

მათემატიკა

8

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$y = x^2$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$



ნაიმა კეჭრემანოვა
მეჭემმედ ქერიმოვი
ილჰამ ჰუსეინოვი

მათემატიკა 8

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების
მე-8 კლასისათვის “მათემატიკის” საგნის
სახელმძღვანელო

დამტკიცებულია აზერბაიჯანის რესპუბლიკის
განათლების სამინისტროს 08.06.2015 წლის
№ 645-ე ბრძანებით.

© აზერბაიჯანის რესპუბლიკის განათლების სამინისტრო - 2017

საავტორო უფლებები დაცულია. სპეციალური ნებართვის გარეშე
ამ გამოცემის ან მისი რომელიმე ნაწილის ხელახალი გამოცემა,
ასლის გადაღება, ელექტრონული საინფორმაციო საშუალებებით
გავრცელება კანონით აკრძალულია.

გამომცემლობა “Radius”

გთხოვთ სახელმძღვანელოსთან დაკავშირებული თქვენი
გამოხმაურება, შენიშვნები და წინადადებები გამოაგზავნოთ
radius_n@hotmail.com და derslik@edu.gov.az ელექტრონულ
მისამართებზე. წინასწარ მადლობას მოგახსენებთ ჩვენთან
თანამშრომლობისათვის!



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

**Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadیرiz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ჰეიდარ ალიევი

აზერბაიჯანელი ხალხის საერთო ეროვნული ლიდერი

სარჩევი

I განყოფილება

1.1. რაციონალური გამოსახულებები

რაციონალური გამოსახულებები.....	8
ეკვივალენტური რაციონალური გამოსახულებები.....	10
რაციონალური გამოსახულებების გამარტივება.....	11
რაციონალური გამოსახულებების გამრავლება, გაყოფა და ახარისხება.....	15
რაციონალური გამოსახულებების შეკრება და გამოკლება.....	18
მოქმედებები რაციონალურ გამოსახულებებზე.....	24
მთელმაჩვენებლიანი ხარისხი.....	26
$y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი.....	30
განმაზოგადებელი დავალებები.....	33

1.2. ოთხკუთხედი

ოთხკუთხედი.....	35
ოთხკუთხედების შიგა და გარე კუთხეები.....	36
პარალელოგრამი.....	38
მართკუთხედი.....	41
რომბი.....	42
ტრაპეცია.....	45
სამკუთხედის შუახაზი.....	46
ტრაპეციის შუახაზი.....	47
მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები.....	49
განმაზოგადებელი დავალებები.....	50

II განყოფილება

2.1. ირაციონალური რიცხვები

$y = x^2$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი.....	53
კვადრატული ფესვები. არითმეტიკული კვადრატული ფესვი.....	54
ირაციონალური რიცხვები.....	57
$y = \sqrt{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი.....	60
მიახლოებითი კვადრატული ფესვი.....	61
ამოცანების ამოხსნა. ირაციონალური რიცხვები.....	62
კვადრატული ფესვი ნამრავლიდან და წილადიდან.....	63
კვადრატული ფესვი ხარისხიდან.....	65
კვადრატული ფესვის შემცველ გამოსახულებათა გარდაქმნა.....	66
განმაზოგადებელი დავალებები.....	70

2.2. პითაგორას თეორემა

პითაგორას თეორემა.....	72
პითაგორას თეორემის გამოყენება.....	75
განმაზოგადებელი დავალებები.....	80

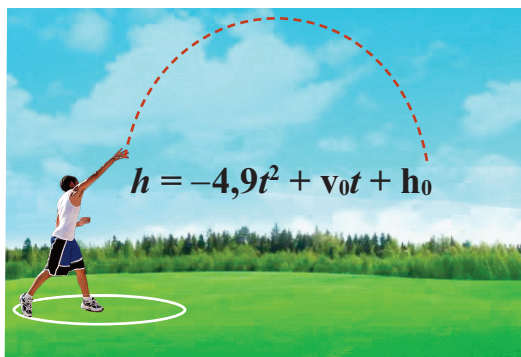
III განყოფილება

3. 1. კვადრატული განტოლებები

კვადრატული განტოლებები.....	82
არასრული კვადრატული განტოლებები.....	83
კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლის ხერხით.....	85
კვადრატული განტოლებების ამოხსნა სრული კვადრატის გამოყოფით.....	90
კვადრატული განტოლების ამოხსნა გრაფიკული ხერხით.....	92
კვადრატული განტოლების ფესვების ფორმულა.....	94
ვიეტის თეორემა.....	98
განტოლებები, რომლებიც კვადრატულზე დაიყვანება.....	101
ამოცანების ამოხსნა კვადრატული განტოლების გამოყენებით.....	102
განმაზოგადებელი დავალებები.....	104

3.2. ფიგურების ფართობი

პარალელოგრამის ფართობი.....	106
სამკუთხედის ფართობი.....	108
ტრაპეციის ფართობი.....	111
რომბის ფართობი.....	114
განმაზოგადებელი დავალებები.....	116



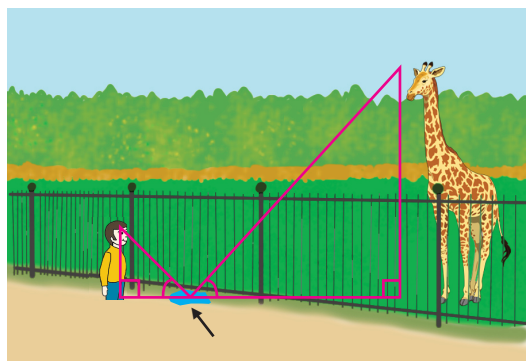
IV განყოფილება

4.1. რაციონალური განტოლებები

რაციონალური განტოლებები.....	119
ამოცანების ამოხსნა რაციონალური განტოლებების გამოყენებით.....	121
განმაზოგადებელი დავალებები.....	124

4.2. ფიგურების მსგავსება

ფიგურების გარდაქმნები, მობრუნება.....	126
თანაფარდობა, პროპორცია.....	130
მასშტაბი.....	132
პროპორციული მონაკვეთები.....	133
მსგავსი ოთხკუთხედეები, მსგავსი სამკუთხედეები.....	135
სამკუთხედეების მსგავსების ნიშნები.....	137
მართკუთხა სამკუთხედეების მსგავსება.....	141
სამკუთხედეების მსგავსების გამოყენება.....	144
აგების ამოცანები.....	148
მედიანების თვისება.....	149
მსგავსების გარდაქმნა. ჰომოთეტია.....	150
მსგავსი ფიგურების ფართობები.....	152
განმაზოგადებელი დავალებები.....	154



V განყოფილება

5.1. უტოლობები

უტოლობები	157
უტოლობების თვისებები	160
უტოლობების შეკრება და გამრავლება	165
რიცხვითი შუალედები	167
ერთცვლადიანი წრფივი უტოლობების ამოხსნა	169
ორმაგი უტოლობების ამოხსნა	173
ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი მარტივი უტოლობები	176
განმაზოგადებელი დავალებები	178

5.2. ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

მართკუთხა სამკუთხედი და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.....	180
ამოცანების ამოხსნა ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით.....	183
ტრიგონომეტრიული იგივეობები.....	187
ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება... ..	188
განმაზოგადებელი დავალებები.....	191

5.3. ინფორმაციის შეგროვება და წარდგენა

მოქმედებები სიმრავლეებზე.....	193
ინფორმაციის შეგროვება.....	194
ინფორმაციის შეგროვება და წარდგენა.....	196
გაზნევის დიაგრამა.....	200
განმაზოგადებელი დავალებები.....	202
ცენტრისკენული ტენდენციის საზომები და უდიდესი სხვაობა.....	203
ალბათობის გაანგარიშება.....	205
მოვლენის მოხდენის შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი.....	207
დამოუკიდებელი და დამოკიდებული ხდომილებები.....	208
განმაზოგადებელი დავალებები.....	211
განყოფილებების მიხედვით განმაზოგადებელი დავალებები.....	213
თვითშემოწმება.....	218
პასუხები.....	220

1.1. რაციონალური გამოსახულებები

1.2. ოთხკუთხედები

ამ განყოფილებაში თქვენ შეისწავლით:

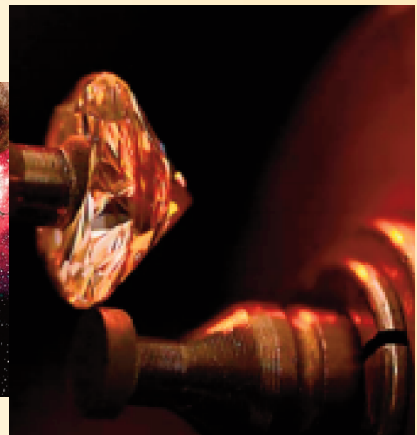
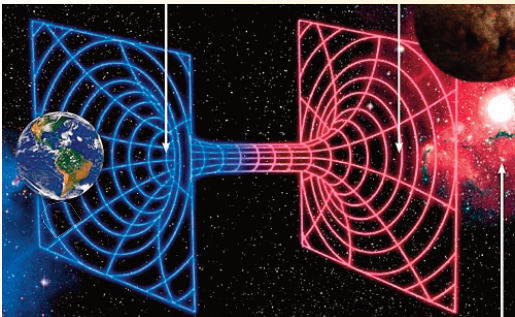
- რაციონალურ გამოსახულებათა გამარტივებას;
- რაციონალურ გამოსახულებებზე მოქმედებების შესრულებას;
- რაციონალური გამოსახულებების შედგენით ამოცანების ამოხსნას;
- ოთხკუთხედების განსაზღვრებას;
- პარალელოგრამის განსაზღვრებას;
- პარალელოგრამების მსგავსი და განსხვავებული თვისებების გამოკვლევას;
- ოთხკუთხედების თვისებების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას.

რაციონალური რიცხვები ფართოდ გამოიყენება ეკონომიკაში, მედიცინაში, ტრანსპორტში, კოსმოსურ კვლევებში, განათლებაში, აკუსტიკაში სხვადასხვა სფეროებში არსებული პრობლემების გადაწყვეტაში და ა.შ.

ოთხკუთხედების შესახებ მიღებული ცოდნის მშენებლობაში, ავეჯის წარმოებაში, დიზაინში და სხვა სფეროებში ფართოდ გამოიყენებასთან ერთად, ამ ცოდნით ვსარგებლობთ ყოველდღიურ ცხოვრებაშიც.

ეს საინტერესოა !

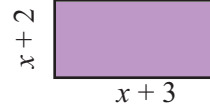
ბელგიელმა მარსელ ტოლკოვსკიმ 21 წლის ასაკში მოიფიქრა ბრილიანტების მოწახნაგების ზუსტი მათემატიკური მოდელი. ტოლკოვსკიმ ამ მოდელით განსაზღვრა ბრილიანტის ისეთი ზომითი პროპორციები, რომლებშიც ქვა იყო გამჭვირვალე, ჰქონდა იდეალური წრიული ფორმა და სინათლის არეკვლის ხარისხი-ბრწყინვალეობა მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევდა. მარსელ ტოლკოვსკის მიერ მოცემული მათემატიკური მოდელის წყალობით მოხდა ბრილიანტების მოწახნაგების ავტომატიზირება. დღეისათვის ბელგია ბრილიანტების დამუშავების მხრივ არის წამყვანი ქვეყანა მსოფლიოში.



რაციონალური გამოსახულებები

გამოკვლევა. დაასახელეთ რაოდენობების შესაბამისად გამოსახულებების მსგავსი და განსხვავებული თვისებები.

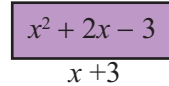
1) $(x+2)$ და $(x+3)$ მართკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებიცაა



$$(x+2) \cdot (x+3) = x^2 + 5x + 6$$

2) თუ $x^2 + 2x - 3$ ფართობის მქონე მართკუთხედის სიგრძეა $(x+3)$ მაშინ სიგანე იქნება:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$$



რაციონალური გამოსახულება

მრავალწევრების ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი მრავალწევრია. მრავალწევრების განაყოფი კი შეიძლება მრავალწევრი არ იყოს. მაგალითად, $(x^4 - 4)$ მრავალწევრის $(x^2 + 2)$ -ზე განაყოფი მრავალწევრია, რადგან არსებობს ისეთი მრავალწევრი, რომლის $(x^2 + 2)$ -ზე ნამრავლი $(x^4 - 4)$ -ის ტოლი ხდება: $(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 4$.

თუმცა $(x^4 + 4)$ -ის $(x^2 + 2)$ -თან შეფარდება კი მრავალწევრი არაა, რადგან არ არსებობს ისეთი მრავალწევრი, რომ მისი $(x^2 + 2)$ -ზე ნამრავლი $(x^4 + 4)$ -ის ტოლი იყოს.

ორი მრავალწევრის შეფარდებას რაციონალური გამოსახულება ეწოდება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, წილადები, რომელთა მრიცხველი და მნიშვნელი მრავალწევრია (განსაკუთრებულ შემთხვევაში ერთწევრია), რაციონალური გამოსახულებებია.

მაგალითები: $\frac{a}{3-b}, \frac{a+b}{b+c}, \frac{2y^3+y^2-1}{4y^2}, \frac{3}{x-5}$

ნებისმიერი მრავალწევრი შეიძლება ჩაეწეროს წილადის სახით, რომლის მნიშვნელიც 1-ია. მაგალითად, $3x^2 + x + 4 = \frac{3x^2 + x + 4}{1}$. ე.ი. მრავალწევრიც რაციონალური გამოსახულებაა. ცვლადების მნიშვნელობებს, რომლებსაც გამოსახულებას აზრი

აქვს, ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები (ცდმ) ეწოდება.

ცვლადების მნიშვნელობებს, რომლებისათვისაც გამოსახულების აზრი აქვს, ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები (ცდმ) ეწოდება.

მრავალწევრს ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის აქვს აზრი (ე.ი. ცვლადისთვის მინიჭებული ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, გამოსახულების შესაბამისი მნიშვნელობის პოვნა შესაძლებელია). რაციონალურ გამოსახულებებს ცვლადების ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის შეიძლება აზრი არ ჰქონდეთ.

მაგალითად, $\frac{x+3}{x-1}$ გამოსახულებას, როცა $x = 1$ აზრი არა აქვს. რადგან როცა, $x = 1$ $\frac{x+3}{x-1}$ მნიშვნელი 0-ის ტოლი ხდება.

ნულზე გაყოფა არ შეიძლება! თუ წილადის მნიშვნელში ერთი ან რამდენიმე ცვლადი იქნება, ამ ცვლადებმა არ შეიძლება მიიღონ ისეთი მნიშვნელობა, რომ მნიშვნელი ნულად იქცეს.

მაგალითები: $\frac{3}{x(x-1)}$ რაციონალურ გამოსახულებაში ვიპოვოთ ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები.

x -ის რა მნიშვნელობისათვის ხდება მნიშვნელი 0-ის ტოლი რომ ვიპოვოთ საჭიროა $x(x-1) = 0$ განტოლების ამოხსნა. ამ განტოლებას ორი ფესვი აქვს 0 და 1. მაშასადამე 0-ისა და 1-ის გარდა ყველა რიცხვი ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობაა.

$\frac{3}{x(x-1)}$ წილადისათვის ცდმ ასე იწერება: $x \neq 0$ და $x \neq 1$.

რაციონალური გამოსახულებები

სასწავლო დაგეგმვა

- 1) გაყოფის მოქმედება შეცვალეთ წილადის ხაზით და გამოსახულება ხელახლა დაწერეთ.
- ა) $(x^2 + 7) : (x - 2)$ ბ) $(2x + 5) : (x + 1)$ გ) $(5x^2 - 1) : (2x - 3)$
- 2) ქვემოთ მოცემული გამოსახულებებიდან შეარჩიეთ მრავალწევრები და რვეულში ჩაიწერეთ.
- ა) $2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - 7$ ბ) $\frac{2}{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 5$ გ) $3x^2 - \frac{1}{4}x + 2$
- 3) ლეტიფი ამბობს, რომ $\frac{x+6}{3}$ გამოსახულება არაა რაციონალური გამოსახულება, თუმცა $\frac{3}{x+6}$ გამოსახულება - რაციონალურია. თქვენ როგორ ფიქრობთ? თითოეულ გამოსახულებაში - უჩვენეთ (3ლმ).
- 4) რომელი რიცხვითი მნიშვნელობის მიღება არ შეუძლია ცვლადს გამოსახულებებში?
- ა) $(x + 3) : x$ ბ) $(x + 5) : (x - 3)$
გ) $(a + 5) : (a - 1)$ დ) $(x^2 + 2x + 5) : (2x + 1)$
- 5) რომელი რიცხვითი მნიშვნელობის მიღება არ შეუძლია ცვლადს?
- ა) $\frac{2x+1}{x-2}$ ბ) $\frac{3x^2-3}{x}$ გ) $\frac{a^2+1}{a-1}$ დ) $\frac{c^3+8}{c+2}$
- 6) იპოვეთ $\frac{y-3}{y}$ წილადის მნიშვნელობა, როცა y -ის მნიშვნელობაა 3; 1; -1.
- 7) ცვლადის რომელი მნიშვნელობისათვის იქნება $\frac{x-2}{x-1}$ წილადის მნიშვნელობა:
- ა) 2-ის; ბ) 0-ის; გ) -1-ის; დ) 0,5-ის ტოლი?
- 8) დაწერეთ ცვლადიანი გამოსახულება, რომელსაც ცვლადის: ა) 1; ბ) -2 მნიშვნელობისათვის აზრი არა აქვს.
- 9) მატარებელმა t საათში s კმ მანძილი გაიარა. გამოსახეთ მატარებლის v საშუალო სიჩქარე s -ისა და t -ს საშუალებით. თუ ა) $t = 4$; $s = 180$; ბ) $t = 1,5$; $s = 120$ იპოვეთ v (კმ/სთ-ობით).
- 10) მდგარ წყალში v კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობა კატერმა მდინარის დინების მიმართულებით 3 საათი იმოძრავა. მდინარის დინების სიჩქარე 2კმ/სთ-ია. რა t დრო (საათობით) დასჭირდება კატერს ამ გზაზე უკან დაბრუნებისათვის?
- ა) $v = 14$ კმ/სთ; ბ) $v = 10$ კმ/სთ თუ, იპოვეთ t .
- 11) მუსას ავტომობილი მაგისტრალურ გზაზე ყოველი 1 ლ ბენზინით 12 კმ-ს, ხოლო ქალაქში კი 8 კმ-ს გადის. ავტომობილი დღის მანძილზე მაგისტრალურ გზაზე a ლიტრს, ხოლო ქალაქში კი b ლიტრ ბენზინს ხარჯავს. დაწერეთ გამოსახულება, რომელიც უჩვენებს საშუალოდ რამდენ კილომეტრს გადის ავტომობილი 1 ლ ბენზინით.
- 12) სულიმანს აკვარიუმში ოქროს თევზები ჰყავს. მან აკვარიუმში 5 ბოცია თევზიც ჩაუშვა. დაწერეთ გამოსახულება, რომელიც უჩვენებს, თუ ბოცია თევზები მთელი თევზების რაოდენობის რა ნაწილს შეადგენენ. სულიმანმა შემდეგ აკვარიუმში კიდევ 4 ნეონის თევზი ჩაუშვა. ახლა აკვარიუმში ბოცია თევზები საერთო თევზების რაოდენობის რა ნაწილს შეადგენენ?



