйте стрелки, указывающие направление умножения, и назовите степень и свободный член полученного многочлена.

а) $5(2x + 7)$; б) $3m(m + 9)$; в) $(b - 11) \cdot 8b$;
г) $x(-3x + 6)$; д) $2x(5x^2 - 3x)$; е) $(10c^5 + 2c^3) \cdot (-2c^2)$;
ж) $6(a^2 - 2a + 6)$; з) $-10x^5(-4x^3 - 3x^2 + 5)$; и) $n^2(7n^3 + 11n^2 - 1)$;
й) $2ab(4a^2b^3 + 5ab^3 - 2{,}1ab)$; к) $-3x^2y^3(-1{,}1 - 2xy^2 + 0{,}5x - 2{,}3y^3)$.

Назовите, какое свойство умножения было здесь использовано.

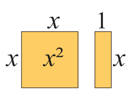


**Стандарт:** 2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.
**Результат обучения:** Находит произведение одночлена с многочленом.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

### Ход урока:

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Для выполнения деятельности из учебника можно подготовить модели из картона (здесь можно принять $x = 2$ см). Условие деятельности представляется посредством компьютера. Учащиеся площадь прямоугольника с шириной $x$ (ед. изм.), длиной $(x + 2)$ (ед. изм.) определяют по модели и на основе формулы вычисления площади прямоугольника, что записывается в виде равенства. Высказывают своё мнение о полученном равенстве. Отвечая на вопросы учителя, учащиеся вспоминают о распределительном свойстве умножения. Применение этого свойства объясняется при умножении одночлена на многочлен.



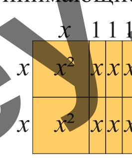


**Исследовательский вопрос**: Как выполняется умножение одночлена на многочлен?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются на рабочих листах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** Согласно модели, определяются одночлен и двучлен, принимающие участие в умножении. Решая это задание, учащиеся могут использовать фигуры из картона.



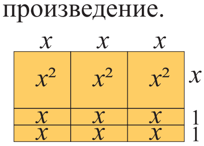


б) согласно модели, ширина прямоугольника $2x$ (ед. изм.), длина – $(x + 3)$ (ед. изм.). Сумма площадей полученных прямоугольников (согласно рисунку) будет $x^2 + x^2 + x + x + x + x + x + x = 2x^2 + 6x$.

С другой стороны, согласно формуле площади, должно быть вычислено $2x(x + 3)$. Следовательно, $2x(x + 3) = 2x^2 + 6x$.

По тому же принципу в других моделях определяются множители и произведение.

**Упражнение № 2.** Чтобы определить данные произведения по модели, можно использовать сделанные из картона фигуры, соответствующие множителям. Задания даются группам.





в) $3x(x + 2) = 3x^2 + 6x$.

**Упражнение № 3.** Чтобы найти произведение, следует наглядно стрелками показать направление умножения, что поможет учащимся быстрее понять правила нахождения произведения одночлена с многочленом.

к) $2ab(4a^2b^3 + 5ab^3 - 2{,}1ab) = 8a^3b^4 + 10a^2b^4 - 4{,}2a^2b^2$.

У этого многочлена нет свободного члена (или нуль).

**Упражнение № 5.** Чтобы найти площадь дачи, следует от площади большого прямоугольника отнять площадь маленького прямоугольника.

$S_{план} = 4c(a + 2b) - 2c \cdot 2b = 4ac + 8bc - 4bc = 4ac + 4bc = 4c(a + b)$.

Если $a = 8$ см, $b = 5$ см, $c = 3$ см и масштаб 1 : 200, то настоящие величины:

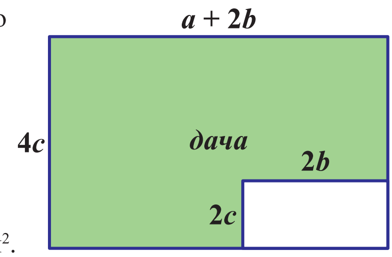
$a = 8 \cdot 200 = 1600$ см $= 16$ м,

$b = 5 \cdot 200 = 1000$ см $= 10$ м,

$c = 3 \cdot 200 = 600$ см $= 6$ м. Тогда

$S_{план} = 4c(a + b) = 4 \cdot 3 \cdot (8 + 5) = 156$ см$^2$

$S_{дачи} = 4c(a + b) = 4 \cdot 6 \cdot (16 + 10) = 624$ м$^2$.




**Ответ**: 156 см$^2$, 624 м$^2$.

**Упражнение № 7.** Это задание может быть задано учащимся в качестве домашнего задания.

**Упражнение № 8.** В решении уравнения применяются правила умножения одночлена на многочлен, сложение и вычитание многочленов.

д) $6 + (2 - 4x) + 5 = 3(1 - 3x)$

$6 + 2 - 4x + 5 = 3 - 9x$

$9x - 4x = 3 - 13$

$x = -2$.

**Ответ**: –2.

е) $0{,}15(x - 4) = 9{,}9 - 0{,}3(x - 1)$.

$0{,}15x - 0{,}6 = 9{,}9 - 0{,}3x + 0{,}3$

$0{,}15x + 0{,}3x = 9{,}9 + 0{,}3 + 0{,}6$

$x = 24$.

**Ответ**: 24.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное об умножении одночлена на многочлен.

**Оценивание**

● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в нахождении произведения одночлена с многочленом. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при нахождении произведения одночлена с многочленом. |
| Уровень III | Самостоятельно находит произведение одночлена с многочленом. |
| Уровень IV | Использует удобные способы для нахождения произведения одночлена с многочленом. |

## Урок 3.5. Умножение многочлена на многочлен

**Стандарт:** 2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.

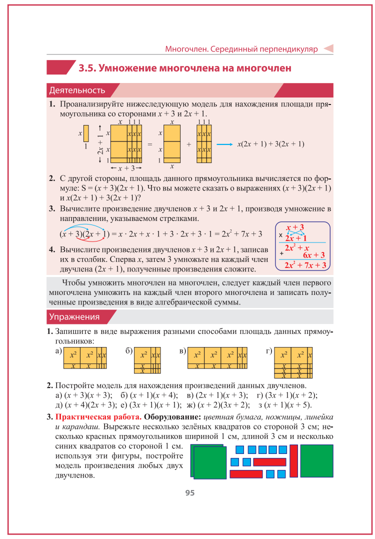
**Результат обучения:** Находит произведение многочлена на многочлен.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах и в парах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, фигуры из картона

**Ход урока:**
На изучение темы отводится 2 часа.
**Постановка проблемы:** Для выполнения деятельности из учебника можно использовать модели, сделанные из картона на предыдущем уроке. Учащиеся определяют по модели площадь прямоугольника со сторонами $(2x+1)$ и $(x+3)$ и на основе формулы вычисления площади прямоугольника записывают его в виде равенства:
$(x + 3)(2x + 1) = 2x^2 + 7x + 3$.
Выслушивается мнение учащихся о полученном равенстве. Проводя исследование о том, как получить правую сторону из левой стороны неравенства, учащиеся делают попытку назвать правило нахождения произведения многочленов. При необходимости учитель, направляя, помогает учащимся.


Многочлен. Серединный перпендикуляр

## 3.5. Умножение многочлена на многочлен

**Деятельность**

1. Проанализируйте нижеследующую модель для нахождения площади прямоугольника со сторонами $x + 3$ и $2x + 1$.

$\to x(2x + 1) + 3(2x + 1)$

2. С другой стороны, площадь данного прямоугольника вычисляется по формуле: $S = (x + 3)(2x + 1)$. Что вы можете сказать о выражениях $(x + 3)(2x + 1)$ и $x(2x + 1) + 3(2x + 1)$?
3. Вычислите произведение двучленов $x + 3$ и $2x + 1$, производя умножение в направлении, указываемом стрелками.
$(x + 3)(2x + 1) = x \cdot 2x + x \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 2x^2 + 7x + 3$
4. Вычислите произведения двучленов $x + 3$ и $2x + 1$, записав их в столбик. Сперва $x$, затем 3 умножьте на каждый член двучлена $(2x + 1)$, полученные произведения сложите.

$$\begin{array}{r} x+3 \\ \times\ 2x+1 \\ \hline 2x^2+x \\ +\ \ 6x+3 \\ \hline 2x^2+7x+3 \end{array}$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, следует каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и записать полученные произведения в виде алгебраической суммы.

**Упражнения**

1. Запишите в виде выражения разными способами площадь данных прямоугольников:
а) б) в) г)
2. Постройте модель для нахождения произведений данных двучленов.
а) $(x + 3)(x + 3)$; б) $(x + 1)(x + 4)$; в) $(2x + 1)(x + 3)$; г) $(3x + 1)(x + 2)$;
д) $(x + 4)(2x + 3)$; е) $(3x + 1)(x + 1)$; ж) $(x + 2)(3x + 2)$; з $(x + 1)(x + 5)$.
3. **Практическая работа. Оборудование:** *цветная бумага, ножницы, линейка и карандаш.* Вырежьте несколько зелёных квадратов со стороной 3 см; несколько красных прямоугольников шириной 1 см, длиной 3 см и несколько синих квадратов со стороной 1 см. используя эти фигуры, постройте модель произведения любых двух двучленов.

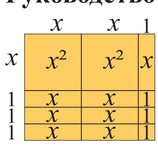
95

**Исследовательский вопрос**: Как находится произведение многочленов?

Учащиеся класса выполняют задания из учебника группами или парами.

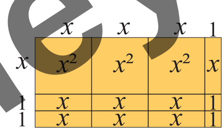
Чтобы выполнить задания № 1, 2 и 3, необходимо создать 4 группы по 3-4 участника в каждой. Задания делятся между группами. Каждая группа на основе данной модели определяет произведение и множители, во втором задании произведение многочленов определяют, построив модель.

**Руководство к некоторым заданиям:**

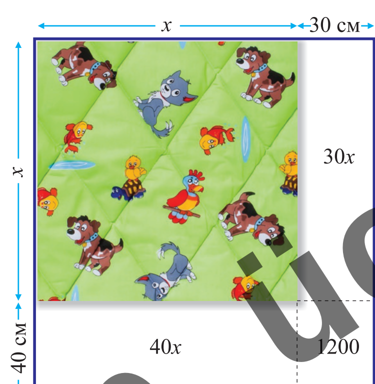


**Упражнение № 1.** г) В данной модели ширина прямоугольника выражена многочленом $(x + 3)$, а длина – многочленом $(2x + 1)$. Сумма площадей возникающих внутри квадрата и прямоугольников выражает многочлен $x^2 + x^2 + x + x + x + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 = 2x^2 + 7x + 3$.
Следовательно, $(x + 3)(2x + 1) = 2x^2 + 7x + 3$.

**Упражнение № 2.** г) Чтобы построить модель произведения $(3x + 1)(x + 2)$ изобразим прямоугольник с шириной $(x + 2)$ (ед.изм.), длиной $(3x+1)$ (ед. изм.). Согласно модели,
$(3x + 1)(x + 2) = 3x^2 + 7x + 2$.



Третьим заданием группы является построение модели произведения двух любых двучленов с использованием цветной бумаги.




**Упражнение № 4.** Детское одеяло в виде квадрата. Чтобы его довести до размеров одеяла, предназначенного для взрослого человека, одну его сторону надо увеличить на 30 см, а другую – на 40 см.

Основываясь на модель, площадь одеяла для взрослого человека определяется нижеследующим многочленом: $(x + 30)(x + 40) = x^2 + 70x + 1200$.

**Ответ**: $x^2 + 70x + 1200$.

На последующем уроке произведение многочленов определяется в столбик (или указанием направления стрелками) и использованием правила нахождения произведения одночлена на многочлен. Поскольку в учебнике приведены образцы, посчитали лишним давать рекомендации к этим заданиям. Учащиеся, опираясь на образец, могут самостоятельно выполнить задание. Учитель при необходимости направляет их.

**Упражнение № 8.** Прежде, чем приступите к вычислению значения выражения, целесообразно его упростить.

$(5x - 1)(x + 3) - (x - 2)(5x - 4) = 5x^2 + 15x - x - 3 - 5x^2 + 4x + 10x - 8 =$

$$= 28x - 11 = 28 \cdot 2\frac{1}{7} - 11 = 49.$$

**Ответ**: 49. Результат, полученный Севиндж, верен.

**Упражнение № 9.** Упростите выражение:

а) $(x + 3)(x - 3) + (4 - x)x - 3x = x^2 - 3x + 3x - 9 + 4x - x^2 - 3x = x - 9$.

Согласно условию упражнения, при каком значении $x$ значение выражения должно быть определено, как равное $a$: $x - 9 = a$. Найдём $x$ из этого равенства. Таким образом, если $x = a + 9$, значение выражения будет равно $a$.

б) $x(1 - 2x) - (x - 3)(x + 3) + 3x^2 = x - 2x^2 - x^2 - 3x + 3x + 9 + 3x^2 = x + 9$;

$x + 9 = a, \qquad x = a - 9$.

в) $x^2(3 - x) - (2 - x^2)(x + 1) - 4x^2 = 3x^2 - x^3 - 2x - 2 + x^3 + x^2 - 4x^2 = -2x - 2$;

$-2x - 2 = a, \qquad x = -\frac{a+2}{2}$.

г) $(x + 2)(x + 2) - x(5 - x) - 2x^2 = x^2 + 2x + 2x + 4 - 5x + x^2 - 2x^2 = 4 - x$.

Если $4 - x = a$, значение выражения будет равно $a$.

**Ответ**: а) $x = a + 9$; б) $x = a - 9$; в) $x = -\frac{a+2}{2}$; г) $x = 4 - a$.

**Дифференциальное обучение**: Положительное воздействие на слабых учащихся может оказать построение модели произведения двучленов посредством геометрических фигур, сделанных из картона. Нахождением модели произведения в начале урока учащиеся дают геометрический комментарий произведению двучленов. После этого они усваивают алгебраический способ нахождения произведения многочленов.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о способах нахождения произведения многочленов.

**Оценивание**

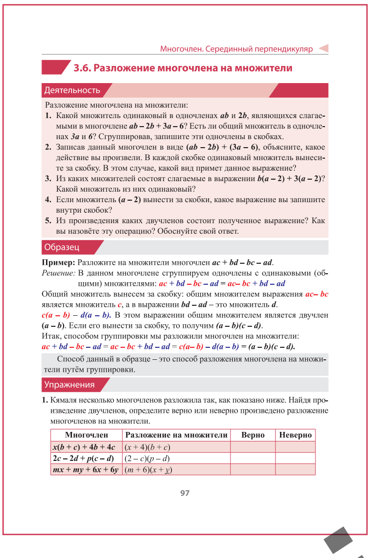
● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
| --- | --- |
| Уровень I | Затрудняется в нахождении произведения многочленов.<br>Произведение многочленов определяет по модели, затрудняется найти произведение многочленов алгебраическим способом. |

| | |
|---|---|
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при нахождении произведения многочленов. Допускает ошибки в обозначениях или преобразовании подобных слагаемых при нахождении произведения многочленов. |
| Уровень III | Самостоятельно находит произведение многочленов. |
| Уровень IV | Использует удобные способы для нахождения произведения многочленов. |

## Урок 3.6. Разложение многочлена на множители

**Стандарт:** 2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.
**Результат обучения:** Раскладывает многочлен на множители.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы


Многочлен. Серединный перпендикуляр

3.6. Разложение многочлена на множители

Деятельность

Разложение многочлена на множители:
1. Какой множитель одинаковый в одночленах $ab$ и $2b$, являющихся слагаемыми в многочлене $ab - 2b + 3a - 6$? Есть ли общий множитель в одночленах $3a$ и $6$? Сгруппировав, запишите эти одночлены в скобках.
2. Записав данный многочлен в виде $(ab - 2b) + (3a - 6)$, объясните, какое действие вы произвели. В каждой скобке одинаковый множитель вынесите за скобку. В этом случае, какой вид примет данное выражение?
3. Из каких множителей состоят слагаемые в выражении $b(a - 2) + 3(a - 2)$? Какой множитель из них одинаковый?
4. Если множитель $(a - 2)$ вынести за скобки, какое выражение вы запишите внутри скобок?
5. Из произведения каких двучленов состоит полученное выражение? Как вы назовёте эту операцию? Обоснуйте свой ответ.

Образец

**Пример:** Разложите на множители многочлен $ac + bd - bc - ad$.
*Решение:* В данном многочлене сгруппируем одночлены с одинаковыми (общими) множителями: $ac + bd - bc - ad = ac - bc + bd - ad$
Общий множитель вынесем за скобку: общим множителем выражения $ac - bc$ является множитель $c$, а в выражении $bd - ad$ – это множитель $d$.
$c(a - b) - d(a - b)$. В этом выражении общим множителем является двучлен $(a - b)$. Если его вынести за скобку, то получим $(a - b)(c - d)$.
Итак, способом группировки мы разложили многочлен на множители:
$ac + bd - bc - ad = ac - bc + bd - ad = c(a - b) - d(a - b) = (a - b)(c - d)$.

Способ данный в образце – это способ разложения многочлена на множители путём группировки.

Упражнения

1. Кямаля несколько многочленов разложила так, как показано ниже. Найдя произведение двучленов, определите верно или неверно произведено разложение многочленов на множители.

| Многочлен | Разложение на множители | Верно | Неверно |
|---|---|---|---|
| $x(b + c) + 4b + 4c$ | $(x + 4)(b + c)$ | | |
| $2c - 2d + p(c - d)$ | $(2 - c)(p - d)$ | | |
| $mx + my + 6x + 6y$ | $(m + 6)(x + y)$ | | |

97

**Ход урока:**

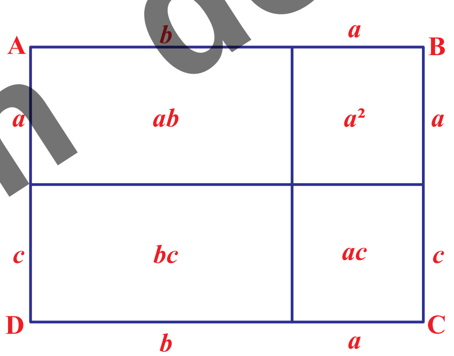
На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** В деятельности, данной в учебнике, поэтапно объясняется учащимся правило разложения многочлена на множители способом группировки. Вместе с учащимися анализируются одночлены, которые составляют многочлен. Выслушиваются их мнения об этих выражениях. В деятельности ещё раз обучают на образце действию разложения на исследуемые множители.

**Исследовательский вопрос**: Как проводится разложение многочлена на множители способом группировки?

Задания из учебника, выполняемые группами, представляют разные случаи разложения многочлена на множители.

**Руководство к некоторым заданиям:**

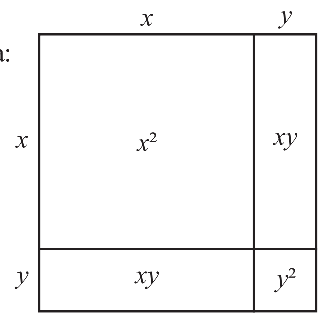



**Упражнение № 2.** а) Сумма площадей данных прямоугольников и квадрата выражена в виде ниже приведённого многочлена:
$a^2 + ab + bc + ac$.
Сторонами прямоугольника с площадью $ab$ являются $a$ и $b$, сторонами прямоугольника с площадью $bc$ являются $b$ и $c$, сторонами прямоугольника с площадью $ac$ являются $a$ и $c$, сторона квадрата с площадью $a^2$ является сторона $a$. Тогда сторонами прямоугольника ABCD являются $(a + c)$ и $(b + a)$.

Следовательно, $(a + c)(b + a) = a^2 + ab + bc + ac$.

б) По тому же принципу запишем для второго прямоугольника:

$(a + d)(b + 2a) = ab + 2a^2 + bd + 2ad$.




**Упражнение № 3.** Задание выполняется группами. Каждая группа строит модель для заданного им многочлена. Для построения модели для заданного многочлена следует так разместить прямоугольники (или квадраты), соответствующие одночленам, составляющим этот многочлен, чтобы фигура, образующая их, была прямоугольником.

б) Для построения модели для многочлена $x^2 + 2xy + y^2$ надо начертить два квадрата, сторона одного из которых была равна $x$, а второго – $y$, и два прямоугольника со сторонами $x$ и $y$.

Как видно, образуется квадрат со сторонами $x + y$. $(x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$.

**Упражнение № 6.** Для разложения многочлена $a^2 +7a + 12$ данного на рисунке, на множители существует особое правило. Так, одночлен $7a$ должен представить сумму двух одночленов таким образом, чтобы полученные одночлены имели общий множитель с одночленами $a^2$ и 12. При написании в виде $7a = 3a + 4a$ получается общий множитель. Но если записать в виде $7a = 2a + 5a$ общий множитель отсутствует, и многочлен невозможно будет разложить на множители.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Внимание учащихся должно быть обращено на равенства $3 + 4 = 7$ и $3 \cdot 4 = 12$. Учитель должен довести до внимания учащихся, как при разложении многочленов на множители следует использовать это свойство коэффициентов. Это свойство применено в упражнениях № 7 и 8.

**Упражнение № 14.** Это задание выполняется учащимися с целью творческого применения. Учащиеся должны проанализировать множитель с правой стороны многочлена. Задание выполняется группами.

а) $6a^3 – 15a^2b – 14ab + … = (2a – 5b)(... – ...)$

Как видно из этого задания, в выражении $6a^3 – 15a^2b$ общий множитель $3a^2$.

$3a^2(2a – 5b)$. Значит в выражении $–14ab + ...$ также надо создать множитель $(2a – 5b)$. Запишем в виде $–14ab = 2a \cdot (–7b)$. Как видно, в выражении, $–14ab + ...$ вместо точек следует записать такой одночлен, чтобы при вынесении за скобки от него множителя $(–7b)$ внутри скобок остался множитель $5b$. Следовательно, вместо точек должен быть записан одночлен $(–7b \cdot 5b) = – 35b^2$. Действительно,

$6a^3 – 15a^2b – 14ab + (–35b^2) = 3a^2(2a – 5b) – 7b\ (2a – 5b)= (2a – 5b)(3a^2 – 7b)$.

По такому же принципу разлагаются на множители многочлены из других пунктов.

б) $12x^3 + 42x^2y – 10xy^2 – 35y^3 = 6x^2(2x + 7y) – 5y^2(2x + 7y)= (2x +7y)(6x^2 – 5y^2)$;

в) $24m^4 – 18m^3 – 4mn^3 + 3n^3 = 6m^3(4m – 3) – n^3(4m – 3) = (6m – n^3)(4m – 3)$;

г) $36y^5 – 54y^4 + 10y – 15 = 18y^4(2y – 3) + 5(2y – 3) = (2y – 3)(18y^4 + 5)$.

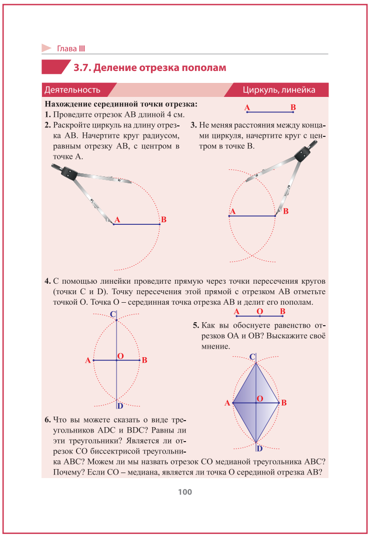
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о разложении многочленов на множители.

**Оценивание**

- Выполнение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется разлагать многочлен на множители. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при разложении многочлена на множители. |
| Уровень III | Самостоятельно разлагает многочлен на множители. |
| Уровень IV | Использует удобные способы при разложении многочлена на множители. |

## Урок 3.7. Деление отрезка пополам


Глава III

3.7. Деление отрезка пополам

Деятельность — Циркуль, линейка

**Нахождение серединной точки отрезка:**

**1.** Проведите отрезок AB длиной 4 см.

**2.** Раскройте циркуль на длину отрезка AB. Начертите круг радиусом, равным отрезку AB, с центром в точке A.

**3.** Не меняя расстояния между концами циркуля, начертите круг с центром в точке B.

**4.** С помощью линейки проведите прямую через точки пересечения кругов (точки C и D). Точку пересечения этой прямой с отрезком AB отметьте точкой O. Точка O – серединная точка отрезка AB и делит его пополам.

**5.** Как вы обоснуете равенство отрезков OA и OB? Выскажите своё мнение.

**6.** Что вы можете сказать о виде треугольников ADC и BDC? Равны ли эти треугольники? Является ли отрезок CO биссектрисой треугольника ABC? Можем ли мы назвать отрезок CO медианой треугольника ABC? Почему? Если CO – медиана, является ли точка O серединой отрезка AB?

100

**Стандарт:** 3.1.2. Делит отрезок пополам, строит серединный перпендикуляр отрезка, биссектрису угла и треугольник по его сторонам.

**Результат обучения:** Делит отрезок пополам с помощью циркуля.

**Форма работы:** коллективная, индивидуальная

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, циркуль, линейка, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Деятельность, данная в учебнике, выполняется каждым учащимся. Учитель контролирует то, как учащиеся с помощью циркуля будут определять серединную точку заданного отрезка, направляет каждого учащегося. Учитель также может нахождение серединной точки отрезка проделать на компьютере и продемонстрировать построение учащимся.

При выполнении деятельности необходимо обосновать равенство отрезков OA и OB. Учитель спрашивает мнение учащихся об OA = OB. Во время построения выясняется равенство треугольников ADC и BCD, определяется, что треугольник ABC – равнобедренный. То, что CO является медианой, обосновывается учащимися. В этом случае при необходимости учитель может дать определённое направление.

**Исследовательский вопрос**: Как можно разделить пополам отрезок, размещённый в разных позициях, с помощью циркуля?

С целью проведения исследования каждый учащийся индивидуально выполняет задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** Выполняя это задание, учащимся следует начертить отрезок не горизонтально, а вертикально, и разделить его пополам с помощью циркуля так, как это делается при его вертикальном расположении.

**Упражнение № 3.** Практическая работа выполняется в группах. Каждая группа делит стороны заданной ей фигуры пополам с помощью циркуля. Последовательно соединив полученные точки, раскрашивают полученную новую фигуру. Каждая группа может высказать своё мнение о полученной фигуре.

**Упражнение № 6.** Учащиеся должны уметь делить отрезок на 3 равные части. Учитель эту работу поручает выполнять самостоятельно. Выслушивается мнение каждой группы или каждого учащегося о том, как он собирается проводить это деление.

**Построение:** Начертите отрезок MN длиной 12 см. Постройте любой угол с вершиной M. На стороне MK $\angle KMN$, начиная с точки M, отложите равные отрезки MC, CD и DK. Начертите отрезок KN. Затем через точки D и C проведите прямые, параллельные отрезку KN. Точки пересечения отрезка MN с этими прямыми обозначьте A и B. Убедитесь, что полученные отрезки, измеренные линейкой, равны: MA = AB = BN = 4 см.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** На протяжении всего этого урока учащиеся все задания выполняют индивидуально. Учитель должен обращать внимание на умения учащихся пользоваться циркулем. Учащийся должен осознавать важность точности построения для точного нахождения серединной точки отрезка.

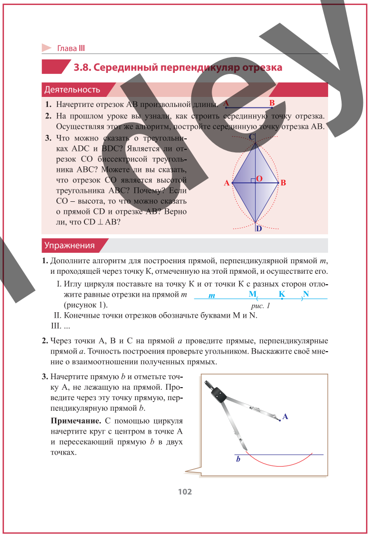
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о том, как следует проводить построение для деления отрезка пополам с помощью циркуля.

**Оценивание**

● Построение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется делить отрезок пополам с помощью циркуля. |
| Уровень II | Делит отрезок пополам с помощью циркуля, но затрудняется объяснить построение. |
| Уровень III | Самостоятельно делит отрезок пополам с помощью циркуля. |
| Уровень IV | Делит отрезок в произвольном положении пополам с помощью циркуля и объясняет, как провёл деление. |

## Урок 3.8. Серединный перпендикуляр отрезка



Глава III

3.8. Серединный перпендикуляр отрезка

Деятельность

1. Начертите отрезок AB произвольной длины.
2. На прошлом уроке вы узнали, как строить серединную точку отрезка. Осуществляя этот же алгоритм, постройте серединную точку отрезка AB.
3. Что можно сказать о треугольниках ADC и BDC? Является ли отрезок CO биссектрисой треугольника ABC? Можете ли вы сказать, что отрезок CO является высотой треугольника ABC? Почему? Если CO – высота, то что можно сказать о прямой CD и отрезке AB? Верно ли, что $CD \perp AB$?

Упражнения

1. Дополните алгоритм для построения прямой, перпендикулярной прямой $m$, и проходящей через точку K, отмеченную на этой прямой, и осуществите его.
   I. Иглу циркуля поставьте на точку K и от точки K с разных сторон отложите равные отрезки на прямой $m$ (рисунок 1).
   II. Конечные точки отрезков обозначьте буквами M и N.
   III. ...

рис. 1

2. Через точки A, B и C на прямой $a$ проведите прямые, перпендикулярные прямой $a$. Точность построения проверьте угольником. Выскажите своё мнение о взаимоотношении полученных прямых.
3. Начертите прямую $b$ и отметьте точку A, не лежащую на прямой. Проведите через эту точку прямую, перпендикулярную прямой $b$.

**Примечание.** С помощью циркуля начертите круг с центром в точке A и пересекающий прямую $b$ в двух точках.

102



**Стандарт:** 3.1.2. Делит отрезок пополам, строит серединный перпендикуляр отрезка, биссектрису угла и треугольник по сторонам.

**Результат обучения:** С помощью циркуля строит серединный перпендикуляр отрезка.

**Форма работы:** коллективная, индивидуальная

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, циркуль, линейка, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** На предыдущем уроке учащиеся научились делить отрезок пополам. По тому же принципу строится прямая, делящая отрезок пополам. То, что эта прямая является серединным перпендикуляром отрезка, обосновывается учащимися. Для этого они определяют вид треугольника ABC, устанавливают, что CO является биссектрисой, медианой и высотой. Таким образом, обосновывается, что $CD \perp AB$.

**Исследовательский вопрос**: Как строится с помощью циркуля серединный перпендикуляр отрезка, расположенного в разных позициях?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** В этом задании для любой прямой строится перпендикулярная прямая. Для этого первоначально на этой прямой откладывается любой отрезок. Затем строится серединный перпендикуляр этого отрезка.

**Упражнение № 3.** В этом задании от точки, не принадлежащей прямой, строится перпендикуляр к этой прямой. Для этого сперва строится круг с центром в этой точке (точке A), который пересекает эту прямую в двух точках. Затем строится серединный перпендикуляр отрезка, образованного этими точками. Этот перпендикуляр будет проходить через точку A.

**Дифференциальное обучение**: Слабые учащиеся при проведения построения забывают последовательность его проведения. Учителя, подготовив для учащихся особые рабочие листы, могут таким образом им помочь. В качестве помощи можно по этим рабочим листам дать учащимся рекомендации.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает, как строится серединный перпендикуляр отрезка.

**Оценивание**

● Построение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется строить серединный перпендикуляр отрезка с помощью циркуля. |
| Уровень II | Строит серединный перпендикуляр отрезка, с помощью циркуля но не может объяснить построение. |
| Уровень III | Самостоятельно строит серединный перпендикуляр с помощью циркуля. |
| Уровень IV | Строит с объяснением серединный перпендикуляр произвольного отрезка с помощью циркуля. |

## Урок 3.9. Перпендикуляр и наклонные

**Стандарт:** 3.1.2. Делит отрезок пополам, строит серединный перпендикуляр отрезка, биссектрису угла и треугольник по сторонам.

**Результат обучения:** Определяет перпендикуляр и наклонные.

**Форма работы:** коллективная, индивидуальная

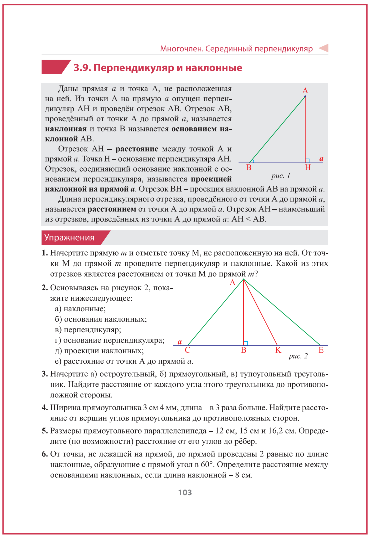
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, циркуль, линейка, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** На доске чертится любая прямая и отмечается любая точка, не принадлежащая ей. Учитель задаёт учащимся провести через эту точку прямую, пересекающую данную прямую, и прямую не пересекающую данную прямую. Учащиеся выполняют задание и исследуют проведённые прямые. Определяют, какая из них является перпендикуляром, а какая наклонной.


Многочлен. Серединный перпендикуляр

3.9. Перпендикуляр и наклонные

Даны прямая $a$ и точка A, не расположенная на ней. Из точки A на прямую $a$ опущен перпендикуляр AH и проведён отрезок AB. Отрезок AB, проведённый от точки A до прямой $a$, называется **наклонная** и точка B называется **основанием наклонной** AB.

Отрезок AH – **расстояние** между точкой A и прямой $a$. Точка H – основание перпендикуляра AH. Отрезок, соединяющий основание наклонной с основанием перпендикуляра, называется **проекцией наклонной на прямой** $a$. Отрезок BH – проекция наклонной AB на прямой $a$.

Длина перпендикулярного отрезка, проведённого от точки A до прямой $a$, называется **расстоянием** от точки A до прямой $a$. Отрезок AH – наименьший из отрезков, проведённых из точки A до прямой $a$: AH < AB.


*рис. 1*

Упражнения

1. Начертите прямую $m$ и отметьте точку M, не расположенную на ней. От точки M до прямой $m$ проведите перпендикуляр и наклонные. Какой из этих отрезков является расстоянием от точки M до прямой $m$?
2. Основываясь на рисунок 2, покажите нижеследующее:
   а) наклонные;
   б) основания наклонных;
   в) перпендикуляр;
   г) основание перпендикуляра;
   д) проекции наклонных;
   е) расстояние от точки A до прямой $a$.


*рис. 2*

3. Начертите а) остроугольный, б) прямоугольный, в) тупоугольный треугольник. Найдите расстояние от каждого угла этого треугольника до противоположной стороны.
4. Ширина прямоугольника 3 см 4 мм, длина – в 3 раза больше. Найдите расстояние от вершин углов прямоугольника до противоположных сторон.
5. Размеры прямоугольного параллелепипеда – 12 см, 15 см и 16,2 см. Определите (по возможности) расстояние от его углов до рёбер.
6. От точки, не лежащей на прямой, до прямой проведены 2 равные по длине наклонные, образующие с прямой угол в 60°. Определите расстояние между основаниями наклонных, если длина наклонной – 8 см.

103

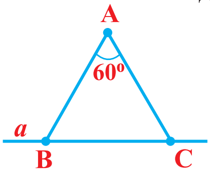
**Объяснение учителя**: Учитель даёт информацию о наклонной, перпендикуляре, расстоянии от точки до прямой. До учащихся доводится, что проекцией перпендикуляра на перпендикулярной прямой является точка.

**Исследовательский вопрос**: Какими особенностями обладают наклонная и перпендикуляр, проведённые к прямой?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 6.** При выполнении задания следует нарисовать рисунок, соответствующий условию. Согласно условию, из точки A проведены две равные наклонные. Эти наклонные должны располагаться так, как показано на рисунке. Поскольку




AB = AC, треугольник ABC – равнобедренный. Известно, что $\angle A = 60°$. Тогда $\angle B = \angle C = (180° - \angle A) : 2 = 60°$. Следовательно, $\Delta ABC$ также равносторонний, то есть BC = 8 см.

**Ответ**: 8 см.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учащийся должен осознавать, что перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, является коротким расстоянием от этой точки до прямой. Расстояние от заданной точки к заданной прямой постоянное и, следовательно, от точки к прямой можно провести единственный перпендикуляр.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о перпендикуляре и наклонных, проведённых от точки до прямой.

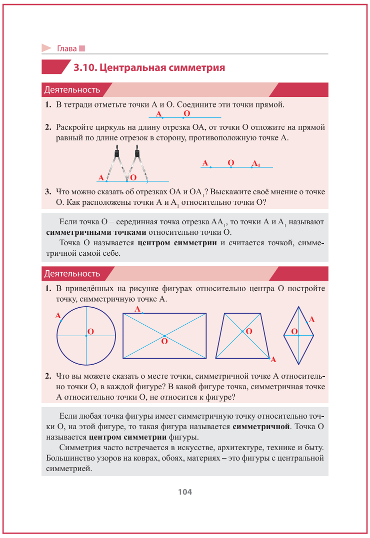
**Оценивание**

● Определение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Чертит перпендикуляр и наклонные, не может различать. |
| Уровень II | Определяет перпендикуляр и наклонные, допускает незначительные ошибки в объяснении особенностей. |

| | |
|---|---|
| Уровень III | Самостоятельно определяет перпендикуляр и наклонные, объясняет особенности. |
| Уровень IV | Обосновывая, применяет в заданиях особенности перпендикуляра и наклонных. |

## Урок 3.10. Центральная симметрия



Глава III

3.10. Центральная симметрия

Деятельность

1. В тетради отметьте точки A и O. Соедините эти точки прямой.
2. Раскройте циркуль на длину отрезка OA, от точки O отложите на прямой равный по длине отрезок в сторону, противоположную точке A.
3. Что можно сказать об отрезках OA и $OA_1$? Выскажите своё мнение о точке O. Как расположены точки A и $A_1$ относительно точки O?

Если точка O – серединная точка отрезка $AA_1$, то точки A и $A_1$ называют **симметричными точками** относительно точки O.

Точка O называется **центром симметрии** и считается точкой, симметричной самой себе.

Деятельность

1. В приведённых на рисунке фигурах относительно центра O постройте точку, симметричную точке A.
2. Что вы можете сказать о месте точки, симметричной точке A относительно точки O, в каждой фигуре? В какой фигуре точка, симметричная точке A относительно точки O, не относится к фигуре?

Если любая точка фигуры имеет симметричную точку относительно точки O, на этой фигуре, то такая фигура называется **симметричной**. Точка O называется **центром симметрии** фигуры.

Симметрия часто встречается в искусстве, архитектуре, технике и быту. Большинство узоров на коврах, обоях, материях – это фигуры с центральной симметрией.

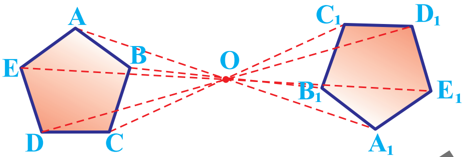
104

**Стандарт:** 3.2.1. Строит фигуру, симметричную заданной фигуре, относительно данной точки (центральная симметрия).
**Результат обучения:** Строит фигуру, симметричную данной фигуре относительно точки.
**Форма работы:** коллективная, индивидуальная
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, циркуль, линейка, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.
**Постановка проблемы:** С помощью презентации, подготовленной на компьютере, демонстрируются фигуры разных форм. Учащиеся выбирают из этих фигур симметричные и объясняют, почему эти фигуры являются симметричными. Учитель, слушая их, отмечает верные и неверные суждения. Определяются свойства симметричных фигур.

Деятельность, данная в учебнике, выполняется учащимися. При этом они обучаются построению относительно точки точки, симметричной заданной точке. Затем учитель доводит до внимания учащихся вторую деятельность, данную в учебнике, и определяет свойства симметричной фигуры.

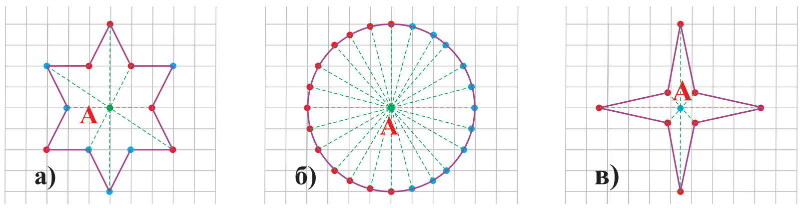



Учитель спрашивает у учащихся способ построения относительно точки фигуры, симметричной заданной фигуре. Учащийся, уже построивший относительно точки точку, симметричную заданной точке, должен высказать своё мнение о построении относительно точки фигуры, симметричной заданной фигуре. Учащийся, строя по основным (вершинам) точкам фигуры, относительно точки может построить фигуру, симметричную заданной фигуре. Здесь до сведения учащихся доводится равенство расстояния от симметричных точек до центра симметрии.
$AO = A_1O$, $BO = B_1O$, $CO = C_1O$, $DO = D_1O$, $EO = E_1O$.

**Исследовательский вопрос:** Как относительно точки строится фигура, симметричная заданной фигуре?

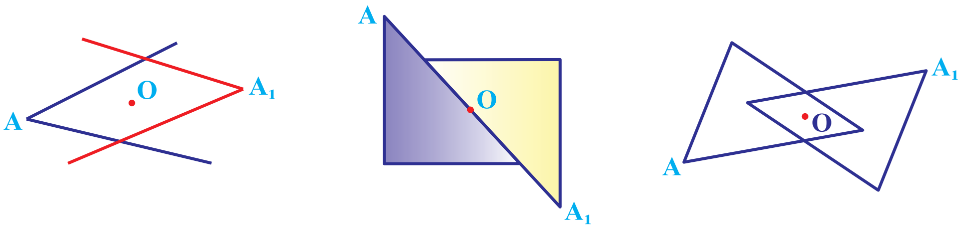
**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 3.** Класс делится на 3 группы. Каждая группа выполняет пункт, заданный ей. Показанные на рисунке точки точно переносятся в тетрадь в клетку.

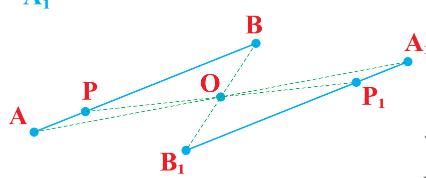



Каждой точке, относительно точки А, строится симметричная точка и полученные точки последовательно соединяются. Выслушиваются отзывы групп о полученных фигурах.

**Упражнение № 7.** Чтобы построить фигуры, симметричные заданным фигурам, следует относительно центра О построить точки, симметричные основным точкам фигуры. Это задание выполняется группами.




**Упражнение № 9.** Для того, чтобы определить место точки, симметричной точке данного отрезка, следует провести отрезки $AA_1$ и $BB_1$ и определить точку их пересечения, т.е. определить центр симметрии.




$OA = OA_1$, $OB = OB_1$.

Затем строится относительно точки О точка $P_1$, симметричная точке Р. Для этого проводится прямая ОР и с помощью циркуля на прямой ОР откладывается отрезок $OP = OP_1$. Эта точка будет располагаться на отрезке $A_1B_1$, т.к. в центральной симметрии О все точки отрезка АВ переходят на отрезок $A_1B_1$.

**Дифференциальное обучение**: Во время построения симметричных фигур относительно точки целесообразно слабым учащимся задавать более простые задания. Учащийся VII класса должен уметь строить точку, симметричную данной точке. Задания для сильных учащихся должны быть относительно усложнены. Например: центр симметрии можно разместить на стороне, внутри геометрических фигур (треугольника, прямоугольника, круга и т.д.) и относительно этой точки построить фигуру, симметричную этой фигуре.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о центральной симметрии, симметричных фигурах и их построении. Проводится обсуждения о встречающихся в нашей жизни симметричных фигурах и об их значимости. На компьютере демонстрируются симметричные фигуры.

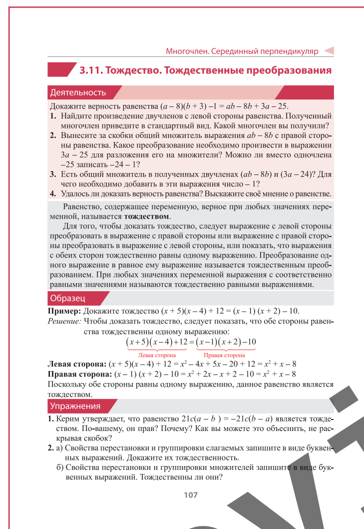
**Оценивание**

● Построение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Строит симметричную точку относительно точки, но затрудняется строить симметричные фигуры. |
| Уровень II | Допускает ошибки в построении относительно точки симметричной фигуры. |
| Уровень III | Самостоятельно строит относительно точки симметричную фигуру. |
| Уровень IV | Строит симметричные фигуры и обосновывает их симметрию. |

## Урок 3.11. Тождество. Тождественные преобразования

**Стандарт:** 2.2.1. Выполняет действия сложения, вычитания и умножения над многочленами.
**Результат обучения:** Совершает тождественные преобразования над выражениями.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы


Многочлен. Серединный перпендикуляр

### 3.11. Тождество. Тождественные преобразования

Деятельность

Докажите верность равенства $(a-8)(b+3)-1 = ab-8b+3a-25$.

1. Найдите произведение двучленов с левой стороны равенства. Полученный многочлен приведите в стандартный вид. Какой многочлен вы получили?
2. Вынесите за скобки общий множитель выражения $ab-8b$ с правой стороны равенства. Какое преобразование необходимо произвести в выражении $3a-25$ для разложения его на множители? Можно ли вместо одночлена $-25$ записать $-24-1$?
3. Есть общий множитель в полученных двучленах $(ab-8b)$ и $(3a-24)$? Для чего необходимо добавить в эти выражения число $-1$?
4. Удалось ли доказать верность равенства? Выскажите своё мнение о равенстве.

Равенство, содержащее переменную, верное при любых значениях переменной, называется **тождеством**.

Для того, чтобы доказать тождество, следует выражение с левой стороны преобразовать в выражение с правой стороны или выражение с правой стороны преобразовать в выражение с левой стороны, или показать, что выражения с обеих сторон тождественно равны одному выражению. Преобразование одного выражение в равное ему выражение называется тождественным преобразованием. При любых значениях переменной выражения с соответственно равными значениями называются тождественно равными выражениями.

Образец

**Пример:** Докажите тождество $(x+5)(x-4)+12 = (x-1)(x+2)-10$.

*Решение:* Чтобы доказать тождество, следует показать, что обе стороны равенства тождественны одному выражению:

$$\underbrace{(x+5)(x-4)+12}_{\text{Левая сторона}} = \underbrace{(x-1)(x+2)-10}_{\text{Правая сторона}}$$

**Левая сторона:** $(x+5)(x-4)+12 = x^2-4x+5x-20+12 = x^2+x-8$
**Правая сторона:** $(x-1)(x+2)-10 = x^2+2x-x+2-10 = x^2+x-8$
Поскольку обе стороны равны одному выражению, данное равенство является тождеством.

Упражнения

1. Керим утверждает, что равенство $21c(a-b) = -21c(b-a)$ является тождеством. По-вашему, он прав? Почему? Как вы можете это объеснить, не раскрывая скобок?
2. а) Свойства перестановки и группировки слагаемых запишите в виде буквенных выражений. Докажите их тождественность.
   б) Свойства перестановки и группировки множителей запишите в виде буквенных выражений. Тождественны ли они?

107

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Учащиеся класса делятся на 2 группы. Учащиеся первой группы выражение с левой стороны равенства, данного в деятельности учебника, преобразуют в выражение с правой стороны, другие – правое равенство в левое. После окончания исследования результаты записываются на доске, и выслушивается мнение учащихся.

**Исследовательский вопрос**: Как осуществляются тождественные преобразования?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 6.** С целью определения того, какой одночлен следует добавить в правую или левую стороны равенства для получения тождественности данного выражения, обе стороны равенства даны в виде многочленов.

а) В равенстве $(a+5)(a-12) = a^2 ... -60$ левую сторону преобразуем в многочлен.

$(a+5)(a-12) = a^2-12a+5a-60 = a^2-7a-60$.

Как видно, в правую сторону равенства вместо точек следует записать одночлен $-7a$.

г) $x^2-12x+30... = (x-7)(x-5)$. Преобразуем в многочлен правую сторону.

Поскольку $(x-7)(x-5) = x^2-12x+35$ в левой стороне равенства вместо точек записываем 5.

**Упражнение № 7.** Равенство выражения постоянному числу – это значит, что значение этого выражения не зависит от переменной. Учащийся, не произведя преобразований, должен уметь определить, как образуется постоянное число. Для этого рассматривается для каждого выражения свободный член, который может образоваться.

а) Рассмотрим свободный член в выражении: $(a-3)(a^2-8a+5)-(a-8)(a^2-3a+5)$:

В произведении $(a-3)(a^2-8a+5)$ свободный член $-3\cdot 5=-15$,

В произведении $(a-8)(a^2-3a+5)$ свободный член $-8\cdot 5=-40$.

Тогда свободный член выражения: $-15-(-40)=25$.

Действительно, $(a-3)(a^2-8a+5)-(a-8)(a^2-3a+5)=a^3-8a^2+5a-3a^2+24a-$
$$-15-a^3+3a^2-5a+8a^2-24a+40=-15+40=25.$$

**Ответ**: а) 25.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Учащиеся уже переводили при преобразовании одно выражение в другой вид. Например, такое преобразование они проводили при решении уравнений. Но, возможно, не обращали внимание на значимость этого преобразования. В теме тождества учитель должен стараться довести до них, что запись выражений в другом виде является тождественным преобразованием.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о тождественном преобразовании выражений.