ეკვივალენტური რაციონალური გამოსახულებები

იგივერად ტოლი (ეკვივალენტური) გამოსახულებები.

თუ ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის წილადის მრიცხველსა და მნიშვნელს გავამრავლებთ ან გაყოფთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე წილადის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

ე.ი. როცა $b \neq 0$ და $c \neq 0$ მაშინ $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ ტოლობა სწორია. მოცემული წილადი $\frac{c}{c}$ თან,

ე.ი. 1-ზე გამრავლებას ნიშნავს. ეს კი წილადის მნიშვნელობას არ ცვლის. მსგავსი თვისება რაციონალური რიცხვებისთვისაც სწორია.

რაციონალური გამოსახულების მრიცხველისა და მნიშვნელის ნულისაგან განსხვავებულ ერთი და იგივე რიცხვზე გამრავლებითა და გაყოფით მიღებული წილადი ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები მოცემულის ეკვივალენტური ხდება.

ნიმუში. ვუჩვენოთ $\frac{2}{x}$ და $\frac{2x+2}{x^2+x}$ წილადების ეკვივალენტურობა.

1. $\frac{2}{x}$ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი $(x+1)$ გამოსახულებაზე ($x \neq -1$) გავამრავლოთ.

$$\text{მივიღებთ } \frac{2}{x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x+2}{x^2+x}, \text{ სადაც } x \neq 0 \text{ და } x \neq -1.$$

2. $\frac{2x+2}{x^2+x}$ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი $(x+1)$ გამოსახულებაზე ($x \neq -1$) გაყოფით,

$$\text{მივიღებთ } \frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2}{x} \text{ სადაც } x \neq 0 \text{ და } x \neq -1.$$

ყურადღება! ეკვივალენტურ გამოსახულებებში ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეში ორივე წილადის მიმართ უნდა იყოს განსაზღვრული.

სასწავლო დავალებები

1. ზერადი უჯრების ადგილას ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები ან გამოსახულებები, რომ გამოსახულებათა წყვილები ეკვივალენტური გახდეს.

ა) $\frac{3}{5}$, $\frac{\blacksquare}{30}$ ბ) $\frac{2}{5}$, $\frac{\blacksquare}{35x}$

ბ) $\frac{4}{\blacksquare}$, $\frac{20}{35}$ დ) $\frac{x+2}{x-3}$, $\frac{4x+8}{\blacksquare}$

2. შეამოწმეთ მოცემულ გამოსახულებათა წყვილის ეკვივალენტურობა. განმარტეთ ამ გამოსახულებებიდან ერთი მეორისაგან როგორ მივიღოთ და ცხად განსაზღვრეთ.

ა) $\frac{10x}{15x^2}$, $\frac{2}{3x}$ ბ) $\frac{2x}{x^2-x}$, $\frac{2}{x-1}$

ბ) $\frac{24ax}{18a^2}$, $\frac{4x}{3a}$ დ) $\frac{2(x+1)}{x^2-1}$, $\frac{2}{x-1}$

3. მოცემული წილადების მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთი და იგივე გამოსახულებაზე გამრავლებით ან გაყოფით დაწერეთ მისი ეკვივალენტური სამი წილადი. ცხად უჩვენეთ.

ა) $\frac{4xy}{6x^2}$

ბ) $\frac{12x^2y}{18xy}$

გ) $\frac{2x}{x^2+x}$

დ) $\frac{2x-4}{8x}$

4. $\frac{2x}{x^2-2x} = \frac{2}{x-2}$ ზეჰრა ამბობს, რომ ეს ტოლობა სწორია x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გარდა 2-ისა. თქვენ როგორ ფიქრობთ?

5. ერთი რაციონალური გამოსახულების ეკვივალენტური რამდენიმე გამოსახულების დაწერა შესაძლებელია. მაგალითად, $\frac{2x}{3}$ გამოსახულებისათვის თან $\frac{10x}{15}$ თანაც, როცა $x \neq 0$, $x \neq 0,5$ მაშინ $\frac{4x^3-2x^2}{6x^2-3x}$ გამოსახულება არის ეკვივალენტური. უჩვენეთ როგორ იქნა მიღებული $\frac{2x}{3}$ გამოსახულებიდან ეს გამოსახულებები.

ნამუშაო 1. $\text{a)} \quad \frac{2x^2+4x}{2x^2} = \frac{\cancel{2x}(x+2)}{\cancel{2x}x} = \frac{x+2}{x}, \quad x \neq 0,$

$$\text{д) } \frac{x^2-36}{x^2+6x} = \frac{(x-6)\cancel{(x+6)}}{x\cancel{(x+6)}} = \frac{x-6}{x}, x \neq -6, x \neq 0$$

$$\frac{1-y}{y^2-1} = \frac{(1-y)}{(y-1)(y-1)} = \frac{\cancel{-(y-1)}}{(y+1)\cancel{(y-1)}} = \frac{-1}{y+1} = -\frac{1}{y+1}, y \neq \pm 1.$$

6 გაამარტივეთ გამოსახულებები.

$$\begin{array}{ll} \text{с)} \quad \frac{aby}{abx} & \text{з)} \quad \frac{21a(b+3)}{14b(b+3)} \\ \text{д)} \quad \frac{-6p}{3q} & \text{г)} \quad \frac{x(y-3)}{5(y-3)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{с)} \frac{y^2 - 16}{3y + 12} & \text{д)} \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25} \\ \text{б)} \frac{(c + 2)^2}{5c^2 + 10c} & \text{е)} \frac{3x^2 - 9yx}{x^2 - 9y^2} \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} \text{с)} \frac{3a-12b}{6ab} & \text{д)} \frac{15b-10c}{10b} \\ \text{г)} \frac{2a+4}{3(a+2)} & \text{е)} \frac{5xy+15x}{6y+18} \quad \text{ж)} \frac{10a-10b}{15b-15a} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad & \frac{12a^2 + 8ab}{3ab + 2b^2} & \begin{aligned} a &= 0,5 \\ b &= 0,2 \end{aligned} \\ \text{е)} \quad & \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{2x^2 - 6xy} & \begin{aligned} x &= 1,5; \\ y &= -0,5 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{с) } \frac{x^2-9}{3x+9} \quad \text{д) } \frac{x^2-4}{2x-4} \quad \text{е) } \frac{a^2-6a+9}{a^2-9} \quad \text{ж) } \frac{7y-49}{y^2-49}$$

ა) $\frac{x}{y}$ -ის ტოლი? ბ) მოპირდაპირე ნიშნით $\frac{x}{y}$ -ის ტოლი?

$$\text{с)} \frac{-a+3}{3-a} \quad \text{д)} \frac{x^2-1}{1-x^2} \quad \text{е)} \frac{y^2-xy-3}{3+xy-y^2} \quad \text{ж)} \frac{x^2-3+y}{y+x^2-3}$$

რაციონალური გამოსახულებების გამარტივება

13» გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \frac{2x + cx - 2y - cy}{4x - 4y}$$

$$\text{ბ) } \frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2 + ax - ac - cx}$$

14» ჩაწერეთ გაყოფა წილადის სახით და შეკვეცეთ ეს წილადი.

$$\text{ა) } (4x^2 - a^2) : (2x - a)$$

$$\text{ბ) } (x^3 - 8) : (x^2 + 2x + 4)$$

$$\text{გ) } (x^2 + 3x) : (x^3 + 27)$$

15» გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \frac{3a + 36}{12b + ab}$$

$$\text{ბ) } \frac{25 - x^2}{3x + 15}$$

$$\text{გ) } \frac{2 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$$

16» გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \frac{(2x - 6)^2}{x - 3}$$

$$\text{ბ) } \frac{(3a + 6)^2}{a + 2}$$

$$\text{გ) } \frac{4x^2 - 4}{(2x - 2)^2}$$

17» გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \frac{a^5 + a^3}{a^4 + a^2}$$

$$\text{ბ) } \frac{b^6 + b^4}{b^4 + b^2}$$

$$\text{გ) } \frac{y^7 - y^4}{y^2 - y^5}$$

სამწევრის მამრავლებად დაშლა და რაციონალური გამოსახულებების გამარტივება

თუ რაციონალური გამოსახულების მრიცხველში ან მნიშვნელში მოცემულია სამწვერი, წილადის შეკვეცისათვის მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის სხვადასხვა ხერხი გამოიყენება. $x^2 + bx + c$ სამწვერისათვის თუ შესაძლებელი იქნა ისეთი m და n რიცხვების მოძებნა, რომ მათი ნამრავლი იყოს c -ს ხოლო ჯამი b -ს ტოლი მაშინ:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n).$$

მართლაც თუ, $m \cdot n = c$, $m + n = b$ იქნება, $x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + m \cdot n = x^2 + mx + nx + mn = x(x + m) + n(x + m) = (x + m)(x + n)$ სახით ჩაწერა შეიძლება. ცხადია, რომ როცა b და c მთელი რიცხვებია, მაშინ m და n -იც მთელი რიცხვებია და ისინი c -ს გამყოფებს შორის უნდა მოიძებნოს.

მაგალიტი 1. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3}$ წილადის შეკვეცისათვის ჯერ მრიცხველში და მნიშვნელში მოცემული სამწვერები დავშალოთ მამრავლებად.

$x^2 + 5x + 6$ სამწვერის მამრავლებად დაშლისათვის, უნდა ვიპოვოთ ორი ისეთი დადებითი რიცხვი, რომ ნამრავლი 6, ჯამი კი 5 იყოს. ეს რიცხვებია 2 და 3: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

6-ის მამრავლები	მამრავლების ჯამი
1 და 6	7
2 და 3	5

$x^2 + 2x - 3$ სამწვერის მამრავლებად დაშლისათვის ისეთი ორი რიცხვი უნდა ვიპოვოთ, რომ ნამრავლი -3 ჯამი 2 იყოს: ვინაიდან ეს რიცხვებია 3 და 1 ამიტომ, $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

-3-ის მამრავლები	მამრავლების ჯამი
-3 და 1	-2
3 და -1	2

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{x + 2}{x - 1} \quad x \neq -3, x \neq 1$$

$ax^2 + bx + c$ სამწვერის მამრავლებად დაშლისათვის ორი ისეთი m და n რიცხვი უნდა ვიპოვოთ, რომ $mn = ac$, $m + n = b$. მაშინ $ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c = x(ax + m) + (nx + c) = x(ax + m) + \frac{n}{a}(ax + m) = (ax + m)(x + \frac{n}{a})$

მაგალიტი 2. შეკვეცთ წილადი $\frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3}$

-12-ის მამრავლები	მამრავლების ჯამი
-2 და 6	4
-3 და 4	1

$2x^2 + x - 6$ -ისათვის $mn = 2 \cdot (-6) = -12$, $m + n = 1$

$$2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(2x - 3)$$

$$\frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3} = \frac{(x + 2)(2x - 3)}{2x - 3} = x + 2 \quad x \neq \frac{3}{2}$$

რაციონალური გამოსახულებების გამარტივება

სასწავლო დავალებები

18» დაშალეთ მრიცხველები და მნიშვნელები მამრავლებად და გამარტივეთ გამოსახულებები.

ა) $\frac{x^2 - 7x + 12}{4x^2 - 12x}$

ბ) $\frac{x^2 - x - 6}{2x - 6}$

გ) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}$

დ) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{4x - 2}$

ე) $\frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$

ვ) $\frac{4x^2 + 5x - 6}{x^2 - 2x - 8}$

19» მრავალწევრის მამრავლებად დაშლის სხვადასვა ხერხის გამოყენებით შეკვეცეთ წილადი.

ა) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$

ბ) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x - 8}$

გ) $\frac{x^2 - 6x + 9 - y^2}{x^2 - 3x + xy}$

20» გამარტივეთ და იპოვეთ **ცდმ**.

ა) $\frac{(x+4)^2 - 4(x+4) + 4}{x^2 - 4}$

ბ) $\frac{(x+2)^2 - 2(x+2) - 8}{x^2 - 16}$

21» სავარჯიშოს ამოხსნაში სულ მცირე ერთი შეცდომა მაინც არის დაშვებული. ხელახლა შეასრულეთ სავარჯიშო და იპოვეთ შეცდომები.

$$\frac{6x^2 - x - 1}{9x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1) - (3x - 1)}{(3x + 1)(3x - 1)} = \frac{2x^2 + 1}{3x + 1}, \quad x \neq -\frac{1}{3}$$

22» ქვემოთ მოცემული წილადების მნიშვნელები $12a^2b$ -ზე დაიყვანეთ.

ა) $\frac{5b}{6a}$

ბ) $\frac{2a}{3b}$

ბ) $\frac{3}{4ab}$

დ) $\frac{5b}{12}$

ნიმუში. $\frac{3b}{4a}$ წილადის მნიშვნელი $12a^2b$ -ზე დაიყვანათ.

$12a^2b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b$ ამიტომ მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი $3ab$ -ზე (დამატებით მამრავლზე)

გავამრავლოთ: $\frac{3b \cdot 3ab}{4a \cdot 3ab} = \frac{9ab^2}{12a^2b}$

23» ა) $\frac{7x}{6y}$ წილადი ჩაწერეთ ისეთი წილადის სახით, რომ მნიშვნელი იყოს $12x^2y^3$;

ბ) $\frac{4}{x-y}$ წილადი ჩაწერეთ ისეთი წილადის სახით, რომ მნიშვნელი იყოს $y-x$;

გ) $\frac{a}{a-1}$ წილადი ჩაწერეთ ისეთი წილადის სახით, რომ მნიშვნელი იყოს a^2-1 .

24» გამარტივეთ.

ა) $\frac{2x-2}{x^2+9x-10}$

ბ) $\frac{y^2-6y+8}{y^2+3y-10}$

გ) $\frac{2x^2+2x-12}{4x^2+12x}$

დ) $\frac{3x-6}{2x^2+x-10}$

25» დაამტკიცეთ $\frac{x^2+2x-15}{x-3}$ და $(x+5)$ გამოსახულებების ეკვივალენტურობა. ამ ეკვივალენტურობისათვის რომელი პირობა უნდა დაკმაყოფილდეს?

რაციონალური გამოსახულებების გამარტივება

გამოყენებითი დავალებები

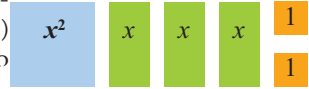
- 26** სამწევრები ალგებრული ბარათების დახმარებით დაშალეთ მამრავლებად და გაამარტივეთ რაციონალური გამოსახულებები.

ა) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

ბ) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

გ) $\frac{x^2 + 7x + 6}{x + 1}$

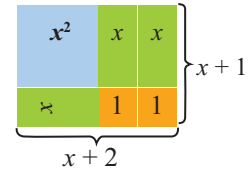
ნიმუში: $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ მოცემული ალგებრული ბარათები ისე განვათავსოთ, რომ $(x+1)$ გვერდის მქონე მართკუთხედი მივიღოთ.



მართკუთხედის მეორე გვერდი $(x+2)$ იქნება.

მაშასადამე, $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{x+1}} = x + 2$$



- 27** თუ მართკუთხედის ფართობი $(x^2 + 5x + 4)$ კვადრატული ერთეულია, სიგანე კი $(x+1)$ ერთეული, დაწერეთ პერიმეტრის მაჩვენებელი გამოსახულება.

- 28** კვადრატული ფორმის ფურცელზე დახაზეთ შეძლებისდაგვარად დიდრადიუსიანი წრე. კვადრატის გვერდი ჩათვალეთ $2x$ -ად.

ა) დაწერეთ კვადრატისა და წრის ფართობების შეფარდების მაჩვენებელი რაციონალური გამოსახულება. უჩვენეთ ცვლადის ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც გამოსახულებას აზრი არა აქვს.

ბ) ქაღალდის მიახლოებით რამდენი პროცენტი უკავია წრეს? პასუხი დაამრგვალოთ მეათედებამდე.

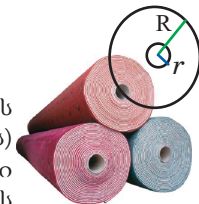
- 29** პარკში n ცალი წითელი და m ცალი თეთრი ბურთულაა. პარკში არსებული ყველა ბურთულის ორმაგი ოდენობის ყვითელი ბურთულა დამატა. პარკიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთულას. დაწერეთ რაციონალური გამოსახულება, რომელიც უჩვენებს, რომ ეს ბურთულა იქნება: ა) წითელი; ბ) თეთრი; გ) ყვითელი და შესაძლებლობის შემთხვევაში იგი გაამარტივეთ.

- 30** დაწერეთ ორი ამოცანა, რომელიც მოითხოვს რაციონალური გამოსახულების შედგენას. ამოცანები შეიძლება იყოს ფართობის, მოძრაობის, ალბათობის შესახებ და ა.შ.

შემოქმედებითი გამოყენება. როგორ შეიძლება გამოვთვალოთ ხვეულში ნოხის სიგრძე?

- 31** ხვეულში ნოხის სიგრძის განსაზღვრის დავალება შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული მიმდევრობით.

ნოხშემოხვეული ცილინდრის ფორმის მუყაოს ფუძის რადიუსი r -ად, ხოლო ნოხის ხვეულის (მთელი ხვეულის) რადიუსი ჩათვალეთ R -ად. დაწერეთ ხვეულის წრიული ზედაპირის ნახიანი ნაწილის განივი ჭრილის ფართობის მაჩვენებელი გამოსახულება.



2. ნოხის სისქე d -თი, ერთ ხვეულში ნოხის სიგრძე l -ით აღვნიშნოთ. დაწერეთ ხვეულის განივი ჭრილის ფართობის მაჩვენებელი გამოსახულება.

3. დაწერეთ d სისქის ნოხის სიგრძის (l) მაჩვენებელი გამოსახულება. რა დამოკიდებულება არსებობს d , l , R და r შორის?

რაციონალური გამოსახულებების გამრავლება, გაყოფა და ახარისხება

რაციონალური გამოსახულებების გამრავლება, გაყოფა და ახარისხება

რაციონალური გამოსახულებების გამრავლების, გაყოფისა და ახარისხების წესები ჩვეულებრივი წილადების გამრავლების, გაყოფისა და ახარისხების წესების მსგავსია.

რაციონალური გამოსახულებების $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$, აქ A, B, C, D რაიმე მრავალწევრებია.
გამრავლება.

ნიმუში 1.
$$\frac{8ab}{5cd} \cdot \frac{6cx}{7ay} = \frac{\cancel{8}b \cdot \cancel{6}cx}{5\cancel{c}d \cdot 7\cancel{a}y} = \frac{48bx}{35dy}$$

რაციონალური გამოსახულებების გაყოფა.

წილადის წილადზე გაყოფისათვის გასაყოფი გამრავლდეს გამყოფის შებრუნებულ რიცხვზე.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

ეს წესი სწორია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც გასაყოფი ან გამყოფი მრავალწევრია.