**Оценивание**

● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в тождетсвенном преобразовании выражений. Слабо представляет, как выполняются тождественные преобразования выражений. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при тождественном преобразовании выражений. Выполняет тождественные преобразования, но не может обосновать верность тождества. |
| Уровень III | Самостоятельно проводит и обосновывает преобразования над выражениями. |
| Уровень IV | Преобразует и обосновывает выражения удобными способами. |

## Урок 3.12. Линейное уравнение с одной переменной

**Стандарт:** 2.2.2. Решает линейное уравнение с одной переменной, уравнение с переменной под знаком модуля и систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

**Результат обучения:** Решает линейное уравнение с одной переменной, линейное уравнение с переменной под знаком модуля.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

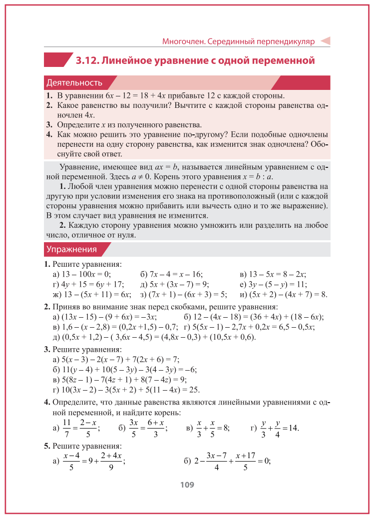
**Метод работы:** кластер, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** С помощью метода кластер вспоминается всё, что учащиеся изучали об уравнениях. Учащимся напоминаются знания из курса математики за VI класс о решении уравнений с переменными, которые входят в обе части равенства.



Многочлен. Серединный перпендикуляр

3.12. Линейное уравнение с одной переменной

Деятельность

1. В уравнении $6x - 12 = 18 + 4x$ прибавьте 12 с каждой стороны.
2. Какое равенство вы получили? Вычтите с каждой стороны равенства одночлен $4x$.
3. Определите $x$ из полученного равенства.
4. Как можно решить это уравнение по-другому? Если подобные одночлены перенести на одну сторону равенства, как изменится знак одночлена? Обоснуйте свой ответ.

Уравнение, имеющее вид $ax = b$, называется линейным уравнением с одной переменной. Здесь $a \neq 0$. Корень этого уравнения $x = b : a$.

**1.** Любой член уравнения можно перенести с одной стороны равенства на другую при условии изменения его знака на противоположный (или с каждой стороны уравнения можно прибавить или вычесть одно и то же выражение). В этом случает вид уравнения не изменится.

**2.** Каждую сторону уравнения можно умножить или разделить на любое число, отличное от нуля.

Упражнения

**1.** Решите уравнения:
а) $13 - 100x = 0$; б) $7x - 4 = x - 16$; в) $13 - 5x = 8 - 2x$;
г) $4y + 15 = 6y + 17$; д) $5x + (3x - 7) = 9$; е) $3y - (5 - y) = 11$;
ж) $13 - (5x + 11) = 6x$; з) $(7x + 1) - (6x + 3) = 5$; и) $(5x + 2) - (4x + 7) = 8$.

**2.** Приняв во внимание знак перед скобками, решите уравнения:
а) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x$; б) $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$;
в) $1{,}6 - (x - 2{,}8) = (0{,}2x + 1{,}5) - 0{,}7$; г) $5(5x - 1) - 2{,}7x + 0{,}2x = 6{,}5 - 0{,}5x$;
д) $(0{,}5x + 1{,}2) - (3{,}6x - 4{,}5) = (4{,}8x - 0{,}3) + (10{,}5x + 0{,}6)$.

**3.** Решите уравнения:
а) $5(x - 3) - 2(x - 7) + 7(2x + 6) = 7$;
б) $11(y - 4) + 10(5 - 3y) - 3(4 - 3y) = -6$;
в) $5(8z - 1) - 7(4z + 1) + 8(7 - 4z) = 9$;
г) $10(3x - 2) - 3(5x + 2) + 5(11 - 4x) = 25$.

**4.** Определите, что данные равенства являются линейными уравнениями с одной переменной, и найдите корень:
а) $\frac{11}{7} = \frac{2-x}{5}$; б) $\frac{3x}{5} = \frac{6+x}{3}$; в) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; г) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 14$.

**5.** Решите уравнения:
а) $\frac{x-4}{5} = 9 + \frac{2+4x}{9}$; б) $2 - \frac{3x-7}{4} + \frac{x+17}{5} = 0$;

109

**Исследовательский вопрос**: Как решаются линейные уравнения с одной переменной, линейные уравнения с переменной в модуле?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1, 2** и **3.** Учащиеся со способами решения линейных уравнений с одной переменной, данных в этих упражнениях, знакомы из курса математики за VI класс. Они информируют о выполняемых действиях после перемещения членов правой и левой сторон равенства. Вспоминаются правила об учитывании знака, стоящего перед скобками.

**Упражнение № 4.** В решении этих уравнений следует в правой и левой сторонах равенства избавиться от дробей. Для этого дроби с каждой стороны равенства умножаются на общий знаменатель (или применяется основное свойство пропорции) и уравнения записываются в простой форме.

а) $\frac{11}{7} = \frac{2-x}{5}$
$55 = 14 - 7x$
$7x = -41$
$x = -5\frac{6}{7}$

б) $\frac{3x}{5} = \frac{6+x}{3}$
$9x = 30 + 5x$
$4x = 30$
$x = 7{,}5$

в) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$
$5x + 3x = 120$
$8x = 120$
$x = 15$

г) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} = 14$
$4y + 3y = 168$
$7y = 168$
$y = 24$

**Ответ**: а) $-5\frac{6}{7}$; б) 7,5; в) 15; г) 24.

**Упражнение № 5.** При решении уравнения правая и левая сторона равенства избавляются от дробей.

а) $\frac{x-4}{5} = 9 + \frac{2+4x}{9}$ *(каждую сторону умножаем на 45)*
$9(x - 4) = 405 + 5(2 + 4x)$
$9x - 36 = 405 + 10 + 20x$
$-11x = 451$
$x = -41$

б) $2 - \frac{3x-7}{4} + \frac{x+17}{5} = 0$ *(умножаем на 20)*
$40 - 5(3x - 7) + 4(x + 17) = 0$
$40 - 15x + 35 + 4x + 68 = 0$
$-11x = -143$
$x = 13$

в) $\dfrac{8-y}{6}+\dfrac{5-4y}{3}=\dfrac{y+6}{2}$ *(умножаем на 6)*

$8 - y + 10 - 8y = 3y + 18$

$-12y = 0$

$y = 0$

г) $\dfrac{4x+7}{5}+\dfrac{3x-2}{2}-\dfrac{5x-2}{2}=32$ *(умножаем на 10)*

$8x + 14 + 15x - 10 - 25x + 10$

$= 320$

$-2x = 306$

$x = -153$

**Ответ**: а) 41; б) 13; в) 0; г) –153.

**Упражнение № 6.** Данное выражение запишите в виде уравнения и решите полученное уравнение.

а) если число $a$ уменьшить на 26%, то получится число 7,4. $a - 0{,}26a = 7{,}4$. $a = 10$.

б) если число $m$ увеличить на 20%, получится число 9,6. $m + 0{,}2m = 9{,}6$. $m = 8$.

в) произведение чисел 3,25 и $x$ больше суммы чисел 1 и $x$ в 2 раза.

$3{,}25x = (1 + x) \cdot 2$. $x = 1{,}6$.

г) сумма чисел $\dfrac{7}{12}$ и $2y$ меньше четвёртой части числа $25y$ в 3 раза.

Если сумма $\left(\dfrac{7}{12}+2y\right)$ меньше произведения $\dfrac{1}{4}\cdot 25y$ в 3 раза, умножив эту сумму на 3, сможем написать знак равенства между этими выражениями:

$\left(\dfrac{7}{12}+2y\right)\cdot 3=\dfrac{1}{4}\cdot 25y,$ $y = 7$.

**Ответ**: а) 10; б) 8; в) 1,6; г) 7.

**Упражнение № 7.** При решении линейных уравнений с переменной в модуле, вспоминаются определение, свойства модуля. С этой целью учитель прежде, чем начать решать уравнения, может задать учащимся примеры на нахождение модуля.

е) $0{,}25|x - 8| = 5$

$|x - 8| = 20$

$x - 8 = 20$ və $x - 8 = -20$

$x = 28$ və $x = -12$

ё) $16 + |x| = 11$

$|x| = -5$

$x = \varnothing$

ж) $|x| - \dfrac{1}{4} = 2{,}75$

$|x| = 3$

$x = 3$ и $x = -3$

**Ответ**: е) 28 и –12; ё) $\varnothing$; ж) 3 и –3.

**Упражнение № 8.** Решая упражнение, учащиеся первоначально должны предположить, сколько решений имеет уравнение. Этим учитель оценивает умение учащихся устно предположить решение уравнения.

а) $|10x - 9| = 14$. Учащийся, утверждающий, что у этого уравнения имеется два корня, должен обосновать, что у двух чисел имеется модуль равный 14.

Действительно, из этого уравнения получаются уравнения $10x - 9 = 14$ или $10x - 9 = -14$. $x = 2{,}3$ и $x = -0{,}5$.

б) У уравнения $|-3x + 21| + 4 = 4$ есть один корень, т.к. ясно, что $|-3x + 21| = 0$. $x = 7$.

в) У уравнения $\dfrac{|x+11|}{5}=-2$ решения нет. Значение модуля не бывает равно отрицательному числу.

**Ответ**: а) 2,3 и 0,5;б) 7; в) $\varnothing$

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учащиеся до сих пор наблюдали уравнения с одним корнем (в некоторых случаях отсутствие корня или наличие бесконечного числа корней). Если даже у некоторых уравнений с переменной в модуле будет только одна переменная, учащийся, определивший, что уравнение имеет два корня, должен суметь это обосновать. Определение модуля даёт возможность для обоснования.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о способах решения линейных уравнений с одной переменной, уравнений с одной переменной в модуле.

**Оценивание**

● Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется при решении линейных уравнений с одной переменной, уравнений с переменной в модуле. |
| Уровень II | Самостоятельно решает уравнение с одной переменной, допускает незначительные ошибки при решении уравнений с переменной в модуле. |
| Уровень III | Самостоятельно решает линейные уравнения с одной переменной, уравнения с переменной в модуле. |
| Уровень IV | Применяя удобный способ, решает линейные уравнения с одной переменной, уравнения с переменной в модуле. |

## Урок 3.13. Абсолютная погрешность

**Стандарт:** 1.3.1. Проводит приблизительные расчёты в решении практических задач и проверяет достоверность полученных результатов.

4.2.1. Находит абсолютную и относительную погрешность результата измерения.

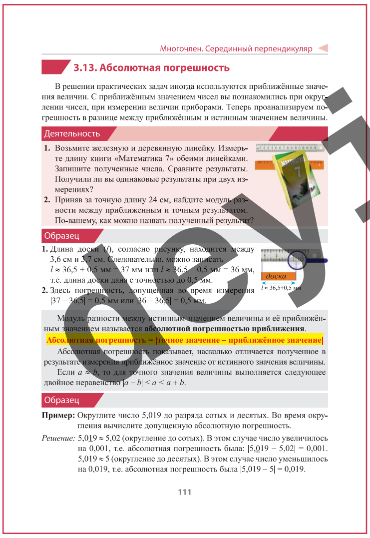
**Результат обучения:**

1. Проводит приблизительные расчёты в решении практических задач и проверяет достоверность полученных результатов.
2. Находит абсолютную погрешность результата измерения.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** выведение понятия, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, линейка, штангенциркуль, оборудование ИКТ



Многочлен. Серединный перпендикуляр

3.13. Абсолютная погрешность

В решении практических задач иногда используются приближённые значения величин. С приближённым значением чисел вы познакомились при округлении чисел, при измерении величин приборами. Теперь проанализируем погрешность в разнице между приближённым и истинным значением величины.

Деятельность

1. Возьмите железную и деревянную линейку. Измерьте длину книги «Математика 7» обеими линейками. Запишите полученные числа. Сравните результаты. Получили ли вы одинаковые результаты при двух измерениях?
2. Приняв за точную длину 24 см, найдите модуль разности между приближенным и точным результатом. По-вашему, как можно назвать полученный результат?

Образец

1. Длина доски ($l$), согласно рисунку, находится между 3,6 см и 3,7 см. Следовательно, можно записать $l \approx 36,5 + 0,5$ мм $= 37$ мм или $l \approx 36,5 - 0,5$ мм $= 36$ мм, т.е. длина доски дана с точностью до 0,5 мм.
2. Здесь погрешность, допущенная во время измерения $|37 - 36,5| = 0,5$ мм или $|36 - 36,5| = 0,5$ мм.



Модуль разности между истинным значением величины и её приближённым значением называется **абсолютной погрешностью приближения**.

**Абсолютная погрешность = |точное значение – приближённое значение|**

Абсолютная погрешность показывает, насколько отличается полученное в результате измерения приближённое значение от истинного значения величины.

Если $a \approx b$, то для точного значения величины выполняется следующее двойное неравенство $|a - b| < a < a + b$.

Образец

**Пример:** Округлите число 5,019 до разряда сотых и десятых. Во время округления вычислите допущенную абсолютную погрешность.

*Решение:* $5,0\underline{1}9 \approx 5,02$ (округление до сотых). В этом случае число увеличилось на 0,001, т.е. абсолютная погрешность была: $|5,\underline{0}19 - 5,02| = 0,001$. $5,019 \approx 5$ (округление до десятых). В этом случае число уменьшилось на 0,019, т.е. абсолютная погрешность была $|5,019 - 5| = 0,019$.

111

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** На основе деятельности, данной в учебнике, длина книги измеряется линейками, сделанными из разных материалов. Полученные результаты записываются на доске. Конечно же, между измерениями, сделанными разными линейками, будет существовать незначительная разница. Проводятся обсуждения о смысле разницы полученных результатов, названии разницы между измерениями. Чтобы вывести понятие «абсолютная погрешность», учитель может использовать несколько вспомогательных слов.

Образец, данный в учебнике, выполняется учителем, в результате чего выводится понятие «абсолютная погрешность». Учителем объясняется абсолютная погрешность, определение измерения величины с некоторой точностью.

**Образец**

1. Длина доски ($l$), согласно рисунку, находится между 3,6 см и 3,7 см. Следовательно, можно записать $l \approx 36{,}5 + 0{,}5$ мм = 37 мм или $l \approx 36{,}5 - 0{,}5$ мм = 36 мм, т.е. длина доски дана с точностью до 0,5 мм.
2. Здесь погрешность, допущенная во время измерения $|37 - 36{,}5| = 0{,}5$ мм или $|36 - 36{,}5| = 0{,}5$ мм.


$l \approx 36{,}5+0{,}5$ мм

**Исследовательский вопрос**: Как находится абсолютная погрешность приблизительного значения?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются в группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** а) Между числами $6\frac{1}{2}$ и $7\frac{1}{2}$ выбирается любое число и, округляя его до целого числа, показывается его равенство 7.

Например, $6{,}5 \approx 7$, $6{,}8 \approx 7$; $7{,}2 \approx 7$; $7{,}464 \approx 7$ , $7{,}5 \approx 7$ и др.

При округлении этих чисел самая большая допустимая погрешность 0,5.

$|7 - 6{,}5| = |7 - 7{,}5| = 0{,}5$;

б) Если число, взятое между 7 и 9, берётся равным 8, то абсолютная погрешность будет равна 1. $|8 - 7| = |8 - 9| = 1$. **Ответ**: а) 0,5; б) 1.

**Упражнение № 3.** Поскольку длина забора дана с точностью до 0,1 м, значение точной длины забора будет располагаться между числами $12{,}5 \pm 0{,}1$.

То есть $12{,}4 <$ длина забора $< 12{,}6$ м. **Ответ**: 12,4 м и 12,6 м.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: В упражнении № 3 использовали запись $\pm 0{,}1$. Учитель, давая информацию о знаке «±», доводит до внимания учащихся о краткой записи с помощью этого знака суммы и разности двух чисел.

**Упражнение № 4.** Ширина прямоугольника равна с точностью до 1 см $600 \pm 1$ см, т.е. $599 < a < 600$ см, длина же $800 \pm 1$ см, т.е. $799 < b < 800$ см.

Тогда площадь прямоугольника будет: $599 \cdot 799 < S < 600 \cdot 800$.

$478601 < S < 481401$ **Ответ**: 478601 (см$^2$) $< S <$ 481401 (см$^2$).

**Упражнение № 5.** Ширина прямоугольного параллелепипеда равна $a$, длина – $b$, высота – $c$. Тогда $a = 23 \pm 2$ см, $b = 24 \pm 2$ см, $c = 27 \pm 2$ см.

$21 < a < 25$, $22 < b < 26$, $25 < c < 29$.

Тогда объём прямоугольного параллелепипеда будет $21 \cdot 22 \cdot 25 < V < 25 \cdot 26 \cdot 29$.

$11550 < V < 18850$ **Ответ**: 11550 (см$^3$) $< V <$ 18850 (см$^3$).

**Упражнение № 6.** Поскольку деление термометра равно 0,2°, температура показывается с точностью до 0,1. Точная температура воздуха $18{,}6 \pm 0{,}1$, т.е. может быть между градусами 18,5°С и18,7°С. **Ответ**: 18,5°С и 18,7°С

**Упражнение № 8.** Известно, что $\frac{2}{3} = 0{,}666...$. Округлим это число до разряда десятых, сотых, тысячных: $0{,}\underline{6}66... \approx 0{,}7$; $0{,}6\underline{6}6... \approx 0{,}67$; $0{,}66\underline{6}... \approx 0{,}667$.

В первом случае абсолютная погрешность: $\left|\frac{2}{3}-0,6\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{7}{10}\right|=\frac{1}{30}$

Во втором случае абсолютная погрешность: $\left|\frac{2}{3}-0,67\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{67}{100}\right|=\frac{1}{300}$

В третьем случае абсолютная погрешность: $\left|\frac{2}{3}-0,667\right|=\left|\frac{2}{3}-\frac{667}{1000}\right|=\frac{1}{3000}$.

Таким образом, абсолютная погрешность наименьшая при округлении числа до разряда тысячных. **Ответ**: $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{300}$; $\frac{1}{3000}$.

**Упражнение № 9.** Выполняя упражнение, учащийся должен уметь обосновать, что абсолютная погрешность, допустимая при измерении стола, наибольшая. Так, расстояние между городами в самом близком случае 1 км = 1000 м. Допустимая на этом расстоянии погрешность равная 1 м, например, считается относительно меньше, чем допустимая погрешность при измерении стола длиной 2 м = 200 см, равная 1 см: $\frac{1}{1000}<\frac{1}{200}$.

**Ответ**: Измерение расстояния между городами более точное.

**Упражнение № 10.** Выполняя задание, учащийся в обоих случаях вычисляет абсолютную погрешность.

1) $0,55\underline{5}5\ldots \approx 0,555$; $\left|\frac{5}{9}-0,555\right|=\frac{1}{1800}$.

2) $0,55\underline{5}5\ldots \approx 0,556$; $\left|\frac{5}{9}-0,556\right|=\frac{1}{2250}$.

Из-за наличия большей погрешности в первом случае $\frac{1}{1800}>\frac{1}{2250}$ более правильно взять $0,55\underline{5}5\ldots \approx 0,556$.

На втором уроке выполняются задания из учебника в группах. Используя штангенциркуль, проводятся разные измерения, обсуждаются результаты. На компьютере демонстрируются другие инструменты, с помощью которых можно проводить точные измерения.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** При округлении, такая запись, например, как $0,\underline{7}5 \approx 0,8$ каждый раз вызывает интерес у учащихся. Учащийся, причину округления 0,75 до 0,8, а не до 0,7, осознаёт при вычислении абсолютной погрешности. Учитель должен довести это до внимания учащихся.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о способах нахождения абсолютной погрешности, ещё раз отмечает пути проверки результатов приблизительных расчётов.

**Оценивание**

- Вычисление
- Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется вести приблизительные расчёты.<br>Затрудняется в нахождении абсолютной погрешности. |

| | |
|---|---|
| Уровень II | Проводит приблизительные расчёты, но допускает ошибки при проверке результата.<br>Осознаёт понятие абсолютной погрешности, допускает незначительные ошибки при вычислении. |
| Уровень III | Самостоятельно проводит приблизительные расчёты и проверяет результат.<br>Самостоятельно вычисляет абсолютную погрешность. |
| Уровень IV | Вычисляет абсолютную погрешность, логически обосновывает своё мнение. |

## Урок 3.14. Относительная погрешность

**Стандарт:** 1.3.1. Проводит приблизительные расчёты в решении практических задач и проверяет достоверность полученных результатов.
4.2.1. Находит абсолютную и относительную погрешность результата измерения.

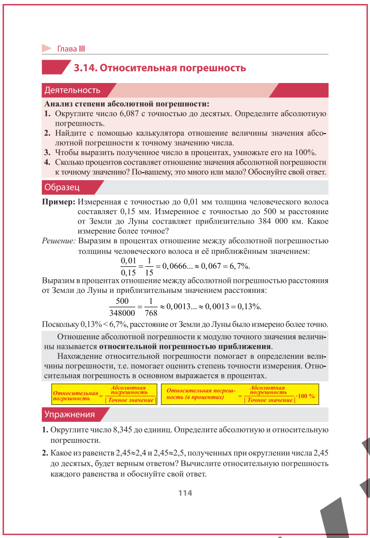
**Результат обучения:**

1. Проводит приблизительные расчёты в решении практических задач и проверяет достоверность полученных результатов.
2. Находит абсолютную и относительную погрешность результата измерения.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** выведение понятия, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, линейка, оборудование ИКТ



Глава III

3.14. Относительная погрешность

Деятельность

**Анализ степени абсолютной погрешности:**

1. Округлите число 6,087 с точностью до десятых. Определите абсолютную погрешность.
2. Найдите с помощью калькулятора отношение величины значения абсолютной погрешности к точному значению числа.
3. Чтобы выразить полученное число в процентах, умножьте его на 100%.
4. Сколько процентов составляет отношение значения абсолютной погрешности к точному значению? По-вашему, это много или мало? Обоснуйте свой ответ.

Образец

**Пример:** Измеренная с точностью до 0,01 мм толщина человеческого волоса составляет 0,15 мм. Измеренное с точностью до 500 м расстояние от Земли до Луны составляет приблизительно 384 000 км. Какое измерение более точное?

*Решение:* Выразим в процентах отношение между абсолютной погрешностью толщины человеческого волоса и её приближённым значением:

$$\frac{0,01}{0,15} = \frac{1}{15} = 0,0666... \approx 0,067 = 6,7\%.$$

Выразим в процентах отношение между абсолютной погрешностью расстояния от Земли до Луны и приблизительным значением расстояния:

$$\frac{500}{348000} = \frac{1}{768} \approx 0,0013... \approx 0,0013 = 0,13\%.$$

Поскольку 0,13% < 6,7%, расстояние от Земли до Луны было измерено более точно.

Отношение абсолютной погрешности к модулю точного значения величины называется **относительной погрешностью приближения**.

Нахождение относительной погрешности помогает в определении величины погрешности, т.е. помогает оценить степень точности измерения. Относительная погрешность в основном выражается в процентах.

$$\text{Относительная погрешность} = \frac{\text{Абсолютная погрешность}}{|\text{Точное значение}|} \qquad \text{Относительная погрешность (в процентах)} = \frac{\text{Абсолютная погрешность}}{|\text{Точное значение}|}\cdot 100\ \%$$

Упражнения

1. Округлите число 8,345 до единиц. Определите абсолютную и относительную погрешности.
2. Какое из равенств 2,45≈2,4 и 2,45≈2,5, полученных при округлении числа 2,45 до десятых, будет верным ответом? Вычислите относительную погрешность каждого равенства и обоснуйте свой ответ.

114

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Чтобы ввести понятие, на доску вывешивается лист, с оборотной стороны которого написано «Относительная погрешность», и озвучиваются слова или словосочетания, выражения, относящиеся к относительной погрешности, составляется кроссворд. Для этого может быть выполнена деятельность из учебника. После получения словосочетания «относительная погрешность», учащимся разъясняется это понятие. Относительные погрешности, получаемые при вычислении толщины человеческого волоса и расстояния между Землёй и Луной, данные в образце учебника, сравниваются. На основе этого примера (или других примеров), учащимися или учителем могут быть проведены презентации с помощью программ компьютера.

**Исследовательский вопрос**: Как определяется относительная погрешность приблизительного значения?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются в группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** Определим из равенств 2,45 ≈ 2,4 и 2,45 ≈ 2,5 абсолютную и относительную погрешности:

1) Абсолютная погрешность: | 2,45 – 2,4 | = 0,05

Относительная погрешность: $\frac{0{,}05}{2{,}45} \cdot 100\% \approx 2\%$

2) Абсолютная погрешность: | 2,45 – 2,5 | = 0,05

Относительная погрешность: $\frac{0{,}05}{2{,}45} \cdot 100\% \approx 2\%$

Если даже результаты совпадут, в первом случае относительную погрешность мы нашли с увеличением на 0,05, во втором случае – с уменьшением на 0,05.

**Ответ**: одинаковы.

**Упражнение № 3.** Известно, что абсолютная погрешность первых весов составляет 5 г, вторых – 3 г.

Относительная погрешность в первом случае: $\frac{5}{2600} = \frac{1}{520} \approx 0,00192 \cdot 100\% \approx 0{,}192\%$

Относительная погрешность во втором случае: $\frac{3}{800} = \frac{3}{8}\% = 0{,}375\%$

Как видно, при измерении массы сахара, допущена большая погрешность, масло взвешено более точно.

**Ответ**: масло взвешено более точно.

**Упражнение № 4.** При выполнении этого задания учащиеся класса делятся на 3 группы. Каждая группа решает пример на одной из строчек таблицы.

1) $4\frac{3}{8} = 4{,}3\underline{7}5 \approx 4{,}38.$ Абсолютная погрешность: |4,375 – 4,8| = 0,005.

Относительная погрешность: $\frac{0{,}005}{4{,}375} \approx 0{,}001 = 0{,}1\%.$

2) $7\frac{1}{9} = 7{,}1\underline{1}1... \approx 7{,}11.$ Абсолютная погрешность: $\left|7\frac{1}{9} - 7\frac{11}{100}\right| = \frac{1}{900}.$

Относительная погрешность: $\frac{1}{900} : 7\frac{1}{9} = \frac{1}{900} \cdot \frac{9}{64} = \frac{1}{6400} \approx 0{,}0002 = 0{,}02\%.$

3) $10\frac{3}{16} = 10{,}1\underline{8}75 \approx 10{,}19.$ Абсолютная погрешность: $\left|10\frac{3}{16} - 10\frac{19}{100}\right| = \frac{1}{400}.$

Относительная погрешность: $\frac{1}{400} : 10\frac{3}{16} = \frac{1}{4076} \approx 0{,}0002 = 0{,}02\%.$

**Упражнение № 7.** Точное значение числа обозначим $a$. Тогда на основе формулы нахождения относительной погрешности: $\frac{|a - 4{,}89|}{4{,}89} \cdot 100\% = 1\%,$ $\frac{|a - 4{,}89|}{4{,}89} = 0{,}01.$

Абсолютная погрешность: $|a - 4{,}89| = 0{,}0489.$ **Ответ**: 0,0489.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о способах нахождения относительной погрешности, ещё раз отмечает способы проверки результатов приблизительных расчётов.

**Оценивание**

- Вычисление
- Выполнение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется проводить приблизительные расчёты.<br>Затрудняется найти относительную погрешность. |
| Уровень II | Проводит приблизительные расчёты, но допускает ошибки при проверке результата.<br>Осознаёт понятие относительной погрешности, допускает незначительные ошибки при вычислении. |
| Уровень III | Самостоятельно проводит приблизительные расчёты и проверяет результат.<br>Самостоятельно вычисляет относительную погрешность. |
| Уровень IV | Вычисляет относительную погрешность, на её основе высказывает мнение о точности вычисления. |

## Образец критериев оценивания для составления заданий для малого суммативного оценивания № 5

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Приводит многочлен в стандартный вид |
| 2 | Выполняет действия над многочленами |
| 3 | Делит отрезок пополам с помощью циркуля |
| 4 | С помощью циркуля строит серединный перпендикуляр отрезка |
| 5 | Относительно данной точки строит фигуру, симметричную данной фигуре |
| 6 | Выполняет тождественные преобразования |
| 7 | Решает линейное уравнение с одной переменной |
| 8 | Решает уравнение с переменной в модуле |
| 9 | Находит абсолютную и относительную погрешность |

## Образец малого суммативного оценивания № 5

Фамилия: ____________________ Имя:_____________

Количество правильных ответов: _____

Количество неправильных ответов: ___ Оценка:___

**1**. Напишите многочлен $2x^4 - y^3 - 5y^3 + 11x^4$ в стандартном виде.

______________________________________

______________________________________

**2**. Выполните действия над многочленами и напишите степень полученных многочленов:

$(a^3 - 2a + 25) + (a - 3a^3 - 1) - (4a - a^2) =$

______________________________________

______________________________________

Степень: ________

**3**. Вычитание многочленов выполните в столбик.

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 9x - 13 \\ -\;\; 2x^2 - 7x + 1 \\ \hline \end{array}$$

**4**. При $A = 16b + 0{,}5b^3$; $B = -7b^3 - 1{,}4\,b$; $C = b^3 + 6b$, укажите выражение $A + B - C$ в виде многочлена:

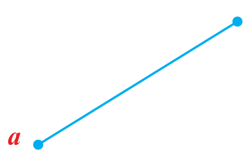
______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

**5**. Определите место точки, делящей данный отрезок пополам, постройте серединный перпендикуляр отрезка.




**6**. Докажите тождество:

$(5x - 3)(2 - x) - 5 = -(11 - 13x + 5x^2)$

______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

**7.** Данное произведение преобразуйте в многочлен и запишите в стандартном виде:

а) $-3(a^2 - 8a + 1) =$ ________________

б) $(x^2 - 6x + 3)(2 - 5x) =$ ______________

______________________________________

______________________________________

**8**. Решите уравнение:

$3x - 7(x + 1) = -9x - 11$

______________________________________

______________________________________

______________________________________

______________________________________

**9**. Разложите данный многочлен на множители:

а) $x^2 - 12x + 32 =$ ____________________

____________________________________

б) $3a - 6ab + 7a^2 - 14a^2b =$ ___________

____________________________________

**10**. Число 2,6354 округлите до разряда десятых, вычислите абсолютную и относительную погрешность:

______________________________________

______________________________________

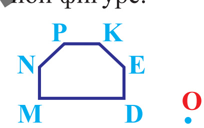
______________________________________

**11**. Решите уравнение: $|4x - 1{,}2| = 9$

______________________________________

______________________________________

**12**. Относительно данной точки O постройте фигуру, симметричную данной фигуре.

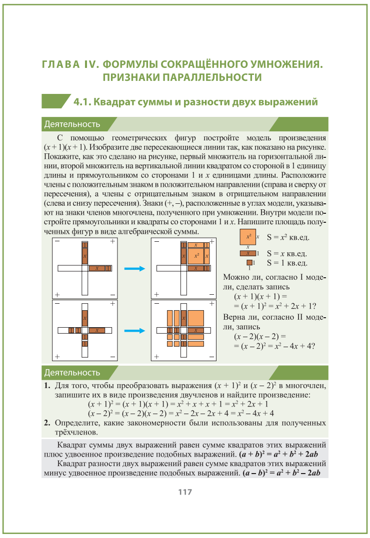


## ГЛАВА IV

# ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

| Стандарт | Учебная единица | Тема | Часы |
|---|---|---|---|
| 1.2.4. | Глава IV. Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности | **Урок 4.1.** Квадрат суммы и разности двух выражений | **3** |
| 1.2.4. | | **Урок 4.2.** Разложение на множители с использованием формул квадрата суммы и квадрата разности двух выражений | **2** |
| 1.2.4. | | **Урок 4.3.** Разность квадратов двух выражений | **3** |
| 1.2.4. | | **Урок 4.4.** Куб суммы и куб разности двух выражений | **3** |
| 1.2.4. | | **Урок 4.5.** Разложение на множители суммы кубов двух выражений | **3** |
| 1.2.4. | | **Урок 4.6.** Разложение на множители разности кубов двух выражений | **2** |
| 1.2.4. | | **Урок 4.7.** Преобразование выражений | **3** |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 6 | **1** |
| 3.1.3. | | **Урок 4.8.** Углы, образующиеся при пересечении двух прямых третьей | **1** |
| 3.1.3. | | **Урок 4.9.** Свойство параллельности прямых | **2** |
| 3.1.3. | | **Урок 4.10.** Аксиома параллельности. Свойство параллельных прямых | **2** |
| 3.1.3. | | **Урок 4.11.** Углы с соответственно параллельными сторонами | **2** |
| 3.1.3. | | **Урок 4.12.** Углы с соответственно перпендикулярными сторонами | **1** |
| | | Проверьте себя | **1** |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 7 | **1** |

# Урок 4.1. Квадрат суммы и разности двух выражений


ГЛАВА IV. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

4.1. Квадрат суммы и разности двух выражений

Деятельность

С помощью геометрических фигур постройте модель произведения $(x+1)(x+1)$. Изобразите две пересекающиеся линии так, как показано на рисунке. Покажите, как это сделано на рисунке, первый множитель на горизонтальной линии, второй множитель на вертикальной линии квадратом со стороной в 1 единицу длины и прямоугольником со сторонами 1 и $x$ единицами длины. Расположите члены с положительным знаком в положительном направлении (справа и сверху от пересечения), а члены с отрицательным знаком в отрицательном направлении (слева и снизу пересечения). Знаки (+, –), расположенные в углах модели, указывают на знаки членов многочлена, полученного при умножении. Внутри модели постройте прямоугольники и квадраты со сторонами 1 и $x$. Напишите площадь полученных фигур в виде алгебраической суммы.

S = $x^2$ кв.ед.
S = $x$ кв.ед.
S = 1 кв.ед.

Можно ли, согласно I модели, сделать запись $(x+1)(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$?

Верна ли, согласно II модели, запись $(x-2)(x-2) = (x-2)^2 = x^2-4x+4$?

Деятельность

1. Для того, чтобы преобразовать выражения $(x+1)^2$ и $(x-2)^2$ в многочлен, запишите их в виде произведения двучленов и найдите произведение:
$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2+x+x+1 = x^2+2x+1$
$(x-2)^2 = (x-2)(x-2) = x^2-2x-2x+4 = x^2-4x+4$
2. Определите, какие закономерности были использованы для полученных трёхчленов.

Квадрат суммы двух выражений равен сумме квадратов этих выражений плюс удвоенное произведение подобных выражений. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

Квадрат разности двух выражений равен сумме квадратов этих выражений минус удвоенное произведение подобных выражений. $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

117

**Стандарт:** 1.2.4. Применяет формулы сокращённого умножения при нахождении значения числовых выражений.
**Результат обучения:** Применяет формулу квадрата суммы и разности двух выражений.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

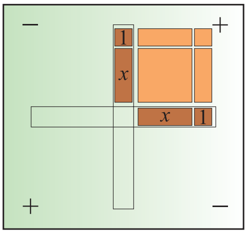
На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** По теме многочленов были приняты за площадь прямоугольника со сторонами 1 и $x$ (ед. изм.) $x$ кв. ед., за площадь квадрата со стороной 1 (ед. изм.) 1 кв. единица и смоделированы, как 

. Используя эту модель, определяется произведение двучленов.

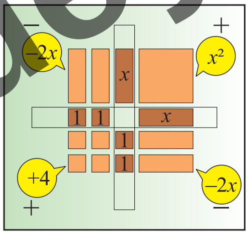
В деятельности, данной в учебнике, один из множителей $(x+1)(x+1)$ изображён на горизонтальной линии, второй множитель – на вертикальной линии, как 

. Поскольку каждый член двучленов имеет положительный знак, точка пересечения вертикальной и горизонтальной линий двух выражений располагается справа и вверху (как на положительном направлении координатных осей прямоугольной системы координат). Чтобы найти произведение этих двучленов, моделирование окончательно определяется так, как дано на рисунке. Площади квадрата со стороной $x$ (ед. изм.), прямоугольника со сторонами 1 и $x$ (ед. изм.) и квадрата со стороной 1 (ед. изм.) записываются в виде суммы: $x^2+2x+1$.




Таким образом, получается равенство $(x+1)(x+1) = x^2+2x+1$.

По такому же принципу моделируется и находится произведение $(x-2)(x-2)$. В этом случае в двучлене $x-2$ размещается один прямоугольник, который соответствует одночлену $x$ и располагается от вертикальной и горизонтальной линий в правой и верхней частях, а поскольку второй член (–2) является отрицательным числом, в левой и нижней частях располагаются по одному квадрату. Модель завершается, как показано на рисунке.




Таким образом, $(x-2)(x-2) = x^2-4x+4$.

Выполняя вторую деятельность, произведение двучленов, данное в модели, находят так же, как произведение многочленов. Таким образом, получаются формулы квадрата суммы и разности двух выражений:

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \qquad (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

Учитель спрашивает у учащихся их мнение об этих формулах. Учащиеся должны уметь выразить эту формулу словами. В зависимости от уровня класса учитель может дать необходимые указания.

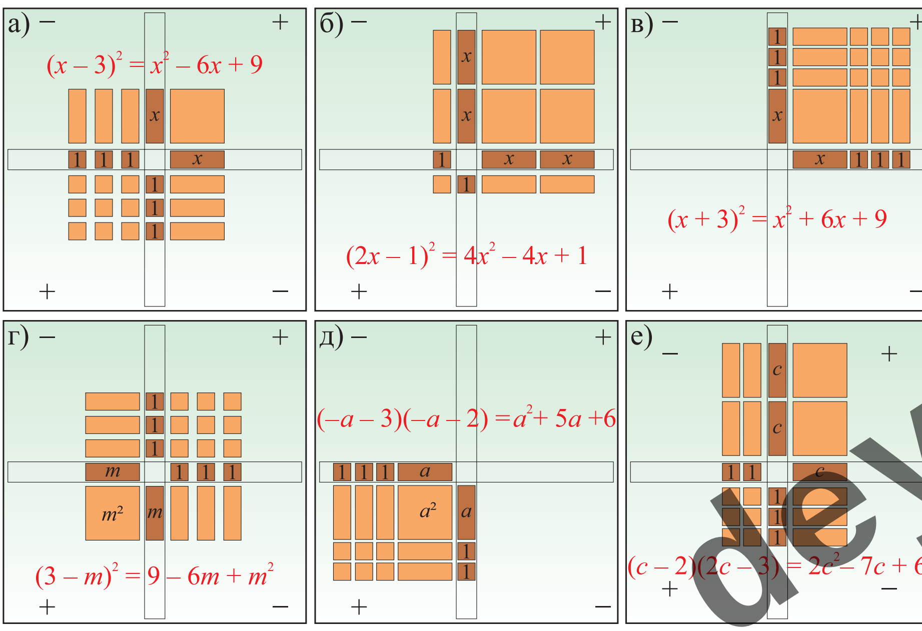
**Исследовательский вопрос**: Как применяется формула квадрата суммы и разности двух выражений?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются в группах, парах или индивидуально.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Применяя формулу квадрата суммы и разности двух выражений, учащиеся должны обращать внимание на разное обозначение переменных. В любом случае учитель должен обратить их внимание на неизменность применения формулы.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** Класс делится на 3 группы. Каждая группа выполняет два заданных ей пункта.




**Упражнение № 2.** б) Чтобы смоделировать выражение $(4 - 3a)^2$, справа на горизонтальной линии изображается 4  квадрата, со стороной 1 ед. изм., слева же 3  прямоугольника со сторонами $a$ и 1 ед. изм. По тому же принципу на вертикальной линии сверху изображается 4 квадрата со стороной 1 ед. изм., внизу же 3 прямоугольника со сторонами $a$ и 1 ед. изм. Основываясь на модель, определяется, что $(4 - 3a)^2 = 16 - 24a + 9a^2$. Поскольку модель занимает много места, рекомендуется работать над ней на листе форматом А4.

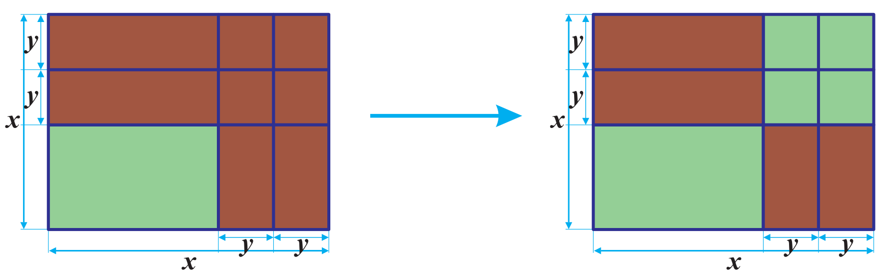
**Упражнение № 6.** Чтобы выполнить упражнение, применяются формулы квадрата суммы и разности двух выражений.

г) $199^2 = (200 - 1)^2 = 200^2 + 1^2 - 2 \cdot 200 \cdot 1 = 39601$;
ё) $9{,}9^2 = (10 - 0{,}1)^2 = 100 + 0{,}01 - 2 = 98{,}01$;
м) $9{,}98^2 = (10 - 0{,}02)^2 = 100 + 0{,}0004 - 0{,}4 = 99{,}6004$.

**Упражнение № 9.** в) Оба данных выражения преобразуйте в многочлен:
$(2a + b^4)^2 = 4a^2 + b^8 + 4ab^4$
$(2a - b^4)^2 = 4a^2 + b^8 - 4ab^4$
Как видно, если в первое выражение будет добавлен одночлен $-8ab^4$, во втором выражении получится:
$(2a + b^4)^2 + (-8ab^4) = 4a^2 + b^8 + 4ab^4 + (-8ab^4) = 4a^2 + b^8 - 4ab^4 = (2a - b^4)^2$.
Или $(2a - b^4)^2 - (2a + b^4)^2 = 4a^2 + b^8 - 4ab^4 - 4a^2 - b^8 - 4ab^4 = -8ab^4$

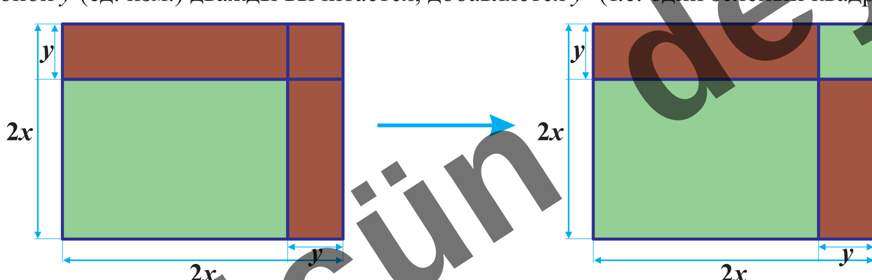
**Ответ**: в) $-8ab^4$.

**Упражнение № 11.** 2) Чтобы смоделировать выражение $(x - 2y)^2$ …, чертится квадрат со стороной $x$ (ед. изм.). На каждой его стороне изображается прямоугольник (коричневого цвета) с шириной $y$ (ед. изм.). Часть коричневого цвета выходит за пределы площади квадрата со стороной $x$ (ед. изм.). Поскольку здесь дважды вычтена площадь квадратов со стороной $y$ (ед. изм.), добавляется $4y^2$ (т.е. 4 зелёных квадрата).




$$(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

3) Смоделируем модель $(2x - y)^2$. Площадь квадрата со стороной $2x$ (ед. изм.) равна $4x^2$ (кв. ед.). Площадь коричневого прямоугольника с шириной $y$ (ед. изм.), длиной $2x$ (ед. изм.) дважды вычитается из $4x^2$. В этом случае из-за того, что площадь квадрата со стороной $y$ (ед. изм.) дважды вычитается, добавляется $y^2$ (т.е. один зелёный квадрат).




$$(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

**Дифференциальное обучение:** Для учащегося может быть сложен процесс моделирования квадрата разности двух выражений. Это задание задаётся, в основном, сильным учащимся.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Иногда вместо «формулы суммы и разности двух **выражений**» пишут «формулы суммы и разности двух **членов**».

В образцах типа $((2a-c)+b)^2$ выражение $(2a-c)$ можно заменить одним членом и затем применить формулу. Например: если $2a-c=m$, выражение $((2a-c)+b)^2$ записывается, как $(m+b)^2$ и применяется формула квадрата суммы двух выражений: $(m+b)^2=m^2+b^2+2bm$ . Затем обращается внимание на выражение $m=2a-c$.
$(2a-c)^2+b^2+2b(2a-c)=4a^2+c^2-4ac+b^2+4ab-2bc=4a^2+b^2+c^2+4ab-4ac-2bc.$

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о формулах квадрата суммы и разности двух выражений и их применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает формулы квадрата суммы и разности двух выражений, но не может применить. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки в применении формул квадрата суммы и разности двух выражений. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет формулы квадрата суммы и разности двух выражений. |
| Уровень IV | Применяет удобными способами формулы квадрата суммы и разности двух выражений. |

## Урок 4.2. Разложение на множители с использованием формул квадрата суммы и квадрата разности двух выражений

**Стандарт:** 1.2.4. Применяет сокращённые формулы умножения в нахождении значения числового выражения.

**Результат обучения:** Применяя формулу квадрата суммы и разности двух выражений, раскладывает трёхчлен на множители.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

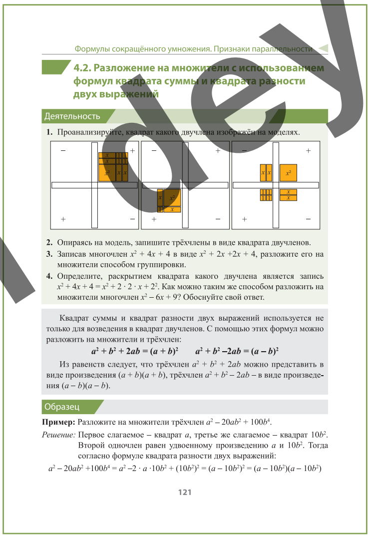
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** В деятельности, данной в учебнике, смоделированы многочлены. На основе моделей учащиеся определяют, какой из этих многочленов является квадратом какого двучлена.


Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности

4.2. Разложение на множители с использованием формул квадрата суммы и квадрата разности двух выражений

Деятельность

1. Проанализируйте, квадрат какого двучлена изображён на моделях.
2. Опираясь на модель, запишите трёхчлены в виде квадрата двучленов.
3. Записав многочлен $x^2+4x+4$ в виде $x^2+2x+2x+4$, разложите его на множители способом группировки.
4. Определите, раскрытием квадрата какого двучлена является запись $x^2+4x+4=x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2$. Как можно таким же способом разложить на множители многочлен $x^2-6x+9$? Обоснуйте свой ответ.

Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений используется не только для возведения в квадрат двучленов. С помощью этих формул можно разложить на множители и трёхчлен:

$$\boldsymbol{a^2+b^2+2ab=(a+b)^2 \qquad a^2+b^2-2ab=(a-b)^2}$$

Из равенств следует, что трёхчлен $a^2+b^2+2ab$ можно представить в виде произведения $(a+b)(a+b)$, трёхчлен $a^2+b^2-2ab$ – в виде произведения $(a-b)(a-b)$.

Образец

**Пример:** Разложите на множители трёхчлен $a^2-20ab^2+100b^4$.

*Решение:* Первое слагаемое – квадрат $a$, третье же слагаемое – квадрат $10b^2$. Второй одночлен равен удвоенному произведению $a$ и $10b^2$. Тогда согласно формуле квадрата разности двух выражений:

$$a^2-20ab^2+100b^4=a^2-2\cdot a\cdot 10b^2+(10b^2)^2=(a-10b^2)^2=(a-10b^2)(a-10b^2)$$

121

Затем в многочлене $x^2 + 4x + 4$, записав второй член, как $4x = 2x + 2x$, исследуется разложение на множители способом группировки.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 2x + 4 = x(x+2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2.$$

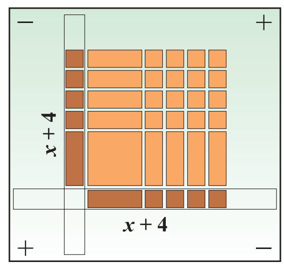
По тому же принципу $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x - 3)^2$.

Таким образом, получаются формулы $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ и $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$.

**Исследовательский вопрос**: Как можно разложить заданный трёхчлен на множители, используя формулы квадрата суммы и разности двух выражений?

**Руководство к некоторым заданиям:**

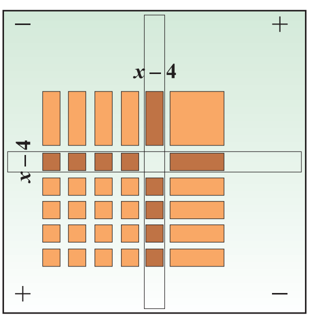
**Упражнение № 2.** В задании строится модель данных многочленов. При построении модели обращается внимание на знаки перед ними.



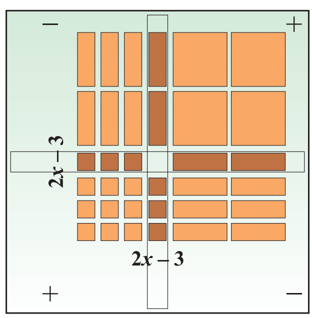

а) Многочлен $x^2 + 8x + 16$ располагается соответственно в 1 четверти прямоугольной системы координат. Здесь изображаются, как и на рисунке, один квадрат с площадью $x^2$ (кв. единиц) и 16 квадратов площадью 1 (кв. единиц), 8 прямоугольников площадью $x$ (кв. единиц). Затем на основе модели определяются множители:

$$(x + 4)(x + 4) = (x + 4)^2.$$

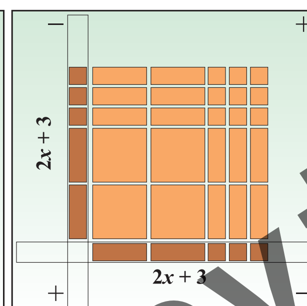
По тому же принципу моделируются другие многочлены:




а) $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$




б) $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$




в) $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

**Упражнение № 5.** Чтобы вместо точек записать необходимый одночлен, учащиеся должны исследовать данные одночлены.

а) В выражении ... + 49 + 56$a$ определено наличие $49 = 7^2$ и $56a = 2 \cdot 7 \cdot 4a$. В этом случае чтобы получить формулу квадрата суммы двух выражений, следует вместо точек записать одночлен $(4a)^2 = 16a^2$: $16a^2 + 49 + 56a = (4a + 7)^2$.