ნიმუში 2.
$$\frac{x-2}{x+1} : \frac{x^2-4}{x^2+x} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)} \cdot \cancel{(x-2)} \cdot (x+2)} = \frac{x}{x+2}$$

რაციონალური გამოსახულებების ახარისხება: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$

ნიმუში 3.
$$\left(\frac{2x^2}{y}\right)^3 = \frac{(2x^2)^3}{y^3} = \frac{2^3(x^2)^3}{y^3} = \frac{8x^6}{y^3}$$

სასწავლო დავალებები

1 შესრულეთ გამრავლების მოქმედება.

ა) $\frac{9a}{8b} \cdot \frac{4b}{3}$ ბ) $\frac{6b^2}{15} \cdot \frac{10}{3b^2}$ გ) $\frac{x^2}{21c} \cdot \frac{14c}{xb}$ დ) $\frac{9a}{6b} \cdot 12b$

2 შესრულეთ გაყოფის მოქმედება.

ა) $\frac{5a}{4b} : \frac{25a^2}{8}$ ბ) $\frac{3ab}{4xy^2} : \left(-\frac{21ab}{10x^2y}\right)$ გ) $\left(-\frac{6x^2}{m^3n}\right) : \left(-\frac{x}{3mn^2}\right)$

3 შესრულეთ მოქმედებები.

ა) $\frac{2ab}{3x} \cdot \frac{6x^2y}{4ax^2} \cdot \frac{6a}{15b}$ ბ) $\frac{12m^2n^2}{35p^2} \cdot \frac{14n^2}{m^3} \cdot \frac{5mp}{21n^6}$ გ) $\frac{3x}{5y^2} : \frac{9x^2}{2y} : \frac{3x}{5y}$

4 აახარისხეთ.

ა) $\left(\frac{x}{2a}\right)^2$ ბ) $\left(\frac{3a}{b}\right)^3$ გ) $\left(\frac{2n^2}{a^3}\right)^2$

5 შესრულეთ მოქმედებები.

ა) $\left(\frac{8x}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{ab}{4x}\right)^3$ ბ) $\left(\frac{9y}{c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{3y}\right)^3$ გ) $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2 : \left(\frac{4x^3}{3y^2}\right)$

6 შესრულეთ მოქმედებები.

ა) $-\frac{5x}{16a^2b} \cdot 12ab^2$ ბ) $\frac{11a^4}{6b^2} \cdot \frac{5a}{6b^3} : \frac{11b^3}{12a^3}$ გ) $-\frac{3x^2}{5y^3} : \frac{9x^3}{2y^2} \cdot \frac{5y}{3x}$

რაციონალური გამოსახულებების გამრავლება, გაყოფა და ახარისხება

7» შეასრულეთ გამრავლების მოქმედება.

$$\begin{array}{lll} \text{ა)} \frac{x^2 - 2x}{y} \cdot \frac{y^2}{x} & \text{ბ)} \frac{a-b}{ab} \cdot \frac{3ab}{ab-b^2} & \text{გ)} (3x-15y) \cdot \frac{4}{x^2-25y^2} \\ \text{დ)} \frac{a}{a^2-4} \cdot (a^2-4a+4) & \text{ე)} \frac{c^2-16}{15bc} \cdot \frac{5b}{c+4} & \text{ვ)} \frac{(x+3)^2}{2x-4} \cdot \frac{x^2-4}{3x+9} \end{array}$$

8» შეასრულეთ გაყოფის მოქმედება.

$$(10x-15y) : \frac{(2x-3y)^2}{2x} \quad \left| \quad \frac{a^2-3ab}{3b} : (7a-21b) \quad \right| \quad (a^2-4b^2) : \frac{5a-10b}{a}$$

9» შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{array}{lll} \text{ა)} \frac{b-a}{a} \cdot \frac{3a}{a^2-b^2} & \text{ბ)} \frac{a^2-1}{a-b} \cdot \frac{3a-3b}{a^2+a} & \text{გ)} \frac{6a}{x^2-x} : \frac{3ax}{2x-2} \\ \text{დ)} \frac{(a+2)^2}{a^2-9} \cdot \frac{2a-6}{2a+4} & \text{ე)} \frac{c^2+2c}{c^2-1} : \frac{2c+4}{3c-3} & \text{ვ)} \frac{(x+1)^2}{2x+4} : \frac{x^2-1}{3x+6} \end{array}$$

10» გამარტივეთ გამოსახულებები და ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისათვის გამოთვალეთ გამოსახულების შესაბამისი მნიშვნელობა.

$$\text{ა)} \frac{(x+1)^2}{2x+4} \cdot \frac{4x+8}{x^2-1} \quad \text{როცა } x=1,5 \quad \text{ბ)} \frac{c^2+3c}{c^2-4} : \frac{2c+6}{c-2} \quad \text{როცა } c=-1,5$$

11» გამარტივეთ.

$$\frac{x-1}{x^2-x+1} \cdot \frac{x^3+1}{x^2-1} \quad \left| \quad \frac{x+1}{x^2+x+1} : \frac{x^2+2x+1}{x^3-1} \quad \right| \quad \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} : \frac{a^2+ab+b^2}{2a+2b}$$

12» შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{array}{lll} \text{ა)} \frac{2a-8}{3a+3} \cdot \frac{2a^2-4a-16}{a+1} & \text{ბ)} \frac{2x+4}{x^2-7x+10} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} & \text{გ)} \frac{a^3+b^3}{-3a+3b} \cdot \frac{a^2-b^2}{ab-a^2-b^2} \end{array}$$

13» ა) $\frac{2}{x}$ დაწერეთ ორი წილადის ნამრავლის სახით.

ბ) დაწერეთ $\frac{x^2}{x^2-9}$ წილადის $\frac{x}{x-3}$ წილადთან შეფარდების მაჩვენებელი გამოსახულება.

გამოყენებითი დავალებები

14» გულნაზის ოთახის ფართობი (x^2+3x+2) კვადრატული ერთეულია. ერთი ყუთი საღებავი (x^2+2x+1) კვადრატულ ერთეულ ფართობს ჰყოფნის. დაწერეთ ამ ოთახის იატაკის შეღებისათვის საჭირო საღებავის ყუთების რაოდენობის მაჩვენებელი რაციონალური გამოსახულება.

რაციონალური გამოსახულებების გამრავლება, გაყოფა და ახარისხება

- 15** ფიცრები სისქის მიხედვით დახარისხებული, ბლოკებად ერთმანეთზე იყო აწყობილი. იმ ბლოკის სიმაღლე, რომელშიც ფიცრების რაოდენობა იყო $(2n + 1)$ შეიძლება გამოისახოს $\frac{4n^2 - 1}{n + 2}$ გამოსახულებით. დაწერეთ ამ ბლოკში არსებული ფიცრების სისქის შესაბამისი გამოსახულება.



- 16** გამოიკვლიეთ ნიმუში. გაამარტივეთ გამოსახულება. იპოვეთ ის მნიშვნელობები, რომლებიც ცვლადიან გამოსახულებას უაზრობად აქცევენ. ცვლადის პირველადი გამოსახულების მნიშვნელის ნულად გადამქცევი მნიშვნელობა და გამარტივებული გამოსახულების მნიშვნელის ნულად გადამქცევი მნიშვნელობა ერთი და იგივეა?

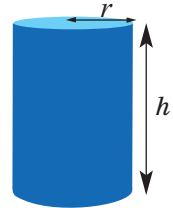
ა) $\frac{2x^2 - 10x}{x + 1} \cdot \frac{x + 2}{3x^2 - 15x}$

ბ) $\frac{x^2 - 14x + 48}{x^2 - 6x} : (x^2 - 8x)$

ნიმუში: $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 9} : \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 3)(x + 3)} : \frac{(x - 4)^2}{(x - 1)(x - 3)} =$
 $= \frac{\cancel{(x - 4)}(x + 4)(x - 1)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}(x + 3)\cancel{(x - 4)}(x - 4)} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{(x + 3)(x - 4)} \quad (x \neq \pm 3, x \neq 4, x \neq 1)$

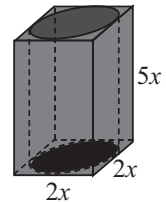
- 17** ცილინდრის ფორმის ჭურჭლის სრული ზედაპირის ფართობი, $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, მოცულობა კი $V = \pi r^2 h$ ფორმულით გამოითვლება. r ჭურჭლის ფუძის რადიუსი, h კი მისი სიმაღლეა.

თხელი მეტალისაგან დამზადებული ჭურჭლის მოცულობის ზრდის გამო ის უფრო ხელსაყრელად ითვლება. იპოვეთ r -ის და h -ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის ცილინდრის ფორმის ჭურჭლის დამზადებისათვის საჭირო მასალის ფართობი და ჭურჭლის მოცულობა და შეადარეთ ისინი. რომელი უფრო ხელსაყრელია:



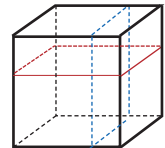
- ა) $r = 12$ სმ, $h = 16$ სმ ზომის ჭურჭელი
 ბ) $r = 16$ სმ, $h = 5$ სმ ზომის ჭურჭელი

- 18** სურათზე მონაცემების მიხედვით დაწერეთ მართკუთხა პარალელეპიპედისა და მასში ჩახაზული ცილინდრის მოცულობების თანაფარდობა.



- 19** მოქანდაკემ x ზომის წიბოიანი კუბის ფორმის მარმარილოს ბლოკს ჯერ ზედა მხრიდან $\frac{1}{2}$ მ სისქის, შემდეგ კი გვერდითა მხრიდან $\frac{2}{3}$ მ სისქის ფენა ჩამოაჭრა.

- 1) დაწერეთ დარჩენილი მარმარილოს ბლოკის მოცულობის მაჩვენებელი რაციონალური გამოსახულება.
 2) დაწერეთ მარმარილოს ბლოკის პირველ ჩამოჭრამდე არსებული წონის მაჩვენებელი გამოსახულება თუ დარჩენილი მარმარილოს ბლოკის მასა 65კგ-ია.

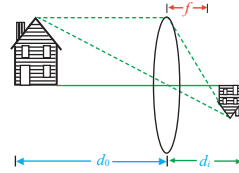


- 20** გაამარტივეთ.

1) $(x - 5) : \frac{x^2 - 11x + 30}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x - 6}{x + 4}$

2) $\frac{a^2 + 11a}{a - 4} : (a^2 + 6a) \cdot \frac{a^2 - 4a}{a + 11}$

რაციონალური გამოსახულებების შეკრება და გამოკლება



ფოტოაპარატით სურათის გადაღებისას სურათის სიზუსტისათვის მნიშვნელოვანია ფოკუსური მანძილის (ობიექტისაგან მოსული პარალელური სინათლის სხივების ლინზიდან გავლისას შეკრებილი ფოკუსის წერტილიდან ლინზის ცენტრამდე არსებული მანძილი) სწორად შერჩევა.

ამ მანძილის გაანგარიშება შეიძლება ქვემოთ მოცემული ფორმულით:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i}$$

f - ფოკუსური მანძილი,
 d_0 - მანძილი ობიექტიდან ფოტოაპარატის ლინზამდე,
 d_i - მანძილი ფოტოაპარატის ლინზიდან ლენტამდე.

წარმოიდგინეთ, რომ თქვენი სურათგადასაღები ობიექტიდან ფოტოაპარატის ლინზამდე მანძილი 50 სმ-ია, ლინზიდან ლენტამდე მანძილი კი 8 სმ-ია. ამ შემთხვევაში, რისი ტოლი იქნება ფოკუსური მანძილი?

რაციონალური გამოსახულებათა შეკრება და გამოკლება

რაციონალური გამოსახულებების შეკრებისა და გამოკლების წესები ჩვეულებრივი წილადების შეკრებისა და გამოკლების წესების მსგავსია.

ტოლმნიშვნელოვანი რაციონალური გამოსახულებების შეკრება და გამოკლება:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}, \text{ სადაც } A, B, C \text{ რაიმე მრავალწევრებია.}$$

ნამუშაო 1.

$$\frac{x^2 - 7}{x - 2} + \frac{3}{x - 2} = \frac{x^2 - 7 + 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 \quad x \neq 2$$

სხვადასხვამნიშვნელოვანი რაციონალური გამოსახულებების შეკრება და გამოკლება:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} \pm \frac{BC}{BD} = \frac{AD \pm BC}{BD} \text{ სადაც } A, B, C, D \text{ რაიმე მრავალწევრებია.}$$

ნამუშაო 2.

$$\frac{x}{x - 4} - \frac{4}{x + 4} \text{ ვიპოვოთ სხვაობა.}$$

პირველი წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის $(x + 4)$ -ზე, მეორე წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის $(x - 4)$ -ზე გამრავლებით გავაერთმნიშვნელიანოთ, ხოლო შემდეგ შევასრულოთ გამოკლება.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x - 4} - \frac{4}{x + 4} &= \frac{x(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} - \frac{4(x - 4)}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{x(x + 4) - 4(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} = \\ &= \frac{x^2 + 4x - 4x + 16}{x^2 - 4^2} = \frac{x^2 + 16}{x^2 - 16} \quad x \neq \pm 4 \end{aligned}$$

სასწავლო დაფალებები

1 შესრულეთ მოქმედებები.

ა) $\frac{a}{3} + \frac{b}{3}$ ბ) $\frac{x}{6} + \frac{a - x}{6}$ გ) $\frac{a + c}{a} + \frac{a - c}{a}$ დ) $\frac{x + 3}{y} + \frac{2 - x}{y}$

2» შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\text{ა) } \frac{a-2}{8} + \frac{2a+5}{8} - \frac{3-a}{8} \quad \text{ბ) } \frac{3x-2y}{2x} + \frac{5x-3y}{2x} - \frac{x-5y}{2x}$$

3» გაამარტივეთ.

$$\begin{array}{lll} \text{ა) } \frac{16}{x-4} - \frac{x^2}{x-4} & \text{ბ) } \frac{25}{b+5} - \frac{b^2}{b+5} & \text{გ) } \frac{y-3}{y^2-64} + \frac{11}{y^2-64} \\ \text{დ) } \frac{a}{a^2-9} - \frac{3}{a^2-9} & \text{ე) } \frac{x^2+4}{x+2} + \frac{4x}{x+2} & \text{ვ) } \frac{a^2-6a}{a-3} + \frac{9}{a-3} \end{array}$$

4» იპოვეთ გამოსახულებების მნიშვნელობა.

$$\text{ა) } \frac{x^2+1}{x-2} - \frac{5}{x-2}, \text{ თუ } x=98; \quad \text{ბ) } \frac{a-7}{a^2-9} + \frac{4-2a}{a^2-9}, \text{ თუ } a=3,1.$$

5» შეასრულეთ შეკრებისა და გამოკლების მოქმედებები.

$$\text{ა) } \frac{2y}{y-1} + \frac{2}{1-y} \quad \text{ბ) } \frac{a^2-8a}{a-4} - \frac{16}{4-a} \quad \text{გ) } \frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{4}{(2-x)^2}$$

6» დაამტკიცეთ, რომ ცხმ-ში გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მნიშვნელობაზე არ არის დამოკიდებული.

$$\text{ა) } \frac{3x+1}{2x-3} + \frac{x+4}{3-2x} \quad \text{ბ) } \frac{5x-8}{4x-8} - \frac{3x-8}{8-4x} \quad \text{გ) } \frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{2}{1-a^2}$$

7» შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{array}{llll} \text{ა) } \frac{a}{2} + \frac{a}{3} & \text{ბ) } \frac{a}{b} - \frac{b}{a} & \text{გ) } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} & \text{დ) } \frac{8b+y}{4b} - \frac{6y+b}{3y} \\ \text{ე) } 3a - \frac{a}{3} & \text{ვ) } \frac{x-2}{2} - x + \frac{x+2}{2} & \text{ზ) } \frac{a^2+c}{a} - a & \\ \text{თ) } p - \frac{p^2-1}{p} & \text{ი) } \frac{(a-b)^2}{a} + 4b & \text{კ) } a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b} & \end{array}$$

8» შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\text{ა) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x} \quad \text{ბ) } \frac{a}{a+1} + \frac{a}{a-1} \quad \text{გ) } \frac{y}{y-2} - \frac{y}{y+2}$$

9» ა) ორი რიცხვის ჯამი 20-ია, ამ რიცხვების შებრუნებული რიცხვების ჯამი კი $\frac{5}{24}$ -ია. იპოვეთ ამ რიცხვების ნამრავლი.

ბ) x და $x+2$ ერთმანეთის მომდევნო ლუწი რიცხვებია. ამ რიცხვების შებრუნებული რიცხვების სხვაობა $\frac{1}{12}$ -ია. იპოვეთ მოცემული რიცხვების ნამრავლი.

რაციონალური გამოსახულებების შეკრება და გამოკლება

უმარტივესი საერთო მნიშვნელის პოვნა

ხშირ შემთხვევებში შესაძლებელია გაცილებით მარტივი საერთო მნიშვნელის პოვნა, ვიდრე წილადების მნიშვნელების ნამრავლიდან მიღებული გამოსახულებაა. სხვადასხვა მნიშვნელიანი წილადებისათვის უმარტივესი საერთო მნიშვნელის მოძებნისათვის ჯერ თითოეული წილადის მნიშვნელის მამრავლებად დავშალა საჭირო. უმარტივესი საერთო მნიშვნელი თითოეული წილადის მნიშვნელში არსებული კოეფიციენტების უმცირესი საერთო ჯერადისა და თითოეული მამრავლის უმაღლესი ხარისხით სხვადასხვა მამრავლების ნამრავლის ტოლია.