По такому же принципу рассматриваются другие многочлены. Задание может выполняться в группах:

б) $36 - 12x + x^2 = (6 - x)^2$;

в) $0{,}01b^2 + 2bc + 100c^2 = (0{,}1b + 10c)^2$;

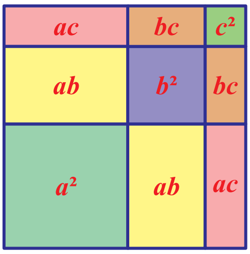
г) $25a^2 + 5ab + \frac{1}{4}b^2 = (5a + \frac{1}{2}b)^2$;

д) $81a^2 - 6ab + \frac{1}{9}b^2 = (9a - \frac{1}{3}b)^2$;

е) $\frac{1}{16}y^2 - 2xy + 16x^2 = (\frac{1}{4}y - 4x)^2$.

**Упражнение № 6.** Чтобы преобразовать выражение $(a + b + c)^2$ в многочлен, дополним построенную модель. В этом случае полученный многочлен будет:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$




Записывая выражение $(a + b + c)^2$ в виде произведения двух трёхчленов, можно применить способ умножения многочлена на многочлен $(a + b + c)(a + b + c)$.

**Упражнение № 9.** Выполняя задание, нужно так преобразовать данный трёхчлен, чтобы можно было записать квадрат какого-либо двучлена.

а) $a^2 - 16a + 69 = a^2 - 16a + 64 + 5 = (a^2 - 8)^2 + 5$. В полученном выражении наименьшее значение, которое может получить выражение $(a^2 - 8)^2$ будет 0. Следовательно, наименьшее значение, которое может получить выражение $(a^2 - 8)^2 + 5$, будет 5.

в) $-50 - 14b - b^2 = -(50 + 14b + b^2) = -(1 + 49 + 14b + b^2) = -1 - (7 + b)^2$. Здесь наименьшее значение, которое может получить выражение $(7 + b)^2$, 0. Тогда наибольшим значением разности выражения $-1 - (7 + b)^2$ будет $-1$ (разность уменьшается с увеличением вычитаемого).

е) $9x^2 + 4 - 6xy + 4y^2 = 9x^2 - 6xy + 4y^2 + 4 = (3x - 2y)^2 + 4$. Здесь наименьшим значением выражения $(3x - 2y)^2$ будет 0. Следовательно, наименьшим значением выражения $9x^2 + 4 - 6xy + 4y^2$ будет 4. **Ответ**: а) 5; в) $-1$; е) 4.

**Упражнение № 11.** Выполняя задание, учащиеся должны суметь определить ошибку Аждара. На основе равенства квадратов чисел нельзя утверждать и о равенстве этих чисел.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о формулах квадрата суммы и разности двух выражений и особенностях их применения.

**Оценивание**

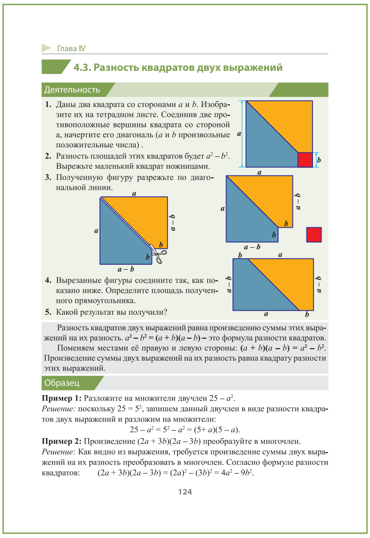
● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется разложить многочлен на множители с применением формул квадрата суммы и разности двух выражений. |
| Уровень II | Нуждается в определённой помощи при разложении многочлена на множители с применением формул квадрата суммы и разности двух выражений. |
| Уровень III | Самостоятельно разлагает многочлен на множители с применением формул квадрата суммы и разности двух выражений. |
| Уровень IV | Самостоятельно разлагает многочлен на множители с применением формул квадрата суммы и разности двух выражений и объясняет. |

## Урок 4.3. Разность квадратов двух выражений

**Стандарт:** 1.2.4. Применяет сокращённые формулы умножения в нахождении значения числового выражения.

**Результат обучения:** Знает и применяет формулу разности квадратов двух выражений.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, ножницы, лист


Глава IV

4.3. Разность квадратов двух выражений

Деятельность

1. Даны два квадрата со сторонами $a$ и $b$. Изобразите их на тетрадном листе. Соединив две противоположные вершины квадрата со стороной а, начертите его диагональ ($a$ и $b$ произвольные положительные числа) .
2. Разность площадей этих квадратов будет $a^2 – b^2$. Вырежьте маленький квадрат ножницами.
3. Полученную фигуру разрежьте по диагональной линии.
4. Вырезанные фигуры соедините так, как показано ниже. Определите площадь полученного прямоугольника.
5. Какой результат вы получили?

Разность квадратов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на их разность. $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$ – это формула разности квадратов.
Поменяем местами её правую и левую стороны: $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$. Произведение суммы двух выражений на их разность равна квадрату разности этих выражений.

Образец

**Пример 1:** Разложите на множители двучлен $25 – a^2$.
*Решение:* поскольку $25 = 5^2$, запишем данный двучлен в виде разности квадратов двух выражений и разложим на множители:
$$25 – a^2 = 5^2 – a^2 = (5+ a)(5 – a).$$
**Пример 2:** Произведение $(2a + 3b)(2a – 3b)$ преобразуйте в многочлен.
*Решение:* Как видно из выражения, требуется произведение суммы двух выражений на их разность преобразовать в многочлен. Согласно формуле разности квадратов: $(2a + 3b)(2a – 3b) = (2a)^2 – (3b)^2 = 4a^2 – 9b^2$.

124



**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. На листе начертите квадрат со стороной $a$ (можно принять $a$ = 3 см) и в одном его углу квадрат со стороной $b$ (можно принять $b$ = 1 см). Второй квадрат вырежьте и отделите, и полученную фигуру разрежьте по диагонали, как это показано на рисунке. Полученные части так соедините, чтобы полученная фигура была прямоугольником. Учащиеся высказывают своё мнение о сторонах этого прямоугольника и его площади.

Таким образом, получается формула $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$.

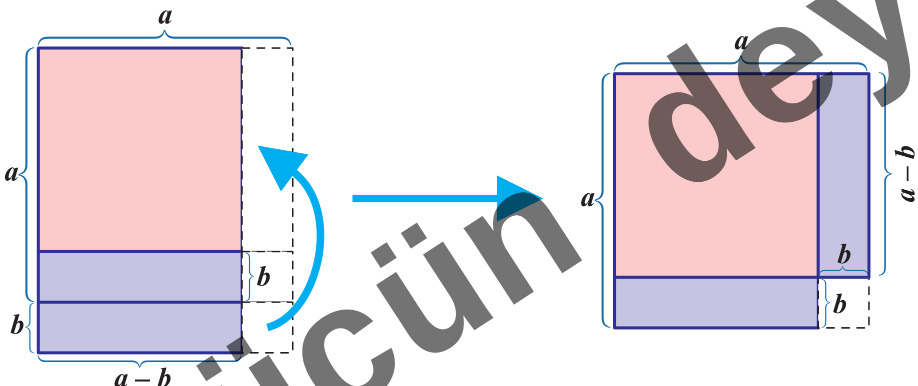
Учитель даёт информацию о формуле разности квадратов. Выполняются примеры на применение формулы.

**Исследовательский вопрос**: Как применяется формула разности квадратов двух выражений?

С целью проведения исследования группами выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** Данную фигуру следует таким образом видоизменить, чтобы полученная фигура отображала формулу разности квадратов.




**Упражнение № 6.**

а) $(3a$ + ▼$)($ ■ $– 6b) = 9a^2$ – ►;   ▼$=6b$;   ■ $=3a$;   ► $= 36b^2$.

б) (■ $– 3x)($■ $+ 3x) = 25m^2$ – ►;   ■ $= 5m$;   ■ $= 5m$;   ►$= 9x^2$.

в) $(1{,}1a + \blacksquare)(\blacktriangleright - \blacktriangledown) = \bullet - 1{,}44n^4$;   $\blacksquare = 1{,}2n^2$;   $\blacktriangleright = 1{,}1a$;   $\blacktriangledown = 1{,}2n^2$;   $\bullet = 1{,}21a^2$.
г) $m^4 - 324n^8 = (\blacktriangledown - \blacktriangleright)(\blacktriangledown + \blacktriangledown)$.   $\blacktriangledown = m^2$;   $\blacktriangleright = 18n^4$;   $\blacktriangledown = m^2$;   $\blacktriangledown = 18n^4$.

**Упражнение № 7.**

б) $\left(1\frac{1}{9}a^5 + 1\frac{1}{2}n^7\right)\left(1\frac{1}{9}a^5 - 1\frac{1}{2}n^7\right) = \left(1\frac{1}{9}a^5\right)^2 - \left(1\frac{1}{2}n^7\right)^2 = \frac{100}{81}n^{10} - \frac{9}{4}n^{14}$.

**Упражнение № 9.**

в) $(-b - c)(b - c) = -(b + c)(b - c) = (c + b)(c - b) = c^2 - b^2$;
д) $(x - y)(y - x) = -(x - y)(x - y) = -(x - y)^2$;
е) $(-a - b)(-a - b) = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$.

**Ответ**: в) $c^2 - b^2$;   д) $-(x - y)^2$;   е) $(a+b)^2$.

**Упражнение № 17.** Для вычисления значения дробей примените формулу разности квадратов:

в) $\frac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2} = \frac{(53-27)(53+27)}{(79-51)(79+51)} = \frac{26\cdot 80}{28\cdot 130} = \frac{4}{7}$;

г) $\frac{67^2 - 17^2}{83^2 - 77^2} = \frac{(67-17)(67+17)}{(83-77)(83+77)} = \frac{50\cdot 84}{6\cdot 160} = 4\frac{3}{8}$.

**Ответ**: в) $\frac{4}{7}$;   г) $4\frac{3}{8}$.

**Упражнение № 23.** Учащиеся проверяют алгоритм для каждых трёх последовательных чисел и полученные результаты записывают на доске. По результатам спрашивается мнение учащихся, которые оцениваются учителем. Затем группы, записывая этот алгоритм для выражений $a - 1$, $a$, $a + 1$, определяют $(a - 1) \cdot a \cdot (a + 1) + a = a^3$.
Действительно, $(a - 1) \cdot a \cdot (a + 1) + a = (a^2 - 1) \cdot a + a = a^3 - a + a = a^3$
Следовательно, когда к произведению трёх последовательных целых чисел прибавляют второе число получается куб второго числа.

**Упражнение № 25.** При применении здесь формулы разности квадратов двух выражений к данным в скобках двучленам следует относиться, как к одному члену. Если при выполнении этого задания учащиеся будут испытывать трудности, они могут применить формулу, обозначив двучлены, записанные в скобках, любыми буквами.

а) $(x + 3)^2 - 4^2$; обозначим здесь $x + 3 = a$: $a^2 - 4^2 = (a - 4)(a + 4)$.
Следующим шагом принимается к сведению равенство $a = x + 3$:
$(a - 4)(a + 4) = (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = (x - 1)(x + 7)$.

**Ответ**: а) $(x - 1)(x + 7)$.

**Примечание**: Если учащийся сможет применить без изменений формулу разности квадратов двух выражений, внесение новой переменной необязательно.

к) $(4c - x)^2 - (2c + 3x)^2 = ((4c - x) - (2c + 3x))\,((4c - x) + (2c + 3x)) =$
$= (4c - x - 2c - 3x)\,(4c - x + 2c + 3x) = (2c - 4x)(6c + 2x)$

**Ответ**: к) $(2c - 4x)(6c + 2x)$.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о формуле разности квадратов двух выражений и её применении.

**Оценивание**

● Применение

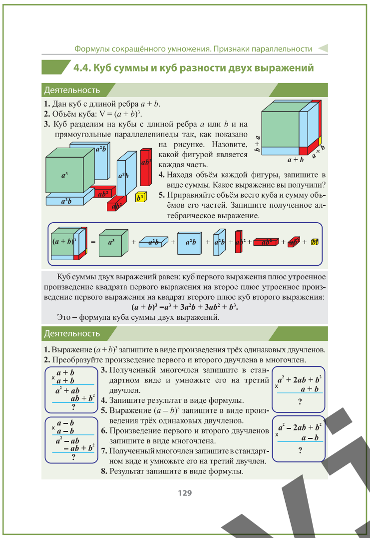
| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает формулу разности квадратов двух выражений, но не умеет применить. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при применении формулы разности квадратов двух выражений. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет формулу разности квадратов двух выражений. |
| Уровень IV | Удобным способом применяет формулу разности квадратов двух выражений. |

## Урок 4.4. Куб суммы и куб разности двух выражений

**Стандарт:** 1.2.4. Применяет сокращённые формулы умножения при нахождении значения числового выражения.
**Результат обучения:** Знает и применяет формулу куба суммы и разности двух членов.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.


Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности

4.4. Куб суммы и куб разности двух выражений

Деятельность

1. Дан куб с длиной ребра $a + b$.
2. Объём куба: $V = (a + b)^3$.
3. Куб разделим на кубы с длиной ребра $a$ или $b$ и на прямоугольные параллелепипеды так, как показано на рисунке. Назовите, какой фигурой является каждая часть.
4. Находя объём каждой фигуры, запишите в виде суммы. Какое выражение вы получили?
5. Приравняйте объём всего куба и сумму объёмов его частей. Запишите полученное алгебраическое выражение.



Куб суммы двух выражений равен: куб первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Это – формула куба суммы двух выражений.

Деятельность

1. Выражение $(a + b)^3$ запишите в виде произведения трёх одинаковых двучленов.
2. Преобразуйте произведение первого и второго двучлена в многочлен.
3. Полученный многочлен запишите в стандартном виде и умножьте его на третий двучлен.
4. Запишите результат в виде формулы.
5. Выражение $(a - b)^3$ запишите в виде произведения трёх одинаковых двучленов.
6. Произведение первого и второго двучленов запишите в виде многочлена.
7. Полученный многочлен запишите в стандартном виде и умножьте его на третий двучлен.
8. Результат запишите в виде формулы.



129

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. На основе деятельности исследуется объём куба с ребром $a + b$. Здесь изображено деление куба на части. Для проведения этого исследования более наглядно учитель может использовать возможности компьютерных программ. Учащие, выполняющие деятельность, определяют формулу куба суммы двух членов.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Следующей деятельностью выражение $(a + b)^3$ показывают в виде произведения двучленов.

Применяя способ нахождения произведения $(a + b)(a + b)^2$ и многочленов, определяется формула. Найдя произведение, можно использовать также данный в учебнике способ умножения в столбик. По тому же принципу определяется формула куба разности двух членов.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

**Исследовательский вопрос:** Как применяются формулы куба суммы и куба разности двух членов?

С целью проведения исследования задания из учебника даются на рабочих листах группам.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 5.** На основе формулы $(1 \pm a)^3 \approx 1 \pm 3a$ $(0 < a < 1)$ произведём приблизительные вычисления:

а) $(1 + 0{,}01)^3 \approx 1 + 3 \cdot 0{,}01 = 1{,}03$;
Точное значение $1{,}01^3 = 1{,}030301$. Абсолютная погрешность: $1{,}030301 - 1{,}03 = 0{,}000301$

б) $1{,}04^3 = 1{,}124864$. По формуле: $1{,}04^3 = (1 + 0{,}04)^3 \approx 1 + 3 \cdot 0{,}04 = 1{,}12$
Абсолютная погрешность: $1{,}124864 - 1{,}12 = 0{,}004864$

в) $0{,}99^3 = 0{,}970299$. По формуле: $0{,}99^3 = (1- 0{,}01)^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}01 = 0{,}97$
Абсолютная погрешность: $0{,}970299 - 0{,}97 = 0{,}000299$

г) $1{,}1^3 = 1{,}331$. По формуле: $1{,}1^3 = (1 + 0{,}1)^3 \approx 1 + 0{,}3 = 1{,}3$
Абсолютная погрешность: $1{,}331 - 1{,}3 = 0{,}031$

д) $0{,}996^3 = 0{,}988047936$. По формуле: $0{,}996^3= (1 - 0{,}004)^3 \approx 1 - 0{,}012 = 0{,}988$
Абсолютная погрешность: $0{,}988047936 - 0{,}988 = 0{,}000047936$

Как результат определяется, что допустимая погрешность незначительна.

**Ответ:** а) 1,03; 0,000301; б) 1,12; 0,004864; в) 0,97; 0,000299; г) 1,3; 0,031; д) 0,988; 0,000047936.

**Упражнение № 8.** Это задание выполняется с целью творческого применения. Целесообразно, чтобы это задание выполняли сильные учащиеся. Основываясь на формулу куба суммы, преобразуем:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3a\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3} = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3a + \frac{3}{a} =$$
$$= a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Из равенства $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + \frac{1}{a^3} + 3\left(a+\frac{1}{a}\right)$ получим $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a+\frac{1}{a}\right)$. В последнем выражении примем к сведению значение $a + \frac{1}{a} = 5$:

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a+\frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a+\frac{1}{a}\right) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110$$

**Ответ**: 110.

**Упражнение № 11.** а) При выполнении задания значения $a$ и $b$ определяются способом подстановки: Если $a + b = 9$, $ab = 8$, то $a = 8$, $b = 1$ или $a = 1$, $b = 8$.
$a^3 - b^3 = 8^3 - 1^3 = 511$ натуральное число, но $a^3 - b^3 = 1^3 - 8^3 = -511$ – целое число.

в) Дано $a - b = 52$, $ab = 1260$, известно, что $a$ и $b$ натуральные числа.
Из тождества $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$
$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = 52^3 + 3 \cdot 1260 \cdot 52 = 337168$
$2(a^3 - b^3) = 2 \cdot 337168 = 674336$

**Ответ**: в) 674336.

**Упражнение № 13.**

в) $$\left(\frac{2}{5}x^4y^3 + \frac{1}{2}xy^7\right)^3 = \left(\frac{2}{5}x^4y^3\right)^3 + 3\left(\frac{2}{5}x^4y^3\right)^2\left(\frac{1}{2}xy^7\right) + 3\left(\frac{2}{5}x^4y^3\right)\left(\frac{1}{2}xy^7\right)^2 + \left(\frac{1}{2}xy^7\right)^3 =$$
$$= \frac{8}{125}x^{12}y^9 + \frac{6}{25}x^9y^{13} + \frac{3}{10}x^6y^{17} + \frac{1}{8}x^3y^{21};$$

д) $(0{,}1x^6y^2c^{10} - 0{,}2)^3 = 0{,}001x^{18}y^6c^{30} - 0{,}006x^{12}y^4c^{20} + 0{,}012x^6y^2c^{10} - 0{,}008$

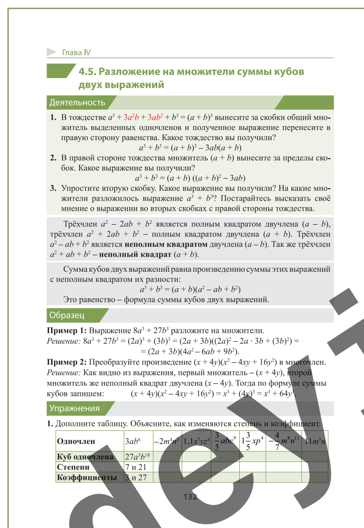
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о формулах куба суммы и куба разности двух членов и их применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает формулы куба суммы и куба разности двух членов, но не может применить. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при применении формул куба суммы и куба разности двух членов. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет формулы куба суммы и куба разности двух членов. |
| Уровень IV | Применяет удобным способом формулы куба суммы и куба разности двух членов. |

## Урок 4.5. Разложение на множители суммы кубов двух выражений



Глава IV

4.5. Разложение на множители суммы кубов двух выражений

Деятельность

1. В тождестве $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ вынесите за скобки общий множитель выделенных одночленов и полученное выражение перенесите в правую сторону равенства. Какое тождество вы получили?
$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$
2. В правой стороне тождества множитель $(a + b)$ вынесите за пределы скобок. Какое выражение вы получили?
$$a^3 + b^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$$
3. Упростите вторую скобку. Какое выражение вы получили? На какие множители разложилось выражение $a^3 + b^3$? Постарайтесь высказать своё мнение о выражении во вторых скобках с правой стороны тождества.

Трёхчлен $a^2 - 2ab + b^2$ является полным квадратом двучлена $(a - b)$, трёхчлен $a^2 + 2ab + b^2$ – полным квадратом двучлена $(a + b)$. Трёхчлен $a^2 - ab + b^2$ является **неполным квадратом** двучлена $(a - b)$. Так же трёхчлен $a^2 + ab + b^2$ – **неполный квадрат** $(a + b)$.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений с неполным квадратом их разности:
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$
Это равенство – формула суммы кубов двух выражений.

Образец

**Пример 1:** Выражение $8a^3 + 27b^3$ разложите на множители.

*Решение:* $8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)((2a)^2 - 2a \cdot 3b + (3b)^2) = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

**Пример 2:** Преобразуйте произведение $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ в многочлен.

*Решение:* Как видно из выражения, первый множитель – $(x + 4y)$, второй множитель же неполный квадрат двучлена $(x - 4y)$. Тогда по формуле суммы кубов запишем: $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2) = x^3 + (4y)^3 = x^3 + 64y^3$.

Упражнения

1. Дополните таблицу. Объясните, как изменяются степень и коэффициент.

| Одночлен | $3ab^6$ | $-2m^4n^2$ | $1{,}1x^7yz^4$ | $\frac{3}{5}abc^9$ | $1\frac{3}{5}xp^4$ | $-\frac{4}{7}m^8n^{11}$ | $11m^5n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Куб одночлена | $27a^3b^{18}$ | | | | | | |
| Степени | 7 и 21 | | | | | | |
| Коэффициенты | 3 и 27 | | | | | | |

132

**Стандарт**: 1.2.4. Применяет сокращённые формулы умножения при нахождении значения числового выражения.

**Результат обучения:** Знает и применяет формулу суммы кубов двух выражений.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** Выполняются преобразования в формуле, изученные на предыдущем уроке:
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$
В правой стороне равенства множитель $(a + b)$ вынесем за скобки:

$a^3 + b^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$

Второе выражение в скобкам упростим: $(a + b)^2 - 3ab = a^2 - ab + b^2$

Следовательно, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

**Объяснение учителя:** Учителем объясняется формула суммы кубов двух выражений и понятие неполного квадрата.

**Исследовательский вопрос**: Как применяется формула суммы кубов двух выражений?

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 6.** а) $\dfrac{31^3+19^3}{50} - 31\cdot 19 = \dfrac{(31+19)(31^2-31\cdot 19+19^2)}{50} - 31\cdot 19 =$

$=31^2 - 2 \cdot 31 \cdot 19 + 19^2 = (31 - 19)^2 = 144$

в) $\dfrac{39^3+41^3}{80}-\left(39^2+41^2\right)=\dfrac{(39+41)\left(39^2-39\cdot 41+41^2\right)}{80}-39^2-41^2=-39\cdot 41=-1599$

**Ответ**: а) 144, в) –1599.

**Упражнение № 8.** При решении уравнений, применяются формулы сокращённого умножения.

в) $(a + 2)^3 - a(3a + 1)^2 + (2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) = 53$

$a^3 + 6a^2 + 12a + 8 - 9a^3 - 6a^2 - a + 8a^3 + 1 = 53$

$11a = 44$

$\underline{a = 4}$

**Проверка**: $(4 + 2)^3 - 4(3\cdot 4 + 1)^2 + (2\cdot 4 + 1)(4 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 1) = 53$

$53 = 53$

г) $5x(x + 3)^2 - 5(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 30(x + 2)(x - 2) = 75$

$5x^3 + 30x^2 + 45x - 5x^3 - 135 - 30x^2 + 120 = 75$

$45x = 90$

$\underline{x = 2}$

**Проверка**: $5\cdot 2 \cdot(2 + 3)^2 - 5(2 + 3)(2^2 - 3\cdot 2 + 9) - 30(2 + 2)(2 - 2) = 75$

$75 = 75$

**Ответ**: в) 4; г) 2.

**Упражнение № 11.** Для определения делится ли выражение на данное число применим для выражений формулу суммы кубов двух выражений. Здесь возможно выразить мнение согласно полученному в первых скобках числу.

а) $(11- q)^3 + q^3 = (11 - q + q)((11- q)^2 - (11- q)\cdot q + q^2)$.

Поскольку в этом выражении первый множитель $(11 - q + q) = 11$, произведение может делиться на 11.

б) $(4 - 2q)^3 + 8q^3 = (4 - 2q + 2q)((4 - 2q)^2 - (4 - 2q)\cdot 2q + 4q^2)$

Поскольку первый множитель делится на 4, произведение делится на 4.

г) $3q^3 + 3(4 - q)^3 = 3(q^3 + (4 - q)^3) = 3(q + 4 - q)(q^2 - q(4 - q) + (4 - q)^2)=$

$= 12(q^2 - q(4 - q) + (4 - q)^2$.

Из-за того, что в произведении 12 множителей, выражение полностью делится на 12.

**Упражнение № 14.** Для определения выражений, которые должны быть записаны вместо букв A, B, C и D, исследуются данные равенства.

а) $(2x + \text{A})(\text{B} + 9y^2) = \text{C}^3 + \text{D}^3$. Как видно из этого равенства, справа должна получиться сумма кубов. Следовательно, слева в первых скобках должна быть сумма двух выражений, во вторых скобках – неполный квадрат разности этих выражений. Тогда должно быть $\text{A} = 3y$, потому что во вторых скобках $9y^2 = (3y)^2$. Следовательно, в первых скобках $(2x + 3y)$. Тогда будет $\text{B} = 4x^2 - 6xy$. Таким образом,

$(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2) = (2x)^3 + (3y)^3$.

По тому же принципу может быть $\text{C} = 3y$ и $\text{D} = 2x$.

**Ответ**: $\text{A} = 3y$, $\text{B} = 4x^2 - 6xy$, $\text{C} = 2x$, $\text{D} = 3y$.

б) Поскольку в равенстве $(3m + \text{A})(\text{B} + \text{C}) = n^6 + \text{D}$, $n^6 = (n^2)^3$ можно записать $\text{A} = n^2$. Тогда первые скобки будут $(3m + n^2)$.

Во вторых скобках можно записать:

$B = 9m^2 - 3mn^2$ и $C = n^4$ (və ya $B = 9m^2$, $C = -3mn^2 + n^4$).

Таким образом, $(3m + n^2)(9m^2 - 3mn + n^4) = n^6 + 27m^3$.

**Ответ**: $A = n^2$, $B = 9m^2 - 3mn^2$, $C = n^4$, $D = 27m^3$.

**Упражнение № 16.** Для преобразования данных выражений в произведение применим формулу суммы кубов двух выражений. Здесь двучлен $(y - 2)$ принимается за один член.

д) $(y - 2)^3 + 27 = (y - 2 + 3)((y - 2)^2 - 3\cdot (y - 2) + 3^2) = (y + 1)(y^2 - 7y + 19)$.

е) $27m^3 + (m + n)^3 = (3m + m + n)(9m^2 - 3m(m + n) + (m + n)^2) = (4m + n)(7m^2 - mn + n^2)$.

**Упражнение № 17.** Данные выражения упрощаются применением формулы куба суммы двух выражений.

в) $\left(2\frac{1}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^2\cdot 7\frac{3}{4} + \left(7\frac{3}{4}\right)^3 + 3\cdot\left(7\frac{3}{4}\right)^2\cdot 2\frac{1}{4} = \left(2\frac{1}{4} + 7\frac{3}{4}\right)^3 = 1000.$

г) $(-0{,}78)^3 + 2{,}22\cdot (-0{,}78)^2 + (-2{,}34)\cdot 0{,}74^2 + 0{,}74^3 =$

$= (-0{,}78)^3 + 3 \cdot 0{,}74\cdot (-0{,}78)^2 + 3 \cdot (-0{,}78)\cdot 0{,}74^2 + 0{,}74^3 =$

$= 0{,}74^3 - 3 \cdot 0{,}78 \cdot 0{,}74^2 + 3 \cdot 0{,}74\cdot 0{,}78^2 - (0{,}78)^3 = (0{,}74 - 0{,}78)^3 =$

$= -0{,}04^3 = -0{,}000064$.

**Ответ**: в) 1000, г) $-0{,}000064$.

**Упражнение № 18.** Это задание, направленное на творческое применение, может быть задано сильным учащимся.

Если при делении на 4 в остатке остаётся 1, это число записывается в виде $4x + 1$.

Если при делении на 4 в остатке остаётся 3, это число записывается в виде $4y + 3$.

$(4x + 1)^3 + (4y + 3)^3 = (4x + 1 + 4y + 3)((4x + 1)^2 - (4x + 1)(4y + 3) + (4y + 3)^2)$.

Упростим в этом выражении первые скобки:

$4x + 1 + 4y + 3 = 4x + 4y + 4 = 4(x + y + 1)$.

Таким образом, сумма кубов этих чисел тоже полностью делится на 4.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о формуле суммы кубов двух выражений и её применении.

**Оценивание**

● Применение

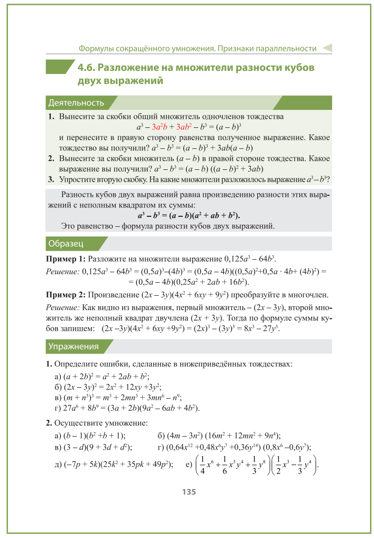
| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает формулу суммы кубов двух выражений, но не может применить. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при применении формулы суммы кубов двух выражений. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет формулу суммы кубов двух выражений. |
| Уровень IV | Применяет удобным способом формулу суммы кубов двух выражений. |

## Урок 4.6. Разложение на множители разности кубов двух выражений

**Стандарт:** 1.2.4. Применяет сокращённые формулы умножения при нахождении значения числового выражения.

**Результат обучения:** Применяет формулу разности кубов двух выражений.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы


Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности

## 4.6. Разложение на множители разности кубов двух выражений

Деятельность

**1.** Вынесите за скобки общий множитель одночленов тождества

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

и перенесите в правую сторону равенства полученное выражение. Какое тождество вы получили? $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

**2.** Вынесите за скобки множитель $(a - b)$ в правой стороне тождества. Какое выражение вы получили? $a^3 - b^3 = (a - b)\,((a - b)^2 + 3ab)$

**3.** Упростите вторую скобку. На какие множители разложилось выражение $a^3 - b^3$?

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений с неполным квадратом их суммы:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Это равенство – формула разности кубов двух выражений.

Образец

**Пример 1:** Разложите на множители выражение $0{,}125a^3 - 64b^3$.

*Решение:* $0{,}125a^3 - 64b^3 = (0{,}5a)^3 - (4b)^3 = (0{,}5a - 4b)((0{,}5a)^2 + 0{,}5a \cdot 4b + (4b)^2) = (0{,}5a - 4b)(0{,}25a^2 + 2ab + 16b^2)$.

**Пример 2:** Произведение $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$ преобразуйте в многочлен.

*Решение:* Как видно из выражения, первый множитель – $(2x - 3y)$, второй множитель же неполный квадрат двучлена $(2x + 3y)$. Тогда по формуле суммы кубов запишем: $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = (2x)^3 - (3y)^3 = 8x^3 - 27y^3$.

Упражнения

**1.** Определите ошибки, сделанные в нижеприведённых тождествах:

а) $(a + 2b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
б) $(2x - 3y)^2 = 2x^2 + 12xy + 3y^2$;
в) $(m + n^3)^3 = m^3 + 2mn^3 + 3mn^6 - n^9$;
г) $27a^6 + 8b^9 = (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$.

**2.** Осуществите умножение:

а) $(b - 1)(b^2 + b + 1)$; б) $(4m - 3n^2)(16m^2 + 12mn^2 + 9n^4)$;
в) $(3 - d)(9 + 3d + d^2)$; г) $(0{,}64x^{12} + 0{,}48x^6y^7 + 0{,}36y^{14})(0{,}8x^6 - 0{,}6y^7)$;
д) $(-7p + 5k)(25k^2 + 35pk + 49p^2)$; е) $\left(\frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{6}x^3y^4 + \frac{1}{3}y^8\right)\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}y^4\right)$.

135

### Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Проводятся преобразования в формуле куба разности двух выражений:
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$
$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$
В правой стороне равенства вынесем за скобки множитель $(a - b)$:
$a^3 - b^3 = (a - b)((a - b)^2 + 3ab)$
Выражение во вторых скобках упростим:
$(a - b)^2 + 3ab = a^2 + ab + b^2$
Следовательно, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

**Объяснение учителя:** Учитель объясняет формулу разности кубов двух выражений и понятие неполного квадрата суммы.

**Исследовательский вопрос**: Как применяется формула разности кубов двух выражений?

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 3.** Основываясь на формулу куба разности двух выражений, можно записать равенство $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$.

а) Если $a - b = 4$; $ab = -1{,}75$

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = 4^3 + 3 \cdot (-1{,}75) \cdot 4 = 64 - 21 = 43$

б) Если $a - b = -5$; $ab = -6$

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (-5)^3 + 3 \cdot (-6) \cdot (-5) = -125 + 90 = -35$

**Ответ**: а) 43, б) –35.

**Упражнение № 8.** Применим формулу разности кубов двух выражений:

в) $c^6(c - 6)^3 - 125c^9 = (c^2(c - 6))^3 - (5c^3)^3 = (c^2(c - 6) - 5c^3)\,((c^2(c - 6))^2 +$
$+ c^2(c - 6) \cdot 5c^3 + (5c^3)^2 = (c^3 - 6c^2 - 5c^3)(c^4(c^2 - 12c + 36) + 5c^6 - 30c^5 + 25c^6) =$
$= (-6c^2 - 4c^3)(c^6 - 12c^5 + 36c^4 + 30c^6 - 30c^5) = (-4c^3 - 6c^2)(31c^6 - 42c^5 + 36c^4) =$
$= -2c^6(2c + 3)(31c^2 - 42c + 36)$.

г) $(2x + y)^3 - (2x - y)^3 = ((2x + y) - (2x - y))((2x + y)^2 + (2x - y)(2x + y) + (2x - y)^2) =$
$= (2x + y - 2x + y)(4x^2 + 4xy + y^2 + 4x^2 - y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2) = 2y(12x^2 + y^2)$.

е) $x^6y^9 - 64x^3 = (x^2y^3)^3 - (4x)^3 = (x^2y^3 - 4x)(x^4y^6 + 4x^3y^3 + 16x^2)$.

**Упражнение № 9.** Решая это задание, учащиеся должны уметь видеть в данных выражениях куб разности двух выражений.

в) $3\cdot\left(17\frac{5}{6}\right)^2\cdot 8\frac{1}{3} + \left(8\frac{1}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(8\frac{1}{3}\right)^2\cdot 17\frac{5}{6} - \left(17\frac{5}{6}\right)^3 = \left(8\frac{1}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(8\frac{1}{3}\right)^2\cdot 17\frac{5}{6} +$

$+ 3\cdot\left(17\frac{5}{6}\right)^2\cdot 8\frac{1}{3} - \left(17\frac{5}{6}\right)^3 = \left(8\frac{1}{3} - 17\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-9\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{19}{2}\right)^3 = -\frac{6859}{8} = -857\frac{3}{8}$.

г) $8{,}9^3 - 16{,}5 \cdot 8{,}9^2 + 26{,}7 \cdot 30{,}25 - 5{,}5^3 = 8{,}9^3 - 3 \cdot 5{,}5 \cdot 8{,}9^2 + 3 \cdot 8{,}9 \cdot 5{,}5^2 - 5{,}5^3 =$
$= (8{,}9 - 5{,}5)^3 = 3{,}4^3 = 39{,}304$

**Упражнение № 10.** Данное выражение преобразуем в многочлен:
$(x^2 - 10x + 6)(2x + b) = 2x^3 + bx^2 - 20x^2 - 10bx + 12x + 6b = 2x^3 + (b - 20)x^2 +$
$+ (12 - 10b)x + 6b.$

а) чтобы в многочлене не выступал множитель $x^2$, коэффициент $x^2$ должен быть равен нулю: $b - 20 = 0, \quad b = 20$

б) чтобы коэффициенты $x^2$ и $x$ были равны, определим $b$ из равенства:
$b - 20 = 12 - 10b$: $b = 2\frac{10}{11}$.

**Ответ**: а) $b = 20$, б) $b = 2\frac{10}{11}$.

**Упражнение № 12.** Данное выражение следует преобразовать таким образом, чтобы легко было определить искомое число. Для этого вынесем за скобки из уменьшаемого и вычитаемого в качестве общего множителя 111:

$$111111 - 222 = 111 \cdot (1001 - 2) = 111 \cdot 999 = 111 \cdot 111 \cdot 9 = (111 \cdot 3)^2 = 333^2$$

**Ответ**: 333.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о формуле разности кубов двух выражений и её применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает формулу разности кубов двух выражений, но не может применить. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при применении формулы разности кубов двух выражений. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет формулу разности кубов двух выражений. |
| Уровень IV | Применяет удобным способом формулу разности кубов двух выражений. |

## Урок 4.7. Преобразование выражений

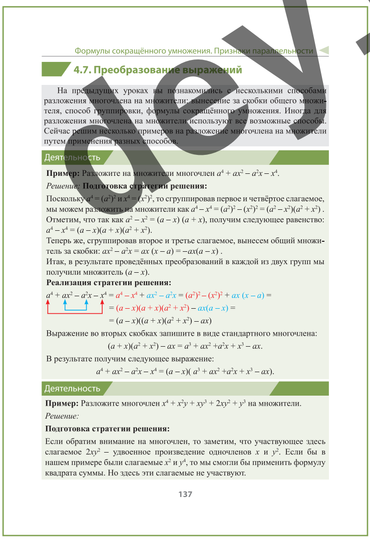
**Стандарт:** 1.2.4. Применяет сокращённые формулы умножения при нахождении значения числового выражения.

**Результат обучения:** Преобразует выражения, применяя формулы сокращённого умножения.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы**: учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ



Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности

### 4.7. Преобразование выражений

На предыдущих уроках вы познакомились с несколькими способами разложения многочлена на множители: вынесение за скобки общего множителя, способ группировки, формулы сокращённого умножения. Иногда для разложения многочлена на множители используют все возможные способы. Сейчас решим несколько примеров на разложение многочлена на множители путем применения разных способов.

Деятельность

**Пример:** Разложите на множители многочлен $a^4 + ax^2 - a^2x - x^4$.

*Решение:* **Подготовка стратегии решения:**

Поскольку $a^4 = (a^2)^2$ и $x^4 = (x^2)^2$, то сгруппировав первое и четвёртое слагаемое, мы можем разложить на множители как $a^4 - x^4 = (a^2)^2 - (x^2)^2 = (a^2 - x^2)(a^2 + x^2)$.
Отметим, что так как $a^2 - x^2 = (a - x)(a + x)$, получим следующее равенство: $a^4 - x^4 = (a - x)(a + x)(a^2 + x^2)$.
Теперь же, сгруппировав второе и третье слагаемое, вынесем общий множитель за скобки: $ax^2 - a^2x = ax(x - a) = -ax(a - x)$.
Итак, в результате проведённых преобразований в каждой из двух групп мы получили множитель $(a - x)$.

**Реализация стратегии решения:**

$$a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 = a^4 - x^4 + ax^2 - a^2x = (a^2)^2 - (x^2)^2 + ax(x - a) =$$
$$= (a - x)(a + x)(a^2 + x^2) - ax(a - x) =$$
$$= (a - x)((a + x)(a^2 + x^2) - ax)$$

Выражение во вторых скобках запишите в виде стандартного многочлена:

$$(a + x)(a^2 + x^2) - ax = a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax.$$

В результате получим следующее выражение:

$$a^4 + ax^2 - a^2x - x^4 = (a - x)(a^3 + ax^2 + a^2x + x^3 - ax).$$

Деятельность

**Пример:** Разложите многочлен $x^4 + x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^3$ на множители.

*Решение:*

**Подготовка стратегии решения:**

Если обратим внимание на многочлен, то заметим, что участвующее здесь слагаемое $2xy^2$ – удвоенное произведение одночленов $x$ и $y^2$. Если бы в нашем примере были слагаемые $x^2$ и $y^4$, то мы смогли бы применить формулу квадрата суммы. Но здесь эти слагаемые не участвуют.

137

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** После прохождения формул сокращённого умножения, ставится вопрос о способе нахождения значения числовых выражений с использованием этих формул. В течение этого урока учащиеся исследуют, какой способ и когда следует применить. В деятельности учебника даны образцы разных способов, применяющихся при преобразовании выражений. Учитель вместе с учащимися выполняет, исследуя, стратегию решения этих примеров. Лучше, если эти примеры будут демонстрироваться на компьютере, тогда и учащиеся лучше будут усваивать материал, и учитель сэкономит время.

Чтобы разложить многочлен на множители, недостаточно точно знать формулы сокращённого умножения, здесь надо уметь увидеть общий множитель и успешно проводить группировку. Во время проведения таких преобразований, формируются особые способности видеть, определять «скрытые» выражения, распознавать формулы. Для разложения многочлена на множители следует придерживаться следующих рекомендаций:

1. Если все члены многочлена имеют общий множитель, то этот множитель вынесите за скобки;
2. В приведённых многочленах ищите признаки формул сокращённого умножения: квадрат числа, куб числа, удвоенное или утроенное произведение чисел;
3. Группируя слагаемые с общим множителем, вынесите этот множитель за скобки;
4. Если какая-либо группировка результатов не даст, постарайтесь сгруппировать слагаемые другим способом;
5. Прибавьте и отнимите недостающее слагаемое для любой формулы и группировки, при необходимости любое слагаемое разложите на несколько слагаемых;
6. Если разложение на множители не получилось каким-либо одним способом, то используйте другой способ. В результате, решение проблемы, на которую вы потратили много усилий, принесет вам радость и чувство удовлетворения.

**Объяснение учителя**: Учителем доводятся до сведения учащихся правила преобразования выражений, данные в учебнике.

**Исследовательский вопрос**: Как применяются при преобразовании выражений формулы сокращённого умножения и другие способы?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются на рабочих листах группами.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 5.**

в) $a^4 - a^3 - a^2 + a = 0$
$a^3(a - 1) - a(a - 1) = 0$
$(a - 1)(a^3 - a) = 0$
$(a - 1)^2 a\,(a + 1) = 0$
$a = 1, a = 0.$
**Ответ**: 0 и 1.

е) $p^3 - 5p^2 - 9p + 45 = 0$
$p^2(p - 5) - 9(p - 5) = 0$
$(p - 5)(p^2 - 9) = 0$
$(p - 5)(p - 3)(p + 3) = 0$
$p = 5, p = 3, p = -3.$
**Ответ**: ±3 и 5.

и) $n^3 - 12 + 3n^2 - 4n = 0$
$n^2(n + 3) - 4(3 + n) = 0$
$(n + 3)(n^2 - 4) = 0$
$(n + 3)(n - 2)(n + 2) = 0$
$n = -3, n = -2, n = 2.$
**Ответ**: –3, ±2.

**Упражнение № 6.** Выражения, данные в третьем столбце таблицы, преобразовывают таким образом, чтобы используя данные из первого и второго столбцов, можно было найти его значение.

| Сумма или разность переменных | Произведение переменных | Выражение | Значение выражения |
|---|---|---|---|
| $a + b = 2$ | $ab = 5$ | $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ | $2^2 - 2 \cdot 5 = -6$ |
| $c - d = 7$ | $cd = -3$ | $cd^2 - c^2d = cd(d - c)$ | $-3 \cdot (-7) = 21$ |
| $m + n = -9$ | $mn = 10$ | $m^3n + 2m^2n^2 + mn^3 =$<br>$= mn\,(m + n)^2$ | $10 \cdot (-9)^2 = 810$ |
| $p + q = -6$ | $pq = -11$ | $pq^3 + p^3q = pq(q^2 + p^2) =$<br>$pq((p+q)^2 - 2pq)$ | $-11 \cdot (36+22) =$<br>$-11 \cdot 58 = -638$ |
| $r + s = -7$ | $rs = 20$ | $r^3s^2 + r^2s^3 = r^2s^2(r + s)$ | $20^2 \cdot (-7) = -2800$ |
| $x - y = 21$ | $xy = 4$ | $x^3 - y^3 =$<br>$= (x - y)^3 + 3xy(x - y)$ | $21^3 + 3 \cdot 4 \cdot 21 =$<br>$= 9513$ |

**Упражнение № 7.** б) $m = \frac{2}{9}$; $n = \frac{3}{5}$. Чтобы упростить первоначальное выражение, применим формулу разности квадратов двух выражений:

$(5m-3n)^2-(4m-2n)^2=(5m-3n-4m+2n)(5m-3n+4m-2n)=$

$=(m-n)(9m-5n)=\left(\frac{2}{9}-\frac{3}{5}\right)\left(9\cdot\frac{2}{9}-5\cdot\frac{3}{5}\right)=\frac{-17}{45}\cdot(-1)=\frac{17}{45}.$

д) $p=1{,}3$; $q=0{,}8$.

$p^3+p^2q-pq^2-q^3=p^2(p+q)-q^2(p+q)=(p+q)^2(p-q)=(1{,}3+0{,}8)^2(1{,}3-0{,}8)=$
$=2{,}1^2\cdot 0{,}5=2{,}205.$

**Ответ**: б) $\frac{17}{45}$, д) 2,205.

**Упражнение № 8.**

а) $15{,}4^2-7{,}6^2+23\cdot 2{,}2=(15{,}4-7{,}6)(15{,}4+7{,}6)+23\cdot 2{,}2=23\cdot 7{,}8+23\cdot 2{,}2=$
$=23\,(7{,}8+2{,}2)=230.$

б) $46{,}8^2-12\cdot 51{,}6-34{,}8^2=(46{,}8-34{,}8)(46{,}8+34{,}8)-12\cdot 51{,}6=$
$=12\cdot 81{,}6-12\cdot 51{,}6=12\cdot(81{,}6-51{,}6)=12\cdot 30=360.$

д) $\frac{3^{12}+3^{14}}{3^{12}+3^{14}+3^{15}}=\frac{3^{12}\left(1+3^2\right)}{3^{12}\left(1+3^2+3^3\right)}=\frac{10}{37}.$

е) $\frac{2^{16}-2^{18}+2^{19}}{16^4-16^6}=\frac{2^{16}\left(1-2^2+2^3\right)}{16^4\left(1-16^2\right)}=\frac{5}{-255}=-\frac{1}{51}.$

з) $\frac{36^2+36^3}{6^4-6^5+6^6-6^7}=\frac{36^2(1+36)}{6^4\left(1-6+6^2-6^3\right)}=\frac{37}{-187}=-\frac{1}{5}.$

**Ответ**: а) 230, б) 360, д) $\frac{10}{37}$, е) $-\frac{1}{51}$, з) $-\frac{1}{5}$.

**Упражнение № 9.** а) Два последовательных числа обозначим $x$ и $x+1$. Тогда по условию: $x(x+1)+x+1=x^2+x+x+1=x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Действительно, если к произведению двух последовательных целых чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

б) Разность кубов двух последовательных целых чисел:

$(x+1)^3-x^3=x^3+3x^2+3x+1-x^3=3x^2+3x+1.$

В этом выражении два из слагаемых полностью делятся на 3, а третье слагаемое на 3 не делится, следовательно, сумма на 3 не делится.

в) Докажем, что при делении квадрата нечётного числа на 8 в остатке остаётся 1:

Нечётное число примем за $2x+1$. Тогда $(2x+1)^2=4x^2+4x+1=4x(x+1)+1$.

В этом выражении выражение $4x(x+1)$ делится на 4, произведение $x(x+1)$ – произведение двух последовательных чисел и это произведение делится на 2. Следовательно, выражение $4x(x+1)$ полностью делится на 8.

Тогда остаток, полученный из деления выражения $4x(x+1)+1$ на 8, будет 1.

Учащиеся могут проверить верность данных предложений на примерах.

**Упражнение № 11.** а) $a^2+4a-5=a^2+4a+4-9=(a+2)^2-3^2=(a+2-3)(a+2+3)=$
$=(a-1)(a+5).$

Действительно, $(a-1)(a+5)=a^2+5a-a-5=a^2+4a-5$.

б) $b^2-10b+9=b^2-10b+25-16=(b-5)^2-4^2=(b-5-4)(b-5+4)=(b-9)(b-1).$

Действительно, $(b-19)(b-1)=b^2-10b-19$.

в) $2x^2+16x-40=2(x^2+8x-20)=2(x^2+8x+16-36)=$
$=2((x+4)^2-6^2)=2(x+4-6)(x+4+6)=2(x-2)(x+10).$

Действительно, $2(x-2)(x+10)=2x^2+16x-40$.

г) $x^2+1{,}5x-1=x^2+2\cdot\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}-1\frac{9}{16}=\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2=$

$=\left(x+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2).$

Действительно, $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=x^2+1{,}5x-1.$

д) $y^2-2{,}5y-6=y^2-2\cdot\frac{5}{4}y+\frac{25}{16}-\frac{121}{16}=\left(y-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2=\left(y-\frac{5}{4}-\frac{11}{4}\right)\left(y-\frac{5}{4}+\frac{11}{4}\right)=$

$=(y-4)(y+1{,}5)$

Действительно, $(y-4)(y+1{,}5)=y^2-2{,}5y-6$.

е) $a^2-3{,}5a+1{,}5=a^2-2\cdot\frac{7}{4}a+\frac{49}{16}-\frac{49}{16}+\frac{3}{2}=\left(\left(a-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right)=\left(a-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\right)\left(a-\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right)=$

$=(a-3)(a-0{,}5)$

Действительно, $(a-3)(a-0{,}5)=a^2-3{,}5a+1{,}5$.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о формулах сокращённого умножения при преобразовании выражений и применении других способов.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | С трудом преобразовывает выражения. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при преобразовании выражений. |
| Уровень III | Самостоятельно преобразовывает выражения. |
| Уровень IV | Делает преобразования выражений удобным способом. |

## Образец критериев оценивания для составления задания для малого суммативного оценивания № 6

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Применяет формулу квадрата суммы и разности двух выражений |
| 2 | Применяет формулу разности квадратов двух выражений |
| 3 | Применяет формулы куба суммы и куба разности двух выражений |
| 4 | Применяет формулу суммы кубов и разности кубов двух выражений |
| 5 | Преобразует выражения, используя формулы сокращённого умножения |

## Образец малого суммативного оценивания № 6

Фамилия: ____________________ Имя: ____________

Количество правильных ответов: _____

Количество неправильных ответов: ___ Оценка: ___

**1.** Напишите формулы квадрата суммы и разности членов $k$ и $p$.

**2.** Запишите выражения в виде многочленов:

$(3x-2)^2 =$

$(0{,}6-m)^2 =$

$\left(1\frac{1}{4}+6x\right)^2 =$

$(a+2b)^3 =$

$(1-m)^3 =$

**3.** Разложите трёхчлен на множители:

$y^2-22y+121 =$

$9b(b-1)-(b-1) =$

**4.** При каком значении $x$ значение выражения $(x-61)$ будет на 2 единицы меньше выражения $(-5+7x)$?

**5.** Разложите на множители:

$25a^2-64x^4 =$

**6.** Вычислите значение выражения удобным способом: $12{,}04^2+2\cdot 5{,}06\cdot 12{,}04+5{,}06^2 =$

**7.** Разложите выражение на множители:

а) $m^3+b^3 =$

б) $8x^3-27 =$

**8.** Вычислите значение выражения:

$$\frac{69^2-75^2}{44^2-38^2} =$$

$$\frac{81-75^2}{44^2-38^2} =$$

**9.** Вместо точек запишите такой одночлен, чтобы полученный трёхчлен можно было записать в виде квадрата двучлена: $0{,}04b^2+\ldots+169a^2$

**10.** Решите уравнение:

$(x+1)(x^2-x+1)-x(x-3)(x+3)=62$

**11.** Разложите выражения на множители:

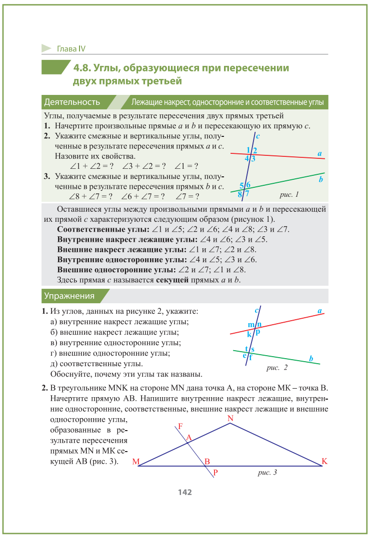
а) $0{,}064+27a^3 =$

б) $125-x^6 =$

**12.** Вычислите значение выражения

$a+b=16,\ ab=-28$ при $a^3+b^3$.

## Урок 4.8. Углы, образующиеся при пересечении двух прямых третьей


Глава IV

4.8. Углы, образующиеся при пересечении двух прямых третьей

Деятельность | Лежащие накрест, односторонние и соответственные углы

Углы, получаемые в результате пересечения двух прямых третьей

1. Начертите произвольные прямые $a$ и $b$ и пересекающую их прямую $c$.
2. Укажите смежные и вертикальные углы, полученные в результате пересечения прямых $a$ и $c$. Назовите их свойства.
   $\angle 1 + \angle 2 = ?$ $\angle 3 + \angle 2 = ?$ $\angle 1 = ?$
3. Укажите смежные и вертикальные углы, полученные в результате пересечения прямых $b$ и $c$.
   $\angle 8 + \angle 7 = ?$ $\angle 6 + \angle 7 = ?$ $\angle 7 = ?$

рис. 1

Оставшиеся углы между произвольными прямыми $a$ и $b$ и пересекающей их прямой $c$ характеризуются следующим образом (рисунок 1).

**Соответственные углы:** $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 7$.
**Внутренние накрест лежащие углы:** $\angle 4$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 5$.
**Внешние накрест лежащие углы:** $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$.
**Внутренние односторонние углы:** $\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$.
**Внешние односторонние углы:** $\angle 2$ и $\angle 7$; $\angle 1$ и $\angle 8$.
Здесь прямая $c$ называется **секущей** прямых $a$ и $b$.

Упражнения

1. Из углов, данных на рисунке 2, укажите:
   а) внутренние накрест лежащие углы;
   б) внешние накрест лежащие углы;
   в) внутренние односторонние углы;
   г) внешние односторонние углы;
   д) соответственные углы.
   Обоснуйте, почему эти углы так названы.

рис. 2

2. В треугольнике MNK на стороне MN дана точка A, на стороне MK – точка B. Начертите прямую AB. Напишите внутренние накрест лежащие, внутренние односторонние, соответственные, внешние накрест лежащие и внешние односторонние углы, образованные в результате пересечения прямых MN и MK секущей AB (рис. 3).

рис. 3

142

**Стандарт:** 3.1.3. Применяет свойство углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.
**Результат обучения:** Определяет углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

### Ход урока:

На изучение темы отводится 1 час.

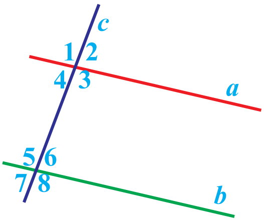
**Постановка проблемы:** В течение этого урока исследуются углы, образованные пересечением двух прямых третьей прямой. Сперва выполняется деятельность из учебника. Учащимися вспоминается изученное о смежных и вертикальных углах на предыдущих уроках. Затем посредством компьютера учитель, на основе рисунка, данного в учебнике, даёт информацию о двух прямых и секущей, характеризует образованные между ними углы. Учитель обсуждает с учащимися, почему внутренние и внешние накрест лежащие углы, односторонние, соответственные углы имеют такие названия. Выслушивается мнение учащихся. До сведения учащихся доводится характеристика углов относительно секущей.

**Исследовательский вопрос**: Какие особенности есть у углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 3.** а) Известно, что из приведённых углов $\angle 4 = \angle 6$. Эти углы – внутренние накрест лежащие углы.
$\angle 4 + \angle 3 = 180°$ и $\angle 5 + \angle 6 = 180°$ – смежные углы.
Поскольку $\angle 3 = 180° - \angle 4$ и $\angle 5 = 180° - \angle 6$, то $\angle 3 = \angle 5$.

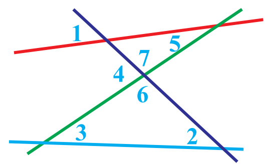



б) Дано $\angle 4 = \angle 6$. Поскольку $\angle 4 = \angle 2$ и $\angle 8 = \angle 6$ (вертикальные углы), будет $\angle 2 = \angle 6$ и $\angle 4 = \angle 8$.
По тому ж принципу $\angle 3 = \angle 5$: $\angle 1 = \angle 5$ и $\angle 3 = \angle 7$.
в) Известно, что $\angle 4 = \angle 6$. Поскольку $\angle 6 = 180° - \angle 5$, то получим $\angle 4 = 180° - \angle 5$ и $\angle 4 + \angle 5 = 180°$.
Следовательно, в этом случае сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

**Упражнение № 4.** а) Известно, что сумма внутренних односторонних углов равна $\angle 3 + \angle 6 = 180°$.

Если принять во внимание равенства $\angle 3 = 180° - \angle 2$ и $\angle 6 = 180° - \angle 7$, то получим: $180° - \angle 2 + 180° - \angle 7 = 180°$ və $\angle 2 + \angle 7 = 180°$.

б) Известно, что $\angle 3 + \angle 6 = 180°$. Обратим внимание на выражение $\angle 3 = 180° - \angle 4$ в данном равенстве: $180° - \angle 4 + \angle 6 = 180°$ və $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$.




**Упражнение № 9.** Согласно условию, $\angle 2 + \angle 3 = 88°$.
$\angle 6 = 180° - (\angle 2 + \angle 3) = 180° - 88° = 92°$
$\angle 4 + \angle 6 = 180°$, то $\angle 4 = 180° - 92° = 88°$.
$\angle 7 = \angle 6 = 92°$, то $\angle 1 + \angle 5 = 88°$.
Таким образом, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = (\angle 1 + \angle 5) +$
$+ (\angle 2 + \angle 3) + \angle 4 = 88° + 88° + 88° = 264°$. **Ответ**: 264°.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное об углах, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой.

**Оценивание**

● Определение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в определении углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой. |
| Уровень II | Допускает незначительные ошибки при определении углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой. |
| Уровень III | Самостоятельно определяет углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой. |
| Уровень IV | Обосновывая, определяет углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой. |

## Урок 4.9. Признаки параллельности прямых

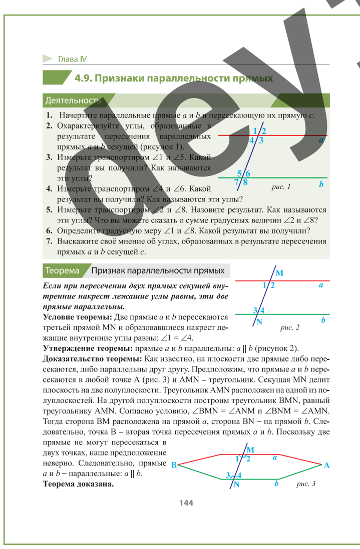
**Стандарт:** 3.1.3. Применяет свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

**Результат обучения:** Применяет признак параллельности прямых.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы



Глава IV

4.9. Признаки параллельности прямых

Деятельность

1. Начертите параллельные прямые $a$ и $b$ и пересекающую их прямую $c$.
2. Охарактеризуйте углы, образованные в результате пересечения параллельных прямых $a$ и $b$ секущей (рисунок 1).
3. Измерьте транспортиром $\angle 1$ и $\angle 5$. Какой результат вы получили? Как называются эти углы?
4. Измерьте транспортиром $\angle 4$ и $\angle 6$. Какой результат вы получили? Как называются эти углы?
5. Измерьте транспортиром $\angle 2$ и $\angle 8$. Назовите результат. Как называются эти углы? Что вы можете сказать о сумме градусных величин $\angle 2$ и $\angle 8$?
6. Определите градусную меру $\angle 1$ и $\angle 8$. Какой результат вы получили?
7. Выскажите своё мнение об углах, образованных в результате пересечения прямых $a$ и $b$ секущей $c$.

рис. 1

Теорема Признак параллельности прямых

***Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, эти две прямые параллельны.***

**Условие теоремы:** Две прямые $a$ и $b$ пересекаются третьей прямой MN и образовавшиеся накрест лежащие внутренние углы равны: $\angle 1 = \angle 4$.

рис. 2

**Утверждение теоремы:** прямые $a$ и $b$ параллельны: $a \parallel b$ (рисунок 2).

**Доказательство теоремы:** Как известно, на плоскости две прямые либо пересекаются, либо параллельны друг другу. Предположим, что прямые $a$ и $b$ пересекаются в любой точке A (рис. 3) и AMN – треугольник. Секущая MN делит плоскость на две полуплоскости. Треугольник AMN расположен на одной из полуплоскостей. На другой полуплоскости построим треугольник BMN, равный треугольнику AMN. Согласно условию, $\angle BMN = \angle ANM$ и $\angle BNM = \angle AMN$. Тогда сторона BM расположена на прямой $a$, сторона BN – на прямой $b$. Следовательно, точка B – вторая точка пересечения прямых $a$ и $b$. Поскольку две прямые не могут пересекаться в двух точках, наше предположение неверно. Следовательно, прямые $a$ и $b$ – параллельные: $a \parallel b$.

**Теорема доказана.**

рис. 3

144

### Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** В течение первого урока выполняется деятельность, данная в учебнике. Основываясь на деятельность, с помощью транспортира измеряются углы, образованные при пересечении двух прямых и секущей. Выполняющие измерение учащиеся наглядно определяют либо равенство, либо сумму, равную 180°, углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых и секущей. Результаты разъясняются учащимися.

**Объяснение учителя**: Выражая в виде теоремы, доказывает признак параллельности прямых (по внутренним накрест лежащим углам).

**Исследовательский вопрос**: Как применяется признак параллельности прямых?

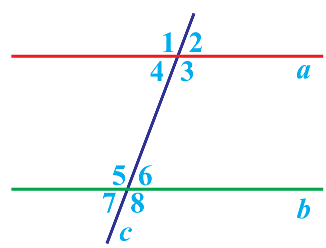
После доказательства теоремы, называются признаки параллельности прямых по внутренним односторонним и соответственным углам и эти теоремы доказываются учащимися, поделёнными на группы. Во время доказательства используется признак параллельности прямых.

На следующем этапе выполняется вторая деятельность, данная в учебнике. Определяется параллельность двух прямых по наличию единого перпендикуляра.

В качестве продолжения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** а) Дано $\angle 1 = \angle 8$.



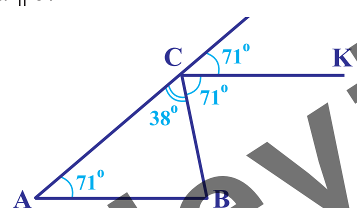

С другой стороны, известно, что $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 8 = \angle 5$. Тогда $\angle 3 = \angle 5$, т.е. внутренние накрест лежащие углы равны. Следовательно, $a \parallel b$.

б) Дано $\angle 2 = 430$, $\angle 8 = 1370$. $\angle 2$ и $\angle 8$ – внешние односторонние углы. $\angle 2 + \angle 8 = 43° + 137° = 180°$. Поскольку сумма внешних односторонних углов равна 180°, то $a \parallel b$.

в) Дано $\angle 4 = 55°$, $\angle 1 = 180° - \angle 4 = 180° - 55° = 125°$.

Тогда $\angle 6 = 125° - 70° = 55°$. Следовательно, $\angle 4 = \angle 6$ и $a \parallel b$.

**Упражнение № 6.** В треугольнике АВС смежный угол углу АВС 180° – 38° = 142°.




Поскольку СК – биссектриса, то

$\angle BCK = 142° : 2 = 71°$.

Тогда $\angle CAB + \angle ACK = 71° + 38° + 71° = 180°$.

$\angle CAB$ и $\angle ACK$ – внутренние односторонние углы. Следовательно, $AB \parallel CK$.

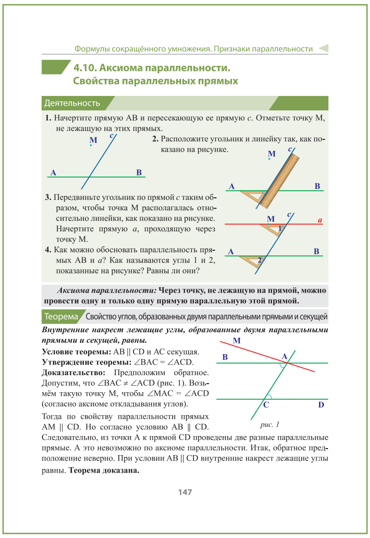
**Обобщение и результат:** учитель обобщает пройденное о признаках параллельности прямых и их применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает признаки параллельности прямых, но затрудняется их применить. |
| Уровень II | Нуждается в помощи учителя при применении признаков параллельности прямых. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет признаки параллельности прямых. |
| Уровень IV | Обосновывая, применяет признаки параллельности прямых. |

# Урок 4.10. Аксиома параллельности. Свойства параллельных прямых


Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности

4.10. Аксиома параллельности. Свойства параллельных прямых

Деятельность

1. Начертите прямую AB и пересекающую ее прямую $c$. Отметьте точку M, не лежащую на этих прямых.
2. Расположите угольник и линейку так, как показано на рисунке.
3. Передвиньте угольник по прямой $c$ таким образом, чтобы точка M располагалась относительно линейки, как показано на рисунке. Начертите прямую $a$, проходящую через точку M.
4. Как можно обосновать параллельность прямых AB и $a$? Как называются углы 1 и 2, показанные на рисунке? Равны ли они?

***Аксиома параллельности:*** **Через точку, не лежащую на прямой, можно провести одну и только одну прямую параллельную этой прямой.**

Теорема Свойство углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

***Внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, равны.***

**Условие теоремы:** AB || CD и AC секущая.

**Утверждение теоремы:** $\angle BAC = \angle ACD$.

**Доказательство:** Предположим обратное. Допустим, что $\angle BAC \neq \angle ACD$ (рис. 1). Возьмём такую точку M, чтобы $\angle MAC = \angle ACD$ (согласно аксиоме откладывания углов).

Тогда по свойству параллельности прямых AM || CD. Но согласно условию AB || CD. Следовательно, из точки A к прямой CD проведены две разные параллельные прямые. А это невозможно по аксиоме параллельности. Итак, обратное предположение неверно. При условии AB || CD внутренние накрест лежащие углы равны. **Теорема доказана.**

*рис. 1*

147

**Стандарт:** 3.1.3. Применяет свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

**Результат обучения:** Применяет признак параллельности прямых.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, угольник, линейка

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Через точку, не лежащую на прямой, с помощью угольника и линейки проводится прямая, параллельная первой прямой. Учащиеся обосновывают параллельность полученных прямых. Проводятся обсуждения о том, сколько параллельных прямых можно провести через одну точку. Озвучивается аксиома параллельности.

**Объяснение учителя**: Учитель называет в виде теоремы свойства углов (накрест лежащих), образованных при пересечении параллельных прямых секущей, и доказывает её.

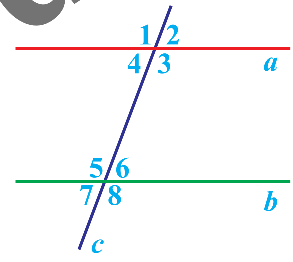
**Исследовательский вопрос**: Как применяются свойства параллельных прямых?

С целью проведения исследования на рабочих листах группам раздаются задания, при выполнении которых учащиеся должны доказать другие свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, свойство двух прямых, параллельных одной и той же прямой.

На следующем уроке в качестве продолжения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 5.** Известно, что $a \parallel b$ и $c$ – секущая.




в) Дано $\angle 5 - \angle 2 = 44°$. С другой стороны, $\angle 5 + \angle 4 = 180°$ и $\angle 4 = \angle 2$. Следовательно, $\angle 5 + \angle 2 = 180°$. Если разность двух одинаковых углов 44°, один из этих углов больше другого на 44°. Тогда $\angle 2 + \angle 2 + 44° = 180°$ и $\angle 2 = 68°$,

$\angle 5 = 180° - 68° = 112°$. По свойству смежных углов $\angle 8 = \angle 5 = 112°$. **Ответ**: в) 112°.

г) Известно, что $\angle 3 = 5 \cdot \angle 7$. Поскольку $\angle 6 = \angle 7$, то будет $\angle 3 = 5 \cdot \angle 6$.

$\angle 3 + \angle 6 = 180°$, $5 \cdot \angle 6 + \angle 6 = 180°$, $\angle 6 = 180° : 6 = 30°$.

Тогда $\angle 3 = 180° - 30° = 150°$ и $\angle 7 = \angle 6 = 30°$. **Ответ**: 150° и 30°.

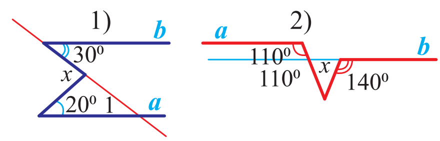
**Упражнение № 11.** По условию известно, что $a \parallel b$. Тогда основываясь на свойство параллельности прямых, напишем уравнения:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $7x = 2x + 75$ | 2) $6x - 32 + 4x + 72 = 180$ | 3) $125 - x + 5x - 25 = 180$ |
| $5x = 75$ | $10x = 140$ | $4x = 80$ |
| $x = 15$ | $x = 14$ | $x = 20$ |
| Углы: | Углы: | Углы: |
| $7 \cdot 15 = 105°$ | $6 \cdot 14 - 32 = 52°$ | $125 - 20 = 105°$ |
| $180° - 105° = 75°$ | $4 \cdot 14 + 72 = 128°$ | $5 \cdot 20 - 25 = 75°$ |

**Ответ**: 1) 105° и 75°, 2) 52° и 128°, 3) 105° и 75°.

**Упражнение № 15.** Это задание выполняется с целью творческого применения и задаётся сильным учащимся.

Согласно условию, $a \parallel b$.

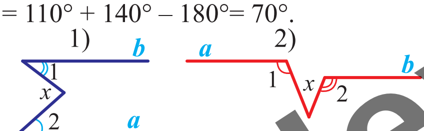



1) На первом рисунке в треугольнике, образованным секущей, $\angle 1 = 30°$. Угол $x$ на рисунке является смежным углом третьего угла треугольника, тогда $x = 50°$.
2) На этом рисунке смежные углы двум внутренним углам треугольника, образованного прямой $b$, равны 110° и 140°. Тогда внутренние углы треугольника соответственно оба будут равны 70° и 40°. Следовательно, $x = 180° - (70° + 40°) = 70°$.

**Ответ**: 1) $x = 50°$, 2) $x = 70°$.

**Моменты, на которые следует обратить внимание**: Целесообразно довести до сведения учащихся, что в упражнении № 15 в данных примерах в первом случае $x = 20° + 30° = 50°$ и во втором случае $x = 110° + 140° - 180° = 70°$.

В общем случае:
1) $x = \angle 1 + \angle 2$
2) $x = \angle 1 + \angle 2 - 180°$



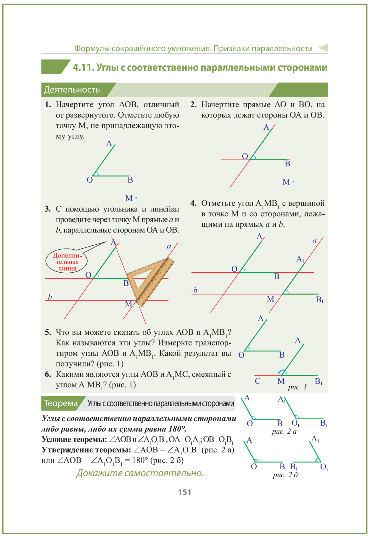

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о свойствах параллельных прямых и их применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает свойства параллельных прямых, но затрудняется их применить. |
| Уровень II | Нуждается в помощи учителя при применении свойства параллельных прямых. |
| Уровень III | Применяет свойства параллельных прямых. |
| Уровень IV | Самостоятельно применяет свойства параллельных прямых. |

## Урок 4.11. Углы с соответственно параллельными сторонами


Формулы сокращённого умножения. Признаки параллельности

4.11. Углы с соответственно параллельными сторонами

Деятельность

1. Начертите угол AOB, отличный от развернутого. Отметьте любую точку M, не принадлежащую этому углу.
2. Начертите прямые AO и BO, на которых лежат стороны OA и OB.
3. С помощью угольника и линейки проведите через точку M прямые $a$ и $b$, параллельные сторонам OA и OB.
4. Отметьте угол $A_1MB_1$ с вершиной в точке M и со сторонами, лежащими на прямых $a$ и $b$.
5. Что вы можете сказать об углах AOB и $A_1MB_1$? Как называются эти углы? Измерьте транспортиром углы AOB и $A_1MB_1$. Какой результат вы получили? (рис. 1)
6. Какими являются углы AOB и $A_1MC$, смежный с углом $A_1MB_1$? (рис. 1)



Теорема Углы с соответственно параллельными сторонами

***Углы с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо их сумма равна 180°.***

**Условие теоремы:** $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$, $OA \parallel O_1A_1$; $OB \parallel O_1B_1$

**Утверждение теоремы:** $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 2 а) или $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 2 б)

*Докажите самостоятельно.*



151

**Стандарт:** 3.1.3. Применяет свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

**Результат обучения:** Знает и применяет свойства углов с соответственно параллельными сторонами.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

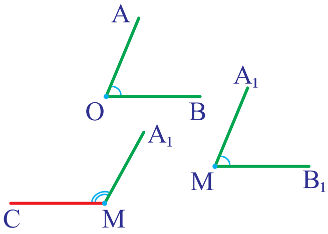
**Метод работы:** выведение понятия, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, угольник, линейка

### Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Чертится любой угол и за его пределами отмечается одна точка. С помощью угольника и линейки из этой точки проводятся прямые, параллельные сторонам угла. Исследуются углы с вершиной в точке M. Выслушивается мнение учащихся о взаимном положении полученного угла с данным углом. Для доказательства мнения учащихся проводятся необходимые измерения транспортиром. Таким образом, углы с соответственно параллельными сторонами вводятся как понятие.




**Объяснение учителя**: Учитель свойство углов с соответственно параллельными сторонами даёт в виде теоремы. Во время доказательства использует навыки учащихся. Они, как это выполнено в деятельности, могут доказать теорему, использовав свойства углов, образованных между параллельными прямыми и секущей. При необходимости учитель даёт определённые рекомендации. Затем объясняется свойство двух одноимённых и двух разноимённых углов с соответственно параллельными сторонами.

> Если углы с соответственно параллельными сторонами являются оба острыми или тупыми, то такие углы равны.
> Если один из углов с соответственно параллельными сторонами является острым, а второй тупым, то сумма этих углов равна 180°.
> Если углы с соответственно параллельными сторонами являются оба прямыми, то сумма этих углов равна 180°.

**Исследовательский вопрос**: Как применяются свойства углов с соответственно параллельными сторонами?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника, данные на рабочих листах группам.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 3.** В виде теоремы было выражено, что углы с соответственно параллельными сторонами либо равны, либо их сумма равна 180°. Обратная теорема этой теоремы неверна. Потому что равные углы и углы, сумма которых равна 180°, могут и не быть с параллельными сторонами. Равенство углов не определяет взаимное положение их сторон.

**Упражнение № 5.** а) На основе рисунка можно определить, что углы ABC и DMK имеют одинаковое название. Тогда, решая уравнение $3x = 2x + 15$, сможем определить углы. $x = 15°$. Следовательно, $\angle ABC = 3 \cdot 15° = 45°$, $\angle ABC = 2\cdot 15° + 15° = 45°$.

б) $\angle ABC + \angle DMP = 236°$ и углы с одинаковым названием. Следовательно,
$\angle ABC = \angle DMP = 236° : 2 = 118°$.

в) Поскольку углы по названию разные, их сумма равна 180°.
$3x – 50° + 7x – 30° = 180°$ и $x = 26°$. Таким образом:
$\angle ABC = 3 \cdot 26° – 50° = 28°$.
$\angle ABC = 7 \cdot 26° – 30° = 152°$.

**Ответ**: а) 45°, б) 118°, в) 28° и 152°.

**Упражнение № 6.** а) Если один из двух углов с соответственно параллельными сторонами составляет 20% другого угла, эти углы не одинаковы по названию. Один из углов обозначим через x, второй угол будет $0{,}2x$. Основываясь на теорему, $x + 0{,}2x = 180°$.
$x = 180 : 1{,}2 = 150°$. Второй угол составляет 20% от 150°.
Следовательно, $150° \cdot 20 : 100 = 30°$.

б) Если отношение углов с соответственно параллельными сторонами 3 : 6, то один из этих углов будет острым, другой – тупым. Острый угол будет $3x$, тупой угол – $6x$.
Согласно теореме:
$3x + 6x = 180°$, $x = 20°$.
Следовательно, острый угол: $20° \cdot 3 = 60°$, тупой угол: $20° \cdot 6 = 120°$.

**Ответ**: а) 150° и 30°, б) 60° и 120°.

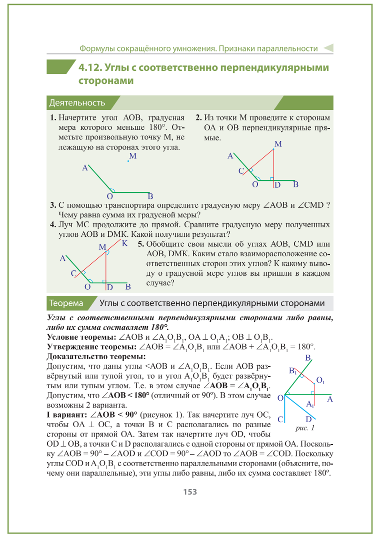
**Обобщение и результат:** учитель обобщает пройденное о свойствах углов с соответственно параллельными сторонами и их применении.

**Оценивание**

● Применение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Знает свойства углов с соответственно параллельными сторонами, но затрудняется их применить. |
| Уровень II | Нуждается в помощи учителя при применении свойств углов с соответственно параллельными сторонами. |
| Уровень III | Применяет свойства углов с соответственно параллельными сторонами. |
| Уровень IV | Самостоятельно применяет свойства углов с соответственно параллельными сторонами. |

# Урок 4.12. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами




4.12. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

Деятельность

1. Начертите угол AOB, градусная мера которого меньше 180°. Отметьте произвольную точку M, не лежащую на сторонах этого угла.
2. Из точки M проведите к сторонам OA и OB перпендикулярные прямые.
3. С помощью транспортира определите градусную меру ∠AOB и ∠CMD ? Чему равна сумма их градусной меры?
4. Луч MC продолжите до прямой. Сравните градусную меру полученных углов AOB и DMK. Какой получили результат?
5. Обобщите свои мысли об углах AOB, CMD или AOB, DMK. Каким стало взаиморасположение соответственных сторон этих углов? К какому выводу о градусной мере углов вы пришли в каждом случае?

Теорема Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

***Углы с соответственными перпендикулярными сторонами либо равны, либо их сумма составляет 180°.***

**Условие теоремы:** $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$, $OA \perp O_1A_1$; $OB \perp O_1B_1$.

**Утверждение теоремы:** $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ или $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

**Доказательство теоремы:**

Допустим, что даны углы <AOB и $\angle A_1O_1B_1$. Если AOB развёрнутый или тупой угол, то и угол $A_1O_1B_1$ будет развёрнутым или тупым углом. Т.е. в этом случае $\mathbf{\angle AOB = \angle A_1O_1B_1}$. Допустим, что $\mathbf{\angle AOB < 180°}$ (отличный от 90º). В этом случае возможны 2 варианта.

рис. 1

**I вариант:** $\mathbf{\angle AOB < 90°}$ (рисунок 1). Так начертите луч OC, чтобы $OA \perp OC$, а точки B и C располагались по разные стороны от прямой OA. Затем так начертите луч OD, чтобы $OD \perp OB$, а точки C и D располагались с одной стороны от прямой OA. Поскольку $\angle AOB = 90° - \angle AOD$ и $\angle COD = 90° - \angle AOD$ то $\angle AOB = \angle COD$. Поскольку углы COD и $A_1O_1B_1$ с соответственно параллельными сторонами (объясните, почему они параллельные), эти углы либо равны, либо их сумма составляет 180º.



**Стандарт:** 3.1.3. Применяет свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

**Результат обучения:** Знает и применяет свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** выведение понятия, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, транспортир

### Ход урока:

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Чертится любой угол и отмечается точка, не принадлежащая его сторонам. С помощью циркуля от этой точки к сторонам угла проводятся перпендикуляры. Полученные углы анализируются. Выслушивается мнение учащихся о взаимном положении полученного и данного угла. Учащиеся измеряют углы с помощью транспортира и высказывают своё мнение о полученном результате. Таким образом, вводится понятие об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

**Объяснение учителя**: Учитель свойство углов с соответственно перпендикулярными сторонами даёт в виде теоремы. Доказательство ведётся вместе с учащимися. Они, используя свойства углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, доказывают теорему. Учитель в зависимости от уровня класса может оказать помощь.

**Исследовательский вопрос**: Как применяются свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами?

С целью проведения исследования группами выполняются на рабочих листах задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 3.** Известно, что углы с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо их сумма равна 180°.

а) Если $\angle AOB = 56°$, то $\angle CED = 56°$ или $\angle CED = 180° - 56° = 124°$.

б) Если $\angle AOB : \angle CED = 2:7$, то $\angle AOB = 2x$, $\angle CED = 7x$.
$2x + 7x = 180°$, $x = 20°$. Следовательно, $\angle AOB = 20° \cdot \angle 2 = 40°$, $\angle CED = 20° \cdot 7 = 140°$.

в) Если $\angle AOB = 3 \cdot \angle CED$, обозначим $\angle CED = x$, то $\angle AOB = 3x$.
Согласно теореме: $x + 3x = 180°$, $x = 45°$.
Следовательно, $\angle CED = 45°$, $\angle AOB = 45° \cdot 3 = 135°$.

г) Если $\angle AOB = 20x + 44°$, $\angle CED = 10x + 46°$, то согласно теореме, возможны два случая:

**I случай**: $20x + 44° + 10x + 46° = 180°$, $x = 3$.
Следовательно, $\angle AOB = 20° \cdot 3 + 44° = 104°$, $\angle CED = 10° \cdot 3 + 46° = 76°$.

**II случай**: $20x + 44 = 10x + 46$, $x = 0{,}2$.
Следовательно, $\angle AOB = 20° \cdot 0{,}2 + 44° = 48°$, $\angle CED = 10° \cdot 0{,}2 + 46° = 48°$.

**Ответ**: а) 56° или 124°, б) 40° и 140°, в) 45° и 135°, г) 104°, 76° и 48°.

**Упражнение № 5.** Применим свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами:

а) Углы, данные на первом рисунке, называются одинаково.
Следовательно, $2x = 3x - 33$, $x = 33°$.
$\angle DMK = 33° \cdot 2 = 66°$, $\angle ABC = 33° \cdot 3 - 33° = 66°$.

б) Поскольку $\angle ABC + \angle DMK = 184°$ и называются одинаково:
$\angle ABC = \angle DMK = 184° : 2 = 92°$.

в) Углы ABC и KMD называются по-разному. Следовательно, $4x - 10 + 6x - 30 = 180$,
$x = 22°$. $\angle ABC = 22° \cdot 4 - 10° = 78°$, $\angle DMK = 22° \cdot 6 - 30° = 102°$.

**Ответ**: а) 66°, б) 92°, в) 102° и 78°.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о свойствах углов с соответственно перпендикулярными сторонами и их применении.

**Оценивание**

● Применение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Знает свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами, но не умеет их применить. |
| Уровень II | Нуждается в помощи учителя при применении свойств углов с соответственно перпендикулярными сторонами. |
| Уровень III | Самостоятельно применяет свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами. |
| Уровень IV | Творчески применяет свойства углов с соответственно перпендикулярными сторонами. |

## Образец критериев оценивания для составления заданий для малого суммативного оценивания № 7

| **№** | **Критерии** |
|---|---|
| 1 | Определяет углы, образованные пересечением двух прямых секущей |
| 2 | Знает и применяет признаки параллельности прямых |
| 3 | Применяет свойство углов с соответственно параллельными сторонами |
| 4 | Применяет свойство углов с соответственно перпендикулярными сторонами |

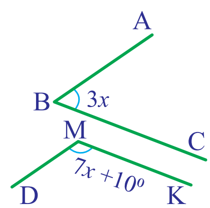
## Образец малого суммативного оценивания № 7

Фамилия: ____________________ Имя:_____________

Количество правильных ответов: _____

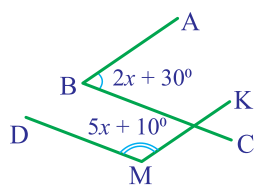
Количество неправильных ответов: ___ Оценка:___

**1.** У углов ∠ABC и ∠DMK соответственные стороны параллельны. Найдите эти углы.



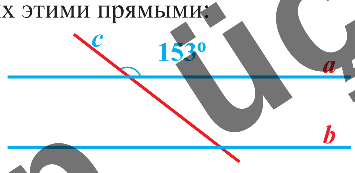

**2.** Если разность градусной меры углов с соответственно параллельными сторонами составит 26°, найдите разность квадратов этих углов.

**3.** Найдите градусную меру углов ∠ABC и ∠DMK при AB ⊥ DM и BC ⊥ MK.




**4.** Градусная мера одного из углов с соответственно параллельными сторонами больше другого на 25%. Найдите разность кубов градусной меры этих углов.

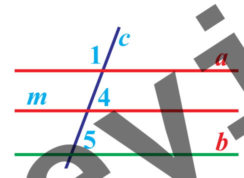
**5.** $a||b$, $c$ – пересекающая прямая. Определите градусную меру углов, образованных этими прямыми.




**6.** Если сумма двух соответственных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, будет равна 214°, определите градусную меру других углов.

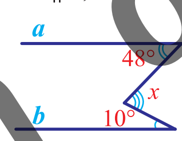
**7.** $a||b$, $c$ – пересекающая прямые прямая. Если ∠4 = 47°, вычислите разность квадратов градусной меры ∠1 и ∠3.

**8.** Если известно, что ∠1 = 123°, ∠4 = 67° и ∠5 = 57°, то какие из данных прямых параллельны?

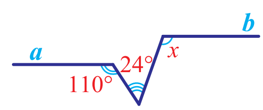



**9.** Если $a \parallel b$, найдите $x$.

а)




б)

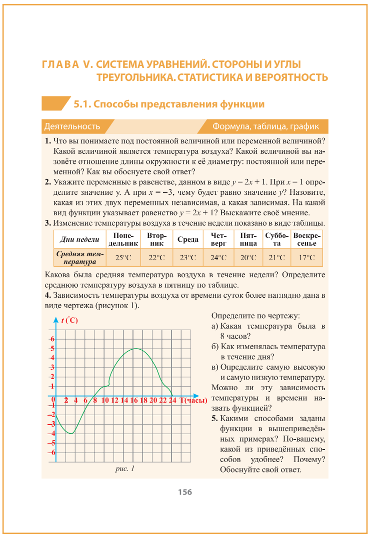


## ГЛАВА V

## СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ. СТОРОНЫ И УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

| Стандарт | Учебная единица | Тема | Часы |
|---|---|---|---|
| 5.1.2. | Глава V. Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность | **Урок 5.1.** Способы представления функции | 1 |
| 3.2.3. | | **Урок 5.2.** Линейная функция и её график | 2 |
| 3.2.3. | | **Урок 5.3.** График прямо пропорциональной зависимости | 1 |
| 3.2.3. | | **Урок 5.4.** Взаимное расположение графиков линейных функций | 1 |
| 2.3.1. | | **Урок 5.5.** Расстояние, время, скорость | 1 |
| 2.3.1., 4.1.1. | | **Урок 5.6.** Измерение температуры | 1 |
| 2.1.1., 3.2.3. | | **Урок 5.7.** Линейные уравнения с двумя переменными и их график | 2 |
| 2.1.1., 2.1.3. | | **Урок 5.8.** Система линейных уравнений с двумя переменными и его решение графическим способом | 3 |
| 2.1.1. | | **Урок 5.9.** Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки | 3 |
| 2.1.1. | | **Урок 5.10.** Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения | 3 |
| 2.1.1. | | **Урок 5.11.** Решение задач построением системы линейных уравнений с двумя переменными | 3 |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 8 | 1 |
| 3.1.4. | | **Урок 5.12.** Сумма внутренних углов треугольника | 2 |
| 3.2.2., 3.1.1. | | **Урок 5.13.** Прямоугольный треугольник | 2 |
| 3.2.2., 3.1.1. | | **Урок 5.14.** Внешний угол треугольника и его свойство | 2 |
| 3.1.1. | | **Урок 5.15.** Отношения между сторонами и углами треугольника | 1 |
| 3.1.1. | | **Урок 5.16.** Неравенство треугольника | 2 |
| 5.1.1. | | **Урок 5.17.** Методы сбора информации | 2 |
| 5.1.2., 5.1.3. | | **Урок 5.18.** Презентация информации. Диаграмма, гистограмма, график | 2 |
| 5.1.4. | | **Урок 5.19.** Прогнозирование | 1 |
| 5.2.2. | | **Урок 5.20.** Число благоприятных исходов для относительно сложных событий | 3 |
| 5.2.1. | | **Урок 5.21.** Вероятность события | 2 |
| 5.2.3. | | **Урок 5.22.** Сумма вероятностей | 1 |
| | | Проверьте себя | 1 |
| | | Образец малого суммативного оценивания № 9 | 1 |
| | | Образец большого суммативного оценивания № 2 | 1 |

# Урок 5.1. Способы представления функции


ГЛАВА V. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ. СТОРОНЫ И УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

5.1. Способы представления функции

Деятельность — Формула, таблица, график

1. Что вы понимаете под постоянной величиной или переменной величиной? Какой величиной является температура воздуха? Какой величиной вы назовёте отношение длины окружности к её диаметру: постоянной или переменной? Как вы обоснуете свой ответ?
2. Укажите переменные в равенстве, данном в виде $y = 2x + 1$. При $x = 1$ определите значение у. А при $x = -3$, чему будет равно значение $y$? Назовите, какая из этих двух переменных независимая, а какая зависимая. На какой вид функции указывает равенство $y = 2x + 1$? Выскажите своё мнение.
3. Изменение температуры воздуха в течение недели показано в виде таблицы.

| *Дни недели* | Понедельник | Вторник | Среда | Четверг | Пятница | Суббота | Воскресенье |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Средняя температура* | 25°C | 22°C | 23°C | 24°C | 20°C | 21°C | 17°C |

Какова была средняя температура воздуха в течение недели? Определите среднюю температуру воздуха в пятницу по таблице.

4. Зависимость температуры воздуха от времени суток более наглядно дана в виде чертежа (рисунок 1).


*рис. 1*

Определите по чертежу:
а) Какая температура была в 8 часов?
б) Как изменялась температура в течение дня?
в) Определите самую высокую и самую низкую температуру.
Можно ли эту зависимость температуры и времени назвать функцией?
5. Какими способами заданы функции в вышеприведённых примерах? По-вашему, какой из приведённых способов удобнее? Почему? Обоснуйте свой ответ.

156

**Стандарт:** 2.1.3. Определяет наличие/отсутствие линейной зависимости между парами координат, данных во множестве рациональных чисел.
5.1.2. Представляет данные в виде диаграммы, гистограммы или графика.
**Результат обучения:** Знает и представляет способы представления функции.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ
**Интеграция:** Информатика 3.2.2.

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Выясняется мнение учащихся о постоянных и переменных величинах. Исследуется представление функции в виде формулы, изображение в виде графика изменения температуры с течением времени. Определяются зависимые и независимые переменные.

**Объяснение учителя:** Учитель даёт ученикам информацию о функции и способах её представления. На примерах объясняет область определения функции и множество её значений. Во время объяснения целесообразно использовать возможности ИКТ.

**Исследовательский вопрос**: Какой из способов представления функции более удобный?

С целью проведения исследования задания, данные в учебнике, выполняются индивидуально или в группах. Выполняя каждое задание, учащиеся высказывают своё мнение о форме представления функции в данном задании.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 9.** Для определения заданного, согласно графику, значения функции следует исследовать график.

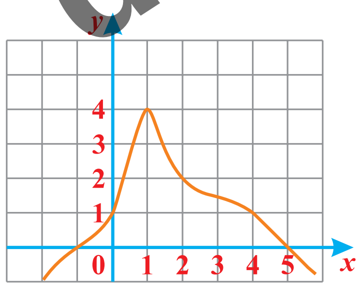
а) $y(0) = 1$, (т.е. если $x = 0$, то $y = 1$)
$y(2) = 2$, $y(4) = 1$, $y(-1) = 0$.

б) при $y = 1$ $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$,
при $y = 2$ $x_1 = 2$ и $x_2 = 0{,}3$,
при $y = 0$ $x_1 = 5$ и $x_2 = -1$.

в) назовите такие значения $x$, при которых $y$ имеет положительный знак.

г) Например: при значениях $x = -1$; 4; 2,5; 3,4 и пр. $y$ имеет отрицательное значение: $y < 0$,

д) Например: при значениях $x = -1$, $x = 5$: $y = 0$.



е) Точки, относящиеся к графику: (4;1); (0;1); (–1;0). Так как эти точки расположены на графике, то они считаются относящимися к графику. Точки, не относящиеся к графику: (2;0); (0;–1).

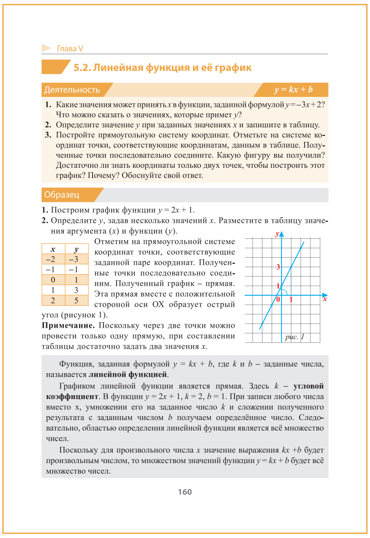
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает полученные сведения о способах представления функции, их применении, а также о том, в каких случаях какой из способов является более удобным.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает способы представления функции, затрудняется в их применении. |
| Уровень II | Знает способы представления функции, допускает определённые ошибки в их применении. |
| Уровень III | Знает способы представления функции, самостоятельно их применяет. |
| Уровень IV | Применяет способы представления функции, обосновывая их. |

## Урок 5.2. Линейная функция и её график


Глава V

5.2. Линейная функция и её график

Деятельность $y = kx + b$

1. Какие значения может принять $x$ в функции, заданной формулой $y = -3x + 2$? Что можно сказать о значениях, которые примет $y$?
2. Определите значение $y$ при заданных значениях $x$ и запишите в таблицу.
3. Постройте прямоугольную систему координат. Отметьте на системе координат точки, соответствующие координатам, данным в таблице. Полученные точки последовательно соедините. Какую фигуру вы получили? Достаточно ли знать координаты только двух точек, чтобы построить этот график? Почему? Обоснуйте свой ответ.

Образец

1. Построим график функции $y = 2x + 1$.
2. Определите $y$, задав несколько значений $x$. Разместите в таблицу значения аргумента ($x$) и функции ($y$).

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| –2 | –3 |
| –1 | –1 |
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |

Отметим на прямоугольной системе координат точки, соответствующие заданной паре координат. Полученные точки последовательно соединим. Полученный график – прямая. Эта прямая вместе с положительной стороной оси OX образует острый угол (рисунок 1).

**Примечание.** Поскольку через две точки можно провести только одну прямую, при составлении таблицы достаточно задать два значения $x$.


рис. 1

Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где $k$ и $b$ – заданные числа, называется **линейной функцией**.

Графиком линейной функции является прямая. Здесь $k$ – **угловой коэффициент**. В функции $y = 2x + 1$, $k = 2$, $b = 1$. При записи любого числа вместо x, умножении его на заданное число $k$ и сложении полученного результата с заданным числом $b$ получаем определённое число. Следовательно, областью определения линейной функции является всё множество чисел.

Поскольку для произвольного числа $x$ значение выражения $kx + b$ будет произвольным числом, то множеством значений функции $y = kx + b$ будет всё множество чисел.

160

**Стандарт:** 3.2.3. Строит график прямой, заданный уравнением $y = kx + b$, определяет точки пересечения этой прямой с координатными осями.

2.1.3. Определяет наличие/отсутствие линейной зависимости между парами координат, данных во множестве рациональных чисел.

**Результат обучения:**

1) Строит график линейной функции, определяет его точки пересечения с осями координат.
2) Определяет наличие/отсутствие линейной зависимости между парами координат.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, миллиметровая бумага

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Для создания представления о линейной функции с учащимися выполняются задания, данные в деятельности. Составляется таблица значений линейной функции, заданной формулой, и в прямоугольной системе координат строится её график. Выслушиваются мнения учащихся об этом графике.

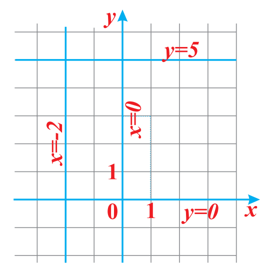
**Объяснение учителя:** Учитель даёт учащимся информацию об определении, формуле и графике линейной функции. Исследуется область определения и множество значений линейной функции. Учитель объясняет значение углового коэффициента $k$.

**Исследовательский вопрос:** Какой фигурой является график линейной функции и как определяются точки пересечения этой прямой с координатными осями?

С целью проведения исследования задания, данные в учебнике, выполняются в группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

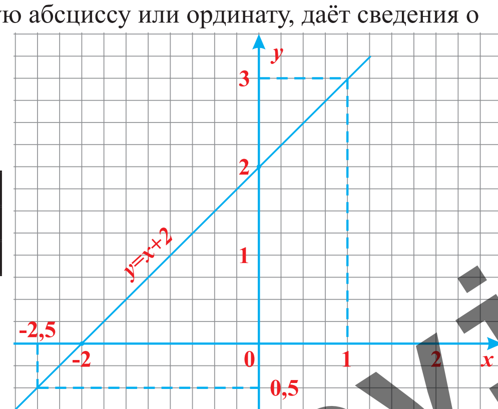
**Упражнение № 2.** Координаты из таблицы, представленной в этом задании, отмечаются в прямоугольной системе координат и полученные точки последовательно соединяются. В любом случае получается прямая линия. Согласно 1-й таблице, получается график прямой $y = 5$, согласно 2-й таблице – $y = 0$ (ось ординат), согласно 3-й таблице $x = 0$ (ось абсцисс), согласно 4-й таблице – $x = -2$.




**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учитель проводит обсуждение о формулах оси абсцисс и оси ординат, о линейных функциях, имеющих неизменную абсциссу или ординату, даёт сведения о формулах $y = a$, $x = b$ и их графиках. Эта работа продолжается в упражнении № 3.

**Упражнение № 6**. Для построения графика функции $y = x + 2$ составляется таблица её значений и они отмечаются на прямоугольной системе координат, изображённой на миллиметровой бумаге. На миллиметровой бумаге определяется принадлежность точек M(0;2), N(1;3), A(–1;1), B(–4,7;–2,7), $C\left(-2\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ графику функции $y = x + 2$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| -2 | 0 |
| 2 | 4 |




Принадлежность этих точек графику можно определить на основе формулы, не делая построения графика: в формуле $y = x + 2$ записывается $x = -2\frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$. Если получится тождество, следовательно, точка принадлежит графику, в противном случае она ему не принадлежит.

Так как $\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2} + 1$ и $\frac{1}{2} \neq -1\frac{1}{2}$, точка $C\left(-2\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ не относится к графику функции $y = x + 2$, а точки M(0; 2), N(1; 3), A(–1; 1), B(–4,7; –2,7) – относятся.

Во время выполнения этого задания определяют наличие линейной зависимости между координатами точек.