ნიმუში 1. შეკრიბეთ წილადები. $\frac{7x}{15y^2}$ და $\frac{y}{18xy}$ $15y^2 = 3 \cdot 5y^2$; $18xy = 2 \cdot 3^2 \cdot x \cdot y$
უმარტივესი საერთო მნიშვნელი:
 $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x \cdot y^2 = 90xy^2$

ამ წილადებიდან თითოეული ჩავწერთ მნიშვნელი $90xy^2$ -ის მქონე ეკვივალენტური წილადების სახით და შევასრულოთ შეკრება.

$$\frac{7x}{15y^2} + \frac{y}{18xy} = \frac{7x \cdot 6x}{15y^2 \cdot 6x} + \frac{y \cdot 5y}{18xy \cdot 5y} = \frac{42x^2}{90xy^2} + \frac{5y^2}{90xy^2} = \frac{42x^2 + 5y^2}{90xy^2}$$

ნიმუში 2. იპოვეთ $\frac{x+12}{4x-16}$ და $\frac{x+4}{2x-8}$ წილადების სხვაობა.

$$\begin{aligned} \frac{x+12}{4x-16} - \frac{x+4}{2x-8} &= \frac{x+12}{4(x-4)} - \frac{x+4}{2(x-4)} = \frac{x+12}{4(x-4)} - \frac{2(x+4)}{2 \cdot 2(x-4)} \\ &= \frac{(x+12) - 2(x+4)}{4(x-4)} = \frac{x+12-2x-8}{4(x-4)} = \frac{-x+4}{4(x-4)} = \frac{-(x-4)}{4(x-4)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

მნიშვნელები დაფაქტორიზაციად უმარტივესი საერთო მნიშვნელად $4(x-4)$

გაყვართ მნიშვნელიანით და პრიმ-ჯგუფში ფრესტები გავხსნათ *მსგავსი წევრები შევაერთოთ* *წილადი შევამცმოთ*

10 დაწერეთ წილადების უმარტივესი საერთო მნიშვნელი.

$$\frac{1}{6a^2b} \text{ და } \frac{1}{4ab^3} \quad \left| \quad \frac{1}{x^2-2x} \text{ და } \frac{1}{(x-2)^2} \right| \quad \left| \quad \frac{2}{a^2-a} \text{ და } \frac{1}{a^2-1} \right|$$

11 შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\text{ა) } \frac{5a-3}{3a} + \frac{a+2}{2a} \quad \text{ბ) } \frac{x+6}{14x} + \frac{2x-9}{21x} \quad \text{გ) } \frac{2b+1}{4b} - \frac{3b-2}{6b}$$

12 შეასრულეთ შეკრებისა და გამოკლების მოქმედებები.

$$\frac{b}{a^2} + \frac{1}{a} \quad \left| \quad \frac{5a-3b}{a^2b} + \frac{4a-5b}{ab^2} \right| \quad \left| \quad \frac{2xy-1}{2x^3} - \frac{3y+4}{3x^2} \right| \quad \left| \quad \frac{b}{2x} - \frac{b}{x^2} \right|$$

13 შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{aligned} \text{ა) } \frac{x}{3(a-1)} - \frac{x}{4(a-1)} \quad & \text{ბ) } \frac{a}{2(a+2)} - \frac{a}{4(a+2)} \quad & \text{გ) } \frac{3x}{2(x+y)} - \frac{2y}{3(x+y)} \\ \text{დ) } \frac{b}{a(a-b)} - \frac{a}{b(a-b)} \quad & \text{ე) } \frac{x}{2x+2} - \frac{x}{3x+3} \quad & \text{ვ) } \frac{x}{5x-10} + \frac{x}{3x-6} \end{aligned}$$

14» გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \frac{x+5}{5x-25} - \frac{3x+5}{x^2-25} \quad \text{ბ) } \frac{y-8}{4y-16} + \frac{4}{y^2-4y} \quad \text{გ) } \frac{b-6}{4-b^2} + \frac{2}{2b-b^2}$$

15» შეასრულეთ შეკრებისა და გამოკლების მოქმედებები.

$$\text{ა) } \frac{a^2-9}{3a-9} - \frac{(a+3)^2}{3a+9} \quad \text{ბ) } \frac{(y+5)^2}{y^2+5y} + \frac{(y-5)^2}{y^2-5y} \quad \text{გ) } \frac{y^2+4y+4}{y^2-4} - \frac{y^2-4}{y^2+4y+4}$$

16» გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{xy+y^2} \quad \text{ბ) } \frac{1}{x^2-xy} - \frac{1}{xy-y^2} \quad \text{გ) } \frac{a+6}{a^2-4} - \frac{2}{a^2+2a}$$

17» გაამარტივეთ და ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისათვის გამოთვალეთ გამოსახულების შესაბამისი მნიშვნელობა.

$$\text{ა) } \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2+x} \quad \text{თუ } x=3 \quad \text{ბ) } \frac{2}{c^2-4} - \frac{1}{c^2-2c} \quad \text{თუ } c=0,5$$

18» შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{aligned} \text{ა) } \frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1} + \frac{8}{x^2-1} \quad & \text{ბ) } \frac{a}{a-2} - \frac{1}{a+2} + \frac{a^2}{4-a^2} \quad & \text{გ) } \frac{4k-12}{k^2+k-12} + \frac{k}{k+4} \\ \text{დ) } \frac{2}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2+3x} - \frac{x+1}{x^2-9} \quad & \text{ე) } \frac{2}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{x+3}{x^2-1} \end{aligned}$$

19» შეასრულეთ შეკრებისა და გამოკლების მოქმედებები.

$$\begin{aligned} \text{ა) } \frac{a}{a^2-9} - \frac{3}{9-a^2} \quad & \text{ბ) } \frac{a^2}{a-1} + \frac{1}{1-a} \quad & \text{გ) } \frac{10a-12}{2a-6} + \frac{6a}{6-2a} \\ \text{დ) } \frac{b-16}{2b-12} - \frac{-3b+8}{2b-12} \quad & \text{ე) } \frac{15x}{5x+1} + \frac{-3}{-1-5x} \quad & \text{ვ) } \frac{2}{x+7} - \frac{-5}{x+7} \end{aligned}$$

20» შეასრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{aligned} \text{ა) } \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} \quad & \text{ბ) } \frac{7}{6a^2} + \frac{5}{3a} \quad & \text{გ) } \frac{x^2-1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x-1} \quad & \text{დ) } \frac{18}{y^2-9} + \frac{3}{3-y} \\ \text{ე) } \frac{3a+3}{6-3a} - \frac{a+2}{a^2-4} \quad & \text{ვ) } \frac{1-x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} \quad & \text{ზ) } \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{x+4}{x^2+3x-4} \end{aligned}$$

21» ა) აღნიშნეთ ცვლადი n -ით. დაწერეთ და შეკრიბეთ ორი რაციონალური გამოსახულება, რომელთაგან ერთს $n = -1$ -სათვის, მეორეს კი $n = 2$ -სათვის აზრი არა აქვს.

ბ) დაწერეთ ორი სხვადასხვა რაციონალური გამოსახულება რომლებსაც შესაბამისად ცვლადის -1 და 2 მნიშვნელობებისათვის აზრი არა აქვთ და იპოვეთ მათი სხვაობა.

რაციონალური გამოსახულებების შეკრება და გამოკლება

22 დაამტკიცეთ რომ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -ში გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადზე არ არის დამოკიდებული.

ა) $\frac{4x+5}{2x-1} + \frac{6x+4}{1-2x}$ ბ) $\frac{5x+1}{x-4} + \frac{x+17}{4-x}$ გ) $\frac{3x+5}{2x+2} + \frac{4x+1}{3x+3}$

23 $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$ იგივეობის გამოყენებით, მოცემული გამოსახულება წარმოადგინეთ ორი რაციონალური გამოსახულების ჯამისა და სხვაობის სახით.

ა) $\frac{a+3}{b}$ ბ) $\frac{x^2-3}{x}$ გ) $\frac{12a+x}{6ax}$

გამოყენებითი დაგვლებები

24 ფერმერი ახალდაბადებული ხზოების მასის დაბალი მაჩვენებლით შემფოთებულია. მან, იმ მიზნით, რომ თითოეული ხზოს მასამ ყოველკვირეულად m კგ-ით მოიმატოს, ისინი მოვლის სპეციალურ რეჟიმზე გადაიყვანა. ფერმერმა ნახა, რომ ამ რეჟიმის პირობებში, მასა კვირაში $(m+2)$ კგ-ით იზრდებოდა. ფერმერს განსაზღვრული დროის შემდეგ ხზოების მასის ზრდის საშუალოდ 20 კგ-მდე მიღწევა სურს. ამ მონაცემების მიხედვით ამოხსენით ქვემოთ მოცემული ამოცანები.

1) რომელ ინფორმაციას გამოსახვენ $\frac{20}{m}$ და $\frac{20}{m+2}$ წილადები?

2) დაწერეთ და გაამარტივეთ ფერმერის მიზნის მიღწევისათვის დაგეგმილი დროისა და ფაქტიური დროის (კვირათა რაოდენობა) სხვაობის მაჩვენებელი გამოსახულება.

25 ძველ ეგვიპტეში მხოლოდ მრიცხველ ერთეულოვანი $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ წილადები გამოიყენებოდა. სხვა წილადები კი ამ წილადების დახმარებით გამოსახებოდა.

მაგალითად, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებებიდან გამარტივებისას უნდა მიღებული იქნას მრიცხველერთეულოვანი წილადი. შეამოწმეთ.

ა) $\frac{5x+6}{10x^2+12x} - \frac{2x}{8x^2}$ ბ) $\frac{3x-2}{9x^2-6x} + \frac{4x}{24x^2}$ გ) $\frac{2x+1}{4x^2+2x} - \frac{3x}{9x^2}$

26 მონაცემების მიხედვით დაწერეთ ფიგურების პერიმეტრის მაჩვენებელი გამოსახულება.

27 დაწერეთ მართკუთხედის ა) სიგრძის; ბ) პერიმეტრის შესაბამისი გამოსახულება.

$S = x^2 - 4$

 $\left. \vphantom{\frac{x^2 - x - 2}{x + 1}} \right\} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

28 ა) გამოთვალეთ $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $\frac{a-b}{b} = 3$.

ბ) გამოთვალეთ $\frac{6ab}{2a+b}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 4$.

- 29) ა) k -ს რამდენი მთელი მნიშვნელობისათვის არის $\frac{2k^2 - 3k + 6}{k}$ გამოსახულების მნიშვნელობა მთელი რიცხვი?
 ბ) k -ს რამდენი მთელი მნიშვნელობისათვის არის $\frac{4m - 8}{m^2 - 3m + 2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა მთელი რიცხვი?

- 30) კალკულატორის გამართულად მუშაობის უზრუნველყოფისათვის სხვადასხვა ალგორითმები გამოიყენება. ცვლადის მოცემული მნიშვნელობებისათვის ეკვივალენტური გამოსახულების მნიშვნელობები მოწმდება.

მოცემულ გამოსახულებათა წყვილში დაამტკიცეთ, რომ მეორე გამოსახულება არის პირველის ეკვივალენტური.

$$1) \frac{A}{B} + \frac{C}{D}; \frac{\frac{AD}{B} + C}{D} \quad 2) AB + DG + EF; \left[\frac{\left(\frac{AB}{D} + G \right) D}{F} + E \right] F$$

- 31) 1) სამირს, გულერსა და ორხანს სურთ, რომ $\frac{x^2 + 7x - 25}{x - 5}$ გამოსახულება წარმოადგინონ მრავალწევრისა და წილადის ჯამის ან სხვაობის სახით. ამათგან რომლის პასუხია სწორი?

სამირ

$$(x + 5) + \frac{7x}{x + 5}$$

გულერ

$$(x + 12) + \frac{35}{x - 5}$$

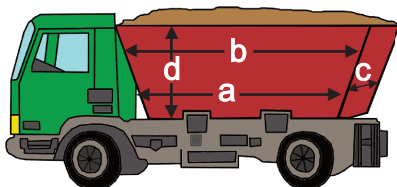
ორხან

$$(x + 8) + \frac{4x + 15}{x - 5}$$

- 2) თქვენ კი $\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ გამოსახულება წარმოადგინეთ მრავალწევრისა და წილადის ჯამის ან სხვაობის სახით.

- 32) A-დან B-მდე გზის s კმ აღმართი, ხოლო $2s$ კმ დაღმართია. ქვეითის სიჩქარე აღმართზე არის v კმ/სთ, ხოლო დაღმართზე სიჩქარე კი $2v$ კმ/სთ-ია. რა t დრო დასჭირდება ქვეითს A-დან B-მდე ჩასვლასა და უკან ჩამოსვლამდე?

- 33) ახალი ასაშენებელი ბინისათვის საშენებლო მოედნის ნარჩენებისაგან გასუფთავება და სამირკვლის ჩასაყრელად გამზადებაა საჭირო. ნარჩენები უნდა გაიზიდოს სურათზე ნაჩვენებ მსგავსი მანქანით. მანქანის ტვირთის ტევადობის $V = \frac{d(a+b)}{2} c$ ფორმულით გაანგარიშება შეიძლება.



- 1) სატვირთო მანქანის ტექნიკურ საბუთებში

ზომებია აღნიშნული: $a = 10$ ფუტი, $b = 17$ ფუტი, $c = 4$ ფუტი, $d = 3,5$ ფუტი 1 ფუტი $\approx 0,3$ მ (ფუტი არის აშშ-ში და ევროპის რიგ ქვეყნებში გამოყენებული სიგრძის ერთეული) ამის გათვალისწინებით, მანქანის ტვირთის მოცულობა გამოსახეთ კუბურ მეტრებში.

- 2) თუ ამ ტერიტორიაზე 40 კუბური მეტრი ნარჩენებია, ერთ სატვირთო მანქანას რამდენ რეისზე შეუძლია ამ ტერიტორიის გასუფთავება?

მოქმედებები რაციონალურ გამოსახულებებზე

განვიხილოთ რაციონალურ გამოსახულებებზე სხვადასხვა მოქმედებების შესახებ ნიმუშები.

ნიმუში 1. შესარულეთ მოქმედებები.

1. გაგაშრაგლოთ.

2. მიღებული შედეგი $x+1$ ორწევრს გამოვავლოთ.

$$x + 1 - \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x}$$

$$\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x} = \frac{(x-3)(\cancel{x+3})}{(\cancel{x+3}) \cdot x} = \frac{x-3}{x}$$

$$x + 1 - \frac{x-3}{x} = \frac{x(x+1) - (x-3)}{x} = \frac{x^2+3}{x}$$

ნიმუში 2. გაამარტივეთ.

$$\frac{\frac{x^2y^2}{a}}{\frac{x^2y}{a^3}} = \frac{x^2y^2}{a} : \frac{x^2y}{a^3} = \frac{x^2y^2}{a} \cdot \frac{a^3}{x^2y} = \frac{\overset{1}{x^2} \overset{1}{y^2}}{\underset{1}{a}} \cdot \frac{\overset{1}{x^2} \overset{2}{a^3}}{\underset{1}{x^2} \underset{1}{y}} = a^2y$$

გამოსახლთი გავლფის მოქმედებთი შევასრულეთ გავლფა შეგვემცოთ

სასწავლო დავალებები

1 შესარულეთ მოქმედებები.

ა) $\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) \cdot \frac{bc}{b-c}$

ბ) $\frac{3a-18}{a^2-25} \cdot \left(1 - \frac{1}{6-a}\right)$

გ) $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \frac{2a}{a+1}$

დ) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{2ab}{a^2-b^2}$

ე) $\frac{1-2x}{2x+1} + \frac{x^2+3x}{4x^2-1} : \frac{3+x}{4x-2}$

ვ) $\frac{2x-y}{xy} - \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$

2 გაამარტივეთ.

ა) $\frac{\frac{m^3}{3n}}{-\frac{m^4}{9n^2}}$

ბ) $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

გ) $\frac{\frac{p^3}{2q}}{-\frac{p^2}{4q}}$

დ) $\frac{\frac{6y^2-6}{8y^2+8y}}{\frac{3y-3}{4y^2+4y}}$

3 გაამარტივეთ წილადების მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთი და იგივე გამოსახულებაზე გამრავლებით.

ა) $\frac{\frac{m+n}{5}}{\frac{m^2-n^2}{5}}$

ბ) $\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}$

გ) $\frac{\frac{2a-b}{b} + 1}{\frac{2a+b}{b} - 1}$

დ) $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$

4 დაამტკიცეთ, რომ ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობებში გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადზე არაა დამოკიდებული.

$\left(\frac{2}{n} + 1\right) \cdot \left(n + \frac{4}{n} - 2\right) : \left(\frac{8}{n^2} + n\right)$

$\frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$

მოქმედებები რაციონალურ გამოსახულებებზე

5» გაამარტივეთ რაციონალური გამოსახულებები.

$$\begin{array}{l} \text{ა) } \frac{(x+y) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)}{(x-y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)} \quad \text{ბ) } \frac{\frac{n-3}{n+3} + \frac{n+3}{n-3}}{\frac{4n}{n^2-9}} \quad \text{გ) } \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{4-x}{x^2-x}}{\frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2-x}} \end{array}$$

6» გაამარტივეთ.

$$\begin{array}{l} \text{ა) } \frac{1 - \frac{9}{t}}{1 - \frac{81}{t^2}} \quad \text{ბ) } \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{გ) } \frac{x+4 + \frac{9}{x-2}}{x+6 + \frac{15}{x-2}} \end{array}$$

7» გაამარტივეთ რაციონალური გამოსახულებები.

$$\begin{array}{l} \text{ა) } \frac{2 - \frac{6}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} \quad \text{ბ) } \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{t}}{\frac{t}{t+6} - \frac{1}{t}} \quad \text{გ) } \frac{\frac{3}{m} - \frac{3}{2m+3}}{\frac{3}{m^2} + \frac{1}{2m+3}} \quad \text{დ) } \frac{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4}}{\frac{x}{x^2-16} + \frac{1}{x+4}} \end{array}$$

8» გამოსახულებებიდან რომლის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული ცვლადზე?

$$\begin{array}{l} \text{ა) } \frac{a}{1 - \frac{3}{a}} + \frac{a}{\frac{3}{a} - 1} \quad \text{ბ) } \frac{a - \frac{3}{2}}{b} - \frac{a + \frac{2}{3}}{b} \quad \text{გ) } \frac{\frac{1}{2} + 2a}{b-1} + \frac{2a + \frac{1}{2}}{1-b} \end{array}$$

სასწავლო დაგეგმვები

9» წარმოადგინეთ წილადის სახით.

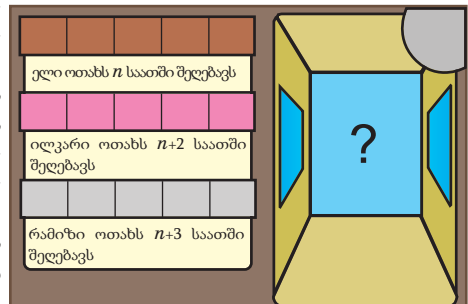
$$\begin{array}{l} \text{ა) } 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} \quad \text{ბ) } 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}} \quad \text{გ) } 3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{x}}} \end{array}$$

10» თუ $y = \frac{2\pi}{d}$ და $x = dr$ მაშინ, y ცვლადი გამოსახეთ π , r , x ცვლადებით.

11» ელიმ, ილკარმა და რამიზმა კითხვაზე ერთ ოთახს რა დროში შედეგავენ, სურათზე წარმოდგენილის მაგვარად უპასუხეს.

ა) დაწერეთ ნებისმიერი ორი მათგანის ერთად მუშაობის შემთხვევაში ოთახის შედეგისათვის საჭირო დროის მაჩვენებელი გამოსახულება. განიხილეთ ყველა შესაძლო ვარიანტი.

ბ) თუ $n = 3$, მაშინ რომელი ორი მათგანის ერთად მუშაობით, შეიძლება ეს ოთახი 2 საათში შეიღებოს?



უარყოფითი მრავალმანკენებლიანი ხარისხი

მიმდევრობით დავწეროთ 10-ის 0; 1; 2; და ა.შ. ხარისხები $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$

ამ სტრიქონში თითოეული რიცხვი მომდევნო რიცხვზე 10-ჯერ ნაკლებია. პირობას ამავე წესით თუ გავაგრძელებთ, 10^0 რიცხვის წინ $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$ რიცხვი, $\frac{1}{10^1}$ რიცხვის წინ $\frac{1}{10^2}$ და ა.შ. უნდა დავწეროთ.

$$\dots \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$$

10^0 რიცხვის მარცხნივ თითოეულის ხარისხის მაჩვენებელი, მისი მომდევნო რიცხვის ხარისხის მაჩვენებელზე 1 ერთეულით ნაკლებია. ეს კანონზომიერება 10^0 რიცხვის მარცხნივ მდგომ რიცხვზე რომ გავაგრძელოთ, ისინი 10-ის უარყოფითმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით: $\frac{1}{10^1}$ -ის ნაცვლად 10^{-1} , $\frac{1}{10^2}$ -ის ნაცვლად 10^{-2} და ა.შ. უნდა დავწეროთ. ზოგადად კი, მიღებულია, რომ თუ $a \neq 0$ მაშინ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ ხარისხის ძირითად თვისებას, $a \neq 0$ -სათვის $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$ -იდან გამომდინარე უნდა მივიღოთ, რომ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

ნიმუში. ა) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ ბ) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ გ) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$

სასწავლო დავალებები

1 უარყოფითი მთელმანკენებლიანი ხარისხი შეცვალეთ წილადით.