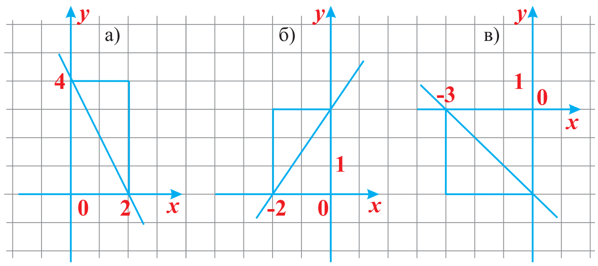
**Упражнение № 12**. г) Чтобы определить, что графики функций $y = \frac{7x+12}{10}$ и $y = \frac{6-4x}{5}$ пересекаются с осью ОУ в одной и той же точке, в каждой формуле определяется значение $y$ при $x = 0$:

$y = \dfrac{7 \cdot 0 + 12}{10} = 1,2$ и $y = \dfrac{6 - 4 \cdot 0}{5} = 1,2$. Действительно, график обоих функций пересекает ось ОУ в точке (0; 1,2).

**Упражнение № 13.** а) Известно, что график функции $y = kx + 2$ проходит через точку M(–2; 4). Запишем в имеющейся формуле $x = -2$ и $y = 4$, получится $4 = 2k + 2$ и $k = -1$. Значит, $y = -x + 2$. **Ответ:** $k = -1$.

**Упражнение № 14.** а) Известно, что график функции $y = -3x + b$ проходит через точку A(–7; –12). Запишем в имеющейся формуле $x = -7$ и $y = -12$, получится $-12 = -3 \cdot (-7) + b$ и $b = -33$. Следовательно, $y = -3x - 33$. **Ответ:** $b = -33$.

**Упражнение № 16.** Во всех трёх случаях, как изображено на рисунке, на координатных осях строится прямоугольник и находится его площадь. Площадь треугольника равна половине площади соответствующего прямоугольника.




а) S= (4 · 2) : 2 = 4 кв.ед.

б) S = (3 · 2) : 2 =3 кв.ед.

в) Полученная в этом случае фигура – квадрат. S = (3 · 3) : 2 = 4,5 кв.ед.

**Ответ:** а) 4 кв.ед.; б) 3 кв.ед.; в) 4,5 кв.ед.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о графике линейной функции и определении точки пересечения графика с осями координат. Ещё раз доводит до сведения учащихся определение линейной зависимости между координатами точки.

**Оценивание**

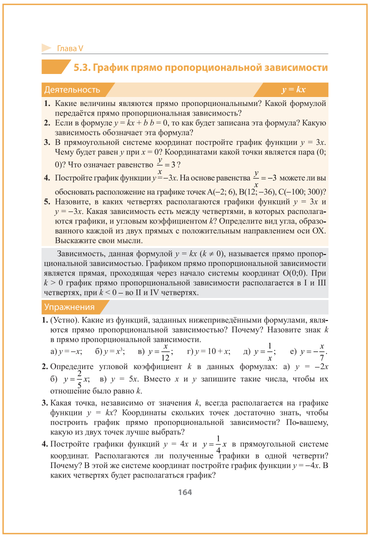
● Построение

● Определение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Испытывает затруднения в построении графика линейной функции. Затрудняется в определении наличия линейной зависимости между координатами точки. |
| Уровень II | Строит график линейной функции, с трудом определяет точки пересечения с осями координат. Допускает незначительные ошибки в определении наличия линейной зависимости между координатами точки. |
| Уровень III | Строит график линейной функции, самостоятельно определяет точки пересечения с осями координат. Самостоятельно определяет наличие линейной зависимости между координатами точки. |
| Уровень IV | Строит график линейной функции, определяет точки пересечения с осями координат, обосновывает свои ответы. Самостоятельно определяет и обосновывает наличие линейной зависимости между координатами точки. |

# Урок 5.3. График прямо пропорциональной зависимости

**Стандарт:** 3.2.3. Строит график прямой, заданный уравнением $y = kx + b$, определяет точки пересечения этой прямой с координатными осями.
2.1.3. Определяет наличие/отсутствие линейной зависимости между парами координат, данных во множестве рациональных чисел.
**Результат обучения:** Строит график прямо пропорциональной зависимости.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, миллиметровая бумага



Глава V

5.3. График прямо пропорциональной зависимости

Деятельность $y = kx$

1. Какие величины являются прямо пропорциональными? Какой формулой передаётся прямо пропорциональная зависимость?
2. Если в формуле $y = kx + b$ $b = 0$, то как будет записана эта формула? Какую зависимость обозначает эта формула?
3. В прямоугольной системе координат постройте график функции $y = 3x$. Чему будет равен $y$ при $x = 0$? Координатами какой точки является пара (0; 0)? Что означает равенство $\frac{y}{x} = 3$?
4. Постройте график функции $y = -3x$. На основе равенства $\frac{y}{x} = -3$ можете ли вы обосновать расположение на графике точек A(–2; 6), B(12; –36), C(–100; 300)?
5. Назовите, в каких четвертях располагаются графики функций $y = 3x$ и $y = -3x$. Какая зависимость есть между четвертями, в которых располагаются графики, и угловым коэффициентом $k$? Определите вид угла, образованного каждой из двух прямых с положительным направлением оси OX. Выскажите свои мысли.

Зависимость, данная формулой $y = kx$ ($k \neq 0$), называется прямо пропорциональной зависимостью. Графиком прямо пропорциональной зависимости является прямая, проходящая через начало системы координат O(0;0). При $k > 0$ график прямо пропорциональной зависимости располагается в I и III четвертях, при $k < 0$ – во II и IV четвертях.

Упражнения

1. (Устно). Какие из функций, заданных нижеприведёнными формулами, являются прямо пропорциональной зависимостью? Почему? Назовите знак $k$ в прямо пропорциональной зависимости.
а) $y = -x$; б) $y = x^3$; в) $y = \frac{x}{12}$; г) $y = 10 + x$; д) $y = \frac{1}{x}$; е) $y = -\frac{x}{7}$.
2. Определите угловой коэффициент $k$ в данных формулах: а) $y = -2x$ б) $y = \frac{2}{5}x$; в) $y = 5x$. Вместо $x$ и $y$ запишите такие числа, чтобы их отношение было равно $k$.
3. Какая точка, независимо от значения $k$, всегда располагается на графике функции $y = kx$? Координаты скольких точек достаточно знать, чтобы построить график прямо пропорциональной зависимости? По-вашему, какую из двух точек лучше выбрать?
4. Постройте графики функций $y = 4x$ и $y = \frac{1}{4}x$ в прямоугольной системе координат. Располагаются ли полученные графики в одной четверти? Почему? В этой же системе координат постройте график функции $y = -4x$. В каких четвертях будет располагаться график?

164

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** У учащихся есть сведения о прямо пропорциональной зависимости из курса математики за VI класс. Выполняя деятельность, предусмотренную в учебнике, учащиеся определяют, что прямо пропорциональная зависимость является особым видом линейной функции. На основе коэффициента пропорции определяется, принадлежит ли точка с заданными координатами графику функции, а также связь между знаком $k$ и четвертью системы координат, в которой расположен график.

**Объяснение учителя:** Учитель даёт учащимся информацию о построении графика прямо пропорциональной зависимости и определении четвертей, в которых он расположен.

**Исследовательский вопрос:** Как расположен график прямо пропорциональной зависимости в прямоугольной системе координат?

С целью проведения исследования задания, данные в учебнике, выполняются индивидуально или в группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 5.** а) Если график функции $y = kx$ проходит через точку M(5; 12), то, написав в формулу значения $x = 5$ и $y = 12$, из полученного равенства сможем определить $k$: $12 = 5k$ и $k = \frac{12}{5} = 2{,}4$. Следовательно, график прямо пропорциональной зависимости, заданной формулой $y = 2{,}4x$, образует острый угол с положительным направлением оси OX ($k > 0$).

б) Если точка $N\left(-4; \frac{1}{2}\right)$ относится к графику функции $y = kx$, то сможем подставить значения $x = -4$ и $y = \frac{1}{2}$ в формулу: $\frac{1}{2} = -4k$ и $k = -\frac{1}{8}$.

Таким образом, прямо пропорциональная зависимость будет задана формулой $y = -\frac{1}{8}x$. График этой прямо пропорциональной зависимости образует тупой угол с положительным направлением оси OX (k < 0).

**Упражнение № 6.** Как известно, знак коэффициента пропорциональности $k$ определяется на основе вида угла, образуемого графиком функции с положительным направлением оси OX.

а) На первом рисунке график функции образует тупой угол с положительным направлением оси OX. Значит, $k < 0$. График функции $y = kx$ проходит через точки (–1; 2) и (0; 0). Для определения $k$ запишем в формулу $x = -1$ и $y = 2$; $2 = -1 \cdot k$ и $k = -2$. Следовательно, прямая на рис.1 – график функции $y = -2x$.

б) Во втором случае график функции образует острый угол с положительным направлением оси OX. Значит, $k > 0$. Согласно графику, при $x = 1$, $y = 1$.
Значит, $k = 1$. Следовательно, в этом случае график является графиком функции $y = x$.

в) $k > 0$. Согласно графику, если $x = 2$, то $y = 1$, $k = 0{,}5$.
Значит, в этом случае прямая на рисунке – график функции $y = 0{,}5x$.

**Упражнение № 11.** При выполнении этого задания определяются способности учащихся к творческому применению. Учащиеся уже могут определять знак $k$. При определении знака $b$ учащиеся должны опираться на свои наблюдения из предыдущих заданий. Так, определяя знак $b$, они должны основываться на значение ординаты точки пересечения графика линейной функции с осью OY.

а) В первом случае $k < 0$ и $b > 0$. Так как прямая образует с положительным направлением оси OX тупой угол и пересекается с осью OY выше начала координат.

б) Во втором случае $k < 0$ и $b < 0$. Так как прямая образует с положительным направлением оси OX тупой угол и пересекается с осью OY ниже начала координат.

в) В третьем случае $k > 0$ и $b > 0$. Так как прямая образует с положительным направлением оси OX острый угол и пересекается с осью OY выше начала координат.

г) В четвёртом случае $k > 0$ и $b < 0$. Так как прямая образует с положительным направлением оси OX острый угол и пересекается с осью OY ниже начала координат.

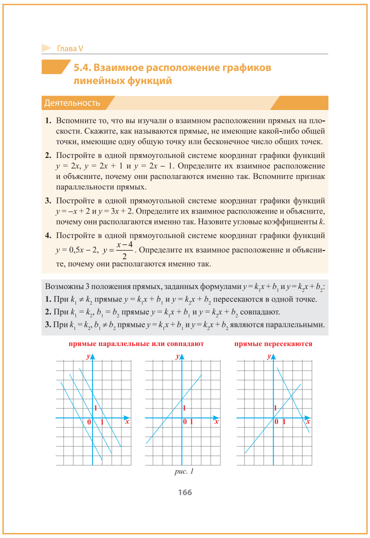
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о графике прямо пропорциональной зависимости и определении четвертей его расположения в системе координат.

**Оценивание**

● Построение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Испытывает затруднения в построении графика прямо пропорциональной зависимости. |
| Уровень II | Строит график прямо пропорциональной зависимости, затрудняется в определении четвертей его расположения в системе координат. |
| Уровень III | Строит график прямо пропорциональной зависимости, определяет, в каких четвертях системы координат он расположен. |
| Уровень IV | Строит график прямо пропорциональной зависимости, самостоятельно определяет, в каких четвертях системы координат он расположен, обосновывает свои ответы. |

# Урок 5.4. Взаимное расположение графиков линейных функций



Глава V

5.4. Взаимное расположение графиков линейных функций

Деятельность

1. Вспомните то, что вы изучали о взаимном расположении прямых на плоскости. Скажите, как называются прямые, не имеющие какой-либо общей точки, имеющие одну общую точку или бесконечное число общих точек.
2. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $y = 2x$, $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 1$. Определите их взаимное расположение и объясните, почему они располагаются именно так. Вспомните признак параллельности прямых.
3. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $y = -x + 2$ и $y = 3x + 2$. Определите их взаимное расположение и объясните, почему они располагаются именно так. Назовите угловые коэффициенты $k$.
4. Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $y = 0{,}5x - 2$, $y = \frac{x-4}{2}$. Определите их взаимное расположение и объясните, почему они располагаются именно так.

Возможны 3 положения прямых, заданных формулами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

**1.** При $k_1 \neq k_2$ прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются в одной точке.

**2.** При $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$ прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают.

**3.** При $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$ прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ являются параллельными.



*рис. 1*

166

**Стандарт:** 3.2.3. Строит график прямой, заданный уравнением $y = kx + b$, определяет точки пересечения этой прямой с координатными осями.
2.1.3. Определяет наличие / отсутствие линейной зависимости между парами координат, данных во множестве рациональных чисел.
**Результат обучения:** Определяет взаиморасположение графиков линейных функций.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, миллиметровая бумага

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.
**Постановка проблемы:** При выполнении деятельности, данной в учебнике, класс делится на 3 группы. Каждая группа выполняет данное ей задание. Группы представляют свои задания и проводится обсуждение каждого случая. Исследуются параллельные, пересекающиеся и совпадающие прямые.
**Объяснение учителя:** Учитель даёт учащимся информацию об определении взаиморасположения графиков линейных функций на основе чисел $k$ и $b$. Вниманию учащихся приводятся все возможные 3 случая. Если объяснение будет приведено с помощью компьютерных программ, оно может быть лучше усвоено учащимися.

**Исследовательский вопрос:** Как определяется взаиморасположение графиков линейных функций?

Для проведения исследования задания, данные в учебнике, могут быть представлены учащимся на рабочих листах.
**Руководство к некоторым заданиям:**
**Упражнение № 2.** Для того, чтобы графики данных линейных функций были параллельны, их угловые коэффициенты должны быть равны.

а) $y = \frac{15}{3}x + 6$ и $y = 5x + 6$. Здесь $k_1 = \frac{15}{3} = 5 = k_2$. $b_1 = b_2 = 6$. Значит, в первом случае графики совпадают.

б) $y = \frac{10}{25}x - 1$ и $y = \frac{12}{30}x + \frac{3}{4}$. Здесь $k_1 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = \frac{12}{30} = k_2$. Значит, во втором случае графики параллельны.

в) $y = \frac{7}{9}x + 6$ и $y = \frac{9}{7}x + 6$. Здесь $k_1 = \frac{7}{9} \neq \frac{9}{7} = k_2$. Значит, в этом случае графики пересекаются.

**Ответ:** а) совпадают; б) параллельны; в) пересекаются.

**Упражнение № 5.** а) Для того, чтобы прямые $y = *x$ и $y = *x + 5$ были:
1) Параллельны, можно написать $y = 3x$ и $y = 3x + 5$;
2) Пересекались $y = -2x$ и $y = 9x + 5$.
3) Совпадение этих графиков невозможно, т.к. в первой формуле $b = 0$, а во второй формуле $b = 5$.
в) Для того, чтобы прямые $y = *x + 0{,}1$ и $y = -*x + 0{,}1$ были:
1) Параллельность этих прямых невозможна, потому что у них одинаковое значение $b$.
2) Для их пересечения можно, например, написать $y = 8x + 0{,}1$ и $y = -9x + 0{,}1$.
3) Для их совпадения можно, например, написать $y = -3x + 0{,}1$ и $y = -3x + 0{,}1$.
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное об определении взаимного расположения графиков линейных функций.
**Оценивание**
● Определение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Испытывает затруднения в определении взаиморасположения графиков линейных функций. |
| Уровень II | При определении взаиморасположения графиков линейных функций допускает определённые ошибки. |
| Уровень III | Самостоятельно определяет взаиморасположение графиков линейных функций. |
| Уровень IV | Самостоятельно определяет взаиморасположение графиков линейных функций и обосновывает свой ответ. |

## Урок 5.5. Расстояние, время, скорость


Глава V

5.5. Расстояние, время, скорость

Деятельность $s = \upsilon t$

1. Поезд движется со скоростью $\upsilon$ км/ч из Баку в Мингячевир. Сколько километров пути проедет поезд за $t$ часов?
2. Расстояние от Баку до Мингячевира обозначьте $s$ (км). Какой формулой можно определить длину пути, проделанного поездом? Напишите формулу.

Баку $\upsilon$ (км/час) Мингячевир $t$ (час) s (км)

3. Вычислите с помощью этой формулы расстояние $s$ при $t = 0{,}5$ часа; $t = 2$ часа; $t = 2{,}5$ часа.
4. Как изменяется значение $s$ и $t$ во время движения? Какая из этих величин, по-вашему, является зависимой, а какая независимой?

Поскольку значение переменной s зависит от значений переменных $t$ и $\upsilon$, $t$ и $\upsilon$ называют независимыми переменными, $s$ же зависимой переменной. Зависимость переменной $s$ от переменной $t$ считается **функциональной зависимостью** и обозначается, как $s(t)$ (чтение: эс тэ). $s(t) = \upsilon \cdot t$

Упражнения

1. На рисунке 1 изображён график движения автобуса и автомобиля. Используя рисунок, ответьте на вопросы.

t (час) 0 1 2 3 4 5 6 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 s (км)

рис.1

а) Сколько километров проехал автобус за первые 3 часа? А сколько километров проехал автомобиль?
б) Сколько пути проехали обе машины до остановки?
в) Сколько часов были в пути обе машины до остановки?

168

**Стандарт:** 2.3.1. Выражает в виде линейной функции зависимость между длиной пройденного пути и временем при прямолинейном равномерном движении и зависимость между температурой по Цельсию и температурой по Фаренгейту.
**Результат обучения:** Выражает в виде линейной функции зависимость между длиной пройденного пути и временем при прямолинейном равномерном движении.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

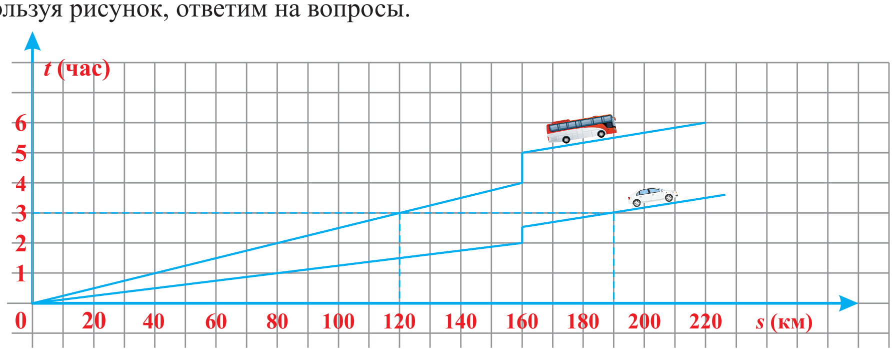
**Постановка проблемы:** С помощью компьютера учащимся показывается траектория равномерного прямолинейного движения поезда между двумя пунктами. Выслушиваются мнения учащихся о пути, пройденном поездом, времени, затраченном на этот путь, и скорости поезда. На доске записывается предварительно обсужденная с учащимися формула зависимости расстояния от скорости $v$ и времени $t$. Согласно этой формуле, определяется расстояние $s$ при заданном значении времени $t$. Обсуждается зависимость между расстоянием, скоростью и временем.

**Исследовательский вопрос:** Что означает равномерное прямолинейное движение и как при этом виде движения выразить зависимость расстояния от времени в виде линейной функции?

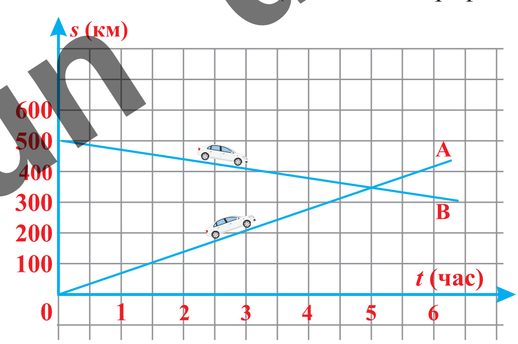
С целью проведения исследования, здания, данные в учебнике, выполняются в группах. Данные в заданиях рисунки могут быть представлены с помощью компьютера.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** На рисунке изображён график движения автобуса и автомобиля. Используя рисунок, ответим на вопросы.




а) За первые 3 часа автобус проехал 120, а автомобиль – 190 км.
б) До остановки автобус и автомобиль проехали 160 км.
в) До остановки автобус ехал 4 часа, а автомобиль – 2 часа.
г) До остановки автобус проехал 160 км за 4 часа. Следовательно, средняя скорость автобуса $v_1 = 160 : 4 = 40$ км/ч.
До остановки автомобиль проехал 160 км за 2 часа. Следовательно, средняя скорость автомобиля $v_2 = 160 : 2 = 80$ км/ч.
д) Автобус простоял на остановке 1 час, а автомобиль – 0,5 часа.
е) После остановки скорость автобуса составляла 50 км/ч (на основе графика $(210 - 160) : 1 = 50$ км/ч).
А скорость автомобиля – 60 км/ч (на основе графика: $(220 - 160) : 1 = 60$ км/ч).




**Упражнение № 3.**
а) До того, как автомобили встретились, каждый был в дороге 5 часов.
б) Автомобиль А до встречи проехал 350 км, а автомобиль В – 150 км.

в) В начале движения расстояние между автомобилями было 500 км.
г) Для нахождения скорости автомобиля A разделим расстояние, пройденное им за 5 часов, на 5: $v_A = 350 : 5 = 70$ км/ч.
д) Для нахождения скорости автомобиля B разделим расстояние, пройденное им за 5 часов, на 5: $v_B = 150 : 5 = 30$ км/ч.

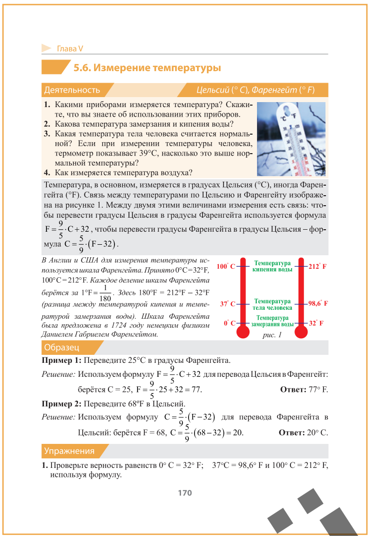
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о линейной зависимости расстояния от времени и скорости и его выражении в виде формулы.

**Оценивание**

● Выражение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Испытывает затруднения в выражении в виде линейной функции зависимости пройденного пути от времени. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при выражении в виде линейной функции зависимости пройденного пути от времени. |
| Уровень III | Самостоятельно выражает в виде линейной функции зависимость пройденного пути от времени. |
| Уровень IV | Самостоятельно выражает в виде линейной функции зависимость пройденного пути от времени и обосновывает свой ответ. |

## Урок 5.6. Измерение температуры



Глава V

5.6. Измерение температуры

Деятельность — *Цельсий (° C), Фаренгейт (° F)*

1. Какими приборами измеряется температура? Скажите, что вы знаете об использовании этих приборов.
2. Какова температура замерзания и кипения воды?
3. Какая температура тела человека считается нормальной? Если при измерении температуры человека, термометр показывает 39°C, насколько это выше нормальной температуры?
4. Как измеряется температура воздуха?

Температура, в основном, измеряется в градусах Цельсия (°C), иногда Фаренгейта (°F). Связь между температурами по Цельсию и Фаренгейту изображена на рисунке 1. Между двумя этими величинами измерения есть связь: чтобы перевести градусы Цельсия в градусы Фаренгейта используется формула $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$, чтобы перевести градусы Фаренгейта в градусы Цельсия – формула $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$.

*В Англии и США для измерения температуры используется шкала Фаренгейта. Принято* $0°C = 32°F$, $100°C = 212°F$. *Каждое деление шкалы Фаренгейта берётся за* $1°F = \frac{1}{180}$. *Здесь* $180°F = 212°F - 32°F$ *(разница между температурой кипения и температурой замерзания воды). Шкала Фаренгейта была предложена в 1724 году немецким физиком Даниелем Габриелем Фаренгейтом.*

100° C — Температура кипения воды — 212° F
37° C — Температура тела человека — 98,6° F
0° C — Температура замерзания воды — 32° F

*рис. 1*

Образец

**Пример 1:** Переведите 25°C в градусы Фаренгейта.

*Решение:* Используем формулу $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ для перевода Цельсия в Фаренгейт: берётся $C = 25$, $F = \frac{9}{5} \cdot 25 + 32 = 77$. **Ответ:** 77° F.

**Пример 2:** Переведите 68°F в Цельсий.

*Решение:* Используем формулу $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$ для перевода Фаренгейта в Цельсий: берётся $F = 68$, $C = \frac{5}{9} \cdot (68 - 32) = 20$. **Ответ:** 20° C.

Упражнения

1. Проверьте верность равенств 0° C = 32° F; 37°C = 98,6° F и 100° C = 212° F, используя формулу.

170

**Стандарт:** 2.3.1. Выражает в виде линейной функции зависимость между длиной пройденного пути и временем при прямолинейном равномерном движении и зависимость между температурой по Цельсию и температурой по Фаренгейту.

4.1.1. Переводит единицы измерения одноименной величины из одной в другую.

**Результат обучения:**

1) Выражает в виде линейной функции зависимость между температурой по Цельсию и температурой по Фаренгейту.
2) Переводит температуру из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта и обратно.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, термометр, оборудование ИКТ

**Интеграция:** Информатика 3.3.1.

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Учащиеся выполняют деятельность, данную в учебнике. Температура воды в комнатных условиях, тела человека, воздуха в помещении измеряется при помощи различных термометров. Результаты записываются на доске. С помощью компьютера могут быть представлены разные интересные сведения, связанные с измерением температуры. С предыдущего урока учащимся может быть дано задание собрать материал по теме из интернета.

**Объяснение учителя:** Учитель даёт сведения о градусах Цельсия и Фаренгейта. Сведения по теме могут быть представлены с помощью компьютерной презентации. На рисунке изображён комнатный термометр для измерения температуры по Цельсию и по Фаренгейту.

**Исследовательский вопрос:** Как можно выразить в виде линейной функции зависимость между величиной температуры по Цельсию и по Фаренгейту?

Задания из учебника могут быть выполнены в парах или группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 3.** Для того, чтобы определить величину данных градусов по Фаренгейту используется формула $F=\frac{9}{5}\cdot C+32$.

а) $C = 60°$, $F=\frac{9}{5}\cdot C+32=\frac{9}{5}\cdot 60+32=140°F$

и) $C = 53°$, $F=\frac{9}{5}\cdot C+32=\frac{9}{5}\cdot 53+32=127,4°F$

ч) $C = 18°$, $F=\frac{9}{5}\cdot C+32=\frac{9}{5}\cdot 18+32=64,4°F$

**Упражнение № 4.** Для того, чтобы определить величину данных градусов по Цельсию используется формула $C=\frac{5}{9}\cdot(F-32)$.

а) $F = 41°F$, $C=\frac{5}{9}\cdot(F-32)=\frac{5}{9}\cdot(41-32)=5°C$.

г) $F = 149°F$, $C=\frac{5}{9}\cdot(F-32)=\frac{5}{9}\cdot(149-32)=65°C$

д) $F = 239°F$, $C=\frac{5}{9}\cdot(F-32)=\frac{5}{9}\cdot(239-32)=115°C$.

**Упражнение № 8.** Для выполнения практической работы можно на первом уроке дать учащимся задание собрать информацию о том, при какой температуре занимаются разными видами спорта. Определяется температура, при которой занимаются хоккеем, плаванием, лыжным спортом, греблей, волейболом и др. видами спорта и выражается в градусах Цельсия и Фаренгейта.

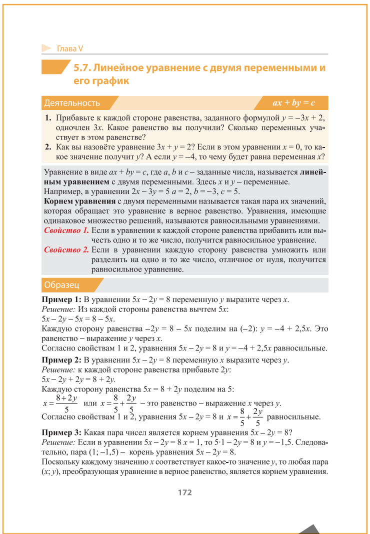
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о линейной зависимости между величиной температуры по Цельсию и по Фаренгейту и выражении этой зависимости в виде формулы. С помощью интернет-сайта http://www.fahrenheit-celsius.info можно онлайн перевести градусы Цельсия в градусы Фаренгейта и наоборот. Используя сайт http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/fizika/FARENGET_DANIEL_GABRIEL.html, можно собрать информацию о Габриэле Фаренгейте.

**Оценивание**

● Выражение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Испытывает затруднения в выражении в виде линейной функции зависимости между величиной температуры по Цельсию и по Фаренгейту.<br>Не может переводить температуру из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта и наоборот. |
| Уровень II | Допускает определённые ошибки при выражении в виде линейной функции зависимости между величиной температуры по Цельсию и по Фаренгейту.<br>Допускает определённые ошибки при переводе температуры из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта и наоборот. |
| Уровень III | Самостоятельно выражает в виде линейной функции зависимость между величиной температуры по Цельсию и по Фаренгейту.<br>Самостоятельно переводит температуру из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта и наоборот. |
| Уровень IV | Обосновывая, выражает в виде линейной функции зависимость между величиной температуры по Цельсию и по Фаренгейту.<br>Объясняя, переводит температуру из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта и наоборот. |

## Урок 5.7. Линейные уравнения с двумя переменными и их график


Глава V

5.7. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Деятельность $ax + by = c$

1. Прибавьте к каждой стороне равенства, заданного формулой $y = -3x + 2$, одночлен $3x$. Какое равенство вы получили? Сколько переменных участвует в этом равенстве?
2. Как вы назовёте уравнение $3x + y = 2$? Если в этом уравнении $x = 0$, то какое значение получит $y$? А если $y = -4$, то чему будет равна переменная $x$?

Уравнение в виде $ax + by = c$, где $a$, $b$ и $c$ – заданные числа, называется **линейным уравнением** с двумя переменными. Здесь $x$ и $y$ – переменные.
Например, в уравнении $2x - 3y = 5$ $a = 2$, $b = -3$, $c = 5$.
**Корнем уравнения** с двумя переменными называется такая пара их значений, которая обращает это уравнение в верное равенство. Уравнения, имеющие одинаковое множество решений, называются равносильными уравнениями.
*Свойство 1.* Если в уравнении к каждой стороне равенства прибавить или вычесть одно и то же число, получится равносильное уравнение.
*Свойство 2.* Если в уравнении каждую сторону равенства умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, получится равносильное уравнение.

Образец

**Пример 1:** В уравнении $5x - 2y = 8$ переменную $y$ выразите через $x$.
*Решение:* Из каждой стороны равенства вычтем $5x$:
$5x - 2y - 5x = 8 - 5x$.
Каждую сторону равенства $-2y = 8 - 5x$ поделим на $(-2)$: $y = -4 + 2,5x$. Это равенство – выражение $y$ через $x$.
Согласно свойствам 1 и 2, уравнения $5x - 2y = 8$ и $y = -4 + 2,5x$ равносильные.

**Пример 2:** В уравнении $5x - 2y = 8$ переменную $x$ выразите через $y$.
*Решение:* к каждой стороне равенства прибавьте $2y$:
$5x - 2y + 2y = 8 + 2y$.
Каждую сторону равенства $5x = 8 + 2y$ поделим на 5:
$x = \frac{8+2y}{5}$ или $x = \frac{8}{5} + \frac{2y}{5}$ – это равенство – выражение $x$ через $y$.
Согласно свойствам 1 и 2, уравнения $5x - 2y = 8$ и $x = \frac{8}{5} + \frac{2y}{5}$ равносильные.

**Пример 3:** Какая пара чисел является корнем уравнения $5x - 2y = 8$?
*Решение:* Если в уравнении $5x - 2y = 8$ $x = 1$, то $5 \cdot 1 - 2y = 8$ и $y = -1,5$. Следовательно, пара $(1; -1,5)$ – корень уравнения $5x - 2y = 8$.
Поскольку каждому значению $x$ соответствует какое-то значение $y$, то любая пара $(x; y)$, преобразующая уравнение в верное равенство, является корнем уравнения.

172

**Стандарт:** 2.1.1. Составляет в соответствии с бытовой ситуацией линейное уравнение или систему двух линейных уравнений с двумя переменными.
3.2.3. Строит график прямой, заданный уравнением $y = kx + b$, определяет точки пересечения этой прямой с координатными осями.

**Результат обучения:**
1) Составляет линейное уравнение с двумя переменными и определяет пару его решений.
2) Строит график линейного уравнения с двумя переменными.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

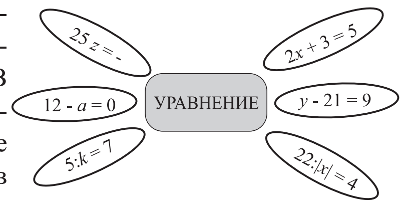
**Метод работы:** выведение понятия, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Учитель представляет на доске или с помощью компьютера на экране примеры различных уравнений, с которыми ознакомились до сих пор учащиеся (относящиеся к нахождению неизвестного слагаемого, уменьшаемого, вычитаемого, множителя, делимого, делителя, а также неизвестного под знаком модуля). Выслушиваются мнения учащихся о каждом уравнении, проводится обсуждение путей решения этих уравнений, а также количества неизвестных в них. В деятельности, приведённой в учебнике, линейная функция даётся в виде формулы. В результате выполнения деятельности учащиеся получают из формулы линейной функции линейное уравнение. Определяется количество переменных в этом уравнении. Даётся определение линейного уравнения с двумя переменными.




**Объяснение учителя:** Учитель даёт учащимся информацию о линейном уравнении и его решении, записывает его в виде общей формулы. Разъясняется понятие равносильных уравнений и их свойств. Учитель может также дать сведения о символе равносильности $\Leftrightarrow$.

На следующем этапе выполняется вторая деятельность, приведённая в учебнике. При этом класс делится на 4 группы. Каждая группа выполняет одно из заданий, приведённых в деятельности. 4 пункта этой деятельности обсуждаются довольно подробно.

**Объяснение учителя:** Учитель даёт объяснение о графике линейной функции и его положении в разных случаях.

**Исследовательский вопрос:** Как составляется линейное уравнение с двумя переменными, как находится его решение и как строится его график?

С целью проведения исследования задания из учебника выполняются в парах или в группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 7.** В уравнении $3u + v = 4$ а) выразим переменную $u$ через $v$:

$3u = 4 - v,\ u = \dfrac{4-v}{3}$ Если $u = 2$, то $2 = \dfrac{4-v}{3}$, $v = -2$.

б) выразим переменную $v$ через $u$: $v = 4 - 3u$.

Если $u = 2$, то $v = -2$. **Ответ:** $v = -2$.

**Упражнение № 10.** Если пара (2; 1) является решением уравнения $ax + 2y = 8$, записав значения $x = 2$ и $y = 1$ 1 в уравнение, сможем определить коэффициент $a$: $a \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$. Значит, линейное уравнение имеет вид: $a = 3$. Запишем значение $x = 5$ в уравнение: $3 \cdot 5 + 2y = 8$, $y = -3{,}5$. **Ответ:** $a = 3$, $(x;\ y) = (5; -3{,}5)$.

**Упражнение № 12.** Учащиеся должны уметь выявлять случаи, когда координаты одной точки являются решением нескольких линейных уравнений с двумя переменными. Проводя обсуждение, они должны прийти к выводу о том, что графики таких уравнений пересекаются в этой самой точке. Пункты а) и б) этого упражнения могут быть поручены разным группам или парам.

а) Здесь координаты точки A(–1; 2) соответственно записываются вместо $x$ и $y$ в уравнениях $3x - y = -5$; $-x + 10y = 21$; $11x + 21y = 31$ и обсуждается, принадлежит ли точка A графикам этих прямых.

$3 \cdot (-1) - 2 = -5$ (принадлежит); $-(-1) + 10 \cdot 2 = 21$ (принадлежит) ; $11 \cdot (-1) + 21 \cdot 2 = 31$ (принадлежит). Значит, графики этих уравнений пересекаются в точке A(–1; 2).

б) Для определения точки, относящейся к графикам всех трёх уравнений: $0{,}2x + 3y = 15{,}2$; $-x + 4y = 19$; $5x - 3y = -10$ строятся их графики. Определяются координаты точки их пересечения: (5;1).

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о составлении линейного уравнения с двумя неизвестными и нахождении его решения. Ещё раз напоминает пройденное о графике линейного уравнения и его построении.

**Оценивание**

- Составление
- Построение графика

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Определяет линейное уравнение с двумя переменными, но затрудняется его решить. Затрудняется в построении графика линейного уравнения с двумя переменными. |
| Уровень II | Определяет и составляет линейное уравнение с двумя переменными, но затрудняется выразить одну переменную через другую. В простых случаях может построить график линейного уравнения с двумя переменными. |
| Уровень III | Самостоятельно определяет линейное уравнение с двумя переменными и его решение, выражает одну переменную через другую. Самостоятельно строит график линейного уравнения с двумя переменными. |
| Уровень IV | Самостоятельно определяет линейное уравнение с двумя переменными и его решение, выражает с обоснованием одну переменную через другую. Строит график линейного уравнения с двумя переменными и объясняет отношения между линейными уравнениями. |

## Урок 5.8. Система линейных уравнений с двумя переменными и его решение графическим способом

Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.8. Система линейных уравнений с двумя переменными и её решение графическим способом

Деятельность — Графический способ

1. Напишите несколько пар чисел, являющихся корнем уравнения $x + y = 3$. Являются ли корнем уравнения пары чисел (0; 3); (3; 0); (1; 2); (2; 1)?
2. Напишите несколько пар чисел, являющихся корнем уравнения $x - y = 1$. Какая из пар чисел (0; 3); (3; 0); (1; 2); (2; 1) также является корнем уравнения $x - y = 1$? Выскажите своё мнение.
3. Постройте график уравнений $x + y = 3$ и $x - y = 1$. Определите координаты точки их пересечения. Какая пара чисел оказалась координатами этой точки? Выскажите своё мнение об этой паре чисел.

Уравнения, выраженные в виде $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, называются **системой линейных уравнений с двумя переменными**. Здесь $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – коэффициенты, а $x$ и $y$ – переменные.
Значение пары чисел $(x; y)$, преобразующих оба уравнения системы в верное числовое равенство, называется корнем этой системы. Под решением системы понимается нахождение её корня или доказательство его отсутствия. Поскольку на плоскости две прямые могут находиться в трёх положениях по отношению друг к другу, графики уравнений системы линейных уравнений с двумя переменными также могут находиться в трёх положениях по отношению друг к другу: прямые либо пересекаются, либо параллельны, либо накладываются друг на друга.

| Соотношение коэффициентов | Объяснение | Число корней | Взаиморасположение графиков |
|---|---|---|---|
| $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ | Графики уравнений системы пересекаются в одной точке. | У системы уравнений есть только один корень. | |
| $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ | Графики уравнений системы параллельны. | У системы уравнений нет корня. | |
| $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ | Графики уравнений системы накладываются друг на друга. | У системы уравнений есть бесконечное множество корней. | |

175

**Стандарт:** 2.1.1. Составляет в соответствии с бытовой ситуацией линейное уравнение или систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

**Результат обучения:** Составляет систему линейных уравнений с двумя переменными и графическим способом находит её решение.

**Форма работы:** коллективная, в группах и в парах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, миллиметровая бумага, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** Согласно деятельности, данной в учебнике, строятся графики линейных уравнений с двумя переменными и определяются координаты точки их пересечения. Акцентируется внимание учащихся на принадлежности этой точки обоим прямым.

**Объяснение учителя.** Учитель вводит понятие системы линейных уравнений с двумя переменными. Совместно с учащимися рассматривается решение системы и взаимное расположение графиков линейных уравнений с двумя переменными. Для каждого случая разъясняется понятие соотношения коэффициентов линейных уравнений с двумя переменными. При объяснении можно использовать возможности компьютера.

**Исследовательский вопрос:** Как решаются графическим способом система линейных уравнений с двумя переменными?

С целью проведения исследования данные в учебники задания выполняются в парах или группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

При выполнении **упражнений № 1, 2, 3** и **4** учащиеся должны проверить соответствие заданной пары чисел к обоим уравнениям.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Иногда учащиеся, проверив соответствие пары решений одному из уравнений системы, делают вывод о том, что эти числа являются решением системы в целом. Учитель должен сконцентрировать внимание учащихся на том, что решением системы может быть только такая пара чисел, которая является решением каждого из уравнений, входящих в систему.

**Упражнение № 4.** б) Запишем пару чисел $u = 3$, $v = -1$ на соответствующие места в обоих уравнениях системы: $\begin{cases} v+2u=5 \\ u+2v=1 \end{cases}$, $\begin{cases} -1=2\cdot 3=5, \\ 3+2\cdot(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5=5 \\ 1=1 \end{cases}$.

Так как в обоих уравнениях с левой и правой сторон получены одинаковые числа, пара $(3; -1)$ является решением заданной системы.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учитель даёт учащимся сведения о знаке $\Rightarrow$ (импликация). Импликация – указание в направлении полученного результата (сторона знака со стрелкой указывает на результат).

**Упражнение № 5.** а) Для составления системы линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является $x = 5$, $y = -1$ в системе $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, коэффициенты $a_1$, $b_1$ и $a_2$, $b_2$ выбираются произвольно и значения $x = 5$, $y = -1$ записываются на их места.

Например: $\begin{cases} 2x+4y=c_1 \\ x+3y=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 5+4\cdot(-1)=c_1 \\ 5+3\cdot(-1)=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6=c_1 \\ 2=c_2 \end{cases}$

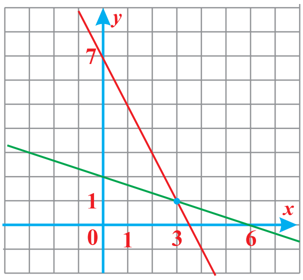
Числа $c_1$ и $c_2$ записывается в системе $\begin{cases} 2x+4y=c_1 \\ x+3y=c_2 \end{cases}$ на свои места $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x+3y=2 \end{cases}$.

Таким образом, системой уравнений, решением которой является пара $x = 5$, $y = -1$, будет система $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x+3y=2 \end{cases}$.

**Упражнение № 9.** Для решения системы линейных уравнений с двумя переменными графическим способом используется миллиметровая бумага.

г) Определим координаты точек пересечения графиков обоих уравнений системы $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ с осями OX и OY. Для этого, чтобы определить координаты точек пересечения графиков обоих уравнений с осью OX, берется $y = 0$, а чтобы определить координаты точек пересечения графиков обоих уравнений с осью OY берется $x = 0$.

В уравнении $x + 3y = 6$ если $x = 0$, то $y = 2$, а если $y = 0$, то $x = 6$.




Значит, график уравнения $x + 3y = 6$ пересекается с осью OX в точке (6; 0), а с осью OУ в точке (0; 2). Если соединить эти точки, получится график уравнения $x + 3y = 6$.

В уравнении $2x + y = 7$ если $x = 0$, то $y = 7$, а если $y = 0$, то $x = 3{,}5$.

Значит, график уравнения $2x + y = 7$ пересекается с осью OX в точке (3,5; 0), а с осью OУ в точке (0; 7). Если соединить эти точки, получится график уравнения $2x + y = 7$.

Как видно из рисунка, координаты точки пересечения прямых – пара чисел (3; 1).

**Проверка:** $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+3\cdot 1=6 \\ 2\cdot 3+7=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6=6 \\ 7=7 \end{cases}$ **Ответ:** г) (3; 1).

**Упражнение № 11.** Для того, чтобы определить, сколько корней у системы уравнений, не проводя построения графика, надо проверить, какое из условий $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, и $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ соблюдено.

в) $\begin{cases} 2x = 11 - 2y, \\ 6y = 22 - 4x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 11, \\ 4x + 6y = 22. \end{cases}$

Здесь $a_1 = 2$, $b_1 = 2$, $c_1 = 11$ и $a_2 = 4$, $b_2 = 6$, $c_2 = 22$. Так как условие $\frac{2}{4} \neq \frac{2}{6}$ соблюдено, то у этой системы уравнений существует единственное решение.

**Упражнение № 12.** Определим координаты точки пересечения графика уравнения $4x + y = 7$ с осью OX. Координаты любой точки, лежащей на оси OX $(x; 0)$. Запишем значение $y = 0$ на соответствующее место в уравнении: $4x + 0 = 7$, $x = 1{,}75$. Значит, решение системы, в которую входит уравнение $4x + y = 7$ вместе с составленным нами уравнением, – пара (1,75; 0).

Для составления второго уравнения в уравнении $ax + by = c$ возьмем произвольные $a$ и $b$: $-2x + 3y = c$. Записав пару (1,75; 0) на соответствующее место в это уравнение, определим $c$: $c = -2 \cdot 1{,}75 + 3 \cdot 0 = -3{,}5$. Значит, второе уравнение будет $-2x + 3y = -3{,}5$.

**Упражнение № 13.** Определим координаты точки пересечения графика уравнения $5x - 7y = 14$ с осью OУ. Координаты любой точки, лежащей на оси OУ $(0; y)$. Запишем значение $x = 0$ на соответствующее место в уравнении $5x - 7y = 14$: $4 \cdot 0 - 7y = 14$, $y = -2$. Значит, решение системы, в которую входит уравнение $5x - 7y = 14$ вместе с составленным нами уравнением, – пара (0; –2).

Для составления второго уравнения в уравнении $ax + by = c$ возьмём произвольные $a$ и $b$: Записав пару (0; –2) на соответствующее место в это уравнение, определим $c$:
$4x + (-3)y = c$. (0; –2). $c = 4 \cdot 0 + (-3) \cdot (-2) = 6$. Значит, второе уравнение будет $4x - 3y = 6$.
**Упражнение № 14.** а) Для того, чтобы у системы, которую образует уравнение $-x - y = 4$ вместе с каким-либо линейным уравнением с двумя неизвестными, было всего одно решение, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

$a_1 = -1$ и $b_1 = -1$. Для соблюдения $\frac{-1}{a_2} \neq \frac{-1}{b_2}$ должно быть $a_2 \neq b_2$.
Значит, второе уравнение может выглядеть, например, следующим образом: $2x + 3y = -1$.
б) Для того, чтобы у системы, которую образует уравнение $-x - y = 4$ вместе с каким-либо линейным уравнением с двумя неизвестными, было бесконечное множество решений, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Для соблюдения $\frac{-1}{a_2} = \frac{-1}{b_2} = \frac{4}{c_2}$ должно быть $a_2 = b_2 = c_2 : (-4)$.
Значит, второе уравнение может выглядеть, например, следующим образом $3x + 3y = -12$.
При этом оно, действительно, возможно.
в) Для того, чтобы у системы, которую образует уравнение $-x - y = 4$ вместе с каким-либо линейным уравнением с двумя неизвестными, не было решений, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. Для соблюдения $\frac{-1}{a_2} = \frac{-1}{b_2} \neq \frac{4}{c_2}$ должно быть $a_2 = b_2 \neq c_2 : (-4)$.
Значит, второе уравнение может выглядеть, например, следующим образом $5x + 5y = 1$.
Действительно, при этом $\frac{-1}{5} = \frac{-1}{5} \neq \frac{4}{1}$.
**Упражнение № 16.** г) Для того, чтобы у системы уравнений не было корней, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. В системе $\begin{cases} 9y - 3x = 0 \\ ax - 8y = -10 \end{cases}$ $\frac{9}{-8} = \frac{-3}{a} \neq \frac{0}{-10}$ и $a = 2\frac{2}{3}$.

**Ответ:** г) $a = 2\frac{2}{3}$.

**Упражнение № 17.** а) Для того, чтобы у системы уравнений было бесконечное множество корней, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Для уравнений $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 10x - ky = 4 \end{cases}$

$\frac{5}{10} = \frac{3}{-k} = \frac{2}{4}$. $\frac{5}{10} = \frac{3}{-k}$ и $k = -6$. По тому же принципу: $\frac{3}{-k} = \frac{2}{4}$ и $k = -6$.

**Ответ:** а) $k = -6$.

г) Для того, чтобы у системы уравнений было бесконечное множество корней, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. В системе $\begin{cases} 9y + kx = 2 \\ 0,5x + 7,2y = 1,6 \end{cases}$ $\frac{9}{7,2} = \frac{k}{0,5} = \frac{2}{1,6}$,
$\frac{9}{7,2} = \frac{k}{0,5}$ и $k = 0,625$.

По тому же принципу: $\frac{k}{0,5} = \frac{2}{1,6}$ и $k = 0,625$.

**Ответ:** г) $k = 0,625$.

**Упражнение № 18**. а) Для того, чтобы у системы уравнений был всего один корень, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. В системе $\begin{cases} bx + 8y = 12 \\ 18x - 3y = -1 \end{cases}$ должно быть $\frac{b}{18} \neq \frac{8}{-3}$ и $b \neq -48$. Значит, если мы запишем вместо $b$ любое число, отличное от $-48$, у системы уравнений будет всего одно решение.

**Ответ:** $b \neq -48$.

б) Для того, чтобы у системы уравнений был всего один корень, должно соблюдаться условие $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. В системе $\begin{cases} \frac{7}{15}x + \frac{4}{5}y = 12, \\ bx + \frac{3}{8}y = 1{,}2; \end{cases}$ должно быть $\frac{7}{15} : b \neq \frac{4}{5} : \frac{3}{8}$ и $b \neq \frac{7}{32}$. Значит, если мы запишем вместо $b$ любое число, отличное от $b \neq \frac{7}{32}$ у системы уравнений будет всего одно решение.

**Ответ**: $b \neq \frac{7}{32}$.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Решая системы уравнений графическим способом, учащиеся должны в основном строить графики на миллиметровой бумаге, чтобы точно определить решение. Учитель должен объяснить им, что графический способ решения не всегда удобен.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о графическом способе решения системы линейных уравнений с двумя переменными и способе определения количества корней системы.

**Оценивание**

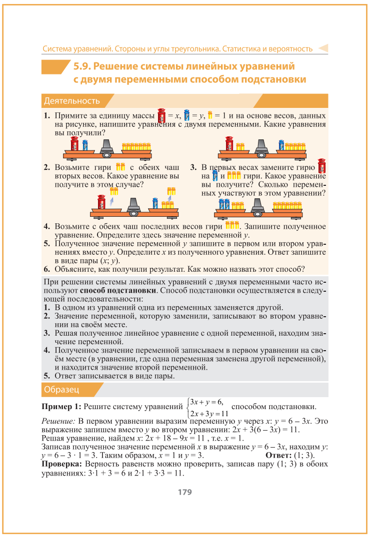
● Решение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в решении графическим способом системы линейных уравнений с двумя переменными. |
| Уровень II | Решает графическим способом систему линейных уравнений с двумя переменными, но затрудняется в определении количества возможных решений системы. |
| Уровень III | Решает графическим способом систему линейных уравнений с двумя переменными, самостоятельно определяет количество возможных решений системы. |
| Уровень IV | Решает графическим способом систему линейных уравнений с двумя переменными, с обоснованием определяет количество возможных решений системы. |

## Урок 5.9. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

**Стандарт:** 2.1.1. Составляет в соответствии с бытовой ситуацией линейное уравнение или систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

**Результат обучения:** Находит решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки.


Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.9. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки

Деятельность

1. Примите за единицу массы = $x$, = $y$, = 1 и на основе весов, данных на рисунке, напишите уравнения с двумя переменными. Какие уравнения вы получили?
2. Возьмите гири с обеих чаш вторых весов. Какое уравнение вы получите в этом случае?
3. В первых весах замените гирю на и гири. Какое уравнение вы получите? Сколько переменных участвуют в этом уравнении?
4. Возьмите с обеих чаш последних весов гири . Запишите полученное уравнение. Определите здесь значение переменной $y$.
5. Полученное значение переменной $y$ запишите в первом или втором уравнениях вместо $y$. Определите $x$ из полученного уравнения. Ответ запишите в виде пары ($x$; $y$).
6. Объясните, как получили результат. Как можно назвать этот способ?

При решении системы линейных уравнений с двумя переменными часто используют **способ подстановки**. Способ подстановки осуществляется в следующей последовательности:
1. В одном из уравнений одна из переменных заменяется другой.
2. Значение переменной, которую заменили, записывают во втором уравнении на своём месте.
3. Решая полученное линейное уравнение с одной переменной, находим значение переменной.
4. Полученное значение переменной записываем в первом уравнении на своём месте (в уравнении, где одна переменная заменена другой переменной), и находится значение второй переменной.
5. Ответ записывается в виде пары.

Образец

**Пример 1:** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x+y=6, \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ способом подстановки.

*Решение:* В первом уравнении выразим переменную $y$ через $x$: $y = 6 - 3x$. Это выражение запишем вместо $y$ во втором уравнении: $2x + 3(6 - 3x) = 11$.
Решая уравнение, найдем $x$: $2x + 18 - 9x = 11$ , т.е. $x = 1$.
Записав полученное значение переменной $x$ в выражение $y = 6 - 3x$, находим $y$: $y = 6 - 3 \cdot 1 = 3$. Таким образом, $x = 1$ и $y = 3$. **Ответ:** (1; 3).
**Проверка:** Верность равенств можно проверить, записав пару (1; 3) в обоих уравнениях: $3 \cdot 1 + 3 = 6$ и $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$.

179

**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** Данная в учебнике деятельность представляется с помощью компьютера. Если представить на движущейся картинке данные в учебнике весы и замену гирей на одной из чаш весов (такие возможности есть у программы Microsoft PowerPoint), учащиеся смогут ещё более наглядно представить задание, данное в деятельности. При выполнении деятельности исследуется и обсуждается решение системы уравнений путем подстановки.

**Объяснение учителя:** Учитель доводит до сведения учащихся решение системы линейных уравнений с двумя неизвестными методом подстановки.

**Исследовательский вопрос:** Как решается система линейных уравнений с двумя неизвестными методом подстановки?

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** а) Обозначим на данных весах массу красной гири через $x$, а синей – через $y$. Масса жёлтых гирей принимается за единицу. Тогда на основе первых весов можно записать уравнение $x + 3y = 6$, а на основе вторых весов – уравнение $2x + y = 7$. $\begin{cases} x+3y=6, \\ 2x+y=7 \end{cases}$ В первом уравнении $x$ можно выразить через $y$ и записать на место $x$ во втором уравнении: $x = 6 - 3y$. $2 \cdot (6 - 3y) + y = 7$. Как видим, получилось линейное уравнение с одним неизвестным $y$. При его решении получается $y = 1$. Напишем это значение $y$ на соответствующее место в уравнение: $x = 6 - 3y$: $x = 6 - 3 \cdot 1 = 3$.

**Ответ:** $(x; y) = (3; 1)$.

б) Тем же способом, $\begin{cases} 3x+2=2y+4 \\ y+3=x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2=2y+4 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

**Ответ:** $(x; y) = (2; 2)$.

**Упражнение № 6.**

г) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{5y}{4} = -3 \text{ (умножим каждую сторону на 12)} \\ \dfrac{5x}{6} + \dfrac{7y}{8} = 6 \text{ (умножим каждую сторону на 24)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-15y=-36 \\ 20x+21y=144 \end{cases}$

В первом уравнении $x$ выразим через $y$: $x = \dfrac{15y-36}{8}$. Это выражение запишем во втором уравнении вместо $x$: $20 \cdot \dfrac{15y-36}{8} + 21y = 144$, $5(15y - 36) + 42y = 288$, $y = 4$.

Это значение $y$ запишем на соответствующее место в равенстве $x=\frac{15y-36}{8}$:
$x=\frac{15y-36}{8}=3$. **Ответ:** $(x; y) = (3; 4)$.

д) $\begin{cases} \frac{2m}{5}+\frac{n}{3}=1 \text{ (умножим каждую сторону на 15)} \\ \frac{m}{10}-\frac{7n}{6}=4 \text{ (умножим каждую сторону на 30)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6m+5n=15 \\ 3m-35n=120 \end{cases}$

В первом уравнении $n$ выразим через $m$: $n=\frac{15-6m}{5}$. Эту дробь запишем во втором уравнении на место $n$: $3m-35\cdot\frac{15-6m}{5}=120$, $3m - 7(15 - 6m) = 120$, $m = 5$.

$n=\frac{15-6m}{5}=\frac{15-6\cdot 5}{5}=-3$ **Ответ:** $(m; n) = (5; –3)$.

**Упражнение № 7.**

а) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8 \text{ (умножим каждую сторону на 6)} \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11 \text{ (умножим каждую сторону на 12)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=48, \\ 4(x+y)+3(x-y)=132 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3y-2x+2y=48, \\ 4x+4y+3x-3y=132 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5y=48, \\ 7x+y=132 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=48-5y, \\ 7(48-5y)+y=132 \end{cases}$

Решая второе уравнение, найдите $y$: $y = 6$.
На основе первого уравнения: $x = 48 – 5 \cdot 6 = 18$. **Ответ:** $(x; y) = (18; 6)$.

б) $\begin{cases} \frac{x+y}{9}-\frac{x-y}{3}=2 \text{ (умножим каждую сторону на 9),} \\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+2y}{3}=-20 \text{ (умножим каждую сторону на 6)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3x+3y=18, \\ 2x-y-6x-4y=-120 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y-2x=18 \text{ (обе стороны разделим на 2),} \\ -4x-5y=-120 \text{ (обе стороны умножим на 1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-x=9, \\ 4x+5y=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-9 \\ 4(2y-9)+5y=120 \end{cases}$

Решая второе уравнение, найдите $y$: $y = 12$, $x = 2 \cdot 12 – 9 = 15$. **Ответ:** $(x; y) = (15; 12)$.

г) $\begin{cases} \frac{1}{2}(2a-b)-1=b-2 \text{ (умножим каждую сторону на 2)} \\ \frac{1}{4}(3a-7)=\frac{1}{5}(2b-3)+1 \text{ (умножим каждую сторону на 20)} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b-2=2b-4, \\ 15a-35=8b-12+20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-3b=-2, \\ 15a-8b=43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3b-2}{2} \\ 15\cdot\frac{3b-2}{2}-8b=43 \end{cases}$

Решите второе уравнение: $45b – 30 – 16b = 86$, $b = 4$. $a=\frac{3\cdot 4-2}{2}=5$.
**Ответ:** $(a; b) = (5; 4)$.

**Упражнение № 8.**

$$\text{д)}\begin{cases}\dfrac{y-3x}{2}=1-\dfrac{7x+3y}{5} & \textit{(умножим каждую сторону на 10)}\\[2mm] \dfrac{x+5y}{3}=1+\dfrac{x+3y}{4} & \textit{(умножим каждую сторону на 12)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5y-15x=10-14x-6y,\\4x+20y=12+3x+9y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-11y=-10,\\x+11y=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=11y-10,\\11y-10+11y=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$$

**Ответ:** $(x;\ y) = (1;\ 1)$.

$$\text{е)}\begin{cases}\dfrac{2a-5b}{7}-1=\dfrac{2a+2b}{3} & \textit{(умножим каждую сторону на 21)}\\[2mm] \dfrac{a-3b}{4}+2=\dfrac{7a-8b}{5} & \textit{(умножим каждую сторону на 20)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6a-15b-21=14a+14b,\\5a-15b+40=28a-32b\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8a+29b=-21,\\23a-17b=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8\cdot\dfrac{17b+40}{23}+29b=-21,\\[2mm] a=\dfrac{17b+40}{23}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-1,\\a=1\end{cases}$$

**Ответ:** $(a;\ b) = (1;\ -1)$.

**Упражнение № 9.** Если решение данной системы уравнений находится на оси абсцисс, то $y = 0$.

$$\begin{cases}(2-m)x+4m\cdot 0-6=0,\\3mx+(4m-1)\cdot 0+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2-m)x=6,\\3mx=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2-m)\cdot\dfrac{-2}{3m}=6,\\[2mm] x=\dfrac{-2}{3m}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-4+2m=18m,\\[1mm] x=\dfrac{-2}{3m}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{-1}{4},\\[2mm] x=2\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

**Ответ:** $m = -0{,}25$; $(x;\ y) = (2\frac{2}{3};\ 0)$.

**Дифференциальное обучение:** Учащийся с высокими результатами обучения должны уметь решать упражнения № 5–8. Упражнение № 9 дается с целью творческого применения и предусмотрено для сильных учащихся. Учащиеся со слабыми результатами обучения должны уметь решать упражнения № 1–4. Учитель может дополнительно раздать на рабочих листах похожие задания.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Применяя метод подстановки, учащийся должен понимать предпочтительность замены переменной с коэффициентом 1 или –1 другой переменной. Так как при этом заменяемое выражение даётся не в виде дроби, а в более простой форме. Если коэффициент уравнений, участвующих в системе, отличен от 1 или –1, то в этом случае любую переменную можно выразить через другую.

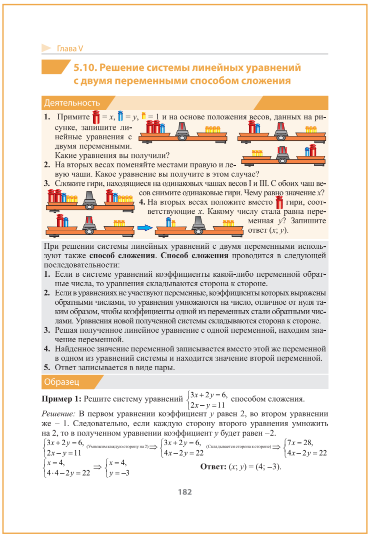
**Обобщение и результат:** Учитель ещё раз подчеркивает и обобщает пройденное о решении методом подстановки системы линейных уравнений с двумя неизвестными.

**Оценивание**

- Решение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в решении системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки. |
| Уровень II | Решает систему линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки, но затрудняется в решении системы уравнений с дробными выражениями. |
| Уровень III | Самостоятельно решает систему линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки. |
| Уровень IV | Решая систему линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки, использует удобные способы. |

## Урок 5.10. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения


Глава V

5.10. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения

Деятельность

1. Примите = $x$, = $y$, = 1 и на основе положения весов, данных на рисунке, запишите линейные уравнения с двумя переменными. Какие уравнения вы получили?
2. На вторых весах поменяйте местами правую и левую чаши. Какое уравнение вы получите в этом случае?
3. Сложите гири, находящиеся на одинаковых чашах весов I и III. С обоих чаш весов снимите одинаковые гири. Чему равно значение $x$?
4. На вторых весах положите вместо гири, соответствующие $x$. Какому числу стала равна переменная $y$? Запишите ответ $(x; y)$.

При решении системы линейных уравнений с двумя переменными используют также **способ сложения**. **Способ сложения** проводится в следующей последовательности:

1. Если в системе уравнений коэффициенты какой-либо переменной обратные числа, то уравнения складываются сторона к стороне.
2. Если в уравнениях не участвуют переменные, коэффициенты которых выражены обратными числами, то уравнения умножаются на число, отличное от нуля таким образом, чтобы коэффициенты одной из переменных стали обратными числами. Уравнения новой полученной системы складываются сторона к стороне.
3. Решая полученное линейное уравнение с одной переменной, находим значение переменной.
4. Найденное значение переменной записывается вместо этой же переменной в одном из уравнений системы и находится значение второй переменной.
5. Ответ записывается в виде пары.

Образец

**Пример 1:** Решите систему уравнений $\begin{cases}3x+2y=6,\\2x-y=11\end{cases}$ способом сложения.

*Решение:* В первом уравнении коэффициент $y$ равен 2, во втором уравнении же – 1. Следовательно, если каждую сторону второго уравнения умножить на 2, то в полученном уравнении коэффициент $y$ будет равен –2.

$$\begin{cases}3x+2y=6,\\2x-y=11\end{cases} \xRightarrow{\text{(Умножим каждую сторону на 2)}} \begin{cases}3x+2y=6,\\4x-2y=22\end{cases} \xRightarrow{\text{(Складывается сторона к стороне)}} \begin{cases}7x=28,\\4x-2y=22\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4,\\4\cdot4-2y=22\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=4,\\y=-3\end{cases}$$

**Ответ:** $(x; y) = (4; -3)$.

182

**Стандарт:** 2.1.1. Составляет в соответствии с бытовой ситуацией линейное уравнение или систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

**Результат обучения:** Находит решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, миллиметровая бумага, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** Данное в учебнике в деятельности задание, относящееся к весам, снова может быть представлено с помощью компьютера. Здесь целесообразно представить в анимированной форме сложение гирь на чашах весов (такие возможности есть у программы Microsoft PowerPoint). При выполнении деятельности учащиеся складывают сторона к стороне (алгебраически) линейные уравнения с двумя неизвестными. Затем выслушиваются мнения учащихся о том, как определить массу каждой гири на весах.

**Объяснение учителя:** Учитель представляет учащимся алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя неизвестными способом алгебраического сложения. Алгоритм обсуждается с учащимися. Представляются образцы.

**Исследовательский вопрос:** Как решать способом алгебраического сложения систему линейных уравнений с двумя неизвестными?

Для проведения исследования задания из учебника выполняются на рабочих листах группами или парами.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** Учащиеся решают представленную систему уравнений сначала графическим способом на миллиметровой бумаге, а затем способом сложения сторона к стороне и высказывают свои мнения о полученных результатах.

**Упражнение № 4.** Показав данные в системе уравнения в форме $ax + by = c$ применим метод сложения:

а) $\begin{cases} x+5y-7=0, \\ x-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+5y=7 \\ x-3y=-1 \end{cases}$ *(умножим каждую сторону на –1)* $\Rightarrow \begin{cases} x+5y=7 \\ -x+3y=1 \end{cases}$

Полученные уравнения сложите сторона к стороне: $(x + 5y) + (-x + 3y) = 7 + 1$, $y = 1$.
Впишите значение $y$ в любое из уравнений системы и найдите $x$:

$x + 5y = 7$, $x + 5 \cdot 1 = 7$, $x = 2$. **Ответ:** $(x; y) = (2; 1)$.

б) $\begin{cases} x-3y-4=0 \\ 5x+3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=4 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$

Сложите сторона к стороне: $(x - 3y) + (5x + 3y) = 4 + (-1)$, $x = 0{,}5$.
Вписав полученное значение $x$ в уравнение $x - 3y = 4$, найдите $y$: $0{,}5 - 3y = 4$, $y = -1\frac{1}{6}$.

**Ответ:** $(x; y) = (0{,}5;\ -1\frac{1}{6})$.

в) $\begin{cases} x-3y-4=0 \\ 5x+3y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y=4 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$ *(разделим каждую сторону на 3)* $\Rightarrow \begin{cases} -12x-11y=1 \\ 12x-13y=-25 \end{cases}$

Полученные уравнения сложите сторона к стороне:
$(-12x - 11y) + (12x - 13y) = 1 + (-25)$, $y = 1$.
Вписав полученное значение $y$ в уравнение $12x - 13y + 25 = 0$, найдите $x$:
$12x - 13 \cdot 1 + 25 = 0$, $x = -1$. **Ответ:** $(x; y) = (-1; 1)$.

**Упражнение № 5.** ç) Если график линейной функции $y = kx+b$ проходит через точки C(–19; 31) и B(1; –9), то можно записать $\begin{cases} -19k+b=31, \\ 1k+b=-9 \end{cases}$. Из этой системы уравнений найдите $k$ и $b$.

$\begin{cases} -19k+b=31, \\ 1k+b=-9 \end{cases}$ *(умножим каждую сторону на –1)* $\Rightarrow \begin{cases} 19k-b=-31, \\ k+b=-9 \end{cases}$

Сложите сторона к стороне: $20k = -40$, $k = -2$. $-2 + b = -9$, $b = -7$. Следовательно, уравнение прямой, проходящей через точки C и B имеет вид $y = -2x - 7$ или $2x + y = -7$.

**Ответ:** $2x + y = -7$.

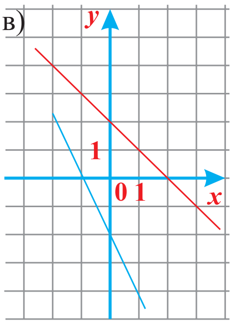
**Упражнение № 7.** Согласно условию, график линейной функции пересекает ось OX в точке (6; 0), а ось OY – в точке (0; –2). Тогда на основании уравнения $y = kx + b$ запишем систему:

$\begin{cases} 6k+b=0, \\ 0 \cdot k+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6k+b=0, \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{3}, \\ b=-2 \end{cases}$

Значит, уравнение прямой имеет вид $y = \frac{1}{3}x - 2$ или $\frac{1}{3}x - y = 2$. **Ответ:** $\frac{1}{3}x - y = 2$.

**Упражнение № 8.** Для того, чтобы написать уравнение прямых, данных на рисунке, определяются координаты точек пересечения прямых с осями абсцисс и ординат. Затем задание выполняется так, как в упражнении № 7.

в)




в) Красная прямая пересекает ось абсцисс в точке (2; 0), а ось ординат – в точке (0; 2).

$$\begin{cases} 2k + b = 0, \\ 0 \cdot k + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k + 2 = 0, \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1, \\ b = 2 \end{cases}$$

Значит, уравнение прямой имеет вид $y = -x + 2$ или $x + y = 2$.

**Ответ:** $x + y = 2$.

Синяя прямая пересекает ось абсцисс в точке (–1; 0), а ось ординат – в точке (0; –2).

$$\begin{cases} -1k + b = 0, \\ 0 \cdot k + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -k - 2 = 0, \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2, \\ b = -2 \end{cases}$$

Значит, уравнение прямой имеет вид $y = -2x - 2$ или $2x + y = -2$. **Ответ:** $2x + y = -2$.

**Упражнение № 9.** Для того, чтобы упростить уравнения в данной системе, надо умножить каждую их сторону на такое число, чтобы в них не было дробей.

в) $$\begin{cases} 2x + \frac{x-y}{4} = 11 \text{ (каждую сторону умножаем на 3)} \\ 3y - \frac{x+y}{3} = 1 \text{ (каждую сторону умножаем на 3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + x - y = 44, \\ 9y - x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x - y = 44, \\ 8y - x = 3 \text{ (каждую сторону умножаем на 9)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - y = 44, \\ 72y - 9x = 27 \end{cases}$$

Сложите уравнения сторона к стороне: $(9x - y) + (72y - 9x) = 44 + 27$, $y = 1$. В уравнении $8y - x = 3$ примем во внимание, что $y = 1$: $8 - x = 3$, $x = 5$. **Ответ:** $(x; y) = (5; 1)$.

з) $$\begin{cases} 4a - 5b - 10 = 0 \\ \frac{a}{5} - \frac{b}{3} + \frac{1}{3} = 0 \text{ (каждую сторону умножаем на 15)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 5b = 10, \\ -3a + 5b = 5 \end{cases}$$

Сложите уравнения сторона к стороне: $a = 15$.

Полученное значение $a$ впишите на соответствующее место в уравнении: $4a - 5b = 10$.

$4 \cdot 15 - 5b = 10$, $b = 10$. **Ответ:** $(a; b) = (15; 10)$.

**Дифференциальное обучение:** Учащиеся со слабыми результатами обучения должны уметь решать упражнения № 1–3. Учащиеся с высокими результатами обучения должны уметь решать более сложные системы уравнений. Учитель может добавить похожие задания на рабочих листах.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Может возникнуть вопрос, в каких случаях каким способом решать систему уравнений. Учащиеся должны понимать, что каким бы способом ни решали систему, результат должен быть одинаковым. Учащиеся должны обращать внимание на применение удобного способа при решении системы уравнений.

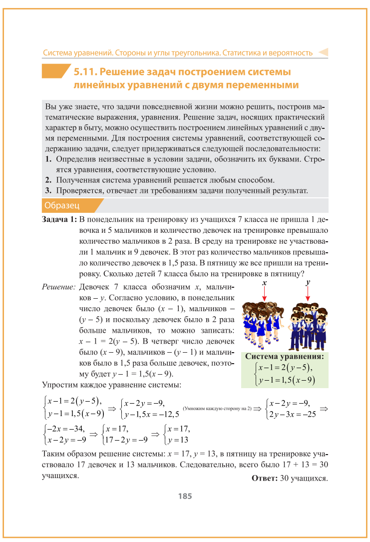
**Обобщение и результат:** Учитель ещё раз подчёркивает и обобщает пройденное о решении методом сложения системы линейных уравнений с двумя неизвестными.

**Оценивание**

● Решение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в решении системы линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения. |
| Уровень II | Решает систему линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения, но затрудняется в решении системы уравнений с дробными выражениями . |
| Уровень III | Самостоятельно решает систему линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения. |
| Уровень IV | Решая систему линейных уравнений с двумя переменными способом алгебраического сложения, использует удобные способы. |

## Урок 5.11. Решение задач построением системы линейных уравнений с двумя переменными



Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.11. Решение задач построением системы линейных уравнений с двумя переменными

Вы уже знаете, что задачи повседневной жизни можно решить, построив математические выражения, уравнения. Решение задач, носящих практический характер в быту, можно осуществить построением линейных уравнений с двумя переменными. Для построения системы уравнений, соответствующей содержанию задачи, следует придерживаться следующей последовательности:

1. Определив неизвестные в условии задачи, обозначить их буквами. Строятся уравнения, соответствующие условию.
2. Полученная система уравнений решается любым способом.
3. Проверяется, отвечает ли требованиям задачи полученный результат.

Образец

**Задача 1:** В понедельник на тренировку из учащихся 7 класса не пришла 1 девочка и 5 мальчиков и количество девочек на тренировке превышало количество мальчиков в 2 раза. В среду на тренировке не участвовали 1 мальчик и 9 девочек. В этот раз количество мальчиков превышало количество девочек в 1,5 раза. В пятницу же все пришли на тренировку. Сколько детей 7 класса было на тренировке в пятницу?

*Решение:* Девочек 7 класса обозначим $x$, мальчиков – $y$. Согласно условию, в понедельник число девочек было $(x - 1)$, мальчиков – $(y - 5)$ и поскольку девочек было в 2 раза больше мальчиков, то можно записать: $x - 1 = 2(y - 5)$. В четверг число девочек было $(x - 9)$, мальчиков – $(y - 1)$ и мальчиков было в 1,5 раза больше девочек, поэтому будет $y - 1 = 1,5(x - 9)$.



**Система уравнения:** $\begin{cases} x-1=2(y-5), \\ y-1=1,5(x-9) \end{cases}$

Упростим каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} x-1=2(y-5), \\ y-1=1,5(x-9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-9, \\ y-1,5x=-12,5 \end{cases} \text{(Умножим каждую сторону на 2)} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-9, \\ 2y-3x=-25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x=-34, \\ x-2y=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17, \\ 17-2y=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=17, \\ y=13 \end{cases}$$

Таким образом решение системы: $x = 17$, $y = 13$, в пятницу на тренировке участвовало 17 девочек и 13 мальчиков. Следовательно, всего было 17 + 13 = 30 учащихся.

**Ответ:** 30 учащихся.

185

**Стандарт:** 2.1.1. Составляет в соответствии с бытовой ситуацией линейное уравнение или систему двух линейных уравнений с двумя переменными.

**Результат обучения:** Составляет систему линейных уравнений с двумя переменными согласно условиям задачи.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** Учитель с помощью компьютера представляет различные задачи, соответствующие жизненным ситуациям, и вместе с учащимися выявляет возможные пути составления системы линейных уравнений с двумя переменными согласно условиям задачи. Условие задачи может быть представлено учащимся с помощью компьютера в качестве мотивации. Учащиеся с младших классов знакомы с построением уравнений согласно условиям задачи. Здесь некоторые трудности может создать наличие двух переменных. Для формирования способности определять неизвестные в условии задачи, учитель должен научить учащихся внимательно читать условия.

**Исследовательский вопрос:** Как составляется система линейных уравнений с двумя переменными согласно условиям задачи?

Для проведения исследования задания из учебника выполняются на рабочих листах в группах.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** в) Согласно условию, следует найти таких 2 числа, чтобы их разность была равна половине суммы. Обозначим большее число через $x$, а меньшее через $y$. Тогда $x-y=(x+y):2$. Если преобразовать это выражение, получим: $x=3y$. Следовательно, большее число будет равно утроенному меньшему, а меньшее число – одной третьей части большего. Образец: если $x=12$ и $y=4$ то действительно $12-4=(12+4):2$.

**Ответ:** Большее число будет равно утроенному меньшему, а меньшее число – одной третьей части большего.

**Упражнение № 2.** а) Примем длину ткани на мужское пальто за $x$, а длину ткани на детское пальто за $y$. Тогда по условию: $\begin{cases}4x+2y=14,\\2x+6y=15\end{cases}$. **Ответ:** $x=2{,}7$ (м), $y=1{,}6$ (м).

**Упражнение № 3.** Обозначим возраст сестры через $x$, а возраст брата через $y$. 2 года назад сестре было $x-2$, лет, а брату – $y-2$ лет. По условию $y-2=2(x-2)$.
Тем же способом 8 лет назад сестре было $x-8$ лет, а брату – $y-8$ лет.
По условию $y-8=5(x-8)$.

Решение системы уравнений $\begin{cases}y-2=2x-14,\\y-8=5x-40\end{cases}$: $x=10$ (лет), $y=18$ (лет).

**Ответ:** сестре 10 лет, брату 18 лет.

**Упражнение № 4.** Примем количество мешков на верблюде за $x$, а количество мешков на лошади за $y$. По условию: $x+1=2(y-1)$ и $x-1=y+1$.

Решение системы уравнений $\begin{cases}x+1=2y-2,\\x-1=y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=-3,\\y-x=-2\end{cases}$: $x=7$, $y=5$.

**Ответ:** на верблюде 7 (мешков), на лошади 5 (мешков).

**Упражнение № 9.** Примем массу слитка золота за $x$, а массу слитка серебра за $y$. Так как весы находятся в равновесии, то $9x=11y$.
Согласно условию, если поменять местами один слиток золота с одним слитком серебра, левая чаша весов станет на 13 гр легче правой, значит второе уравнение будет $8x+y+13=10y+x$.

Решим систему уравнений $\begin{cases}9x=11y,\\8x+y+13=10y+x\end{cases}$ методом подстановки.

$x=35{,}75$ (гр), $y=29{,}25$ (гр).

**Ответ:** один слиток золота весит 35,75 (гр), один слиток серебра весит 29,25 (гр).

**Упражнение № 10.** Обозначим дневной заработок первого рабочего через $a$, а второго – через $b$. Согласно условию, $15a+14b=234$. С другой стороны известно, что заработок первого рабочего за 4 дня больше на 22 маната заработка второго рабочего за 3 дня. Значит, $4a-3b=22$.

Решая систему уравнений $\begin{cases}15a+14b=234,\\4a-3b=22\end{cases}$, получим $a=10$, $b=6$.

**Ответ:** первый рабочий – 10 манатов, второй рабочий – 6 манатов.

**Упражнение № 12.** Обозначим первое неполное частное через $a$, а второе неполное частное через $b$. Вычитаемое пусть будет $x$. Тогда по условию на основе правила нахождения неизвестного делимого: $100 - x = 5a + 1$ и $100 - x = 7b + 1$.
Так как левые стороны одинаковы, получим: $5a = 7b$.
С другой стороны известно, что $a = b + 4$. Тогда система уравнений, согласно условию задачи, будет $\begin{cases} 5a = 7b, \\ a = b + 4 \end{cases}$. Если решить её методом подстановки, получим $a = 14$, $b = 10$.
$100 - x = 5 \cdot 14 + 1$, $x = 29$.
Действительно, $100 - 29 = 71$. При делении этого числа на 5 и 7 в остатке остаётся 1, и полученное неполное частное в первом случае на 4 единицы больше, чем во втором.

**Ответ:** 29.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о решении задач методом составления системы линейных уравнений с двумя переменными.

**Оценивание**

● Составление и решение задач

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в составлении системы линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условиями задачи. |
| Уровень II | Составляет систему линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условиями задачи, но допускает некоторые ошибки в её решении. |
| Уровень III | Самостоятельно составляет и решает систему линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условиями задачи. |
| Уровень IV | Самостоятельно составляет и решает с объяснением систему линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условиями задачи. |

## Образцы критериев оценивания для составления заданий для малого суммативного оценивания №8

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Знает способы представления функции |
| 2 | Строит и исследует график линейной функции |
| 3 | Строит и исследует график прямой пропорциональной зависимости |
| 4 | Определяет наличие линейной зависимости между парами заданных координат, относящихся к множеству рациональных чисел |
| 5 | Представляет зависимость расстояния от времени в виде линейной функции |
| 6 | Строит график линейной функции с двумя переменными |
| 7 | Решает систему линейных уравнений с двумя переменными графическим методом |
| 8 | Решает систему линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки |
| 9 | Решает систему линейных уравнений с двумя переменными методом сложения |
| 10 | Решает задачи методом составления системы линейных уравнений с двумя переменными |

## Образец малого суммативного оценивания № 8

Фамилия: ____________________ Имя:_____________

Количество правильных ответов: _____

Количество неправильных ответов: ___ Оценка:___

**1.** Дана функция f($x$) = 8 – 3$x$. Найдите f(–2), f(0,5), $f\left(1\frac{7}{9}\right)$.

_________________________________

_________________________________

**2.** Дана функция $y = \frac{5}{8}x + 1{,}1$. Определите значение $x$, если $y(x) = 5{,}6$.

_________________________________

_________________________________

**3.** В каких точках пересекает оси OX и OY график функции $y = x – 3$?

_________________________________

_________________________________

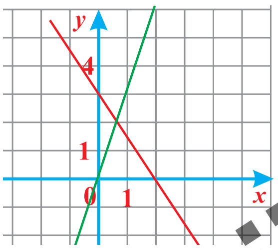
**4.** Какая из точек A(3; 0); B(–2; 5); C(0,3; 0) принадлежит графику функции $y = 4x – 1{,}2$?

_________________________________

_________________________________

_________________________________

**5.** Напишите формулы прямых, изображённых в прямоугольной системе координат.




_____________

_____________

_____________

_____________

_____________

_____________

_____________

_____________

**6.** Напишите уравнение произвольной функции, график которой параллелен или пересекает график функции $y = 9x – 5$.

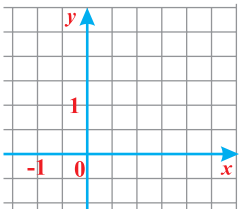
Параллелен :_________________________

Пересекает :_________________________

**7.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

путём построения графика.




**8.** Термометр показывает температуру комнаты 77 по Фаренгейту. Сколько это составляет по Цельсию (°C)? _________

_________________________________

**9.** В Антарктиде и Якутии температура опускается до –90°C. Сколько это составляет по Фаренгейту?_____________

_________________________________

**10.** Решите способом подстановки систему линейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} x - y = -10, \\ 2x + y = 34 \end{cases} \Rightarrow$

_________________________________

_________________________________

_________________________________

**11.** Решите способом алгебраического сложения систему линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 4x + y = 21 \end{cases} \Rightarrow$$

_________________________________

_________________________________

**12.** Решите систему уравнений.

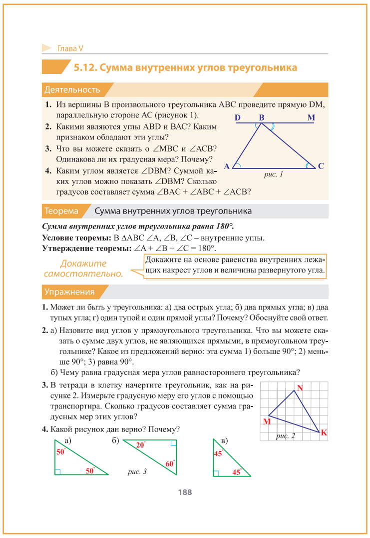
$$\begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{5} = \frac{11}{40}, \\ \frac{y}{7} - \frac{2x}{5} = \frac{24}{35} \end{cases} \Rightarrow$$

_________________________________

_________________________________

_________________________________

# Урок 5.12. Сумма внутренних углов треугольника


Глава V

5.12. Сумма внутренних углов треугольника

Деятельность

1. Из вершины B произвольного треугольника ABC проведите прямую DM, параллельную стороне AC (рисунок 1).
2. Какими являются углы ABD и BAC? Каким признаком обладают эти углы?
3. Что вы можете сказать о $\angle MBC$ и $\angle ACB$? Одинакова ли их градусная мера? Почему?
4. Каким углом является $\angle DBM$? Суммой каких углов можно показать $\angle DBM$? Сколько градусов составляет сумма $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$?

рис. 1

Теорема Сумма внутренних углов треугольника

***Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.***

**Условие теоремы:** В $\Delta ABC$ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – внутренние углы.

**Утверждение теоремы:** $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Докажите самостоятельно. Докажите на основе равенства внутренних лежащих накрест углов и величины развернутого угла.

Упражнения

1. Может ли быть у треугольника: а) два острых угла; б) два прямых угла; в) два тупых угла; г) один тупой и один прямой углы? Почему? Обоснуйте свой ответ.
2. а) Назовите вид углов у прямоугольного треугольника. Что вы можете сказать о сумме двух углов, не являющихся прямыми, в прямоугольном треугольнике? Какое из предложений верно: эта сумма 1) больше 90°; 2) меньше 90°; 3) равна 90°.
   б) Чему равна градусная мера углов равностороннего треугольника?
3. В тетради в клетку начертите треугольник, как на рисунке 2. Измерьте градусную меру его углов с помощью транспортира. Сколько градусов составляет сумма градусных мер этих углов?
4. Какой рисунок дан верно? Почему?

рис. 2

рис. 3

188

**Стандарт:** 3.1.4. Применяет теорему о сумме внутренних углов треугольника и свойство внешних углов.
**Результат обучения:** Знает и применяет теорему о сумме внутренних углов треугольника.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, термометр, оборудование ИКТ

### Ход урока:

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Анализируются открытый угол и другие углы, образованные прямой, проходящей через какую-либо вершину треугольника и параллельной его противоположной стороне. Учащиеся высказывают мнение об обсуждаемых углах и их сумме.

**Объяснение учителя:** учитель озвучивает теорему о сумме внутренних углов треугольника. Доказательство теоремы поручается учащимся. Для этого учащихся можно разделить на группы. При доказательстве, основываясь на примечание в учебнике, проводится параллельная прямая, как это показано в деятельности, и используется равенство накрест лежащих углов. Группы проводят презентацию доказательства и оценивается та группа, чьё доказательство наиболее точно.

**Исследовательский вопрос:** Как применяется теорема о сумме внутренних углов треугольника в решении задач?

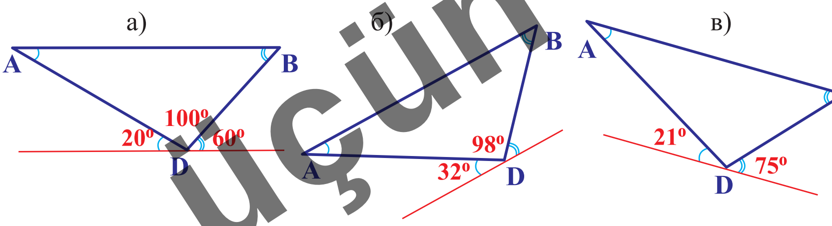
С целью проведения исследования задания из учебника выполняются группами.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 5.** а) На основе рисунка, данного в этом пункте, указано равенство внутренних накрест лежащих углов (дугами). $\angle A = 20°$ и $\angle B = 60°$.

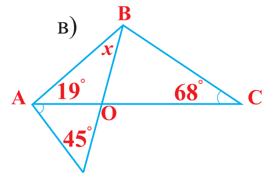
б) Ясно, что $\angle A = 32°$. Согласно теореме о сумме внутренних углов треугольника:
$\angle B = 180° - (32° + 98°) = 50°$.

в) $\angle A = 21°$, $\angle B = 75°$ və $\angle C = 180° - (21° + 75°) = 84°$.




**Ответ:** а) 20°, 60°, 100°; б) 32°, 98°, 50°; в) 21°, 75°, 84°.

**Упражнение № 8.** в) Обозначим буквами точки вершин фигуры на рисунке. Согласно рисунку, $\angle DAO = \angle BCO = 68°$.
Тогда $\angle AOD = 180° – (68° + 45°) = 67°$
$\angle AOB = 180° – 67° = 113°$.
Следовательно, $x = 180° – (19° + 113°) = 48°$.



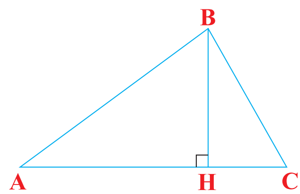

**Ответ:** в) 48°.

**Упражнение № 9.** 1) Данные углы треугольника, основываясь на таблицу, запишем нижеследующим образом и определим каждый угол, применяя теорему о сумме внутренних углов треугольника:
$\angle A = 30°$, $\angle B = n$, $\angle C = n + 20°$.
Согласно сумме внутренних углов треугольника: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
$30° + n + n + 20° = 180°$
$n = 75°$. Следовательно, $\angle B = 65°$, $\angle C = 65° + 20° = 85°$.

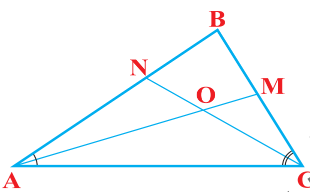
**Ответ:** 1) 30°; 65°; 85°.

**Упражнение № 10.** а) Согласно условию, $\angle ABH = 42°$ и $\angle CBH = 30°$.
ABH и CBH – прямоугольные треугольники. Следовательно,
$\angle A = 90° – 42° = 48°$ и $\angle C = 90° – 30° = 60°$,
$\angle B = 30° + 42° = 72°$.

**Ответ:** $\angle A = 48°$; $\angle C = 60°$; $\angle B = 72°$.




**Упражнение № 11.** Нарисуем рисунок согласно условию:
Поскольку $\angle ABC = 60°$, то будет $\angle BAC + \angle ACB = 120°$.
Поскольку AM и CN – биссектрисы:
$\angle OAC + \angle ACO = 120° : 2 = 60°$.
Следовательно, $\angle AOC = 180° – 60° = 120°$.
Угол между биссектрисами равен 60°.

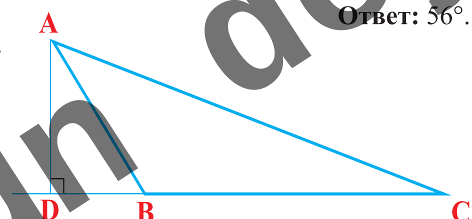



**Ответ:** 60°.

**Упражнение № 12.** Согласно рисунку из упражнения № 10, $\angle AOC = 118°$.
Тогда $\angle OAC + \angle ACO = 180° – 118° = 62°$. Согласно свойству биссектрисы:
$\angle BAC + \angle ACB = 62° \cdot 2 = 124°$. Следовательно, $\angle ABC = 180° – 124° = 56°$.

**Ответ:** 56°.

**Упражнение № 14.** Треугольник ABC – тупоугольный треугольник. Согласно условию:
$\angle ABC = 110°$ , $\angle C = 50°$ и $\angle D = 90°$
$\angle BAC = 20°$.
В $\Delta ABD$ $\angle DBA = 180° – 110° = 70°$.
Тогда $\angle BAD = 20°$ и $\angle CAD = 40°$.
Таким образом, доказали, что $\angle CAD = 40° = 2\angle BAD$.




**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учащиеся из курса младших классов знают, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°. На этом уроке они доказали это. До сведения учащихся доводится, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

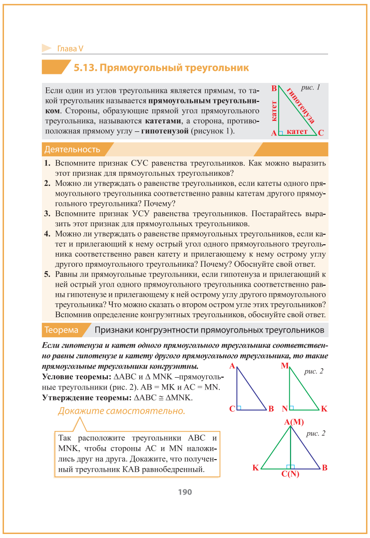
**Обобщение и результат:** Учитель ещё раз озвучивает теорему о равенстве суммы внутренних углов треугольника 180°, обобщает пройденное об их применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает теорему о сумме внутренних углов треугольника, не может доказать и применить. |
| Уровень II | Знает теорему о сумме внутренних углов треугольника, затрудняется в доказательстве и применении. |
| Уровень III | Знает теорему о сумме внутренних углов треугольника, самостоятельно доказывает и применяет. |
| Уровень IV | Знает теорему о сумме внутренних углов треугольника, обосновывая, доказывает и применяет в относительно сложных задачах. |

## Урок 5.13. Прямоугольный треугольник



Глава V

5.13. Прямоугольный треугольник

Если один из углов треугольника является прямым, то такой треугольник называется **прямоугольным треугольником**. Стороны, образующие прямой угол прямоугольного треугольника, называются **катетами**, а сторона, противоположная прямому углу – **гипотенузой** (рисунок 1).



Деятельность

1. Вспомните признак СУС равенства треугольников. Как можно выразить этот признак для прямоугольных треугольников?
2. Можно ли утверждать о равенстве треугольников, если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника? Почему?
3. Вспомните признак УСУ равенства треугольников. Постарайтесь выразить этот признак для прямоугольных треугольников.
4. Можно ли утверждать о равенстве прямоугольных треугольников, если катет и прилегающий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равен катету и прилегающему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника? Почему? Обоснуйте свой ответ.
5. Равны ли прямоугольные треугольники, если гипотенуза и прилегающий к ней острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и прилегающему к ней острому углу другого прямоугольного треугольника? Что можно сказать о втором остром угле этих треугольников? Вспомнив определение конгруэнтных треугольников, обоснуйте свой ответ.

Теорема Признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников

***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники конгруэнтны.***

**Условие теоремы:** $\Delta ABC$ и $\Delta MNK$ –прямоугольные треугольники (рис. 2). $AB = MK$ и $AC = MN$.

**Утверждение теоремы:** $\Delta ABC \cong \Delta MNK$.



*Докажите самостоятельно.*

Так расположите треугольники ABC и MNK, чтобы стороны AC и MN наложились друг на друга. Докажите, что полученный треугольник KAB равнобедренный.

190

**Стандарт:** 3.2.2. Знает и применяет признаки конгруэнтности треугольника.

3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически изображает.

**Результат обучения:**

1) Знает и применяет признаки конгруэнтности треугольника.
2) Знает и применяет отношения между углами и сторонами треугольника.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Основываясь на деятельность, учащиеся называют признаки конгруэнтности треугольников для прямоугольных треугольников. Учитель вспомогательными вопросами даёт определённое направление и обсуждает вместе с учащимися признаки СУС, УСУ, ССС для прямоугольных треугольников. Если катеты одного прямоугольного треугольника будут равны катетам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники конгруэнтны. Это – признак СУС конгруэнтности прямоугольных треугольников (в обоих прямоугольных треугольниках равенство угла между катетами 90° известно из вида прямоугольника).

Если катет и прилегающий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно будут равны катету и прилегающему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, можно говорить о конгруэнтности прямоугольных треугольников. Другой угол упомянутой стороны двух треугольников – прямой угол. Это – признак УСУ конгруэнтности прямоугольных треугольников.

Если гипотенуза и прилегающий к ней острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно будут равны гипотенузе и прилегающему к ней острому углу другого прямоугольного треугольника, можно говорить о конгруэнтности прямоугольных треугольников. Знаем, что если один из острых углов прямоугольных треугольников равен, то другие острые углы тоже равны.

**Объяснение учителя:** Учитель озвучивает конгруэнтность прямоугольного треугольника по гипотенузе и одному катету в виде теоремы.

Доказательство теоремы проводится учащимися. При доказательстве треугольники ABC и MNK, как это дано в примечании, располагаются таким образом, что стороны AC и MN накладываются друг на друга. Доказывается, что полученный треугольник KAB является равнобедренным.

**Исследовательский вопрос:** Как применяются признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников, отношения между сторонами и углами?

С целью проведения исследования группами выполняются задания из учебника на рабочих листах.

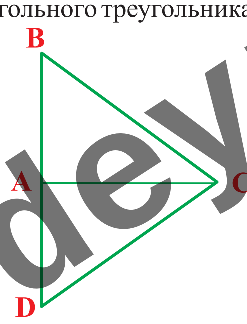
**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** в) Разница острых углов прямоугольного треугольника составляет 24°. Чтобы найти его углы, можно построить систему уравнений: острые углы обозначить $x$ и $y$:

$$\begin{cases} x+y=90, \\ x-y=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=114, \\ x-y=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=57, \\ y=33 \end{cases}$$

**Ответ:** 57° и 33°.

**Упражнение № 3. Обратная теорема:** Если длина катета прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы, то угол лежащий напротив этого катета будет равен 30°.




**Условие теоремы:** $AB = \frac{1}{2}BC$

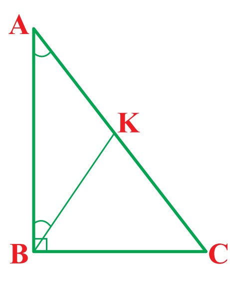
**Утверждение теоремы:** $\angle ACB = 30°$.

**Доказательство теоремы:** В треугольнике ABC сторону AB удлиним от вершины A на такую же длину, что и сторона AB, в противоположную сторону по прямой линии и полученную точку обозначим D. Поскольку AB = AD и AC – общая сторона, треугольники ABC и ADC конгруэнтны. Следовательно, BC = DC.

С другой стороны, поскольку $AB = \frac{1}{2}BC$, BD = BC = DC.

Следовательно, ΔBDC ещё и равнобедренный. Тогда все его углы равны 60°. Так как AC – биссектриса, то $\angle ACB = 30°$.

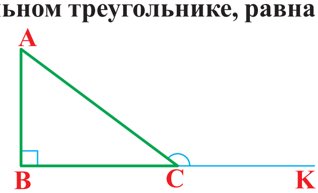
**Теорема доказана.**




**Упражнение № 4.** В результате решения этой задачи учащиеся определят отношения между медианой и гипотенузой прямоугольного треугольника.

Обозначим $\angle BAC = \angle ABK = \alpha$. $\Delta ABK$ равнобедренный: $AK = BK$.
Из суммы острых углов прямоугольного треугольника и $\angle ABC$ $90^\circ$ определим, что: $\angle KBC = 90^\circ - \alpha$ и $\angle KCB = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\Delta BKC$ тоже равнобедренный, т.е. $BK = BC$. Следовательно, определили, что $AK = CK$, т.е. точка К середина АС. А это доказывает, что ВК – медиана.
**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Основываясь на эту задачу, учащиеся определяют отношение между медианой, проведённой к гипотенузе, и гипотенузой:

**Длина медианы, проведённой к гипотенузе в прямоугольном треугольнике, равна половине длины гипотенузы.**

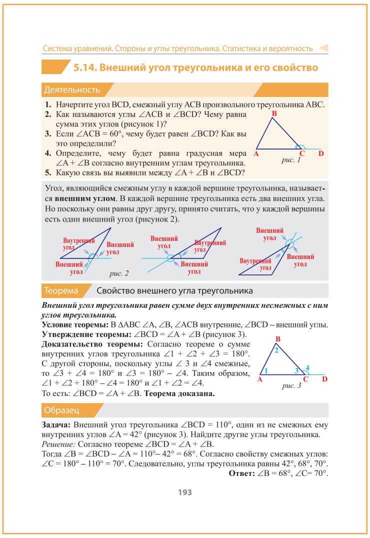



**Упражнение № 11.** Согласно условию, $\angle ACK = 120^\circ$.
Тогда $\angle ACB = 30^\circ$. Поскольку разница между гипотенузой и малым катетом равна 15 см, можно записать
$AC - AB = 15$. Знаем, что $AC = 2AB$.
Тогда: $2AB - AB = 15$ см, $AB = 15$ см и $AC = 30$ см. **Ответ:** 30 см.
**Обобщение и результат:** Учитель ещё раз называет признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников, отношения между сторонами и углами, обобщает пройденное об их применении.
**Оценивание**
● Применение

| **Уровни** | **Образцы критериев оценивания** |
|---|---|
| Уровень I | Называет признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников, не может доказать и применить.<br>Называет отношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, не может доказать и применить. |
| Уровень II | Называет признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников, затрудняется в доказательстве и применении.<br>Называет отношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, затрудняется в доказательстве и применении. |
| Уровень III | Называет признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников, самостоятельно доказывает и применяет.<br>Называет отношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, самостоятельно доказывает и применяет. |
| Уровень IV | Называет признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников, обосновывая, доказывает и применяет в относительно сложных задачах.<br>Называет отношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, обосновывая, доказывает и применяет в относительно сложных задачах. |

## Урок 5.14. Внешний угол треугольника и его свойство

**Стандарт:** 3.1.4. Применяет теорему о сумме внутренних углов треугольника и свойство внешних углов.



Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.14. Внешний угол треугольника и его свойство

Деятельность

1. Начертите угол BCD, смежный углу ACB произвольного треугольника ABC.
2. Как называются углы ∠ACB и ∠BCD? Чему равна сумма этих углов (рисунок 1)?
3. Если ∠ACB = 60°, чему будет равен ∠BCD? Как вы это определили?
4. Определите, чему будет равна градусная мера ∠A + ∠B согласно внутренним углам треугольника.
5. Какую связь вы выявили между ∠A + ∠B и ∠BCD?