ა) 10^{-4} ბ) a^{-2} გ) $(ab)^{-3}$

2 შეცვალეთ წილადი უარყოფითი მთელმანკენებლიანი ხარისხით.

ა) $\frac{1}{10^5}$ ბ) $\frac{1}{a^3}$ გ) $\frac{1}{a}$

3 ა) 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ რიცხვები წარმოადგინეთ ფუძე 2-ის მქონე ხარისხის სახით.

ბ) $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27 რიცხვები წარმოადგინეთ ფუძე 3-ის მქონე ხარისხის სახით.

4 გამოთვალეთ.

ა) 6^{-2} ბ) $(-1)^{-10}$ გ) $(-3)^{-4}$ დ) $(\frac{1}{2})^{-5}$ თ) $(-1 \frac{1}{2})^{-3}$
 დ) -4^{-2} ე) $(-4)^{-2}$ ვ) $-(-3)^{-2}$

5 შეადარეთ ხარისხის მნიშვნელობა ნულთან.

ა) 7^{-3} ბ) $1,6^{-4}$
 გ) $(-3,2)^{-2}$ დ) $(-6,1)^{-5}$

6 სწორია თუ არა, რომ თუ:

- ა) $a > 0$ და n -მთელი რიცხვია, მაშინ, $a^n < 0$
 ბ) $a < 0$ და n -უარყოფითი ლუწი რიცხვია, მაშინ, $a^n > 0$
 გ) $a < 0$ და n -უარყოფითი კენტი რიცხვია, მაშინ, $a^n < 0$?

7 წარმოადგინეთ გამოსახულება წილადის სახით, რომელიც უარყოფით ხარისხს არ შეიცავს.

ა) $2 \cdot x^{-3}$ ბ) $5ab^{-3}$ გ) $3 \cdot (x + y)^{-1}$

8 წარმოადგინეთ წილადი ნამრავლის სახით.

ა) $\frac{2}{b^2}$ ბ) $\frac{3}{x^4}$ გ) $\frac{a}{(b-1)^3}$

9 გამოთვალეთ.

ა) $10 \cdot 2^{-2}$ ბ) $3 \cdot 10^{-2}$
 გ) $2^{-2} + 3^{-1}$ დ) $0,5^{-2} + 0,2^{-1}$

10 გაამარტივეთ.

ა) $(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a - b)^{-1}$ ბ) $(a - b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$

მთელმანკენებლიანი ხარისხის ძირითადი თვისებები

ნებისმიერი $a \neq 0$ და ნებისმიერი m და n მთელი რიცხვებისათვის

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ a^m : a^n &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{mn} \end{aligned}$$

ნებისმიერი $a \neq 0$, $b \neq 0$ და ნებისმიერი n მთელი რიცხვებისათვის

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

მთელმანკენებლიან ხარისხებზე მოქმედებების შესრულება, ნატურალურმანკენებლიანი ხარისხებზე მოქმედებების შესრულების წესით ხდება.

ნიმუში 1. $a^{-14} \cdot a^{17} = a^{-14+17} = a^3$

ამ დასკვნამდე უარყოფითი მთელმანკენებლიანი ხარისხის განსაზღვრებითა და ნატურალურმანკენებლიანი ხარისხის თვისებებითა შეიძლება მისვლა:

$$a^{-14} \cdot a^{17} = \frac{1}{a^{14}} \cdot a^{17} = \frac{a^{17}}{a^{14}} = a^3$$

ნიმუში 2. $(3a^2b^{-3})^{-2} = 3^{-2} \cdot (a^2)^{-2} \cdot (b^{-3})^{-2} = \frac{1}{9} a^{-4}b^6 = \frac{b^6}{9a^4}$

სასწავლო დაგეგმვები

11 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

- ა) $5^{-2} \cdot 5^4$ ბ) $2^{-6} \cdot 2^4 \cdot 2^0$ გ) $3^5 \cdot 3^{-3}$
 დ) $2^2 : 2^{-3}$ ე) $3^{-2} : 3^{-4}$ ვ) $(2^3)^{-2} \cdot (2^{-2})^{-4} \cdot (2^{-2})^0$

12 ფერადი უჯრების ადგილას ჩაწერეთ შესაბამისი რიცხვები.

$a^{\blacksquare} a^4 = a^3$	$(a^{\blacksquare})^4 = a^{-8}$	$(a^2b^{\blacksquare})^4 = a^8b^{-12}$
$(a^3b^6)^{\blacksquare} = \frac{1}{a^9b^{18}}$	$(b^2)^{-4} = \frac{1}{b^{\blacksquare}}$	$a^{\blacksquare} \cdot a^8 = a^6$

13 გამოსახულება წარმოადგინეთ ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლის სახით და იპოვეთ მნიშვნელობა.

- ა) $16 \cdot 2^{-3}$ ბ) $\frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ გ) $8^{-1} \cdot 4^2$ დ) $9^{-4} \cdot 27^3$

14 გამოთვალეთ. ა) $8^{-2} \cdot 4^3$ ბ) $9^{-2} \cdot 27^2$ გ) $\frac{16^{-12}}{4^{-21} \cdot 8^{-3}}$ დ) $\frac{3^{-12} \cdot 9^4}{27^{-2}}$

15 გაამარტივეთ.

- ა) $2ab^{-3} \cdot 5a^{-2}b$ ბ) $3\frac{1}{3}a^5b^{-16} \cdot 0,6a^{-1}b^{18}$ გ) $2,4a^{-5}b^2 : (0,2a^{-3}b^{-2})$

16 გადაქციეთ ნამრავლად. ა) $(2^{-3} \cdot b^3)^{-2}$ ბ) $(6a^{-3}b)^{-1}$ გ) $\left(\frac{2}{3}x^{-5}q^2\right)^{-2}$

17 დაამტკიცეთ, რომ თუ $a \neq 0$, $b \neq 0$ მაშინ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

18 გამოთვალეთ.

- ა) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ბ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ გ) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$ დ) $\left(-1\frac{4}{5}\right)^{-3}$

19 გაამარტივეთ.

- ა) $\frac{9x^{-5}}{y^{-6}} \cdot \frac{y^2}{12x^{-8}}$ ბ) $\frac{56a^2}{2b^{-4}} : \frac{7a^{-1}}{18b^3}$ გ) $\left(\frac{2x^{-1}}{3x^{-2}}\right)^{-2} \cdot 4x^{-1}y$

რიცხვის სტანდარტული სახე

მეცნიერებასა და ტექნიკაში ვხვდებით როგორც ძალიან დიდ, ასევე ძალიან მცირე დადებით რიცხვებსაც. მაგალითად, დედამიწის მოცულობა დიდი რიცხვით - 1083000000000 კმ³-ით, წყლის მოლეკულის დიამეტრი კი მცირე რიცხვით. $0,0000000003$ მ-ით გამოისახება. დიდი და მცირე რიცხვების წილადებისა და ათწილადების სახით ჩაწერა-წაკითხვა, მათზე რაიმე მოქმედებების შესრულება ხელსაყრელი არაა. ასეთ შემთხვევებში რიცხვის $a \cdot 10^n$ სახით წარმოდგენა ხდება. მაგალითად, $137000 = 1,37 \cdot 10^5$ ან $0,0000012 = 1,2 \cdot 10^{-6}$ რიცხვის $a \cdot 10^n$ სახით ჩანაწერს რიცხვის სტანდარტული სახე ეწოდება. სადაც $1 \leq a < 10$ და n მთელი რიცხვია. a -ს რიცხვის მნიშვნელობითი ნაწილი ეწოდება, ხოლო n -ს რიგი.

ნამუშო. 1) $4350000 = 4,35 \cdot 10^6$ (რიგი 6-ია).
2) $0,00000028 = 2,8 \cdot 10^{-7}$ (რიგი 7-ია).

1) გამოსახეთ რიცხვები 10-ის ხარისხის სახით.

ა) 0,01 ბ) 10000000 გ) 0,000001 დ) 0,00000001

2) ჩაწერეთ რიცხვები სტანდარტული სახით.

ა) 48000000 ბ) 287000 გ) 0,0000063 დ) 0,00029
ე) $57 \cdot 10^4$ ვ) $682 \cdot 10^7$ ზ) $0,21 \cdot 10^{-4}$ თ) $127 \cdot 10^{-8}$

3) შეასრულეთ მოქმედებები.

ა) $(3,5 \cdot 10^4) \cdot (4 \cdot 10^{-3})$ ბ) $(8,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (4 \cdot 10^7)$ გ) $(8,4 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3})$

ნამუშო. 1) $(2,5 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-8}) = (2,5 \cdot 6) \cdot (10^5 \cdot 10^{-8}) = 15 \cdot 10^{-3} = 1,5 \cdot 10^{-2}$

2) $(8,2 \cdot 10^{-8}) : (4 \cdot 10^{-10}) = (8,2 : 4) \cdot (10^{-8} : 10^{-10}) = 4,05 \cdot 10^2$

4) დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.

$8,5 \cdot 10^{-1}$ $3,6 \cdot 10^8$ $5,85 \cdot 10^{-3}$ $2,5 \cdot 10^{-1}$ $8,5 \cdot 10^8$

5) ჩაწერეთ სტანდარტული სახით ის რიცხვები, რომლებიც სტანდარტული სახით არ არის მოცემული.

1) $50 \cdot 10^{-5}$ 2) $8,1 \cdot 10^{-2}$ 3) 1 200 000 4) $0,2 \cdot 10^3$ 5) $35 \cdot 10^{-6}$

6) შეასრულეთ მოქმედებები.

ა) $8,5 \cdot 10^{-6} + 4,2 \cdot 10^{-6}$ ბ) $2,3 \cdot 10^{-4} - 1,8 \cdot 10^{-4}$

გ) $6,3 \cdot 10^{-8} - 1,8 \cdot 10^{-9}$ დ) $5,4 \cdot 10^{-7} + 2,3 \cdot 10^{-8}$

ნამუშო.

1) $4,5 \cdot 10^{-7} + 8,2 \cdot 10^{-7} = (4,5 + 8,2) \cdot 10^{-7} = 12,7 \cdot 10^{-7} = 1,27 \cdot 10^{-6}$

2) $6,4 \cdot 10^{-3} - 4,1 \cdot 10^{-4} = 64 \cdot 10^{-4} - 4,2 \cdot 10^{-4} = (64 - 4,2) \cdot 10^{-4} = 59,8 \cdot 10^{-4} = 5,98 \cdot 10^{-3}$

გამოყენებითი დაგაღებები

7) რკინის სიმკვრივე $7,8 \cdot 10^3$ კგ/მ³-ია. იპოვეთ რკინის დაფის მასა, თუ მისი სიგრძე 5 მ-ია, სიგანე $8 \cdot 10^{-1}$ მ, ხოლო სისქე კი $2,5 \cdot 10^{-2}$ მ.

8) ერთი ასტრონომიული სინათლის წელი არის სინათლის მიერ 1 წლის განმავლობაში მანძილი და ეს მანძილი $9,461 \cdot 10^{12}$ კმ-ია. რამდენი ციფრი იქნება ამ რიცხვში, თუ მას კილომეტრებში გამოვსახავთ?

მთელმანგენებლიანი ხარისხი

9) ბარელი თხევად მდგომარეობაში მყოფი ნივთიერებების (ძირითადად ნავთობის) მოცულობის საზომ ერთეულად გამოიყენება. 1 ბარელი ნავთობი მიახლოებით 159 ლ-ია. ტექსტში მოცემული ინფორმაციები ჩაწერეთ სტანდარტული სახით. “BTC მილსადენით გასული წლის აგვისტოში თურქეთის ჯეიჰანის ტერმინალიდან მთლიანობაში 2 მილიარდი ბარელი ნავთობი გაიგზავნა. 2014 წლის განმავლობაში BTC –ის საშუალებით დაახლოებით 34,8 მილიონი ტონა (218 მილიონი ბარელი) ნავთობის ნედლეული მოპოვებულ და გაგზავნილ იქნა. ეს ნავთობი ჯეიჰანში 362 ტანკერზე დაიტვირთა.” რამდენი ბარელი ნავთობი ჩაიტვირთა თითოეულ ტანკერში, თუ ყველა ტანკერში ერთი და იგივე რაოდენობით იტვირთებოდა?

10) ჯანმრთელობა. რეიჰანს ყვავილის მტერის მიმართ ალერგია აქვს. ყვავილის მტერის დიამეტრი $1,2 \cdot 10^{-5}$ მ-სა და $9 \cdot 10^{-5}$ მ-ს შორისაა. რეიჰანის ოჯახის კონდიციონერის ფილტრის $3 \cdot 10^{-7}$ მ-ზე მეტი ზომის მტერის ნაწილაკების (პოლენების) დაჭერა შეუძლია?



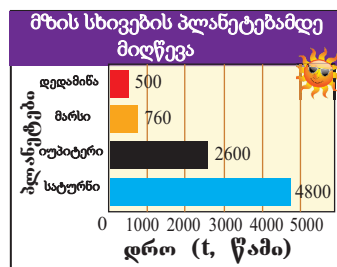
11) მილი აშშ-ში და დიდ ბრიტანეთში სიგრძის საზომ ერთეულად გამოიყენება. 1 მილი $\approx 1,6$ კმ. სინათლე წაშში 186 000 მილს ანუ $3 \cdot 10^5$ კმ მანძილს გადის. დაწერეთ სინათლის მიერ: ა) $5 \cdot 10^5$ წაშში; ბ) 365 დღეში (1 წელიწადში) გავლილი გზა მილობითა და კილომეტრებით სტანდარტული სახით.

12) ფიზიკა. ნივთიერების შემადგენელი მცირე ნაწილაკები ატომები, მასზე კიდევ უფრო მცირე ნაწილაკებისაგან შედგება. ესენია პროტონები, ელექტრონები და ნეიტრონები. პროტონის მასა $1,67 \cdot 10^{-27}$ კგ, ელექტრონის მასა: $0,0000000000000000000000000000911$ კგ, ნეიტრონის მასა: $1,68 \cdot 10^{-27}$ კგ-ია. რომელი ნაწილაკია უფრო მსუბუქი?

13) კომპიუტერი. კომპიუტერის მეხსიერების ზომის ერთეულები ცხრილშია მოცემული. CD-დისკის მეხსიერება, 700 MB, DVD-დისკის მეხსიერება კი 4,7 GB-ია. რამდენჯერ მეტია DVD-ის მეხსიერება CD-ის მეხსიერებასთან შედარებით?

კომპიუტერის მეხსიერება	
1 კილობაიტი (KB) $\approx$	1000 ბაიტი
1 მეგაბაიტი (MB) $\approx$	1 მილიონი ბაიტი
1 გეგაბაიტი (GB) $\approx$	1 მილიარდი ბაიტი.

14) ასტრონომია. მზის სინათლის სიჩქარე წაშში მიახლოებით $3 \cdot 10^8$ მ-ია. ბარგრავში ნაჩვენებია მზის სინათლის ცალკეულ პლანეტებამდე მიღწევის დრო. ამ ინფორმაციების საფუძველზე გამოთვალეთ მანძილი მზესა და პლანეტებს შორის.



15) ბიოლოგია. ახალდაბადებული ბავშვის სხეულში მიახლოებით 26 000 000 000 უჯრედი. ახალგაზრდის სხეულში კი ამაზე დაახლოებით $1,9 \cdot 10^3$ -ჯერ მეტი უჯრედი. დაახლოებით რამდენი უჯრედი ახალგაზრდა ადამიანის სხეულში?

16) სისხლის შემადგენლობა. სისხლის შემადგენლობა. თრომბოციტები სისხლის შედედებაში მონაწილე ნაწილაკებია. სისხლის ყოველ მილილიტრში დაახლოებით $2,7 \cdot 10^8$ თრომბოციტია.

ა) რამდენი თრომბოციტია 6 მილილიტრ სისხლში? ბ) სრულწლოვანი ადამიანის სხეულში დაახლოებით 5 ლიტრი სისხლია. ამ ასაკში მყოფი ადამიანის სხეულში დაახლოებით რამდენი თრომბოციტია? შესაბამისი ინფორმაციები ჩაწერეთ სტანდარტული სახით.

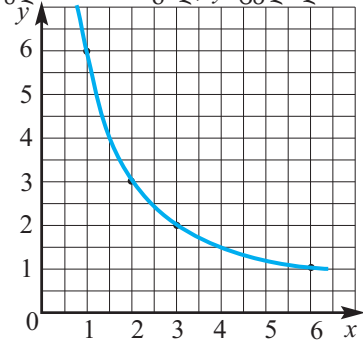
$y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

გამოვიკვლიოთ დამოკიდებულება 6 სმ^2 -ფართობის მქონე მართკუთხედის გვერდებს შორის, თუ სიგრძეს ჩავთვლით x სმ-ად, სიგანეს კი y სმ-ად. ეს დამოკიდებულება $y = \frac{6}{x}$ სახით ჩაგწეროთ. მოცემულ ამოცანაში რადგან x და y სიგრძის საზომებს გამოსახავს, მხოლოდ დადებით მნიშვნელობას იღებს. x -ისათვის მნიშვნელობის მინიჭებით ვიპოვოთ y -ის შესაბამისი მნიშვნელობები და შევადგინოთ ცხრილი. ცხრილიდან ჩანს, რომ რამდენჯერაც იზრდება x -ის მნიშვნელობა, იმდენჯერ მცირდება y -ის მნიშვნელობა. ამრიგად, y ცვლადი x ცვლადთან უკუპროპორციულ დამოკიდებულებაშია.

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

საკოორდინატო სისტემაზე კოორდინატების ცხრილში მოცემული წერტილები აღვნიშნოთ და ეს წერტილები სურათზე ნაჩვენებებით მცოცავი დახრილით შევაერთოთ.

გრაფიკზე აღებულ ნებისმიერი წერტილის აბსცისისა და ორდინატის (მართკუთხედის სიგრძისა და სიგანის) ნამრავლი მუდმივი რჩება და ამ შემთხვევაში 6 -ის (მართკუთხედის ფართობის) ტოლი იქნება.



x და y ცვლადები უკუპროპორციულ დამოკიდებულებაში თუ არიან, მათი მოცემული მნიშვნელობების მიხედვით ამ დამოკიდებულების განსაზღვრა შეიძლება.

ნამუში 1. x და y ცვლადები უკუპროპორციული დამოკიდებულებით იცვლება. როცა $x = 4$, მაშინ $y = 7$. დაწერეთ ეს დამოკიდებულება ფორმულით.

უკუპროპორციულ დამოკიდებულებაში მყოფი ცვლადების შესაბამისი მნიშვნელობების ნამრავლი მუდმივი რჩება. თუ ამ მუდმივს k -თი აღვნიშნავთ $xy = k$. თუ გავითვალისწინებთ პირობას $k = 4 \cdot 7 = 28$, შესაბამისი დამოკიდებულების $y = \frac{28}{x}$ ფორმულით გამოსახვა შეიძლება.