рис. 1

Угол, являющийся смежным углу в каждой вершине треугольника, называется **внешним углом**. В каждой вершине треугольника есть два внешних угла. Но поскольку они равны друг другу, принято считать, что у каждой вершины есть один внешний угол (рисунок 2).

рис. 2

Теорема Свойство внешнего угла треугольника

***Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних несмежных с ним углов треугольника.***

**Условие теоремы:** В ΔABC ∠A, ∠B, ∠ACB внутренние, ∠BCD – внешний углы.

**Утверждение теоремы:** ∠BCD = ∠A + ∠B (рисунок 3).

**Доказательство теоремы:** Согласно теореме о сумме внутренних углов треугольника ∠1 + ∠2 + ∠3 = 180°. С другой стороны, поскольку углы ∠ 3 и ∠4 смежные, то ∠3 + ∠4 = 180° и ∠3 = 180° – ∠4. Таким образом, ∠1 + ∠2 + 180° – ∠4 = 180° и ∠1 + ∠2 = ∠4.

То есть: ∠BCD = ∠A + ∠B. **Теорема доказана.**

рис. 3

Образец

**Задача:** Внешний угол треугольника ∠BCD = 110°, один из не смежных ему внутренних углов ∠A = 42° (рисунок 3). Найдите другие углы треугольника.

*Решение:* Согласно теореме ∠BCD = ∠A + ∠B.

Тогда ∠B = ∠BCD – ∠A = 110°– 42° = 68°. Согласно свойству смежных углов: ∠C = 180° – 110° = 70°. Следовательно, углы треугольника равны 42°, 68°, 70°.

**Ответ:** ∠B = 68°, ∠C= 70°.

193

**Результат обучения:** Знает и применяет свойство внешних углов треугольника.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, транспортир, оборудование ИКТ

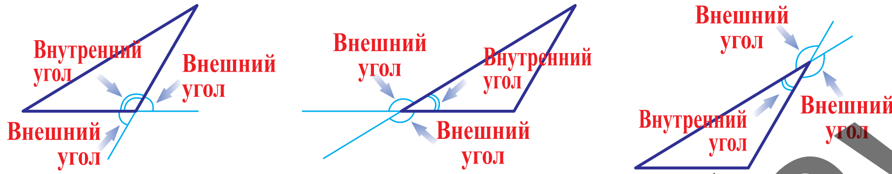
**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Анализируются отношения между углом, смежным с каким-либо углом вершины треугольника, и другим внутренним углом этого треугольника. При получении результатов выслушивается мнение учащихся.

**Объяснение учителя:** После того, как выслушивается мнение учащихся, учитель называет определение внешнего угла любой вершины треугольника и демонстрирует внешние углы треугольника (это можно выполнить и посредством компьютера).

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учитель должен довести до сведения учащихся о наличии у каждой вершины треугольника одного внешнего угла или двух углов, равных по градусной мере. Демонстрируется другой внешний угол и поясняется учащимся о том, что, говоря о внешнем угле любой вершины треугольника, имеется в виду один из внешних углов этой вершины.



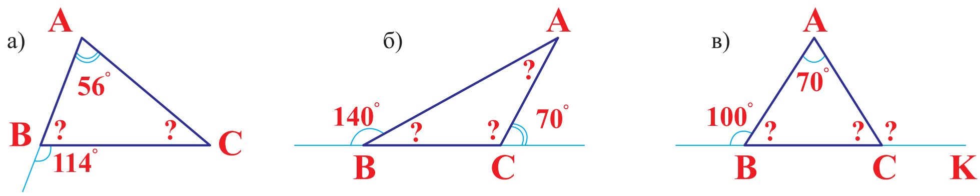

**Исследовательский вопрос:** Как применяется свойство внешнего угла в решении задач?

С целью проведения исследования группами выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** В этом задании учащиеся, высказывая своё отношение к мыслям Гюльнар и Али, должны отметить, что внешними являются оба угла. Но поскольку эти углы являются вертикальными, они равны друг другу. Основываясь на определение, поскольку принято считать, что у каждой вершины треугольника по одному внешнему углу, внешним углом угла ABC берётся или ∠ABD, или ∠CBE.

**Упражнение № 4.** Опираясь на каждый рисунок, при определении градусной меры используются свойство внешнего угла и теорема о сумме внутренних углов треугольника.




а) $\angle ABC = 180° – 114° = 66°$, $\angle BCA = 114° – 56° = 58°$.
б) $\angle ABC = 180° – 140° = 40°$, $\angle BCA = 180° – 70° = 110°$,
$\angle BAC = 70° – 40° = 30°$.
в) $\angle ABC = 180° – 100° = 80°$, $\angle BCA = 100° – 70° = 30°$, $\angle ACK = 150°$

**Ответ:** а) 66°, 58°; б) 40°, 110°, 30°; в) 80°, 30°, 150°.

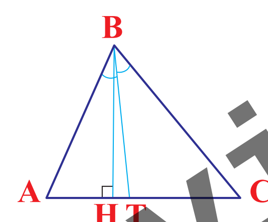
**Упражнение № 5.** Поскольку отношение внешнего угла треугольника и несмежного с ним внутреннего угла 5 : 3: $5x = 80$, $x = 160$. Тогда внутренние углы треугольника будут $16° \cdot 3= 48°$ , $80° − 48° = 32°$ и $180° – 80° = 100°$.

**Ответ:** 32°, 48°, 100°.

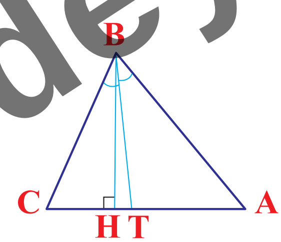
**Упражнение № 6.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ∠A | 35° | 80° | 10° | 23° |
| ∠B | 45° | 67° | 27° | 89° |
| ∠C | 100° | 33° | 143° | 68° |
| ∠BCD | 80° | 147° | 37° | 112° |

**Упражнение № 7.** а) Если $\angle A= 80°$, $\angle C=56°$, то
$\angle ABC = 180° – (80° + 56°) = 44°$ и $\angle ABT = 44° : 2 = 22°$.
С другой стороны $\angle ABH = 90° – 80° = 10°$.
Следовательно, $\angle HBT = \angle ABT – \angle ABH = 22° – 10° = 12°$.
$\Delta BTC \angle BTC = 180° – (22° + 56°) = 102°$.




б) Если $\angle A= 60°$, $\angle C=40°$, то
$\angle ABC = 180° – (40° + 60°) = 80°$ и $\angle ABT =80° : 2 = 40°$.
С другой стороны, $\angle ABH = 90° – 60° = 30°$.
Следовательно, $\angle HBT = \angle ABT – \angle ABH = 40° – 30° = 10°$.
$\Delta BTC$ $\angle BTC = 180° – (40° + 40°) = 100°$.

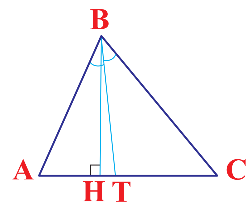



в) Если $\angle A= 50°$, $\angle C=70°$, то
$\angle ABC = 180° – (50° + 70°) = 60°$ и $\angle CBT =60° : 2 = 30°$.
С другой стороны, $\angle CBH = 90° – \angle C = 90° – 70° = 20°$.
Следовательно, $\angle HBT = \angle CBT – \angle CBH = 30° – 20° = 10°$.
$\Delta BTC$ $\angle BTC = 180° – (70° + 30°) = 80°$.

**Ответ:** а) $\angle HBT= 12°$ и $\angle BTC = 102°$; б) $\angle HBT= 10°$ и $\angle BTC = 100°$;
в) $\angle HBT= 10°$ и $\angle BTC = 80°$.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Учитель обсуждает с учащимися градусную меру углов $\angle HBT$ и $\angle BTC$, полученных во всех трёх пунктах этого задания. Учащиеся определяют сумму или разность полученных $\angle HBT$ и $\angle BTC$ в 90° (Обосновывается на основе свойства внешнего угла треугольника и суммы в 180° внутренних углов треугольника).

С другой стороны, учащиеся в каждом пункте должны определить, что ∠HBT, т.е. угол, образованный между высотой и биссектрисой, которые проведены из одной вершины, равен половине градусной меры данных углов A и C (других внутренних углов). Чтобы прийти к такому выводу, учитель вспомогательными вопросами может направить учащихся.




***В общем случае можно написать:*** Градусная мера угла, образованного между высотой и биссектрисой, которые проведены из одной вершины треугольника, равна половине разности градусной меры других внутренних углов этого треугольника (разность большого угла с малым)

$$\angle HBT = (\angle A - \angle C) : 2.$$

**Упражнение № 8.** При выполнении этого задания необходимо определить, в какой вершине располагается внешний угол. Здесь возможны два случая:

а) **Первый случай:** Если внешний угол при вершине в равнобедренном треугольнике будет равен 70°, то внутренний угол той же вершины будет 180° – 70° = 110°. Так как другие внутренние углы треугольника равны, каждый из них будет 35°.

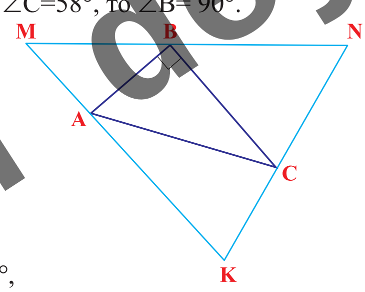
**Второй случай:** Если внешний угол угла, прилегающего к основанию будет равен 70°, то внутренний угол будет 180° – 70° = 110°. Тогда второй угол, прилегающий к основанию треугольника, тоже будет равен 110°. А это невозможно. У одного треугольника не может быть два тупых угла.

б) **Первый случай:** Если внешний угол вершинного угла равнобедренного треугольника будет равен 136°, то внутренний угол в этой же вершине будет 180° – 136° = 44°. Так как другие внутренние углы треугольника равны, то каждый из них будет равен 136° : 2 = 68°.

**Второй случай:** Если внешний угол угла, прилегающего к основанию, равен 136°, то внутренний угол будет равен 180° – 136°= 44°. Так как другие внутренние углы треугольника равны, то каждый из них будет равен 180° – 88° = 92°.

**Ответ:** а) 35°, 35°, 110°; б) 44°, 68°, 68° или 44°, 44°, 92°.

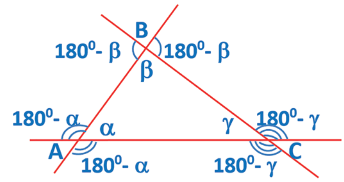
**Упражнение № 9.** Если в треугольнике ABC ∠A= 32°, ∠C=58°, то ∠B= 90°.




Согласно условию, строится треугольник MNK.
Согласно признаку параллельности прямых:
∠NBC = ∠CAK = ∠ACB = 58°,
∠ABM = ∠ACK = ∠BAC = 32° ,
∠BCN = ∠BAM = ∠ABC= 90°.
Тогда: ∠MKN = 180° – (∠CAK + ∠ACK) =
=180° – (58° + 32°) = 90°,
∠MNK = 180° – (∠BCN + ∠NBC) =180° – (90° + 58°) = 32°,
∠KMN = 180° – (∠BAM + ∠ABM) = 180° – (90° + 32°) = 58°.
Внешние углы треугольника MNK соответственно равны 90°, 148°, 122°.

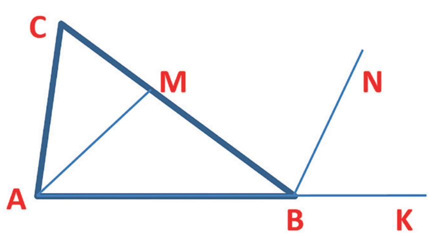
**Ответ:** внутренние углы треугольника MNK: 90°, 32°, 58°,
внешние углы 90°, 148°, 122°.

**Упражнение № 10.** Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.




Внешний угол угла $\alpha$ равен $180° - \alpha$, внешний угол угла $\beta$ равен $180° - \beta$, внешний угол угла $\gamma$ равен $180° - \gamma$. Если принимается, что в каждой вершине по два внешних угла, тогда $(180° - \alpha) \cdot 2 + (180° - \beta) \cdot 2 + (180° - \gamma) \cdot 2 = 1080° - 2 \cdot (\alpha+\beta+\gamma) = 1080° - 360° = 720°$.
Следовательно, мысли Сабира верны, так как $720° = 4 \cdot 180°$.

**Упражнение № 11.** Это задание выполняется с целью творческого применения и рассчитано, в основном, на сильных учащихся.
Биссектриса внутреннего угла любой вершины треугольника пересекается с биссектрисой внешнего угла этой же вершины. Следовательно, параллельность в этом случае невозможна.




Проведём биссектрису внешнего угла другой вершины. В этом случае, чтобы AM || BN должно соблюдаться условие $\angle MAB = \angle NBK$ (согласно признаку параллельности).
Тогда $\angle CAB = \angle CBK$. А это противоречит свойству внешнего угла. Согласно свойству, должно быть $\angle CBK = \angle CAB + \angle ACB$. Следовательно, биссектриса любого угла треугольника не может быть параллельной биссектрисе его внешнего угла.

**Обобщение и результат:** Учитель ещё раз называет свойство внешнего угла треугольника, обобщает пройденное о его применении.

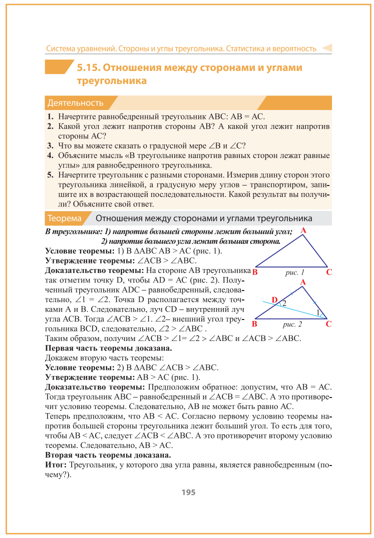
**Оценивание**
● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает свойство внешнего угла треугольника, не может доказать и применить. |
| Уровень II | Знает свойство внешнего угла треугольника, затрудняется в доказательстве и применении. |
| Уровень III | Знает свойство внешнего угла треугольника, самостоятельно доказывает и применяет. |
| Уровень IV | Знает свойство внешнего угла треугольника, обосновывая, доказывает и применяет в относительно сложных задачах. |

## Урок 5.15. Отношения между сторонами и углами треугольника

**Стандарт:** 3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически изображает.

**Результат обучения:** Знает и применяет отношения между сторонами и углами треугольника.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, линейка, транспортир, оборудование ИКТ


Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.15. Отношения между сторонами и углами треугольника

Деятельность

1. Начертите равнобедренный треугольник ABC: AB = AC.
2. Какой угол лежит напротив стороны AB? А какой угол лежит напротив стороны AC?
3. Что вы можете сказать о градусной мере $\angle B$ и $\angle C$?
4. Объясните мысль «В треугольнике напротив равных сторон лежат равные углы» для равнобедренного треугольника.
5. Начертите треугольник с разными сторонами. Измерив длину сторон этого треугольника линейкой, а градусную меру углов – транспортиром, запишите их в возрастающей последовательности. Какой результат вы получили? Объясните свой ответ.

Теорема Отношения между сторонами и углами треугольника

***В треугольнике: 1) напротив большей стороны лежит больший угол; 2) напротив большего угла лежит большая сторона.***

**Условие теоремы:** 1) В $\Delta ABC$ $AB > AC$ (рис. 1).
**Утверждение теоремы:** $\angle ACB > \angle ABC$.
**Доказательство теоремы:** На стороне AB треугольника так отметим точку D, чтобы $AD = AC$ (рис. 2). Полученный треугольник ADC – равнобедренный, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Точка D располагается между точками A и B. Следовательно, луч CD – внутренний луч угла ACB. Тогда $\angle ACB > \angle 1$. $\angle 2$– внешний угол треугольника BCD, следовательно, $\angle 2 > \angle ABC$.
Таким образом, получим $\angle ACB > \angle 1 = \angle 2 > \angle ABC$ и $\angle ACB > \angle ABC$.
**Первая часть теоремы доказана.**
Докажем вторую часть теоремы:
**Условие теоремы:** 2) В $\Delta ABC$ $\angle ACB > \angle ABC$.
**Утверждение теоремы:** $AB > AC$ (рис. 1).
**Доказательство теоремы:** Предположим обратное: допустим, что $AB = AC$. Тогда треугольник ABC – равнобедренный и $\angle ACB = \angle ABC$. А это противоречит условию теоремы. Следовательно, AB не может быть равно AC.
Теперь предположим, что $AB < AC$. Согласно первому условию теоремы напротив большей стороны треугольника лежит больший угол. То есть для того, чтобы $AB < AC$, следует $\angle ACB < \angle ABC$. А это противоречит второму условию теоремы. Следовательно, $AB > AC$.
**Вторая часть теоремы доказана.**
**Итог:** Треугольник, у которого два угла равны, является равнобедренным (почему?).

195



### Ход урока:

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Выполняется деятельность, данная в учебнике. Проводятся обсуждения о равных сторонах и равных углах равнобедренного треугольника, выслушивается мнение учащихся о сторонах, лежащих напротив углов, и углах, лежащих напротив сторон. Изобразив на доске или на компьютере (можно и на электронной доске) произвольный треугольник, измеряют длину сторон и градусную меру углов. Полученные числа выстраиваются в возрастающей или убывающей последовательностях (длина сторон и градусная мера углов записывается в отдельности). Здесь учащиеся определяют, что напротив большей стороны лежит больший угол или напротив меньшей стороны лежит меньший угол.

**Объяснение учителя:** Учитель озвучивает теорему об отношении между сторонами и углами треугольника и доказывает её. При доказательстве спрашивается мнение учащихся.

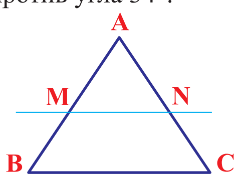
**Исследовательский вопрос:** Как применяются отношения между сторонами и углами треугольника в решении задач?

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 4.** а) Если $MN < MK < NK$, то углы, лежащие напротив данных сторон, должны быть записаны в той же последовательности: $\angle K < \angle N < \angle M$.
б) Если в треугольнике ABC $AB = 9$ см, $AC = 14$ см, $BC = 8$ см, то отношение между его углами: $\angle A < \angle C < \angle B$. **Ответ:** а) $\angle K < \angle N < \angle M$; б) $\angle A < \angle C < \angle B$.

**Упражнение № 5.** В прямоугольном треугольнике наибольшая сторона лежит напротив угла 90°. Если один из острых углов будет равен 34°, то второй острый угол будет равен 56°. Следовательно, наименьшая сторона треугольника лежит напротив угла 34°.

**Упражнение № 7.** По условию известно, что $MN \parallel BC$ и $\angle B = \angle C$. Согласно признаку параллельности прямых, $\angle N = \angle C$ и $\angle B = \angle M$. Следовательно, $\angle M = \angle N$.
Треугольник с двумя равными углами является равнобедренным.
$\Delta MAN$ – равнобедренный треугольник.

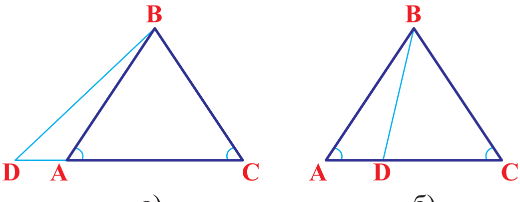



**Ответ:** равнобедренный треугольник.

**Упражнение № 8.**
а) На первом рисунке в равнобедренном треугольнике ABC $\angle BAC$ – острый угол. Тогда смежный ему $\angle BAD$ – тупой угол, т.е. $\Delta ABD$ – тупоугольный треугольник.

Так как в этом треугольнике наибольший угол – тупой угол, то наибольшей стороной является сторона BD, лежащая напротив тупого угла. Следовательно, BD > AB.

б) По тому же принципу на втором рисунке треугольник ADB – тупоугольный треугольник. Следовательно, в ΔABD наибольший угол – ∠ADB, сторона AB, лежащая напротив него, – наибольшая. AB > BD.



а) б)

**Обобщение и результат:** Учитель ещё раз называет отношения между сторонами и углами треугольника, обобщает пройденное об их применении.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Знает отношения между сторонами и углами треугольника, не может доказать и применить. |
| Уровень II | Знает отношения между сторонами и углами треугольника, затрудняется в доказательстве и применении. |
| Уровень III | Знает отношения между сторонами и углами треугольника, самостоятельно доказывает и применяет. |
| Уровень IV | Знает отношения между сторонами и углами треугольника, обосновывая, доказывает и применяет в решении относительно сложных задач. |

## Урок 5.16. Неравенство треугольника

**Стандарт:** 3.1.1. Знает основные элементы треугольника и отношения между ними, геометрически изображает.

**Результат обучения:** Знает неравенство треугольника и применяет в решении задач.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

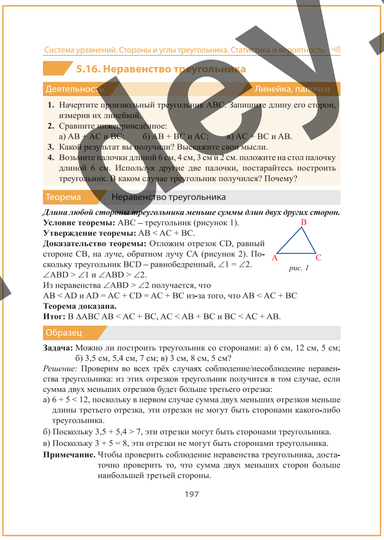
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, палочки, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Учащимся задаётся начертить произвольный треугольник ABC и измерить длину его сторон с помощью линейки. Затем каждый учащийся на основе начерченного треугольника:


Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.16. Неравенство треугольника

Деятельность — Линейка, палочки

1. Начертите произвольный треугольник ABC. Запишите длину его сторон, измерив их линейкой.
2. Сравните нижеприведённое:
   а) AB + AC и BC; б) AB + BC и AC; в) AC + BC и AB.
3. Какой результат вы получили? Выскажите свои мысли.
4. Возьмите палочки длиной 6 см, 4 см, 3 см и 2 см. положите на стол палочку длиной 6 см. Используя другие две палочки, постарайтесь построить треугольник. В каком случае треугольник получился? Почему?

Теорема — Неравенство треугольника

***Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон.***

**Условие теоремы:** ABC – треугольник (рисунок 1).

**Утверждение теоремы:** AB < AC + BC.

**Доказательство теоремы:** Отложим отрезок CD, равный стороне CB, на луче, обратном лучу CA (рисунок 2). Поскольку треугольник BCD – равнобедренный, ∠1 = ∠2.

∠ABD > ∠1 и ∠ABD > ∠2.

Из неравенства ∠ABD > ∠2 получается, что

AB < AD и AD = AC + CD = AC + BC из-за того, что AB < AC + BC

**Теорема доказана.**

**Итог:** В ΔABC AB < AC + BC, AC < AB + BC и BC < AC + AB.

*рис. 1*

Образец

**Задача:** Можно ли построить треугольник со сторонами: а) 6 см, 12 см, 5 см; б) 3,5 см, 5,4 см, 7 см; в) 3 см, 8 см, 5 см?

*Решение:* Проверим во всех трёх случаях соблюдение/несоблюдение неравенства треугольника: из этих отрезков треугольник получится в том случае, если сумма двух меньших отрезков будет больше третьего отрезка:

а) 6 + 5 < 12, поскольку в первом случае сумма двух меньших отрезков меньше длины третьего отрезка, эти отрезки не могут быть сторонами какого-либо треугольника.

б) Поскольку 3,5 + 5,4 > 7, эти отрезки могут быть сторонами треугольника.

в) Поскольку 3 + 5 = 8, эти отрезки не могут быть сторонами треугольника.

**Примечание.** Чтобы проверить соблюдение неравенства треугольника, достаточно проверить то, что сумма двух меньших сторон больше наибольшей третьей стороны.

197

а) сравнивает значения выражений AB + AC и BC; б) AB + BC и AC; в) AC + BC и AB

Конечно же, при правильном вычислении у всех учащихся получится результат:

а) AB + AC > BC;

б) AB + BC > AC;

в) AC + BC > AB

Эти результаты записываются на доске и учитель спрашивает мнение учащихся об этих неравенствах. Выслушиваются мнения учащихся. При все трёх случаях они могут сказать о том, что сумма длин двух сторон больше третьей стороны.

Следующим этапом является требование построения треугольника на столе из заранее подготовленных палочек длиною 6 см, 4 см, 3 см и 2 см. На практике проверяется, построение какого треугольника невозможно или возможно.

**Исследовательский вопрос**: Какие отношения существуют между сторонами треугольника?

**Объяснение учителя**: При проведении исследования учитель даёт информацию о неравенстве треугольника, доказывает теорему. При объяснении для наглядности используют возможности компьютерных программ.

В качестве продолжения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 2.** В теореме в учебнике определено неравенство треугольника по сумме сторон. При выполнении этого задания определяется отношение между разностью двух сторон треугольника (и модулем разности) и длиной третьей стороны. Класс делится на 3 группы. Первая группа чертит прямоугольный треугольник, вторая группа – тупоугольный треугольник, третья группа – остроугольный треугольник. Каждая группа измеряет линейкой длину сторон начерченного треугольника, и определяет отношение между разностью двух любых сторон (или модулем разности) и длиной третьей стороны. Презентуя свою работу, группы высказывают своё мнение.

ΔABC AB – AC < BC.

**Результат:** Неравенство треугольника: длина одной стороны треугольника меньше суммы длин других двух сторон, но больше разности модуля:

$$|AB - AC| < BC < AB + AC.$$

**Упражнение № 3.** а) Градусная мера развёрнутого угла 180°. Тогда:

$\frac{1}{6}\cdot 180 = 30$ см; $\frac{1}{3}\cdot 180 = 60$ см; $\frac{1}{2}\cdot 180 = 90$ см.

Сумма двух сторон треугольника должна быть больше третьей стороны. В этом случае 30 + 60 = 90. Следовательно, такой треугольник построить нельзя.

б) $\frac{1}{9}\cdot 180 = 20$ см; $\frac{1}{3}\cdot 180 = 60$ см; $\frac{5}{9}\cdot 180 = 100$ см;

В этом случае опять нельзя построить треугольник, т.к. 20 + 60 < 100.

в) $\frac{2}{9}\cdot 180 = 40$ см; $\frac{1}{3}\cdot 180 = 60$ см; $\frac{4}{9}\cdot 180 = 80$ см.

В этом случае 40 + 60 > 80. Следовательно, есть треугольник с длинами сторон

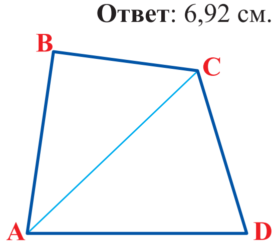
40 см, 60 см, 80 см. Есть большая вероятность того, что треугольник является остроугольным. В будущем, после изучения теоремы Пифагора, учащиеся смогут более точно определять вид треугольника ($40^2 + 60^2 < 80^2$ остроугольный). Здесь же учащийся только может предположить вид треугольника (после изучения построения треугольника по длине трёх сторон они смогут точно утверждать вид треугольника).

**Упражнение № 4.** в) Длина двух сторон равнобедренного треугольника одинаковая. Следовательно, длина сторон треугольника будет либо 120 мм, 120 мм, 32 мм, либо 120 мм, 32 мм, 32 мм. Данные в первом случае отрезки могут быть сторонами треугольника. Во втором же случае это невозможно: $32 + 32 < 120$.
Следовательно, периметр треугольника: $P = 120 + 120 + 32 = 272$ мм = 27 см 2 мм.

**Ответ**: 27 см 2 мм.

**Упражнение № 6.** Согласно неравенству треугольника, $a + b > c$.
$a + b = 3,17 + 0,75 = 3,92$ и $a - b = 3,17 - 0,75 = 2,42$.
Следовательно, $2,42 < c < 3,92$. Согласно условию, $c$ – целое число, тогда $c = 3$.
Таким образом, $P = a + b + c = 3,17 + 0,75 + 3 = 6,92$. **Ответ**: 6,92 см.

**Упражнение № 7.** Согласно неравенству треугольника:
$AC < AB + BC$ и $AC < AD + CD$. Эти неравенства сложим сторона к стороне:
$2AC < AB + BC + AD + BC$ и $AC < (AB + BC + AD + BC) : 2$.
Таким образом, отрезок AC меньше половины периметра четырёхугольника.



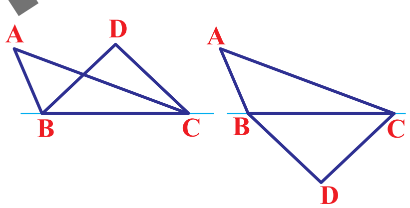

**Упражнение № 8.** По условию известно, что $8 < a < 12$ и $10 < b < 15$. Согласно неравенству треугольника, $8 + 10 < a + b < 12 + 15$, т.е. $18 < a + b < 27$. Если третья сторона треугольника будет $c$, то $c < a + b$ отвечает условию. Следовательно, $c < 18$. С другой стороны, третья сторона треугольника должна быть больше разности других двух сторон треугольника. $c > 15 - 8$ (разность самой верхней и самой нижней границ сторон $a$ и $b$) , $c > 7$.
Следовательно, длина третьей стороны должна отвечать условию $7 < c < 18$.

**Ответ**: $7 < c < 18$.

**Упражнение № 9.** Известно, что $3,1 < a < 7,4$; $8,2 < b < 13$; $11 < c < 17,5$.
Сумма нижних границ сторон треугольника $3,1 + 8,2 + 11 = 22,3$, сумма же верхних границ $7,4 + 13 + 17,5 = 37,9$.
Тогда периметр треугольника должен отвечать неравенству $22,3 < P < 37,9$.

Следовательно, $P = 37$. **Ответ**: 37.

**Упражнение № 10.** Известно, что AB = 3 см, AC = 14 см, DB = 5 см и DC = 6 см. Допустим, что точки A, B, C и D не располагаются на одной прямой. Тогда возможны два случая: точки A и D располагаются по одну сторону от прямой BC или точки A и D располагаются по разные стороны (полуплоскости) от прямой BC.



Согласно треугольнику ABC, BC > AC − AB = 14 − 3 = 11, BC > 11.
Согласно треугольнику DBC, BC < BD + DC = 5 + 6 = 11, BC < 11. Следовательно, сторона BC должна быть и меньше, и больше 11. А это невозможно. Следовательно, точки A, B, C и D располагаются на одной прямой.

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** Неравенство треугольника считается одним из важных свойств треугольника. Учащийся должен обращать внимание на соответствие каждого треугольника этому свойству. Для того, чтобы проверить, соответствует ли треугольник неравенству, достаточно проверить, является ли большая сторона треугольника меньше суммы других двух сторон или является модуль разности двух сторон больше длины третьей стороны. Это свойство широко используется в быту.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное об отношениях между длинами сторон треугольника. Здесь называется неравенство треугольника относительно суммы и относительно разности.

**Оценивание**

● Применение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется в формулировании неравенства треугольника, не может его применить;<br>Не умеет определить, могут ли заданные числа быть сторонами треугольника. |
| Уровень II | Знает неравенство треугольника, допускает определённые ошибки в применении;<br>При применении неравенства треугольника испытывает определённые трудности, записывая двухуровневые неравенства;<br>Допускает определённые ошибки при определении того, могут ли заданные числа быть сторонами треугольника. |
| Уровень III | Знает и самостоятельно применяет неравенство треугольника. |
| Уровень IV | Творчески применяет неравенство треугольника по сумме и разности. |

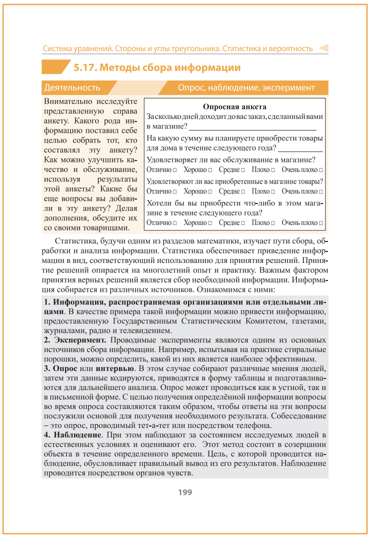
## Урок 5.17. Методы сбора информации

**Стандарт**: 5.1.1. Собирает данные, используя разные методы.
**Результат обучения:** Собирая информацию, использует разные методы.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ, интернет
**Интеграция:** Информатика 3.3.2., Биология 1.1.1., 1.1.2., 4.1.1.

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы**: Согласно деятельности, данной в учебнике, учащиеся запол-



Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

**5.17. Методы сбора информации**

Деятельность — Опрос, наблюдение, эксперимент

Внимательно исследуйте представленную справа анкету. Какого рода информацию поставил себе целью собрать тот, кто составлял эту анкету? Как можно улучшить качество и обслуживание, используя результаты этой анкеты? Какие бы еще вопросы вы добавили в эту анкету? Делая дополнения, обсудите их со своими товарищами.

**Опросная анкета**

За сколько дней доходит до вас заказ, сделанный вами в магазине? ______

На какую сумму вы планируете приобрести товары для дома в течение следующего года? ______

Удовлетворяет ли вас обслуживание в магазине?
Отлично □ Хорошо □ Средне □ Плохо □ Очень плохо □

Удовлетворяют ли вас приобретенные в магазине товары?
Отлично □ Хорошо □ Средне □ Плохо □ Очень плохо □

Хотели бы вы приобрести что-либо в этом магазине в течение следующего года?
Отлично □ Хорошо □ Средне □ Плохо □ Очень плохо □

Статистика, будучи одним из разделов математики, изучает пути сбора, обработки и анализа информации. Статистика обеспечивает приведение информации в вид, соответствующий использованию для принятия решений. Принятие решений опирается на многолетний опыт и практику. Важным фактором принятия верных решений является сбор необходимой информации. Информация собирается из различных источников. Ознакомимся с ними:

**1. Информация, распространяемая организациями или отдельными лицами**. В качестве примера такой информации можно привести информацию, предоставленную Государственным Статистическим Комитетом, газетами, журналами, радио и телевидением.
**2. Эксперимент.** Проводимые эксперименты являются одним из основных источников сбора информации. Например, испытывая на практике стиральные порошки, можно определить, какой из них является наиболее эффективным.
**3. Опрос** или **интервью**. В этом случае собирают различные мнения людей, затем эти данные кодируются, приводятся в форму таблицы и подготавливаются для дальнейшего анализа. Опрос может проводиться как в устной, так и в письменной форме. С целью получения определённой информации вопросы во время опроса составляются таким образом, чтобы ответы на эти вопросы послужили основой для получения необходимого результата. Собеседование – это опрос, проводимый тет-а-тет или посредством телефона.
**4. Наблюдение**. При этом наблюдают за состоянием исследуемых людей в естественных условиях и оценивают его. Этот метод состоит в созерцании объекта в течение определенного времени. Цель, с которой проводится наблюдение, обусловливает правильный вывод из его результатов. Наблюдение проводится посредством органов чувств.

199

няют опросные листы (учитель может подготовить и другие опросные листы) на рабочих листах. Опросные листы обсуждаются.

**Объяснение учителя:** Учитель обсуждает и объясняет разные методы, используемые при сборе информации. Даёт информацию о наиболее используемых источниках современности для сбора информации – об интернет-сайтах и электронной почте.

**Исследовательский вопрос**: Как применяются методы, используемые для сбора информации?

С целью проведения исследования выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям**:

**Упражнение № 4.** В задании применяется практический метод. Эта практика осуществляется во время урока и по результатам проводятся обсуждения. Посуда, в которой проводится опыт, хранится в классе и результат наблюдается на следующем уроке или через несколько дней. В течение же урока учитель даёт определённую информацию. Определяется, что вода и минеральные соли, обогащающие растения, поступают в листья, цветы и фрукты через каналы (вены) ствола.

**Упражнение № 7.** В качестве результата опыта определяется масса тела.

| № опыта | Название тела | Начальный объём жидкости, (см$^3$) | Объём жидкости, после помещения в неё тела, (см$^3$) | Объём тела (см$^3$) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Шарик | 70 | 73,5 | 3,5 |
| 2 | Камень | 65 | 71,02 | 6,02 |
| 3 | Тело на рисунке (учебник) | 90 | 130 | 40 |

**Моменты, на которые следует обратить внимание:** С целью сбора любой информации учитель для второго урока учащимся, в зависимости от их уровня, может задать разные задания. Учащиеся эти задания выполняют и, отправив свои результаты по электронной почте своим товарищам и учителю, информируют их о полученной информации.

**Обобщение и результат:** Методы сбора информации ещё раз повторяются и пройденное обобщается.

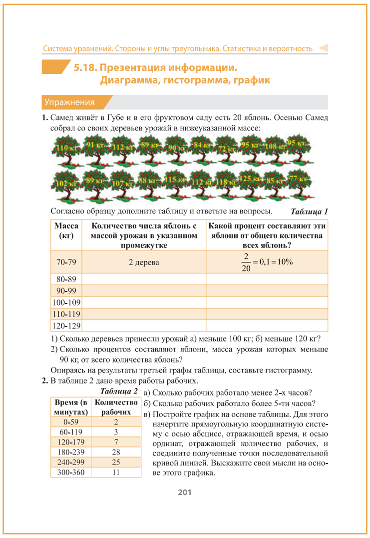
**Оценивание**

● Сбор информации

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Имеет некоторые знания о методах сбора информации, затрудняется в применении. |

| | |
|---|---|
| Уровень II | Знает методы сбора информации, применяя, собирает определённую информацию. |
| Уровень III | Знает методы сбора информации и, применяя, собирает необходимую информацию. |
| Уровень IV | Обстоятельно объясняет методы сбора информации, собирает обширную информацию. |

## Урок 5.18. Презентация информации. Диаграмма, гистограмма, график


Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.18. Презентация информации. Диаграмма, гистограмма, график

Упражнения

1. Самед живёт в Губе и в его фруктовом саду есть 20 яблонь. Осенью Самед собрал со своих деревьев урожай в нижеуказанной массе:



Согласно образцу дополните таблицу и ответьте на вопросы. *Таблица 1*

| Масса (кг) | Количество числа яблонь с массой урожая в указанном промежутке | Какой процент составляют эти яблони от общего количества всех яблонь? |
|---|---|---|
| 70-79 | 2 дерева | $\frac{2}{20}=0,1=10\%$ |
| 80-89 | | |
| 90-99 | | |
| 100-109 | | |
| 110-119 | | |
| 120-129 | | |

1) Сколько деревьев принесли урожай а) меньше 100 кг; б) меньше 120 кг?
2) Сколько процентов составляют яблони, масса урожая которых меньше 90 кг, от всего количества яблонь?

Опираясь на результаты третьей графы таблицы, составьте гистограмму.

2. В таблице 2 дано время работы рабочих.

*Таблица 2*

| Время (в минутах) | Количество рабочих |
|---|---|
| 0-59 | 2 |
| 60-119 | 3 |
| 120-179 | 7 |
| 180-239 | 28 |
| 240-299 | 25 |
| 300-360 | 11 |

а) Сколько рабочих работало менее 2-х часов?
б) Сколько рабочих работало более 5-ти часов?
в) Постройте график на основе таблицы. Для этого начертите прямоугольную координатную систему с осью абсцисс, отражающей время, и осью ординат, отражающей количество рабочих, и соедините полученные точки последовательной кривой линией. Выскажите свои мысли на основе этого графика.

201

**Стандарт:** 5.1.2. Представляет информацию в виде диаграммы, гистограммы или графика.
5.1.3. Определяет границы изменения собранных числовых данных.
**Результат обучения:** Представляет информацию разными методами и определяет границы изменения числовой информации.
**Форма работы:** коллективная и работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ
**Интеграция:** Информатика 3.2.2.

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа**.**

**Постановка проблемы:** Учащиеся из курса математики младших классов знают способы представления информации в виде таблицы, диаграммы. Представление же информации в виде графика задаётся в этом году. На предыдущих уроках учащиеся познакомились с линейной функцией и построением её графика. На этом уроке анализируется представление информации, наряду с диаграммой и гистограммой, в виде графика, и на основе приведённого графика собирается информация.

**Исследовательский вопрос**: Как можно представить информацию посредством диаграммы или графика? Как определяются границы собранной информации на основе представленного графика или диаграммы?

С целью проведения исследования группами выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

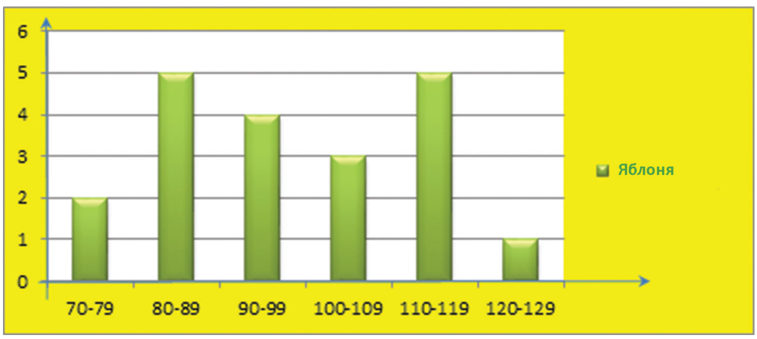
**Упражнение № 1.** На основе массы собранных яблок на рисунке определяется число деревьев и записывается в таблицу по заданным интервалам.

| Масса (кг) | Количество числа яблонь с массой урожая в указанном промежутке | Какой процент составляют эти яблони от общего количества всех яблонь? |
|---|---|---|
| 70-79 | 2 дерева | $\frac{2}{20}=0,1=10\%$ |

| | | |
|---|---|---|
| 80-89 | 5 деревьев | $\frac{5}{20}=0,25=25\%$ |
| 90-99 | 4 дерева | $\frac{4}{20}=0,2=20\%$ |
| 100-109 | 3 дерева | $\frac{3}{20}=0,15=15\%$ |
| 110-119 | 5 деревьев | $\frac{5}{20}=0,25=25\%$ |
| 120-129 | 1 дерево | $\frac{1}{20}=0,05=5\%$ |

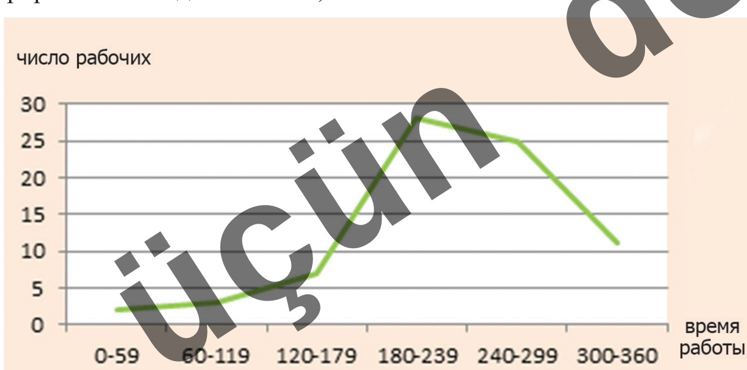
1) Урожай: а) число яблонь, давших урожай меньше 100 кг – 11;
б) 19 яблонь дали урожай меньше 120 кг.

2) 7 яблонь дало урожай меньше 90 кг и это составляет $\frac{7}{20}=0,35=35\%$ от всех деревьев.




**Упражнение № 2.** а) 5 рабочих работало менее 2 часов.
б) 11 рабочих работало более 5 часов.

Чтобы построить график на основе таблицы, построим прямоугольную систему координат, в которой ось абсцисс отражает время, ось ординат – число рабочих. Основываясь на график, можно провести обсуждения с учащимися. Как и из таблицы, из графика становится ясно, что больше всего рабочих работало (3–5 часов). Число же рабочих, проработавших дольше всех, – 11.



**Упражнение № 3.** Как видно из таблицы, числа, записанные в третьем столбце, располагаются между 0 и 1. Отметим эти числа на оси ординат. График получается таким, как это приведено ниже.

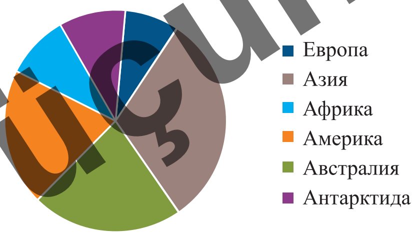

а) Учащиеся, пользующиеся автобусом, составляют 50% от всех учащихся, учащиеся, пользующиеся легковым автомобилем, составляют 13% от всех учащихся. Следовательно, учащиеся, пользующиеся автобусом и легковым автомобилем, составляют 63% от всех учащихся.

б) учащиеся, пользующиеся метро и поездом (2 человека), составляют $\frac{2}{23} \cdot 100\% \approx 8,7\%$ от числа учащихся (23 человека), пользующихся автобусом.

На втором уроке учитель объясняет алгоритм построения круговой диаграммы. Учитель может это объяснение представить с помощью офисных компьютерных программ. Затем на основе образца проводится точное построение круговой диаграммы.

**Упражнение № 9.**

| Название материка | Площадь материка (млн. км$^2$) | Часть | Процент (%) | Центральный угол (в градусах) |
|---|---|---|---|---|
| Европа | 11,5 | $11,5 : 150 \approx 0,07$ | $0,07 \cdot 100 = 7$ | $360 \cdot 0,07 \approx 28$ |
| Азия | 43,4 | $43,4 : 150 \approx 0,29$ | $0,29 \cdot 100 = 29$ | $360 \cdot 0,29 \approx 104$ |
| Африка | 30,3 | $30,3 : 150 \approx 0,202$ | $0,202 \cdot 100 = 20,2$ | $360 \cdot 0,202 \approx 73$ |
| Америка | 42 | $42 : 150 \approx 0,28$ | $0,28 \cdot 100 = 28$ | $360 \cdot 0,28 \approx 101$ |
| Австралия | 8,7 | $8,7 : 150 \approx 0,06$ | $0,058 \cdot 100 = 5,8$ | $360 \cdot 0,058 \approx 21$ |
| Антарктида | 14,1 | $14,1 : 150 \approx 0,01$ | $0,094 \cdot 100 = 9,4$ | $360 \cdot 0,094 \approx 33$ |
| Всего | 150 | 1,00 | | 360 |



**Дифференциальное обучение:** Слабые учащиеся затрудняются в выполнении построения графика и круговой диаграммы. Для улучшения результатов таких учащихся, учитель постоянно проверяет их работу, при необходимости направляет их. Важно, чтобы учитель составил задания по уровню слабых учащихся.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о методах сбора информации. Ещё раз до сведения учащихся доводится алгоритм построения круговой диаграммы. Подчёркивается роль графиков в презентации информации.

**Оценивание**

● Презентация

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Представляет информацию в виде столбчатой диаграммы, не может строить круговую диаграмму и график. |
| Уровень II | Представляет информацию в виде диаграммы, гистограммы, допускает определённые ошибки при построении круговой диаграммы и графика. |
| Уровень III | Представляет информацию посредством столбчатой диаграммы, гистограммы, круговой диаграммы и графиков, определяет границы изменения числовой информации. |
| Уровень IV | Представляет информацию разными способами, определяет и объясняет границы изменения числовой информации. |

## Урок 5.19. Прогнозирование

**Стандарт**: 5.1.4. Проверяет и уточняет прогнозы, данные на основе статистических данных.

**Результат обучения:** Даёт прогнозы и проверяет их точность на основе статистических данных.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

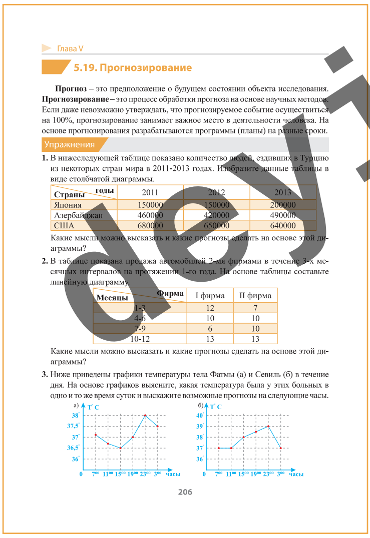
**Метод работы:** выведение понятия, мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** Учитель может с помощью компьютера представить презентацию о прогнозировании. Для выведения понятия прогноза даются прогнозы о разной информации, объектах и анализируются, что отражает эта информация. После выведения понятий прогноза и прогнозирования учитель даёт об этом информацию.


Глава V

5.19. Прогнозирование

**Прогноз** – это предположение о будущем состоянии объекта исследования. **Прогнозирование** – это процесс обработки прогноза на основе научных методов. Если даже невозможно утверждать, что прогнозируемое событие осуществиться на 100%, прогнозирование занимает важное место в деятельности человека. На основе прогнозирования разрабатываются программы (планы) на разные сроки.

Упражнения

**1.** В нижеследующей таблице показано количество людей, ездивших в Турцию из некоторых стран мира в 2011-2013 годах. Изобразите данные таблицы в виде столбчатой диаграммы.

| Страны \ годы | 2011 | 2012 | 2013 |
|---|---|---|---|
| Япония | 150000 | 150000 | 200000 |
| Азербайджан | 460000 | 420000 | 490000 |
| США | 680000 | 650000 | 640000 |

Какие мысли можно высказать и какие прогнозы сделать на основе этой диаграммы?

**2.** В таблице показана продажа автомобилей 2-мя фирмами в течение 3-х месячных интервалов на протяжении 1-го года. На основе таблицы составьте линейную диаграмму.

| Месяцы \ Фирма | I фирма | II фирма |
|---|---|---|
| 1-3 | 12 | 7 |
| 4-6 | 10 | 10 |
| 7-9 | 6 | 10 |
| 10-12 | 13 | 13 |

Какие мысли можно высказать и какие прогнозы сделать на основе этой диаграммы?

**3.** Ниже приведены графики температуры тела Фатмы (а) и Севиль (б) в течение дня. На основе графиков выясните, какая температура была у этих больных в одно и то же время суток и выскажите возможные прогнозы на следующие часы.

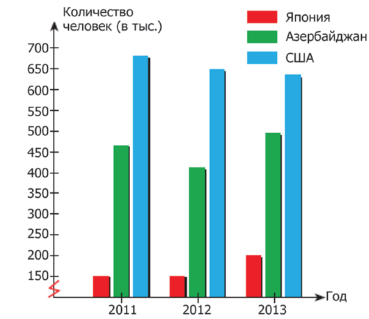


206

**Исследовательский вопрос**: Как даются и проверяются прогнозы о событии или объекте, данные на основе статистических данных?

**Упражнение № 1.** Строится диаграмма. На её основе могут быть высказаны такие мысли:

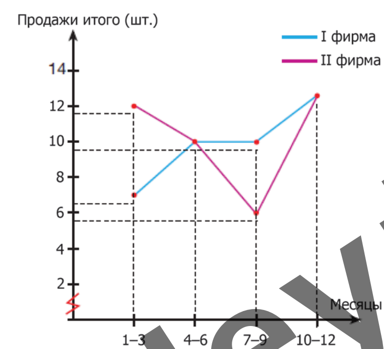
1) В 2011-2013 годах из трёх стран по числу посещаемости Турции на 1-м месте стояли США, на последнем месте – Япония.
2) В 2011, 2012, 2013 годах число людей, прибывающих в Турцию из Азербайджана, сначала уменьшилось, затем увеличилось. Число людей, прибывающих в Турцию из США уменьшилось, а из Японии – увеличилось.
3) Если учащиеся определят среднее число прибывающих из этих стран в Турцию, то смогут определить, что ближе всего к этому числу число прибывающих из Азербайджана.




Поскольку число прибывающих из США в Турцию из года в год уменьшалось, можно сказать, что в 2014 году их число было меньше 640000 людей. Число прибывающих из Японии сперва стабильно не изменялось, затем увеличилось, что позволяет прогнозировать то, что в 2014 году число прибывающих из Японии в Турцию не уменьшится.

**Упражнение № 2.** Основываясь на таблицу, построим линейную диаграмму:

1) В течение года у I фирмы наблюдался упадок в продаже. У II фирмы в течение 9 месяцев наблюдался упадок в продаже продукции, затем в течение 3 месяцев наблюдался рост продажи.
2) Число продаж в течение 4–6 и 10–12 месяцев для обеих фирм одинаково. В каждой фирме за последние три месяца года продажа увеличилась. Определим среднюю продажу в интервале 3 месяцев у обеих фирм:




Для I фирмы: $\dfrac{7+10+10+13}{4}=\dfrac{40}{4}=10$

Для II фирмы: $\dfrac{12+10+6+13}{4}=\dfrac{41}{4}=10,25\approx 10$

В течение года число продаж у обеих фирм одинаково.

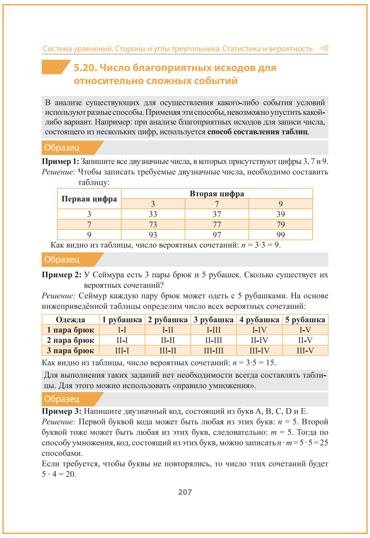
**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о прогнозировании на основе собранной информации и способах проверки этого прогноза.

**Оценивание**

● Прогнозирование

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Затрудняется давать прогноз на основе статистических данных. |
| Уровень II | Даёт прогноз на основе статистических данных, но затрудняется в его проверке. |
| Уровень III | Даёт и самостоятельно проверяет прогноз на основе статистических данных. |
| Уровень IV | Даёт, проверяет прогноз на основе статистических данных и обосновывает свои мысли. |

## Урок 5.20. Число благоприятных исходов для относительно сложных событий




**Стандарт:** 5.2.2. Определяет число благоприятных исходов для относительно сложных событий.
**Результат обучения:** Определяет число благоприятных исходов для событий.
**Форма работы:** коллективная, работа в группах
**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение
**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, карты с записанными цифрами, оборудование ИКТ

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 3 часа.

**Постановка проблемы:** До сведения учащихся доводится наличие разных способов для определения числа благоприятных исходов события. Учитель вместе с учащимися анализирует примеры из учебника. Для наглядности можно записать цифры на картах. Образцы можно подготовить на офисных компьютерных программах. Процесс объяснения графов целесообразно провести, подготовив посредством компьютерных программ (Microsoft PowerPoint).

**Исследовательский вопрос:** Как определяется число благоприятных исходов события?

С целью проведения исследования группам раздаются рабочие листы с заданиями из учебника, которые они должны выполнить.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 1.** б) Для записи двузначных чисел, образованных из чисел 2, 0, 7, 6, составим таблицу:

| 1-ое число | 2-ое число | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 2 | 6 | 7 |
| 2 | 20 | 22 | 26 | 27 |
| 6 | 60 | 62 | 66 | 67 |
| 7 | 70 | 72 | 76 | 77 |

Как видно, здесь возможны 12 случаев. **Ответ:** б) 12 случаев.

**Упражнение № 2.** Для решения задачи составим таблицу:

| Имена | Мячи | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Орхан | белый | белый | чёрный | чёрный | пёстрый | пёстрый |
| Сархан | чёрный | пёстрый | белый | пёстрый | белый | чёрный |

Таким образом, три мяча для двух братьев можно купить в 6 вариантах.

**Ответ:** 6 вариантов.

**Упражнение № 3.** Для решения задачи построим таблицу:

| **Предметы** | **Способы** | | | |
|---|---|---|---|---|
| Математика | I | I | | |
| Физика | | | I | I |
| Азербайджанский язык | II | | II | |
| Литература | | II | | II |

Таким образом, по данному условию, таблицу расписания можно составить в 4 вариантах.

**Ответ:** 4 варианта.

**Упражнение № 4.** Для решения задачи построим таблицу:

| **Транспорт** | **Лодка** | **Катер** | **Вплавь** |
|---|---|---|---|
| **Автобус** | **А-Л** | **А-К** | **А-Вп** |
| **Велосипед** | **В-Л** | **В-К** | **V-Вп** |
| **Автомобиль** | **Аль-Л** | **Аль-К** | **Аль-Вп** |
| **Пешком** | **П-Л** | **П-К** | **П-Вп** |

Таким образом, из города А в город В можно отправиться 12 способами.

**Ответ:** 12 способов.

**Упражнение № 5.** Для выполнения задания не всегда удобен способ составления таблиц. Для выполнения этого задания надо составить таблицу из 7 столбцов и 7 строк, что не целесообразно. При выполнении этого задания можно использовать «правило произведения», данное в учебнике. Каждый фрукт берётся вместе с другими 6 фруктами. Следовательно, следует брать 7 фруктов с другими 6 фруктами. Тогда $n = 7 \cdot 6 = 42$. Но здесь, например, из-за того, что, выбор яблоко-груша или груша-яблоко считается одинаковым, каждый выбор дважды повторился. Поэтому следует число полученных случаев поделить на: $42 : 2 = 21$ **Ответ:** 21 способ.

**Упражнение № 6.** В коробке 8 разноцветных мелков. Из коробки взяли по одному мелку вначале Рена, затем Сеймур, т.е., если Рена взяла белый мелок, то выбранный Сеймуром мелок будет не белого цвета. Тогда по «правилу произведения», $n = 8 \cdot 7 = 56$.

**Ответ:** 56 случаев.

**Упражнение № 7.** Составим таблицу на основе условия:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

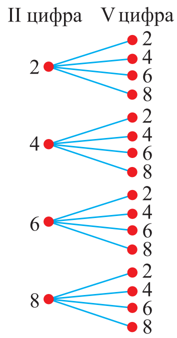
а) при условии повторения цифр возможно 36 вариантов.

б) при условии не повторения цифр возможно 30 вариантов.

Число всех двузначных чисел 90. Следовательно, вероятность записи двузначных чисел из этих цифр в первом случае $\frac{36}{90} = \frac{2}{5}$, во втором же случае $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

**Ответ:** а) 36 случаев, $\frac{2}{5}$; б) 30 случаев, $\frac{1}{3}$.

**Упражнение № 13**. Согласно условию, Гюлай забыла вторую и пятую цифры пятизначного номера телефона. Для построения графа отмечаются четыре точки, обозначенные 2, 4, 6, 8. Согласно графу, здесь возможны $4 \cdot 4 = 16$ случаев. Если неизвестно, являются ли числа чётными или нечётными, тогда каждое из 10 цифр могут быть записаны. В этом случае следует более всего рассмотреть случаи $10 \cdot 10 = 100$.




**Ответ:** 16 случаев, 100 случаев.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о методах определения числа благоприятных исходов события.

**Оценивание**

● Определение

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не может определить число благоприятных исходов события. |
| Уровень II | Определяет способом составления таблиц число благоприятных исходов события, затрудняется в применении способа графа. |
| Уровень III | Самостоятельно определяет число благоприятных случаев события. |
| Уровень IV | Самостоятельно определяет удобные способы для определения числа благоприятных исходов события и объясняет. |

## Урок 5.21. Вероятность события

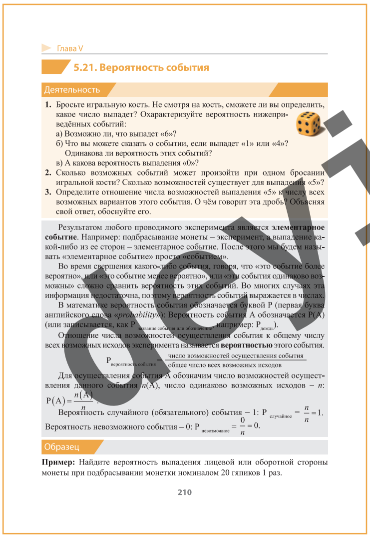
**Стандарт:** 5.2.1. Находит число элементарных событий в проводимом эксперименте и на его основе вычисляет вероятность события.

**Результат обучения:** Определяет число элементарных событий и вычисляет вероятность.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, игральные кости



Глава V

5.21. Вероятность события

Деятельность

1. Бросьте игральную кость. Не смотря на кость, сможете ли вы определить, какое число выпадет? Охарактеризуйте вероятность нижеприведённых событий:
   а) Возможно ли, что выпадет «6»?
   б) Что вы можете сказать о событии, если выпадет «1» или «4»? Одинакова ли вероятность этих событий?
   в) А какова вероятность выпадения «0»?
2. Сколько возможных событий может произойти при одном бросании игральной кости? Сколько возможностей существует для выпадения «5»?
3. Определите отношение числа возможностей выпадения «5» к числу всех возможных вариантов этого события. О чём говорит эта дробь? Объясняя свой ответ, обоснуйте его.

Результатом любого проводимого эксперимента является **элементарное событие**. Например: подбрасывание монеты – эксперимент, а выпадение какой-либо из ее сторон – элементарное событие. После этого мы будем называть «элементарное событие» просто «событием».

Во время свершения какого-либо события, говоря, что «это событие более вероятно», или «это событие менее вероятно», или «эти события одинаково возможны» сложно сравнить вероятность этих событий. Во многих случаях эта информация недостаточна, поэтому вероятность событий выражается в числах.

В математике вероятность события обозначается буквой P (первая буква английского слова «*probability*»): Вероятность события A обозначается P(A) (или записывается, как $P_{\text{название события или обозначение}}$, например: $P_{\text{дождь}}$).

Отношение числа возможностей осуществления события к общему числу всех возможных исходов эксперимента называется **вероятностью** этого события.

$$P_{\text{вероятность события}} = \frac{\text{число возможностей осуществления события}}{\text{общее число всех возможных исходов}}$$

Для осуществления события A обозначим число возможностей осуществления данного события $n(A)$, число одинаково возможных исходов – $n$: $P(A) = \frac{n(A)}{n}$.

Вероятность случайного (обязательного) события – 1: $P_{\text{случайное}} = \frac{n}{n} = 1$.

Вероятность невозможного события – 0: $P_{\text{невозможное}} = \frac{0}{n} = 0$.

Образец

**Пример:** Найдите вероятность выпадения лицевой или оборотной стороны монеты при подбрасывании монетки номиналом 20 гяпиков 1 раз.

210

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 2 часа.

**Постановка проблемы:** выполняется деятельность, данная в учебнике. Во время выполнения деятельности посредством игральных костей выслушивается мнение учащихся. Таким образом, на обсуждение выносится важность выражения вероятности события числами.

**Объяснение учителя**: Учитель с учащимися проводит обсуждение об элементарных событиях, числе благоприятных и возможных случаев их реализации. Даёт формулу нахождения вероятности события и объясняет её.

**Исследовательский вопрос**: Как находится вероятность элементарного события в проводимом эксперименте?

С целью проведения исследования группами выполняются задания из учебника.

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение № 2.** Согласно условию, следует найти вероятность выпадения чисел 2, 4 и 6 при бросании игральной кости 1 раз. Число этих событий равно 3. Число же возможных событий – 6. $P_{\text{выпадение парных очков}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. **Ответ**: $\frac{1}{2}$.

**Упражнение № 3.** Число благоприятных исходов вероятности выпадения 1 при бросании игральной кости 3 раза равно 3. Число возможных событий 6 + 6 + 6 = 18. Следовательно, $P_{\text{выпадение очка 1}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$. **Ответ**: $\frac{1}{6}$.

**Упражнение № 4.** Поскольку в посуде находится 5 + 7 + 4 = 16 сладостей, число вероятных возможностей выбора Самиром одной из них равно 16. Поскольку количество пахлавы 7 штук, число благоприятных исходов – 7. Следовательно,
$P_{\text{пахлава}} = \frac{7}{16}$, $P_{\text{кята}} = \frac{1}{4}$. **Ответ**: $\frac{7}{16}$ и $\frac{1}{4}$.

**Упражнение № 6.** а) Количество двузначных чисел 90 (число возможных случаев события). Числа, оканчивающиеся на цифру 3: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93. Их число 9 (число благоприятных исходов). Следовательно, $P_{\text{двузначные числа, оканчивающиеся на 3}} = \frac{9}{90} = 0{,}1$.

**Примечание**: Событие можно обозначить любой буквой: если отметить событие, при котором число должно оканчиваться на цифру 3, буквой А, то Р(А) = 0,1. **Ответ**: 0,1.

в) отметим буквой В событие, при котором сумма цифр числа составит: 14, 23, 32, 41, 50, число – 5. $P(B) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$. **Ответ**: $\frac{1}{18}$.

г) Обозначим буквой С событие, при котором двузначные числа могли бы делиться на 6: 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96 – числа, делящиеся на 6.
$P(C) = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

**Примечание**: чтобы найти количество чисел, делящихся на 6, удобным способом, следует определить первое и последнее число, делящееся на 6, найти их разность и разделить на 6: (96 – 12) : 6 = 14. К этому числу прибавляется 1 (из-за того, что отняли 12).
**Ответ**: $\frac{1}{6}$.

**Упражнение № 8.** в) Обозначим буквой К событие, при котором при делении на 12 в остатке остаётся 5. Такие числа определяются формулой $m = 12n + 5$.
Числа $m$ = 5, 17, 29, 41, 53, 65, 77, 89 отвечают условию.

Следовательно, $P(K) = \frac{8}{100} = 0{,}08$. **Ответ**: 0,08.

**Упражнение № 9.** Практическая работа выполняется в парах. Здесь основной целью является сравнение полученной учащимися вероятности событий выпадения любой пары при бросании игральных костей с дробью $\frac{1}{6}$.

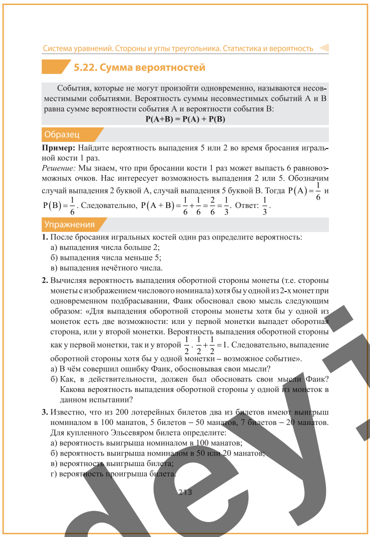
Число, полученное у некоторых учащихся (пар), может быть близко или равно дроби $\frac{1}{6}$ а у некоторых может отличаться. Учащиеся должны понять, что если при бросании двух игральных костей вероятность выпадения одинаковой пары равна $\frac{1}{6}$ то это не означает, что она всегда будет равна $\frac{1}{6}$.

**Оценивание**

● Нахождение вероятности

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Определяет число элементарных событий, затрудняется в нахождении вероятности. |
| Уровень II | Находит число элементарных событий, допускает определённые ошибки при нахождении вероятности. |
| Уровень III | Самостоятельно находит вероятность элементарных событий. |
| Уровень IV | Находит и объясняет вероятность элементарных событий. |

## Урок 5.22. Сумма вероятностей



Система уравнений. Стороны и углы треугольника. Статистика и вероятность

5.22. Сумма вероятностей

События, которые не могут произойти одновременно, называются несовместимыми событиями. Вероятность суммы несовместимых событий A и B равна сумме вероятности события A и вероятности события B:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Образец

**Пример:** Найдите вероятность выпадения 5 или 2 во время бросания игральной кости 1 раз.

*Решение:* Мы знаем, что при бросании кости 1 раз может выпасть 6 равновозможных очков. Нас интересует возможность выпадения 2 или 5. Обозначим случай выпадения 2 буквой A, случай выпадения 5 буквой B. Тогда $P(A)=\frac{1}{6}$ и $P(B)=\frac{1}{6}$. Следовательно, $P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Упражнения

**1.** После бросания игральных костей один раз определите вероятность:
а) выпадения числа больше 2;
б) выпадения числа меньше 5;
в) выпадения нечётного числа.

**2.** Вычисляя вероятность выпадения оборотной стороны монеты (т.е. стороны монеты с изображением числового номинала) хотя бы у одной из 2-х монет при одновременном подбрасывании, Фаик обосновал свою мысль следующим образом: «Для выпадения оборотной стороны монеты хотя бы у одной из монеток есть две возможности: или у первой монетки выпадет оборотная сторона, или у второй монетки. Вероятность выпадения оборотной стороны как у первой монетки, так и у второй $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Следовательно, выпадение оборотной стороны хотя бы у одной монетки – возможное событие».
а) В чём совершил ошибку Фаик, обосновывая свои мысли?
б) Как, в действительности, должен был обосновать свои мысли Фаик? Какова вероятность выпадения оборотной стороны у одной из монеток в данном испытании?

**3.** Известно, что из 200 лотерейных билетов два из билетов имеют выигрыш номиналом в 100 манатов, 5 билетов – 50 манатов, 7 билетов – 20 манатов. Для купленного Эльсевяром билета определите:
а) вероятность выигрыша номиналом в 100 манатов;
б) вероятность выигрыша номиналом в 50 или 20 манатов;
в) вероятность выигрыша билета;
г) вероятность проигрыша билета.

213

**Стандарт:** 5.2.3. Применяет формулу суммы вероятностей.

**Результат обучения:** Находит сумму вероятностей элементарных событий.

**Форма работы:** коллективная, работа в группах

**Метод работы:** мозговая атака, обсуждение

**Ресурсы:** учебник, рабочие листы, игральные кости

**Ход урока:**

На изучение темы отводится 1 час.

**Постановка проблемы:** Пример, данный в учебнике, выполняется в виде эксперимента и, при проведении обсуждения с учащимися, объясняется сумма вероятностей.

**Исследовательский вопрос**: В каких случаях складываются вероятности события?

**Руководство к некоторым заданиям:**

**Упражнение №1.** а) При бросании игральных костей один раз могут выпасть числа больше 2 – 3, 4, 5 и 6. Каждое из них – равновозможное событие. Следовательно, вероятность выпадения каждого из них $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. **Ответ**: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{2}$.

**Упражнение №2.** а) Обосновывая свои мысли, Фаиг утверждает, что вероятность выпадения лицевой стороны как первой, так и второй монетки равняется $\frac{1}{2}$. Это – верная мысль. Но складывать вероятность этих событий неверно, потому что при бросании монеток возможно выпадение у одной из монеток оборотной стороны. В этом случае событие не может быть предположительным.

б) В действительности, здесь существует 4 возможных исхода:

1. Выпадение оборотной стороны у обеих монеток;
2. Выпадение лицевой стороны у обеих монеток;
3. Выпадение у первой монетки оборотной стороны, у второй – лицевой;
4. Выпадение у первой монетки лицевой стороны, у второй – оборотной.

Следовательно, возможны 4 исхода. Два из них (3 и 4) благоприятных исхода.

Тогда $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. **Ответ**: $\frac{1}{2}$.

**Упражнение № 3.** а) Вероятность события выигрыша 100 манатов: $P_{100} = \frac{2}{200} = 0{,}01$.

б) Вероятность события выигрыша 50 манатов: $P_{50} = \frac{5}{200} = 0{,}025$. Вероятность события выигрыша 20 манатов: $P_{20} = \frac{7}{200} = 0{,}035$.

Вероятность события выигрыша 50 или 20 манатов равна сумме вероятности этих событий: P = 0,025 + 0,035 = 0,06. **Ответ**: 0,06.

в) Наличие выигрышного билета говорит о том, что билет с выигрышем 100, 50 или 20 манатов. Следовательно, вероятность наличия выигрышного билета:

P = 0,01 + 0,025. + 0,035 = 0,07. **Ответ**: 0,07.

г) Вероятность наличия билета без выигрыша: $P = \frac{186}{200} = 0{,}93$. **Ответ**: 0,93.

**Обобщение и результат:** Учитель обобщает пройденное о нахождении суммы вероятностей элементарных событий, ещё раз отмечает, сумму верятностей каких элементарных событий можно найти.

**Оценивание**

● Нахождение суммы вероятностей

| Уровни | Образцы критериев оценивания |
|---|---|
| Уровень I | Не может определить сумму вероятностей событий. |
| Уровень II | Находит сумму вероятностей событий в простых случаях. |
| Уровень III | Самостоятельно находит сумму вероятностей событий. |
| Уровень IV | Находит сумму вероятностей событий и обосновывает. |

## Образец критериев для составления заданий для малого суммативного оценивания № 9

| № | Критерии |
|---|---|
| 1 | Применяет теорему о сумме внутренних углов треугольника |
| 2 | Применяет свойства внешнего угла треугольника |
| 3 | Применяет отношение между стороной и углом прямоугольного треугольника |
| 4 | Применяет отношения между сторонами и углами треугольника |
| 5 | Применяет неравенство треугольника |
| 6 | Определяет элементарные события, находит вероятность события |
| 7 | Применяет правило сложения вероятностей |

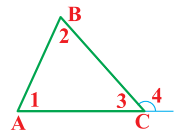
## Образец малого суммативного оценивания № 9

Фамилия: ____________________ Имя:____________

Количество правильных ответов: _____

Количество неправильных ответов: ___ Оценка:___

**1.** Определите градусную меру $\angle 4 = 125°$ в треугольнике ABC, если $\angle 1 + \angle 2$.




**2.** Один из внутренних углов треугольника равен 64°, а внешний угол, не смежный с ним – 75°. Найдите углы треугольника.

**3.** В треугольнике ABC $\angle A = 90°$. Если AB = 26 см и $\angle C = 30°$, найдите длину гипотенузы.

**4.** В треугольнике MNK MN = 5,2 см, MK = 6,7 см и NK = 40 мм. Какой угол в треугольнике наибольший?

**5.** Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 60°, а длина меньшего катета составляет 43 см. Чему равна длина гипотенузы этого треугольника?

**6.** Сколько может быть элементарных событий при одновременном бросании двух игральных костей 1 раз? Какие события являются для выпадения очков, сумма которых равнялась бы 5?

**7.** В мешке есть 12 чёрных, 23 белых, 16 жёлтых шаров. Найдите вероятность того, что из мешка вытащат жёлтый шарик.

**8.** Сеймур задумал двузначное число. Найдите вероятность события, что это число оканчивается на 1 или 5.

**9.** Второй угол треугольника больше первого угла на 10°, меньше третьего на 40°. Найдите эти углы.

**10.** Если в вершине треугольника внешний угол буде равен $125°20'$:

а) чему будет равна градусная мера суммы других внешних углов?

б) чему будет равна градусная мера сумма внутренних несмежных с ним углов?

## Образец большого суммативного оценивания № 2

**1.** Преобразуйте выражение в многочлен:
$2x\,(x^3 - y^4) - (2xy^4 + x^3) =$ ____________________

**2.** Если один из внешних углов треугольника равен 72°, определите вид других внутренних углов треугольника:

____________________

**3.** Преобразуйте выражение в многочлен:
$(x^4 + y^7)^2 =$ ____________________

**4.** Применяя формулы сокращённого умножения, упростите выражение:
$(a - 4)^2 - 2(a - 4)(a + 4) + (a + 4)^2 =$ ____________________

____________________

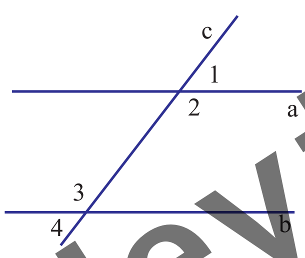
____________________

**5.** Преобразуйте выражение в многочлен:
$(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2 =$ ____________________

____________________

**6.** Вычислите значение выражения: $\dfrac{64 - 17^2}{16^2 - 9} =$

**7.** $a \parallel b$, $c$ – пересекающая прямая. Если $\angle 1 = 52°$, вычислите разность квадратов градусной меры $\angle 4$ и $\angle 3$.




____________________

____________________

____________________

____________________

**8.** Разложите двучлен на множители:
$27x^3 - 8 =$ ____________________

**9.** Если разность двух углов с соответственно параллельными сторонами будет 36°, определите градусную меру этих углов:

____________________

____________________

**10.** Рахида задумала двузначное число. Найдите вероятность того, чтобы сумма цифр задуманного ею числа была равна 9.

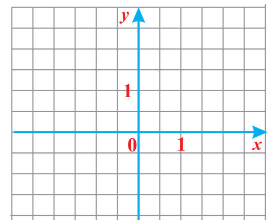
____________________

____________________

____________________

**11.** Найдите корень системы уравнений построением графика

$$\begin{cases} y = x, \\ y = x + 3 \end{cases}$$




**12.** Выполните систему уравнений способом подстановки или сложения сторона к стороне: $\begin{cases} y + 3x = -4, \\ 6x - y = -5 \end{cases}$

**13.** Вместо $k$ запишите такое число, чтобы a) у системы уравнений $\begin{cases} y = 3x - 5, \\ y = kx + 5 \end{cases}$ было одно решение:

b) у системы уравнений $\begin{cases} y = 5x - 7, \\ y = kx - 7 \end{cases}$ не было решения:

**14.** В классе 25 учащихся. Число девочек превышает число мальчиков на 3 человека. Найдите 2% от общего количества мальчиков в классе.

**15.** Длина гипотенузы прямоугольного треугольника 16,4 см, один из прилегающих к ней острых углов равен 60°. Найдите длину одного из его катетов и определите наибольшее число, которому может соответствовать другой катет.

**16.** Самая высокая температура, зафиксированная в Европе, – 48°C, в Азии – 13°F. Определите, какова температура в Фаренгейтах в Европе, а в Цельсиях в Азии.

**17.** Основываясь на таблицу, составьте круговую диаграмму:

| Использование интернета | | | |
|---|---|---|---|
| Wi-Fi | ADSL | Dial-up | Ethernet |
| 56% | 20% | 16% | 8% |

## Рациональные числа. Расстояние между двумя точками

Фамилия:______________________________ Имя:____________________

**1.** Заполните таблицу:

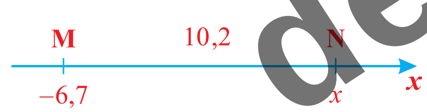
| $x$ (+) | $-\frac{7}{11}$ | 0,3 | $2\frac{5}{14}$ | –3,8 |
|---|---|---|---|---|
| $-2\frac{1}{3}$ | | | | |
| $\frac{13}{4}$ | | | | |
| 1,5 | | | | |
| $-\frac{3}{8}$ | | | | |

**2.** Определите расстояние между точками а) A(0,82) и B(–6,5); б) $M\left(-\frac{7}{4}\right)$ и $N\left(-2\frac{3}{5}\right)$:

а) AB =

б) MN =

**3.** Основываясь на рисунок, найдите $x$:



## Периодические десятичные дроби

Фамилия:________________________________ Имя:_____________________

**1.** Какие из приведённых дробей периодические десятичные дроби? Запишите их.

$\frac{7}{4}=$ $\frac{5}{9}=$ $\frac{4}{7}=$ $\frac{11}{8}=$

$\frac{7}{15}=$ $\frac{21}{17}=$ $\frac{33}{21}=$ $\frac{3}{23}=$

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

**2.** Вместо точек запишите необходимые числа:

а) X = 0,(51)
10X = 10 · ... = 5,... = 5 + ...
10X – ... = ...
9X = ...
X = ...

б) X = 3,5(21)
100X = 100 ·... = 352, ... = 352 +...
100X – X =...
99X = ...
X= $\frac{...}{99}$ = ...

**3.** Данные периодические дроби запишите в виде простых дробей.

0,(6) = 1,(21) =
0(15) = 3,1(5) =
2,31(10) = 0,00(1) =

**4.** Выполните действия:

а) найдите 15% от 3,(5):

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

б) 9,(2) + 11,(3) + 5,6(7) =

______________________________________________________________

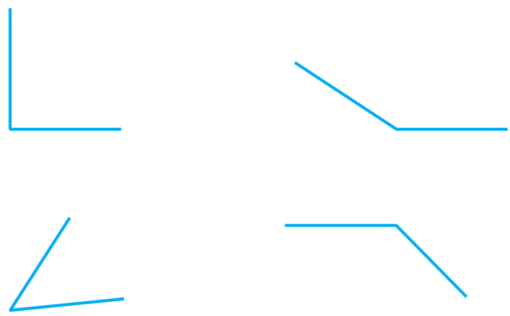
______________________________________________________________

______________________________________________________________

## Биссектриса

Фамилия:________________________________ Имя:_____________________

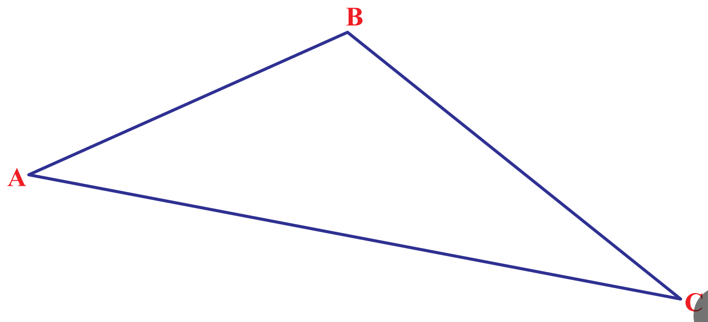
**1.** Назовите данные углы и постройте биссектрису.



______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

**2.** Постройте биссектрисы AM, BN и CK данного треугольника.




Полученные углы измерьте транспортиром и запишите результат.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | ∠A=…; | ∠BAM=…; | ∠CAM=… |
| II | ∠B=…; | ∠ABN=…; | ∠CBN=… |
| III | ∠C=…; | ∠ACK=…; | ∠BCK=… |

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## Множества

Фамилия:________________________________ Имя:_____________________

**1.** Если $A = \{-3; 5; 7; -9; 10; 11; -17; 19; 3(7)\}$
$B = \{-1,5; 0,(6); -9; 11; 3(7)\}$
$C = \{5; -9; -17; 19; 7,(2)\}$,

докажите:

а) $A \cup B = B \cup A$

_____________________________________________

_____________________________________________

б) $A \cap C = C \cap A$

_____________________________________________

_____________________________________________

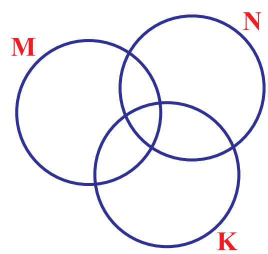
в) $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B$

_____________________________________________

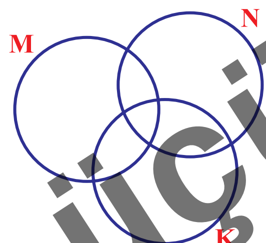
_____________________________________________

**2.** Изобразите на основе диаграмм Эйлера-Венна:

а) $(M \cup N) \cap K$



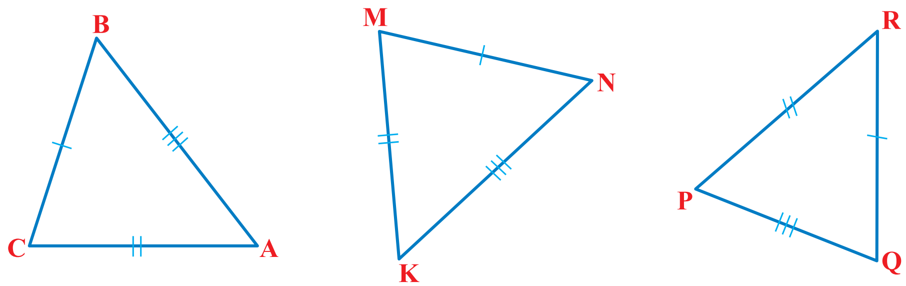

б) $(M \cap N) \setminus K$



## Конгруэнтность треугольников

Фамилия:________________________________ Имя:_____________________

**1.** Из данных треугольников запишите названия конгруэнтных треугольников:




_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

**2.** Если $\Delta ABC \cong \Delta MNK \cong \Delta PRQ$, заполните таблицу.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta ABC$ | $BC = 3$ см | $\angle B = 20°$ | $\angle C = 100°$ | $AB = 5$ см | $\angle A = ?$ |
| $\Delta MNK$ | | | | | |
| $\Delta PRQ$ | | | | | |

**3.** Если углы треугольника ABC $17°30'$ и $48°20'10''$, определите третий угол.

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

**4.** Отрезки AB и MN пересекаются в точке K, $AK = MK$ и $AB = MN$. Обоснуйте, что $\Delta AKN \cong \Delta MKB$.

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

_______________________________________________________________________

## Построение треугольника по трём сторонам

Фамилия:________________________________ Имя:______________________

**1.** Постройте треугольник со сторонами из данных отрезков (с помощью циркуля).


**2.** Посредством циркуля и линейки постройте треугольник со сторонами 3 см, 25 мм, 0,18 см.

## Многочлены

Фамилия:________________________________ Имя:____________________

**1.** Найдите сумму и разность данных многочленов:

$3a + 4b - c$ и $-2{,}1a - 9c + 10b$

а) сумма: ____________________

б) разность: ____________________

**2.** Найдите произведение многочленов:

а) $-3m\left(2mn - \frac{1}{2}k + 4m\right) =$ ____________________

б) $(3x^2 + 7x - 9)(0{,}1x - 3) =$ ____________________

**3.** Решите уравнения:

а) $(x-3)(x+5) - x(x-8) = 9$

б) $x(x-6) - 8(x-6) = 0$

**4.** Данные выражения разложите на множители:

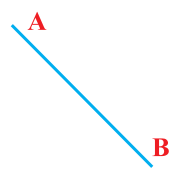
а) $x^2 + 2x + 3(x + 2) =$ ____________________

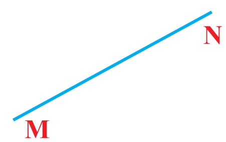
б) $a - 2ab - 3a + 6ab =$ ____________________

## Серединный перпендикуляр отрезка. Симметрия

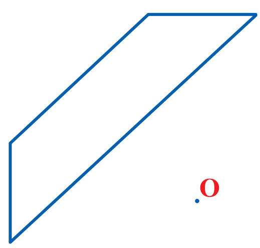
Фамилия:________________________________ Имя:_____________________

**1.** Посредством циркуля постройте серединную точку отрезка АВ, серединный перпендикуляр отрезка MN.




**2.** Относительно точки O постройте фигуру, симметричную данной фигуре.




## Абсолютная и относительная погрешность

Фамилия:________________________________ Имя:_____________________

**1.** Дробь $\frac{1}{6}$ покажите в виде периодической дроби и округлите до разряда десяток. Вычислите абсолютную погрешность полученных чисел.

$\frac{1}{6} = \qquad \approx$

**2.** Округлите первое из данных чисел до разряда десятых, второе – до разряда сотых, третье – до разряда тысячных и вычислите абсолютную погрешность каждого из них.

а) 36,236

б) 0,9357

в) 108,13876

**3.** Данные числа преобразуйте в десятичную дробь и округлите до разряда сотых. Вычислив относительную погрешность, заполните таблицу.

| Число | Округленное число | Относительная погрешность |
|---|---|---|
| $3\frac{1}{3}$ | | |
| $4\frac{7}{8}$ | | |

## Формулы сокращённого умножения

Фамилия:________________________________ Имя:______________________

**1.** Выполните умножение.

а) $(3x + 2)(3x + 2) =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

б) $(x + 5)(x + 5) =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

в) $(5y - 4x)(5y - 4x) =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

**2.** Упростите выражения:

а) $(3m - 1)^2 + 1 =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

б) $12 - (7m - 3)^2 =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

**3.** Данные трёхчлены запишите в виде суммы квадратов или разности квадратов двух выражений.

а) $m^2 + 16m + 64 =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

б) $4a^2 - 12a + 9 =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

**4.** Определите наибольшее или наименьшее значение данных выражений:

а) $x^2 + 30x + 224 =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

б) $-m^2 - 12m - 39 =$ ________________________________________________

________________________________________________________________

## Сбор и презентация информации

Фамилия:________________________________ Имя:____________________

**1.** Используя классный журнал, определите, сколько учащихся класса в последний месяц:

а) не пропустило ни один урок;

б) пропустило 1–4 урока;

в) пропустило 5–8 уроков;

г) пропустило 9–12 уроков;

д) пропустило больше 12 уроков. Собранную информацию представьте в виде:

а) таблицы;

б) столбчатой диаграммы;

в) круговой диаграммы.

## Формы и методы, используемые в преподавании предмета математики

В процессе обучения нет единых форм и методов обучения для всех этапов. Учитель должен уметь выбирать для каждой конкретной темы удобную стратегию обучения. В зависимости от темы и условий учитель должен строить учебный процесс, исходя из непосредственно самого процесса обучения, исследований, внутриклассных обсуждений и тренировок, организации работы в малых группах, способов индивидуального подхода, использования ежедневных бытовых ситуаций, связанных с темой. Каждый учитель должен находить соответствие между темой и методами преподавания этой темы и каждый раз находить ответы на такие вопросы, как «Что я преподаю?», «Чему служат разные методы?», «Кто мои ученики?», «Что они уже знают?» и др. Отталкиваясь от собственного опыта и методических рекомендаций, учитель, учитывая потенциальные потребности учащихся, должен создать баланс между методами обучения, используемыми для полного усвоения математического материала.

Целесообразное обучение образовательной программы (куррикулума) на основе стандартов учитывает правильную организацию и усвоение стандартов всеми учащимися. При этом обучение должно быть организовано таким образом, чтобы наряду с получением новых знаний, учащиеся улучшили навыки применения, закрепили полученную информацию. Процесс обучения должен быть организован последовательно таким образом, чтобы начальные навыки стали базой для последующего обучения. При этом наряду с традиционными формами обучения, важно использовать нестандартные формы обучения – урок-конференция, урок-семинар, урок-обсуждение, урок-упражнение и др. Необходимо использовать формы работы (коллективная, в группах, в парах, индивидуальная), способствующие гибкости процесса обучения. Практика показывает, что использование этих форм работы преобразует урок в активный процесс, создаёт условия для проведения учащимися исследования, поиска.

Традиционное обучение математики основывалось на «двухуровневой» модели. На первом этапе учитель демонстрирует новые понятия или новый метод, а учащиеся всё это наблюдают. На втором этапе организуется индивидуальная работа учащихся, при которой применялось выполнение целевых заданий и новых знаний. Учитель же, наблюдая за деятельностью учащихся, оценивал их. Эта модель требовала освоения необходимого материала за короткий период и самостоятельного применения.

Наиболее эффективным преподаванием математики является «трёхуровневое» обучение. На первом этапе учитель демонстрирует и объясняет новое понятие или новый метод, задаёт вопросы и определяет степень его усвоения. Учащиеся не только наблюдают за объяснением учителя, но и активно участвуют на этом этапе. Активность учащихся на первом этапе урока – обязательное условие эффективного обучения. На этом этапе обучения представление своих знаний некоторыми учащимися даёт гарантию на усвоение материала всеми учащимися. Способность учителя управлять классом и выбирать соответственные способы обучения, прослеживать за последовательностью процесса обучения и ясность обучающего материала обеспечивает в итоге активное участие всех учащихся. Под активностью учащегося на этом этапе обучения понимается его внимательное отношение к теме, о которой даётся информация или которая обсуждается, способность задуматься над ней и его реакция.

Второй этап – переходный этап, и здесь предусмотрено самостоятельное применение понятий или стратегии. Этот шаг осуществляется после перехода учителем с режима регулирования на режим саморегулирования. Методы обучения этого этапа меняются в зависимости от уровня знаний учащихся и особенностей преподаваемого материала. Эти методы помогают учащимся, дают определённое направление. На этом этапе учитель фиксирует деятельность и улучшение результатов учащихся и в зависимости от результатов мониторинга организует самостоятельный или сбалансированный рабочий режим.

На третьем этапе учащиеся работают самостоятельно. При этом в отличие от традиционного урока, третий этап не охватывает большую часть урока и частично бывает коротким. Этот этап служит, как правило, оцениванию знаний учащихся и навыков использования изученных способов в математическом контексте.

Если учащиеся не дают хорошего результата на этапе сбалансированного обучения, учитель возвращается обратно, организовывает более простое и ясное обучение. Если учащиеся, работая самостоятельно, не могут представить ожидаемый результат, тогда для них организовывается более сбалансированная практическая работа.

Для формирования знаний и навыков соответственно стандартам, определённым образовательной программой (куррикулумом), в обучении математики, наряду с традиционными методами, рекомендуются нижепредставленные интерактивные методы:

- Мозговой штурм (мозговая атака);
- ЗХУ;
- Обсуждение;
- Диаграмма Венна;
- Кластер;
- Выведение понятия;
- Вопросы;
- Положение проблемы и др.

**ЗХУ – Знаю. Хочу узнать. Узнал.**

ЗХУ проводится по следующим этапам:

1. Учитель составляет таблицу из трёх столбцов на доске и отмечает следующие разделы: Знаю. Хочу знать. Узнал.
2. Проблема объявляется учителем.
3. Учащиеся рассказывают всё, что они знают о проблеме, и их ответы отмечаются в первом столбце таблицы.
4. Во втором столбце отмечают всё то, что они хотят узнать об этой проблеме.
5. В конце урока ещё раз обращается внимание на эту таблицу и в третьем её столбце отмечается то, что они узнали об этой проблеме.

| Знаю | Хочу узнать | Узнал |
|---|---|---|
| | | |

Тема: Решение уравнений. Что вы знаете об уравнениях? Ответы учащихся отмечаются в первом столбце. Что они хотят узнать по теме отмечается во втором столбце. В конце урока всё, что они узнали по теме отмечается в третьем столбце.

**Мозговой штурм**

Этот метод ещё называют мозговой атакой. Мозговой штурм обеспечивает самостоятельность мышления учащихся. При этом вся группа привлекается в решение поставленной проблемы и за короткое время отмечаются мысли и предложения. Если учитель обращается вопросом, то вопрос должен оставить открытым. Все высказанные мысли принимаются, эти мысли не критикуются и не оцениваются, в результате выполненной работы все эти мысли анализируются и исправляются. Основной целью при мозговом штурме является собрать как можно больше предложений.

**Тема:** Решение задач, приводящих к квадратному уравнению. Что вы знаете о формуле корней квадратного уравнения? Здесь целью является сбор информации о формуле корней квадратного уравнения.

**Кластер (разветвление)**

Кластер является методом, который позволяет войти в тему, создаёт условия для самостоятельного обдумывания темы учащимися. При применении этого метода из мысли рождается новая мысль, из темы – новая тема. Кластер может проводиться при индивидуально, работе в парах, а также в работе в группах. Его применение очень простое и запоминающееся.

Чтобы реализовать разветвление, следует:

1. Взять две бумаги.
2. В центре листа записать слово, термин, относящийся к теме.
3. От этого слова идут разветвления и записываются новые мысли.

**Выведение понятия**

Этот метод проводится в виде игры-загадки и создаёт высокую активность у учащихся. Учитель на доске вывешивает круглую карту, на её оборотной стороне записывает понятие, требуемое от детей. Сторону без надписей показывает учащимся и перечисляет или записывает 2 или 3 слова, относящиеся к особенностям скрытого понятия. На основе этих особенностей учащиеся находят понятие.

Если учащиеся затрудняются найти понятие, учитель перечисляет дополнительные особенности.

**Диаграмма Венна**

Диаграмма Венна строится на пересечении двух и более кругов. Должно быть достаточно места для записей в месте, где круги пересекаются. В указанном месте записываются обратные или общие черты упомянутой проблемы. Допустим, что учащиеся на математике сравнивают трапецию с параллелограммом. С помощью диаграммы Венна можно дать общие и отличные черты. На крайних частях диаграммы (кругов) даются отличительные черты, на пересекающейся части – общие. Использовать диаграмму Венна можно на обучающем, развивающем уроках, а также на обобщающем уроке.

**Вопросы**

Вопросы стимулируют эффективное построение процесса исследования. Играют большую роль в увеличении познавательной деятельности учащихся.

Целесообразно наличие 4–5 вопросов. Постановка вопросов должна быть направлена развитие мышления, прослеживания логической последовательности, содержательной и связанной непосредственно с темой.

**Лекция**

Лекция – это метод передачи информации от учителя учащемуся. Этот метод целесообразно использовать для обогащения темы, её оформленности. Такие короткие лекции проводятся в течение 10-15 минут.

Целесообразным является обратить внимание при чтении лекции на следующее:

- Точное определение целей и задачи лекции;
- Составление плана и раздача его учащимся (или запись его на доске);
- Использование наглядных и технических средств.

Учитель должен сбалансировать лекцию вербально (задавая вопросы) и визуально (наблюдая за мимикой и жестикуляцией учащихся).

**Обсуждение**

Обсуждение – это обмен идей, информацией, впечатлениями, анализов и предложений вокруг темы. Основной его задачей является создание возможностей для нахождения путей решения во время исследования проблемы, принятия правильного решения. Обсуждение вырабатывает у учащихся умения слушать, представлять, формирует культуру задавания вопросов, логическое и критическое мышление учащихся, устную речь.

Проводя обсуждения, сперва учащимся напоминаются правила ведения обсуждения. Тема ясно излагается. Учитель балансирует процесс обсуждения, задавая развивающие вопросы и учитывая ответы учащихся. Не следует задавать при этом закрытые вопросы, требующие односложные ответ «да» или «нет».

Во время обсуждения используются такие вопросы, как «Что произошло? Почему произошло? Могло ли это произойти по-другому и как? Что бы вы сделали в этой ситуации? Что бы вы почувствовали при этой ситуации? Правильно ли это? Почему?».

**Проблемная ситуация**

Этот метод развивает навыки критического мышления, анализа и обобщения.

Учитель сперва готовит проблему и вопросы для обсуждения. Учащиеся делятся на группы из 4–5 человек. Детям раздаются рабочие листы, отражающие проблемную ситуацию. Каждая группа обсуждает один из представленных выходов из ситуации и указывает на путь их решения. После окончания работы группами, в классе проводится общее обсуждение.

**Использованная литература:**

Образовательная программа (куррикулум) по предмету Математика для общеобразовательных школ Азербайджанской Республики (I–XI классы)

**Интернет ресурсы**

http://www.skoool.edu.az/maths59.htm
http://portal.edu.az/index.php?r=eresource/view&id=4&lang=az
http://www.shagird.info
http://www.shagird.az
http://edustudio.ru/
http://1000zИмяach.info/
mat-ege.ru
http://math4school.ru/video_o_matematike.html
http://matematika.ucoz.com
http://interneturok.ru
http://free-math.ru
http://4-8class-math-forum.ru
http://www.ege-trener.ru
http://www.uztest.ru
http://www.math.ru
http://problems.ru
http://urokimatematiki.ru
http://www.ixl.com/math/grИмяe-7
http://www.math.com/
http://interactivesites.weebly.com/math.html
http://www.mathsisfun.com

# Содержание

# МАТЕМАТИКА
# 7

## МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Автор:
**ИСМАЙЫЛОВА СЕВДА ДЖАМАЛ гызы**

Издательский Дом **"Şərq-Qərb"**

| | |
|---|---|
| Ответственный за выпуск | Севиль Исмайлова |
| Дизайнер | Эльшан Гурбанов |
| Верстальщики | Хагани Фарзалиев<br>Александра Самуйлова |
| Корректор | Гюней Магеррамова |
| Технический редактор | Фарида Самедова |
| Главный редактор | Самира Бекташи |
| Технический директор | Аллахверди Керимов |
| Директор издательства | Расим Музаффарли |

Подписано к печати 25.08.2014. Формат бумаги 70×100 1/16. Офсетная печать.
Физ. печ. листов. 14. Заказ 13 433. Тираж 420

Отпечатано в типографии Издательского Дома **"Şərq-Qərb"**
AZ 1123, г. Баку, ул. Ашыг Алескера, 17
Тел.: (99412) 374 83 43, Факс: (99412) 370 18 49

www.eastwest.az
www.fb.com/eastwest.az