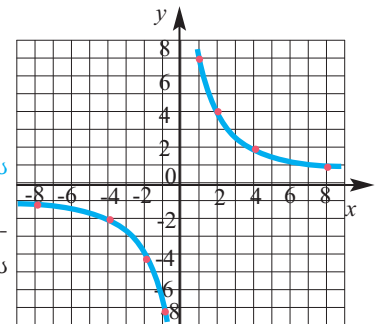
განვიხილოთ $y = \frac{k}{x}$ ფორმულით მოცემული ფუნქციები, რომლებშიც ცვლადები იღებენ როგორც დადებით, ისე უარყოფით მნიშვნელობებს.

ნამუში 2. შევადგინოთ $y = \frac{8}{x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ცხრილი და ავაგოთ გრაფიკი.

x	-8	-4	-2	-1	0	1	2	4	8
y	-1	-2	-4	-8	არ არის განსაზღვრული	8	4	2	1

განსაზღვრება: $y = \frac{k}{x}$ ფორმულით მოცემულ ფუნქციას უკუპროპორციულობის ფუნქცია ეწოდება.

აქ x დამოუკიდებელი ცვლადია, k ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნულის გარდა მთელი რიცხვითი სიმრავლისათვის: $x \neq 0$.



$y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულია. თუ $A(a; b)$ წერტილი $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზეა, $B(-a; -b)$ წერტილიც ამ გრაფიკზეა. $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს **ჰიპერბოლა** ეწოდება. ჰიპერბოლას ორი შტო აქვს.

როცა $k > 0$ მაშინ x და y -ის ერთნაირნიშნაობის გამო ჰიპერბოლას შტოები I და III მეოთხედშია, ხოლო როცა $k < 0$, მაშინ x და y -ის სხვადასხვანიშნაობის გამო - II და IV მეოთხედშია.

რაც უფრო ახლოს იქნება მეტი იქნება გრაფიკზე მყოფი წერტილის აბსოლუტური მნიშვნელობა, მით უფრო ეს წერტილი აბსცისთა ღერძთან.

$y = \frac{k}{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

სახსრავლო დავალებები

1» შეადგინეთ $y = \frac{4}{x}$ ფუნქციის შესაბამისი ცხრილი და ააგეთ გრაფიკი

2» ააგეთ $y = \frac{-8}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი. გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ:

- ა) x -ის 4; 2,5; -2,5-ის ტოლი მნიშვნელობების შესაბამისი y -ის მნიშვნელობები;
ბ) y -ის 8; -2 მნიშვნელობებისათვის x -ის შესაბამისი მნიშვნელობები.

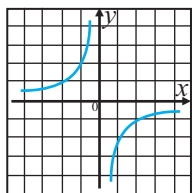
3» x და y ცვლადები უკუპროპორციული დამოკიდებულებით იცვლებიან.

- ა) როცა $y = 24$ მაშინ, $x = 8$. იპოვეთ y , როცა $x = 6$.
ბ) როცა $y = 2,7$ მაშინ, $x = 8,1$. იპოვეთ x როცა $y = 0,9$.
გ) როცა $x = \frac{1}{2}$ მაშინ, $y = 16$ იპოვეთ x როცა $y = 32$.

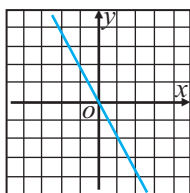
4» $A(3; 4)$ წერტილი $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს იპოვეთ k და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი.

5» $A(6; 2)$ წერტილი $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკზე მდებარეობს. $B(\text{■}; 4)$, $C(-4; \text{■})$, $D(0,5; \text{■})$ წერტილებიც ამ გრაფიკზე მდებარეობენ. იპოვეთ ფერადი უჯრების შესაბამისი კოორდინატები.

6» ქვემოთ მოცემული გრაფიკებიდან რომელია პირდაპირი და რომელია უკუპროპორციული ფუნქციის გრაფიკი?



ა)



ბ)

7» რომელია პირდაპირი და რომელია უკუპროპორციული დამოკიდებულებები? რომელი არ ეკუთვნის არც ერთს?

ა) $y = 5x$ ბ) $y = \frac{2}{x}$ გ) $y = \frac{1}{2}x$

დ) $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x}$ ე) $y = \frac{1}{3}x + 3$

გამოყენებითი დავალებები

8» ერთსა და იმავე კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $y = \frac{6}{x}$ და $y = 7 - x$ ფუნქციების გრაფიკები და იპოვეთ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილები.

9» ორი კაცი ბერკეტის ფიცარზე დგას. 50 კგ წონის მქონე კაცი ფიცარზე წონასწორობის ცენტრიდან 1,5 მ მანძილზეა. რა მანძილზე უნდა გაჩერდეს წონასწორობის ცენტრიდან 60 კგ წონიანი კაცი, რომ წონასწორობა შენარჩუნებული იქნეს?

10» ა) x და y უკუპროპორციულ დამოკიდებულებაში არიან. როცა $x = 5$, მაშინ $y = 40$. იპოვეთ y , როცა $x = 8$. ფორმულით დაწერეთ დამოკიდებულება ორ სიდიდეს შორის.

ბ) x და y პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებაში არიან. როცა $x = 5$, მაშინ $y = 10$ იპოვეთ y , როცა $x = 20$. ფორმულით დაწერეთ დამოკიდებულება ორ სიდიდეს შორის.

- 11** 1) მაღაზიის ვიტრინის შევსებისა და მოწყობის სამუშაოებს 6 თანამშრომელი 8 საათში ასრულებს. 1) ამ სამუშაოსათვის ერთ დღეს 6 საათი გამოიყო. რამდენი დამატებითი მუშაკი სჭირდება?
- 2) ორი თანამშრომელი დღეს სამუშაოზე არ უნდა მოვიდეს. რამდენ საათში შეასრულებენ ამ სამუშაოს დანარჩენი თანამშრომლები?

- 12** დაბის მცხოვრებლებმა მიიღეს გადაწყვეტილება გაარემონტონ ფეხბურთის მოედანი. სარემონტო სამუშაოებისათვის 10 000 მანეთია საჭირო. რაც უფრო მეტი ადამიანი დაუჭერს მხარს ამ გეგმას, მით უფრო თითოეულ ოჯახს ნაკლები ხარჯი შეხვდება. ამ დამოკიდებულების გრაფიკი სურათზე ქვემოთაა მოცემული.

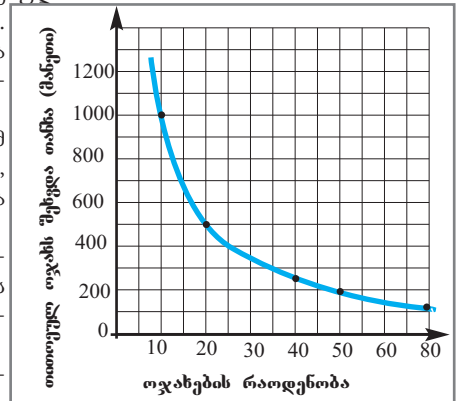
გრაფიკის მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

1) რამდენი მანეთი უნდა მისცეს თითოეულმა ოჯახმა, თუ ღონისძიებაში მონაწილეობას მიიღებს: ა) 10 ოჯახი; ბ) 20 ოჯახი?

2) თითოეული ოჯახი თუ მოისურვებს, რომ გადაიხადოს: ა) 400 მანეთი; ბ) 200 მანეთი, რამდენმა ოჯახმა უნდა მიიღოს მონაწილეობა მოთხოვნილი თანხის შეგროვებაში?

3) გრაფიკზე აღნიშნული წერტილების შესაბამისი ინფორმაციები წარმოადგინეთ ცხრილის სახით. დაწერეთ შესაბამისი უკუპროპორციული დამოკიდებულება.

4) წარმოადგინეთ (5; 2000) წერტილის კოორდინატების შესაბამისი ინფორმაცია.



- 13** ამოხსენით ამოცანები უკუპროპორციული დამოკიდებულების შესახებ. ისაუბრეთ იმაზე, თუ უკუპროპორციულ დამოკიდებულებებში k მუდმივი თითოეულ შემთხვევაში რომელ ინფორმაციას შეესაბამება.

ა) ფერმაში არსებული საკვების მარაგი 60 ძროხას 10 დღეს ეყოფა. ფერმერმა 10 ძროხა გაყიდა, რამდენ დღეს ეყოფათ ძროხებს საკვები?

ბ) მძღოლს ორ პუნქტს შორის მანძილის 60 კმ/სთ სიჩქარით 7 საათში გავლა შეუძლია. თუმცა მან ივარაუდა, რომ თუ 75 კმ/სთ სიჩქარით იმოდრავებს, სულ მცირე საათნახევარი დროის ეკონომიას შეძლებს. სწორია მძღოლის ვარაუდი?

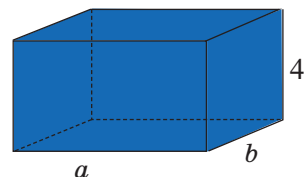
გ) მართკუთხა ფორმის ბადის სიგანე 14 მ, სიგრძე 60 მ-ია. რამდენი მეტრი იქნება იმავე ფართობიანი სხვა ბადის სიგანე, თუ სიგრძე 42 მ-ია?

- 14** რომელი დამოკიდებულება არის უკუპროპორციული?

1) სასკოლო დღესასწაულისათვის 200 საჩუქრის შეძენა იგეგმება. საჩუქრების რაოდენობა მათ ფასზეა დამოკიდებული.

2) ნაილე ინსტიტუტში ყოველდღიურად სადილისათვის 2 მანეთს ხარჯავს. ნაილეს დანახარჯი სასწავლო დღეების რაოდენობაზეა დამოკიდებული.

- 15** მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა 8 კუბური ერთეულია. სურათის მონაცემების მიხედვით დაწერეთ b -ს a -ზე დამოკიდებულების ფორმულა.



განმაზოგადებელი დავალებები

1» რომელ პირობებში აქვს რაციონალურ გამოსახულებას აზრი?

ა) $\frac{2(x-1)}{x^2-x}$ ბ) $\frac{2d(d+1)}{(d+1)(d-4)}$ გ) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}$

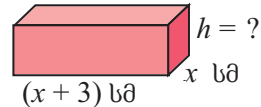
2» მდინარის A და B ნაესადგურებს შორის მანძილი s კმ-ია. მათ შორის მოძრაობს კატერი, რომელის სიჩქარე v კმ/სთ-ია. რა t დრო (საათებში) დასჭირდება კატერს A-დან B-ში ჩასვლაზე და უკან დაბრუნებაზე, თუ მდინარის დინების სიჩქარე 5 კმ/სთ იქნება?

ა) $s = 60$; $v = 25$; ბ) $s = 120$; $v = 35$ იპოვეთ t .

3» დაწერეთ ორი ისეთი რაციონალური გამოსახულება, რომ ცვლადის: ა) -2 ; ბ) -4 და 2 მნიშვნელობებისათვის ამ გამოსახულებას აზრი არ ჰქონდეს.

4» მნიშვნელში a ცვლადიანი ისეთი რაციონალური გამოსახულება შეადგინეთ, რომ a -ს ყველა მნიშვნელობისათვის აზრი ჰქონდეს.

5» მართკუთხა პარალელებიპედის ფუძის ზომები სურათზე ნაჩვენებების მსგავსია. იპოვეთ სიმაღლე, თუ ცნობილია, რომ მისი მოცულობა $(x^3 + 5x^2 + 6x)$ სმ³-ია.



6» ფარჰადის მათემატიკის მასწავლებელმა წილადზე მოქმედების შესრულებისას მოსწავლეების დაშვებული შეცდომები ქვემოთ მოცემულ გამოსახულებებში განაზოგადა. თითოეული შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ შეცდომები, შეასწორეთ და განმარტეთ.

ა) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ ბ) $\frac{ac+bc}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$ გ) $\frac{1}{b-a} = \frac{-1}{a+b}$
 დ) $\frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{1}{a-b}$ ე) $\frac{c}{5} - \frac{4-b}{5} = \frac{c-4-b}{5}$

7» იპოვეთ $\frac{a^3+8}{2a+4}$ გამოსახულების მნიშვნელობა თუ ცნობილია, რომ $a^2 - 2a - 6 = 0$.

8» იპოვეთ $\frac{6-ab^2}{3+b^2} + \frac{2b^2-3a}{3+b^2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $a = -3$, $b = 0,5$ არის თუ არა დავალებაში ზედმეტი მონაცემი?

9» შეასრულეთ მოქმედებები.

ა) $\frac{x^2-x-6}{4x+4} \cdot \frac{x+1}{x^2-6x+9}$ ბ) $\frac{2d+8}{d^2+5d+6} : \frac{d+4}{d^2-4}$
 გ) $\frac{x^3+5x^2-x-5}{x^2-25} : (x+1)$ დ) $\frac{n^3-m^3}{n^2-m^2} \cdot \frac{n^2+2nm+m^2}{n^2+nm+m^2}$

10» შეასრულეთ მოქმედებები.

ა) $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$ ბ) $\frac{12}{a^2-9} - \frac{3}{a+3} + \frac{2}{3-a}$

განმაზოგადებელი დავალებები

11) შესრულეთ მოქმედებები.

$$\begin{aligned} \text{ა) } \frac{k^2 - 4}{k^2 - 2k} - \frac{k^2 - 4}{k^2 + 2k} \quad & \text{ბ) } \frac{m^2 - 1}{(m + 1)^2} - \frac{m^2 - 1}{(m - 1)^2} \quad & \text{გ) } \frac{a}{a^2 + 2a} + \frac{a}{a^2 - 2a} \\ \text{დ) } a - \frac{a^2 - 1}{a} \quad & \text{ე) } \frac{a^2}{a + 1} - a + 1 \quad & \text{ვ) } \frac{-3}{a - 6} - \frac{-18}{a^2 - 6a} \end{aligned}$$

12) გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \frac{x + 1}{x + 2} - \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x} \quad \text{ბ) } \frac{2 - x}{x - 4} + \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x}$$

13) $\frac{5}{x^2 + x - 6} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 3}$ იგივეობიდან იპოვეთ a და b .

14) სამირი და ფიდანო ღერძზე მოცემული ორი რიცხვის შესაბამისი წერტილებიდან იგივე მანძილზე მდებარე წერტილების განსაზღვრის გზებს ეძებენ. როგორც იქნა მათ გამოარკვეეს, რომ ეს არითმეტიკული საშუალოს მოძებნით შესაძლებელია. სხვადასხვა წილზე უჩვენეთ ამ მოსაზრების სისწორე. იპოვეთ $\frac{4}{x}$ და $\frac{5}{2x}$ წილადებიდან ერთი და იგივე მანძილზე მდებარე წილადი.

15) წარმოადგინეთ წილადის სახით.

$$\text{ა) } yx^{-1} + xy^{-1} \quad \text{ბ) } 4 + (4 + m^2) \cdot m^{-1} \quad \text{გ) } (a + b^{-1}) : (a^{-1} + b)$$

16) გაამარტივეთ

$$\text{ა) } \frac{a^3 + a^7}{a^{-3} + a^{-7}} \quad \text{ბ) } \frac{x^2 + x^3 + x^4}{x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}} \quad \text{გ) } \frac{x + 1}{x - 1 - 2x^{-1}}$$

17) გაამარტივეთ

$$\text{ა) } \left(1 + \frac{2}{k(k + 3)}\right) \cdot \left(\frac{k + 1}{k + 3}\right)^{-1} \quad \text{ბ) } \left(1 + \frac{1}{n(n + 2)}\right)^{-1} : \frac{n + 2}{n + 1}$$

18) სტანდარტული სახით მოცემული x რიცხვის რიგია 8, y რიცხვის რიგი - 5-ია. რისი ტოლი შეიძლება იყოს xy ნამრავლის რიგი?

19) k და b -ს რა მნიშვნელობებისათვის $y = \frac{k}{x}$ ჰიპერბოლა და $y = kx + b$ წრფე გაივლიან:

ა) A(2;1); ბ) B(-1;2) წერტილებზე?

20) ჰეიდარ ალიევის ფონდის ინიციატივით ბაქოში ჩატარდა მესამე საერთაშორისო ხელოვნების ფესტივალი "ქალწულის კოშკი". ფესტივალზე ვიდეო-მაპინგის ტექნოლოგიით ქალწულის კოშკის ზედაპირზე ფერად-ფერადი გამოსხელებები იქმნებოდა. იმ მიზნით, რომ ხედებს მოეცვა ქალწულის კოშკის ზედაპირი 360°-ით, ძველის ზედაპირზე 7 სხვადასხვა წერტილიდან 30 პროექტორის საშუალებით პროექციები დაეშვა.

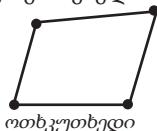
პროექციით განათების დროს ეკრანზე არსებული სინათლის ინტენსივობა ეკრანიდან სინათლის წყარომდე არსებული მანძილის კვადრატთან უკუპროპორციულ დამოკიდებულებაშია: $I = \frac{k}{d^2}$ აქ მუდმივი სიდიდეა, d მანძილს უჩვენებს.

A და B პროექტორები ქალწულის კოშკს ერთი და იგივე ინტენსივობით ანათებდნენ. A ეკრანიდან 5 მ, B კი 8 მ მანძილზეა. განსაზღვრეთ B-სათვის k კოეფიციენტი, თუ A პროექტორისათვის $k = 27$ ერთეულია.



ოთხკუთხედები

ოთხი წერტილისაგან და მათი მიმდევრობით შემაერთებული ოთხი მონაკვეთისაგან შემდგარ ფიგურას ოთხკუთხედი ეწოდება. ამასთან მოცემული წერტილებიდან არც ერთი სამი ერთ წრფეზე არ უნდა მდებარეობდეს და მათი შემაერთებული მონაკვეთები ერთმანეთს არ უნდა კვეთდეს. მოცემულ წერტილებს ოთხკუთხედის წვეროები, მათ შემაერთებელ მონაკვეთებს კი გვერდები ეწოდება.



ოთხკუთხედი



ოთხკუთხედი



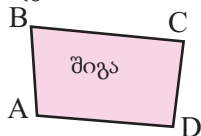
არა ოთხკუთხედი



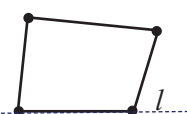
არა ოთხკუთხედი

ოთხკუთხედის ერთი და იგივე გვერდის ბოლოებში არსებულ წვეროებს მეზობელი წვეროები, ხოლო ერთ გვერდზე არამდებარე წვეროებს მოპირდაპირე წვეროები ეწოდება. ოთხკუთხედის გვერდებს, რომლებიც ერთი წვეროდან გამოდიან მეზობელი გვერდები, ხოლო იმ გვერდებს, რომლებსაც საერთო წვერო არა აქვს მოპირდაპირე გვერდები ეწოდება. მოპირდაპირე წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთებს ოთხკუთხედის დიაგონალები ეწოდება.

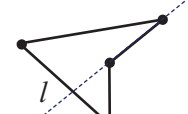
ოთხკუთხედის მომცველი სიბრტყის წერტილები ორ სიმრავლედ იყოფა. ამ სიმრავლეებიდან ერთის წერტილები ოთხკუთხედის შიგა მიდამოს, მეორის წერტილები კი გარე მიდამოს ქმნიან.



ოთხკუთხედს ამოზნექილი ეწოდება, თუ მის ნებისმიერ გვერდზე გავლებული წრფის მიმართ მისი შიგა მიდამოს წერტილები ერთ ნახევარ-სიბრტყეში მდებარეობენ, ხოლო თუ ამ წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ მაშინ არაამოზნექილი (ჩაზნექილი) ოთხკუთხედი ეწოდება.



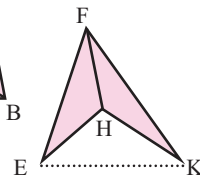
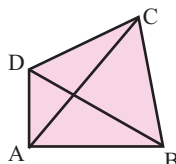
ამოზნექილი



არა ამოზნექილი (ჩაზნექილი)

ამოზნექილი ოთხკუთხედის შიგა მიდამოდან აღებული ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებული მონაკვეთი მთლიანად ოთხკუთხედის შიგა მიდამოში მდებარეობს.

ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალები მის შიგნით მდებარეობენ. ამოზნექელ ოთხკუთხედებში კი ერთ-ერთი დიაგონალი მის გარეთაა. ამასთან, ამოზნექილი ოთხკუთხედის თითოეული დიაგონალი მას საერთო გვერდის მქონე ორ სამკუთხედად ყოფს, ხოლო თუ ოთხკუთხედი ამოზნექილი არ არის, მაშინ მისი მხოლოდ ერთი დიაგონალი ყოფს ოთხკუთხედს საერთო გვერდის მქონე ორ სამკუთხედად.

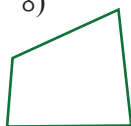


1 ქვემოთ მოცემული ფიგურებიდან რომელს შეიძლება ეწოდოს ოთხკუთხედი?

ა)



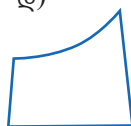
ბ)



გ)



დ)



ე)

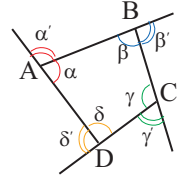


2 რვეულში ჩაიხაზეთ ამოზნექილი და ჩაზნექილი ოთხკუთხედები და გაავლეთ დიაგონალები.

ოთხკუთხედების შიგა და გარე კუთხეები

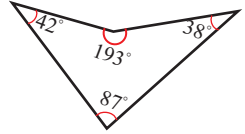
შიგა და გარე კუთხეები

ამოზნეკილი ოთხკუთხედის ნებისმიერი შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს ოთხკუთხედის გარე კუთხე ეწოდება. ამოზნეკილი ოთხკუთხედის თითოეულ წვეროსთან მისი ორი გარე კუთხის დახაზვა შეიძლება და ვინაიდან ისინი ვერტიკალური კუთხეები არიან ამიტომ ერთმანეთის ტოლია. ოთხკუთხედის გარე კუთხეებზე საუბრისას თითოეულ წვეროსთან მდებარე ამ კუთხეებიდან თითო ავიღებთ. სურათზე მოცემულ ოთხკუთხედში $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ შიგა კუთხეებია, ხოლო $\alpha', \beta', \delta', \gamma'$ კი - გარე კუთხეები.



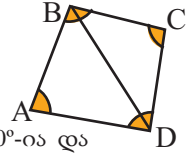
ამოზნეკილი ოთხკუთხედის თითოეული შიგა კუთხის ზომა 180° -ზე ნაკლებია.

ჩაზნეკილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხის ზომა შეიძლება 180° -ზე მეტი იყოს.



ამოზნეკილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი

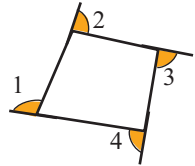
თეორემა. თეორემა ამოზნეკილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 360° -ის ტოლია: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$



ისარგებლეთ იმით, რომ სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180° -ია და დაამტკიცეთ ეს თეორემა. დამტკიცება ჩაწერეთ ორსვეტიანი ცხრილის სახით.

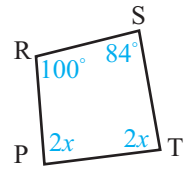
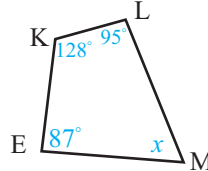
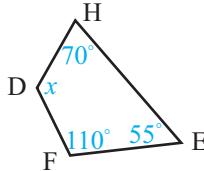
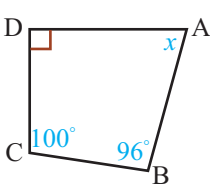
ამოზნეკილი ოთხკუთხედის გარე კუთხეების ჯამი

თეორემა. ამოზნეკილი ოთხკუთხედის კუთხეების ჯამი 360° -ის ტოლია.

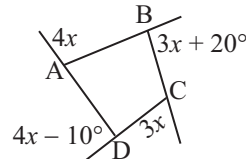


გამოიყენეთ ის, რომ თითოეულ წვეროსთან შიგა და გარე კუთხეები მოსაზღვრე კუთხეებია. დაამტკიცეთ ეს თეორემა.

3 იპოვეთ ოთხკუთხედების უცნობი კუთხეების გრადუსული ზომები.



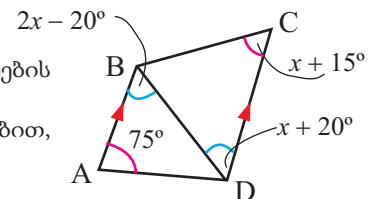
4 იპოვეთ ABCD ოთხკუთხედის შიგა და გარე კუთხეების გრადუსული ზომები.



- 5**
- 1) შეიძლება თუ არა ავაგოთ ისეთი ოთხკუთხედი, რომლის გვერდებია: 5 სმ, 7 სმ; 8 სმ; 11 სმ, ხოლო დიაგონალი კი 13 სმ-ია?
 - 2) შეიძლება თუ არა ავაგოთ ისეთი ოთხკუთხედი, რომლის გვერდებია: 3 სმ; 5 სმ; 7 სმ და 14 სმ, დიაგონალი კი 13 სმ-ია?

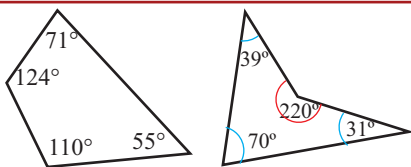
6 იპოვეთ ოთხკუთხედის შიგა და გარე კუთხეების გრადუსული ზომების ჯამი.

შენიშვნა: გვერდებზე მოცემული ისრის ნიშნებით, მათ პარალელურობას ავლენიშნავთ.



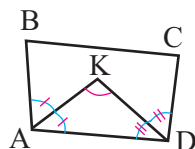
ოთხკუთხედების შიგა და გარე კუთხეები

- 7** გამოკვლევა. შეიძლება თუ არა გარე კუთხეების შესახებ თეორემის ჩაზნეილ ოთხკუთხედებში გამოყენება? გამოიყენეთ თქვენი ცოდნა სამკუთხედების შესახებ.



- 8** დაამტკიცეთ, რომ ამოზნეილ ოთხკუთხედში ორი მეზობელი წვეროს კუთხეების ბისექტრისებით შექმნილი კუთხის ზომა დანარჩენი ორი შიგა კუთხის ზომების ჯამების ნახევრის ტოლია.

ABCD ოთხკუთხედში AK მონაკვეთი A კუთხის, DK მონაკვეთი კი - D კუთხის ბისექტრისაა.

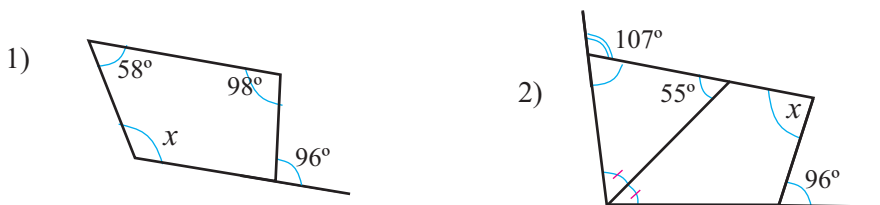


დაამტკიცეთ, რომ: $\angle K = \frac{\angle B + \angle C}{2}$

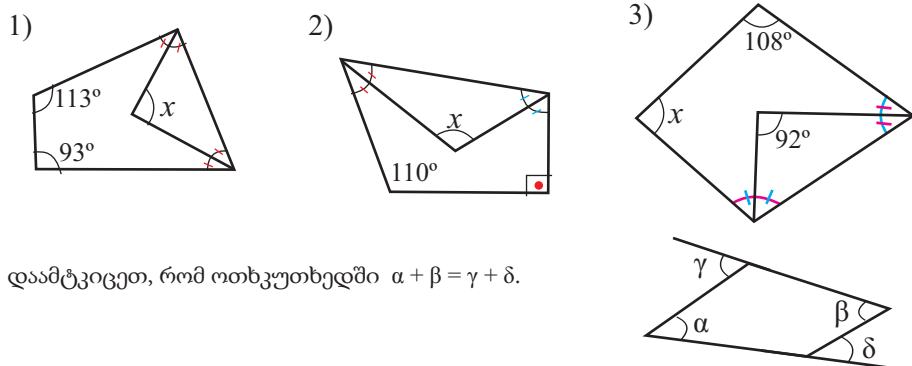
მოითხოვება: $\angle K + \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle D}{2} = 180^\circ$ და $\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle D}{2} = 180^\circ$

ტოლობები გამოიყენეთ.

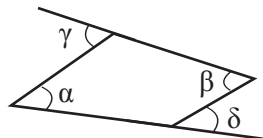
- 9** მოცემული კუთხის ზომების მიხედვით იპოვეთ x -ის მნიშვნელობა.



- 10** ოთხკუთხედში ორი მეზობელი წვეროს კუთხეების ბისექტრისებია გავლებული. მოცემული კუთხის ზომების მიხედვით იპოვეთ x -ის მნიშვნელობა.



- 11** დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედში $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.



- 12** 1) ამოზნეილი ოთხკუთხედის შიგა კუთხეების გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2:3:4 იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის შიგა და გარე კუთხეები.
2) არსებობს თუ არა ამოზნეილი ოთხკუთხედი, რომ ყველა შიგა კუთხე იყოს:
ა) მახვილი; ბ) მართი; გ) ზღაგვი კუთხე?

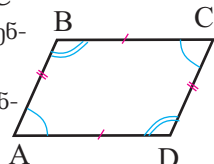
პარალელოგრამი და მისი თვისებები

ოთხკუთხედს, რომელსაც მოპირდაპირე გვერდები წყვილ-წყვილად პარალელური აქვს, პარალელოგრამი ეწოდება. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

თეორემა 1. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები კონგრუენტულია. $AB \cong CD, AD \cong BC$

თეორემა 2. პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები კონგრუენტულია $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$

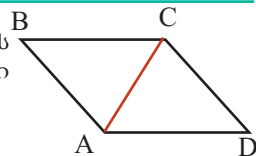
თეორემა 3. პარალელოგრამის მეზობელ წვეროებთან არსებული კუთხეების ჯამი 180° -ია.
 $\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ$
 $\angle B + \angle C = 180^\circ, \angle A + \angle D = 180^\circ$



1) თეორემა 1-ის დამტკიცება ორსვეტიან ცხრილში წერტილების ადგილას შესაბამისი მოთხოვნების ჩაწერით რვეულში დაასრულეთ.

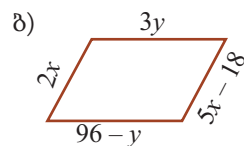
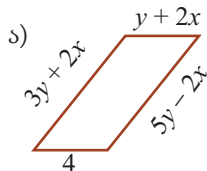
მოცემულია: ABCD პარალელოგრამია.

დაამტკიცეთ: $AB \cong CD, AD \cong BC$



პირობა	საფუძველი
1. ABCD $\square$ -ია	1. მოცემულია
2. AC დიაგონალი გაივლება	2. ორ წერტილზე მხოლოდ ერთი წრფე გაივლება.
3. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$	3.
4. $\angle BCA \cong \angle DAC, \angle DCA \cong \angle CAB$	4.
5. $AC \cong AC$	5. ტოლობის ნიშნის თანახმად
6. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	6.
7. $AB \cong CD, AD \cong BC$	7. კონგრუენტული სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები.

2) იპოვეთ x და y და ცვლადების მნიშვნელობები პარალელოგრამების შესახებ მოცემული ინფორმაციების საფუძველზე.

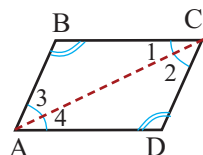


3) დაამტკიცეთ თეორემა 2. დაწერეთ დამტკიცება ორსვეტიან ცხრილის სახით.

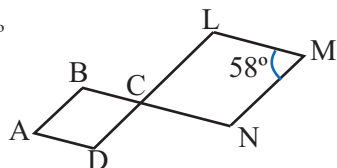
მოცემულია: $\square ABCD$

დაამტკიცეთ: $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$.

დამტკიცების გეგმა: დამტკიცება მოახდინეთ თეორემა 1-ის დამტკიცების მსგავსად. გამოიყენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობა და პარალელური წრფეების გადაკვეთისას წარმოქმნილი შიგა ჯვარედინი კუთხეების თვისებები.



4) ABCD და CLMN პარალელოგრამებია $\angle M = 58^\circ$ პირობით. ა) იპოვეთ $\angle A$ -ს გრადუსული ზომა:
 ბ) შესაძლებელია თუ არა $\angle B$ -ს გრადუსული ზომის მოძებნა?

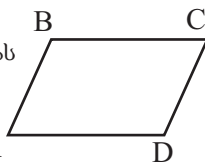


პარალელოგრამი

5» თეორემა 3 დაამტკიცეთ ორი ხერხით.

1-ლი ხერხი. ორსვეტიან ცხრილში კითხვის ნიშნების ადგილას შესაბამისი ინფორმაციების ჩაწერით დამტკიცება რვეულში დაასრულეთ.

მოცემულია: $\square ABCD$ **დაამტკიცეთ:** $\angle A + \angle B = 180^\circ$

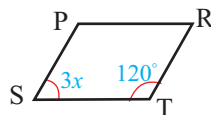


პირობა	საფუძველი
1. $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$	1. პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეებია
2. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ?$	2. ?
3. $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = ?$	3. ტოლობის ნიშანი
4. $2(? + ?) = 360^\circ$	4. გამრავლების განრიგებადობის ნიშანი
5. $\angle A + \angle B = 180^\circ$	5. ტოლობის ნიშანი

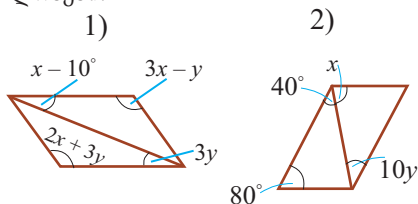
ამავე წესით დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის მეორე გვერდთან შექმნილი კუთხეების ჯამიც 180° -ის ტოლია.

მე-2 ხერხი: პარალელური წრფის მკვეთთან შექმნილი კუთხეების თვისებების გამოყენებით, დამტკიცება რვეულში ჩაწერეთ.

6» PRTS პარალელოგრამია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x ცვლადის მნიშვნელობა.

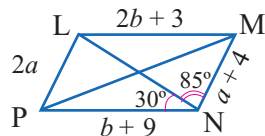


7» პარალელოგრამების შესახებ მოცემული ინფორმაციების საფუძველზე იპოვეთ x და y ცვლადების მნიშვნელობები.



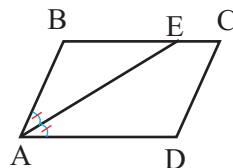
8» PLMN პარალელოგრამში იპოვეთ მოთხოვნილი გვერდები და კუთხეები.

- 1) $\angle PLM$
- 2) $\angle LMN$
- 3) PL
- 4) LM

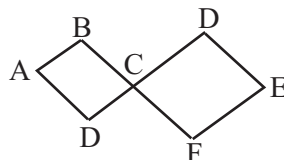


9» ABCD პარალელოგრამში AE სხივი A კუთხის ბისექტრისაა.

- 1) თუ $AB = 7$ სმ, $AD = 12$ სმ იპოვეთ BE-ს და EC-ის სიგრძე.
- 2) თუ $BE = 9$ სმ, $EC = 15$ სმ, იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდების სიგრძეები.



10» **მოცემულია:** ABCD და CDEF პარალელოგრამები.
დაამტკიცეთ: $\angle A \cong \angle E$.



11» პარალელოგრამის წვეროს კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს 55° -იანი კუთხით კვეთს. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის კუთხეები.

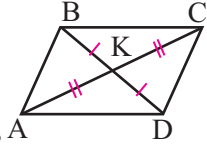
12» პარალელოგრამის კუთხეებიდან ერთი მეორეზე 40° -ით მეტია. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

პარალელოგრამი

პარალელოგრამის თვისებები

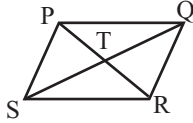
თეორემა 4. პარალელოგრამის დიაგონალები იკვეთებიან და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან. $AK \cong KC$, $BK \cong KD$

თეორემა 5. პარალელოგრამის დიაგონალი მას ორ კონგრუენტულ სამკუთხედად ყოფს. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$



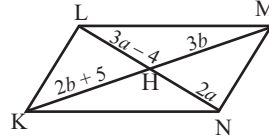
- 13** ა) დაამტკიცეთ **თეორემა 4.** ბ) დაამტკიცეთ **თეორემა 5.**

- 14** დაამტკიცეთ რომ, თუ $\triangle TSP \cong \triangle TQR$, მაშინ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. დამტკიცება ტექსტით წარმოადგინეთ.



- 15** $\square KLMN$ -ში იპოვეთ მოთხოვნილი მონაკვეთების სიგრძეები.

- 1) LH 2) LN 3) KH 4) KM



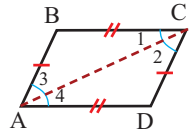
პარალელოგრამის ნიშნები

თეორემა 1. ოთხკუთხედი, რომელს ორი მოპირდაპირე გვერდი პარალელურია და კონგრუენტული, პარალელოგრამია.

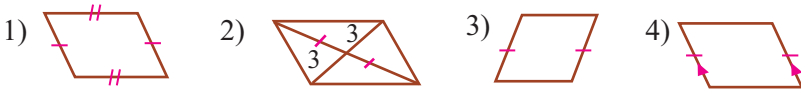
თეორემა 2. ოთხკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები წყვილ-წყვილად კონგრუენტული, პარალელოგრამია.

თეორემა 3. თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები იკვეთებიან და გადაკვეთის წერტილით ორივე მათგანი შუაზე იყოფა, ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

- 16** დაამტკიცეთ **თეორემა 2. დამტკიცების გეგმა:** გამოიყენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობისა და წრფეთა პარალელობის ნიშნები.

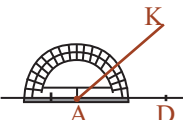


- 17** რომელ სურათებზე აღნიშნული ინფორმაციები იძლევა შესაძლებლობას მივიღოთ გადაწყვეტილება, რომ ეს ფიგურა პარალელოგრამია?

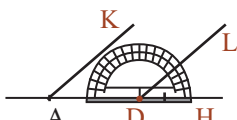


- 18** გამოიკვლიეთ გვერდებისა და კუთხეების მიხედვით პარალელოგრამის აგების ნაბიჯები.

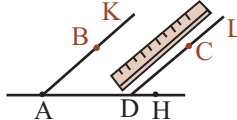
1. A წერტილი მიიღეთ წვეროს წერტილად და ააგეთ $\angle KAD$



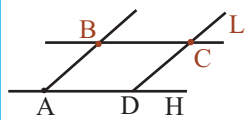
2. A წერტილი მიიღეთ წვეროს წერტილად და ააგეთ იგივე ზომის $\angle LDH$.



3. AK და DL გვერდებზე გადადეთ ტოლი მონაკვეთები და აღნიშნეთ.



4. ეს წერტილები შეაერთეთ. აიგო ABCD პარალელოგრამი.



- 19** ა) $AB = 5$ სმ, $AD = 8$ სმ, $\angle A = 60^\circ$ -ის პირობით ააგეთ ABCD პარალელოგრამი.

- ბ) $AB = 5$ სმ, $AD = 8$ სმ, $BD = 9$ სმ - ს პირობით ააგეთ ABCD პარალელოგრამი.

მართკუთხედი

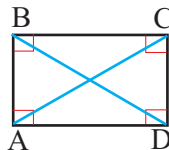
მართკუთხედი არის პარალელოგრამი, რომლის ყველა კუთხე მართია

პარალელოგრამის ყველა თვისება მართკუთხედსაც აქვს.

მართკუთხედს მისთვის დამახასიათებელი ერთი თვისებაც აქვს.

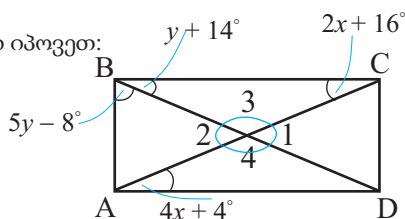
თეორემა. მართკუთხედის დიაგონალები კონგრუენტულებია. $AC \cong BD$

მართკუთხედის ნიშანი. კონგრუენტულდიაგონალებიანი პარალელოგრამი მართკუთხედი.



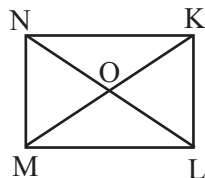
1) ABCD მართკუთხედში მონაცემების მიხედვით იპოვეთ:

- 1) x -ისა და y -ის მნიშვნელობები;
- 2) $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ კუთხეები.

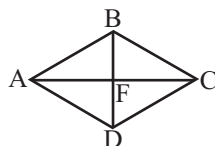


2) MNKL მართკუთხედი. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ კუთხის ნიშნის შესაბამისი ზომები:

- 1) თუ $NO = 3x + 4$, $OL = 4x - 3$, მაშინ $OK = ?$
- 2) თუ $ML = 4x - 4$, $NK = 3x + 7$, მაშინ $NK = ?$
- 3) თუ $\angle MNL = 2x - 3$, $\angle LNK = x + 6$, მაშინ $\angle LKM = ?$



- 3) 1) ABCD პარალელოგრამია და $\angle BAD$ -ს შესახებ რომელი ინფორმაცია თუ გვექნება, შეგვეძლება ვთქვათ, რომ ეს პარალელოგრამი მართკუთხედი?
- 2) ABCD პარალელოგრამია. BD და AC -ს შესახებ რომელი ინფორმაცია თუ გვექნება, შეგვეძლება ვთქვათ, რომ ეს პარალელოგრამი მართკუთხედი?



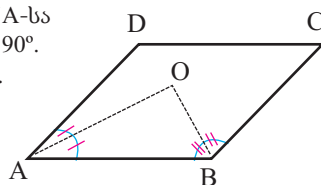
4) მართკუთხედის კუთხის ბისექტრისა მის გვერდს 6 სმ და 8 სმ მონაკვეთებად ყოფს. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი. განიხილეთ შესაძლო შემთხვევები.

5) ახალი სკოლის აშენებისათვის 1,2 ჰა მიწა გამოიყო. ეს ფართობი არის მართკუთხა ფორმის და მისი სიგრძე 120 მ-ია. დახაზეთ ნაკვეთის გეგმა 1 : 1000 მასშტაბით.

6) ა) დახაზეთ მართკუთხედის ერთ გვერდთან არსებული კუთხეების ბისექტრისები და იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

ბ) ABCD პარალელოგრამში AO და BO შესაბამისად $\angle A$ -სა და $\angle B$ -ს ბისექტრისებია. დაამტკიცეთ, რომ $\angle AOB = 90^\circ$.

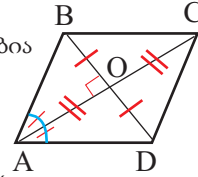
მითითება: ისარგებლეთ ტოლობით $\angle A + \angle B = 180^\circ$.



რომბის თვისებები

რომბი არის პარალელოგრამი, რომლის ყველა გვერდი კონგრუენტულია. პარალელოგრამის ყველა თვისება რომბსაც აქვს. ამასთან, რომბს ქვემოთ მოცემული თვისებებიც აქვს.

თეორემა 1. რომბის დიაგონალები მისი კუთხეების ბისექტრისებია და მართი კუთხით კვეთენ ერთმანეთს.
 $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ABD = \angle CBD$; $AC \perp BD$



თეორემა 2. (შებენიანი თეორემა). პარალელოგრამი, რომლის დიაგონალები მართი კუთხით კვეთენ ერთმანეთს რომბია.
 თუ $AC \perp BD$, მაშინ $\square ABCD$ რომბია.

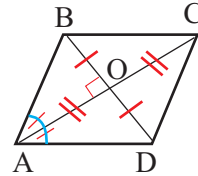
თეორემა 1-ის დამტკიცება.

მოცემულია: $ABCD$ რომბია..

დაამტკიცეთ: $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ABD = \angle CBD$; $AC \perp BD$

დამტკიცება (ტექსტით): რომბის განსაზღვრების თანახმად $AB \cong BC \cong CD \cong AD$. ამასთან $ABCD$ რომბი პარალელოგრამია და პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა: $BO = OD$.

$\triangle ABD$ ტოლფერდა სამკუთხედში AO მედიანა (რადგან $BO = OD$) ბისექტრისაც არის და სიმაღლევ. მაშასადამე $\angle BAC = \angle DAC$. რადგან $\angle BOC$ მართი კუთხეა, ამიტომ $AC \perp BD$. მსგავსი წესით შეიძლება იმის ჩვენება, რომ $\angle ABD = \angle CBD$.



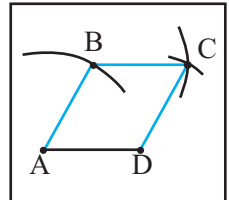
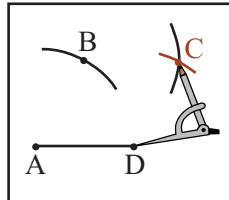
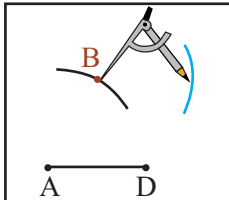
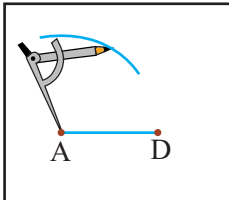
1 გამოიკვლიეთ რომბის აგების ნაბიჯები.

გავლეთ AD მონაკვეთი. ფარგლის წვეროს A წერტილში მოთავსებით მოხაზეთ AD მონაკვეთის ტოლი რადიუსის წრეწირის რკალი.

რკალზე აღნიშნეთ რაიმე B წერტილი. B წერტილიდან როგორც ცენტრიდან მისგან მარჯვნივ იგივე რადიუსიანი წრეწირის რკალი დახაზეთ.

ფარგლის მდგომარეობის შეუცვლელად, D წერტილიდან შემოხაზეთ ბოლო რკალის მკვეთი რკალი. გადაკვეთის წერტილი C -თი აღნიშნეთ.

AB , BC , CD მონაკვეთები დახაზეთ.



2) “რომბის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარები არიან და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან” - თვისების გამოყენებით ააგეთ რომბი, რომლის დიაგონალების სიგრძე 3 სმ და 5 სმ-ია. აგების ნაბიჯები განხილვით განსაზღვრეთ.

რომბი

თუ ოთხკუთხედი რომბი ან კვადრატია, ქვემოთ მოცემული პირობები სწორია.

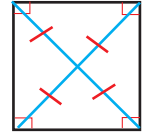
რომბი და კვადრატია

რომბი

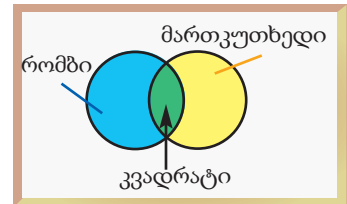
1. პარალელოგრამის ყველა თვისება რომბსაც აქვს.
2. ყველა გვერდი კონგრუენტულია.
3. დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია.
4. დიაგონალები რომბის კუთხეებს შუაზე ყოფს.

კვადრატია

1. კვადრატს მართკუთხედისა და რომბის ყველა თვისება ახასიათებს.
2. ყველა კუთხე მართია.
3. ყველა გვერდი კონგრუენტულია.
4. დიაგონალები ტოლია, ურთიერთპერპენდიკულარულია, გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან, კვადრატის კუთხეების ბისექტრისებია.



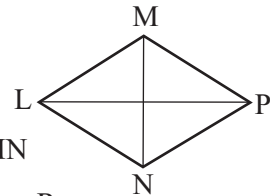
- 2» ვენის დიაგრამაზე ფიგურების თვისებები შესაბამის მიდამოში მოათავსეთ. ვენის დიაგრამა დიდი ზომის ქალაქზე დახაზეთ. მოამზადეთ წარდგენა.



- 3» ელგუნმა 18 სმ გვერდების სიგრძის ოთხკუთხა ფორმის ფიცრის ნაჭერი ჩამოჭრა. იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ ამ ფიცრის კვადრატულფორმიანობაში კიდევ რომელი ზომების შემოწმებაა საჭირო?

- 4» LMPN რომბში $\angle MLN = \frac{1}{2} \angle LMP$, $MP = 12$

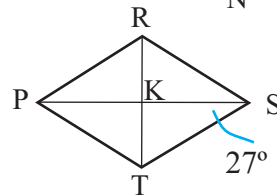
იპოვეთ: 1) $\angle MPL$ 2) $\angle MLN$ 3) $\angle LMP$ 4) MN



- 5» PRST რომბში $\angle TSP = 27^\circ$
 $PK = 5n - 2$, $KS = 3n + 2$,

იპოვეთ: 1) $\angle RPK$ 2) $\angle PTS$ 3) $\angle PTK$

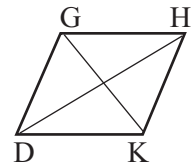
4) PS 5) PK



- 6» დამტკიცება დაწერეთ ორსვეტიანი ცხრილის სახით.

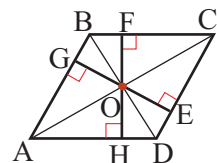
მოცემულია: $\triangle DGH$, $\triangle HKD$, $\triangle GHK$, $\triangle GDK$ ტოლფერდა სამკუთხედები.

დაამტკიცეთ: $DH \perp GK$ რომბია.



- 7» O წერტილი ABCD რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. ამ წერტილიდან გვერდებზე სიმაღლეები დაშვებული.

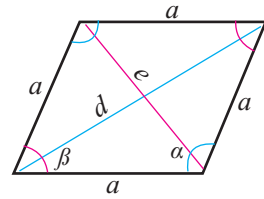
დაამტკიცეთ, რომ $OG = OF = OE = OH$. დაწერეთ ამ დამტკიცებიდან გამოტანილი დასკვნა.



რომბი

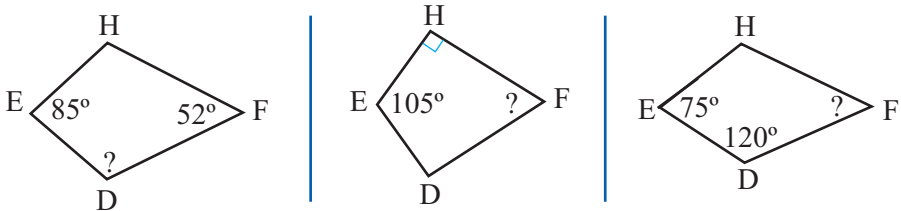
8) მოცემული პირობების მიხედვით ააგეთ რომბი.

- 1) $a = 50$ მმ, $\alpha = 110^\circ$ 2) $a = 4$ სმ, $\beta = 60^\circ$
- 3) $d = 4$ სმ, $e = 3$ სმ 4) $d = 8$ სმ, $e = 6$ სმ



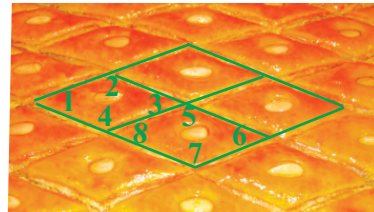
9) გამოკვლევა. სამირმა რომბის აგებისათვის ჯერ მისი დიაგონალები დახაზა. სამირმა იცის, რომ რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულები არიან და გადაკვეთის წერტილით ორივე მათგანი შუაზე იყოფა. აგების დროს დიაგონალებიდან ერთ-ერთისათვის გადაკვეთის წერტილით შუაზე გაყოფის პირობა დაავიწყდა, თუმცა მიღებული ფიგურის ჩერპელენგის ფორმა ძალიან სახალისო ეჩვენა. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი ფორმის ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ერთი წყვილი ტოლია.

10) EHFD ჩერპელენგის ფორმის ოთხკუთხედი. იპოვეთ მოთხოვნილი კუთხეების გრადუსული ზომები.



11) ფახლავა კონგრუენტული რომბის სახით დაიჭრება. შეადგინეთ ამოცანები ფახლავის ზედაპირზე აღნიშნული კუთხეების მიხედვით.

- ა) დაამტკიცეთ, რომ $\angle 3$ და $\angle 6$ შესაბამისი კუთხეებია.
- ბ) დაამტკიცეთ, რომ $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$.

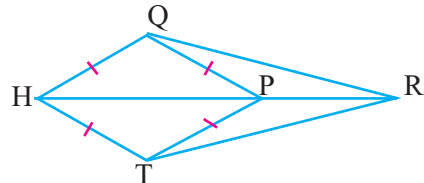


12) ა) ერთი რომბის გვერდი მეორე რომბის გვერდის კონგრუენტულია. ეს რომბები კონგრუენტულები არიან?

ბ) ერთი კვადრატის გვერდი მეორე კვადრატის გვერდის კონგრუენტულია. ეს კვადრატები კონგრუენტულები არიან?

13) რეშადი ახლად შეძენილ კვადრატული ფორმის 400 მ^2 მიწის ფართობზე სახლის ასაშენებლად ემზადება. მან ამ ფართობის $1 : 200$ მასშტაბით გეგმა დახაზა. თქვენც დახაზეთ ეს გეგმა.

14) HQPT რომბია, HP რომბის დიაგონალია. დაამტკიცეთ, რომ $RQ \cong RT$



15) ქვემოთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომელი ყოველთვის ჭეშმარიტი, რომელი ზოგჯერ ჭეშმარიტი და რომელი არასოდეს არ არის ჭეშმარიტი?

- 1) მართკუთხედი პარალელოგრამია;
- 2) პარალელოგრამი რომბია;
- 3) კვადრატი რომბია;
- 4) კვადრატი მართკუთხედი;
- 5) რომბი კვადრატია;
- 6) რომბი მართკუთხედი;
- 7) მართკუთხედი ოთხკუთხედი;
- 8) მართკუთხედი კვადრატია.

ტრაპეცია

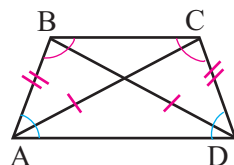
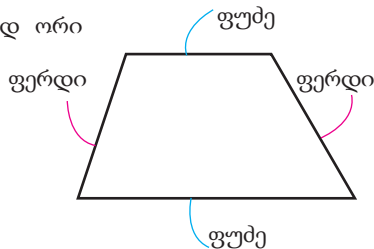
ტრაპეცია არის ოთხკუთხედი, რომლის მხოლოდ ორი გვერდია პარალელური. პარალელურ გვერდებს ტრაპეციის ფუძეები, არაპარალელურ გვერდებს კი ფერდები ეწოდება.

ისეთ ტრაპეციას, რომლის ფერდები კონგრუენტულია ტოლფერდა ტრაპეცია ეწოდება.

ისეთ ტრაპეციას, რომლის ერთ-ერთი ფერდი ფუძეების მართობულია, მართკუთხა ტრაპეცია ეწოდება.

თეორემა 1. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეები შესაბამისად კონგრუენტულები არიან.
 $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle C$

თეორემა 2. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები კონგრუენტულია. $AC \cong BD$



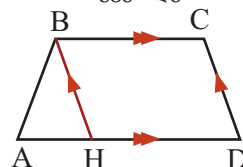
თეორემა 2 -ის დამტკიცება.

მოცემულია: ABCD ტოლფერდა ტრაპეცია. $AB \cong CD$

დაამტკიცეთ: $AC \cong BD$

პირობა	საფუძველი
$AB \cong CD$	მოცემულია
$\angle A \cong \angle D$	თეორემა 1-ის თანახმად
$AD \cong AD$	$\triangle BAD$ და $\triangle CDA$ სამკუთხედების საერთო გვერდია
$\triangle BAD \cong \triangle CDA$	სამკუთხედის კონგრუენტულობის ზაჰ ნიშანი
$AC \cong BD$	კონგრუენტული სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები

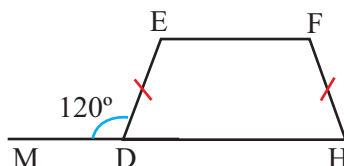
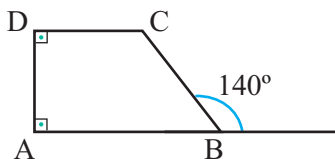
1 **თეორემა 1-ის დამტკიცების გეგმა:**
 ჯერ BH მონაკვეთი ისე გაავლეთ, BCDH რომ პარალელოგრამი მიიღოთ. შემდეგ კი უჩვენეთ, რომ $BH \cong CD$, $BH \cong AB$. ამის შემდეგ უჩვენეთ $\angle A \cong \angle D$ და $\angle ABC \cong \angle C$.



2 იპოვეთ ტრაპეციის შიგა კუთხეების გრადუსული ზომები.

1) ABCD ტრაპეციის AD ფერდი AB ფუძის პერპენდიკულარულია.

2) DEFH ტოლფერდა ტრაპეციაა. $\angle EDM = 120^\circ$



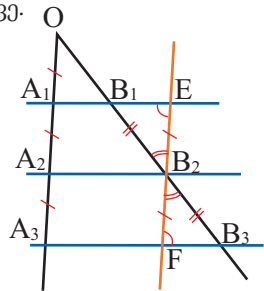
სამკუთხედის შუახაზი

თაღისის თეორემა. თუ კუთხის გვერდების გადამკვეთი პარალელური წრფეები მის ერთ გვერდზე კონგრუენტულ მონაკვეთებს მოკვეთს, მაშინ ეს წრფეები მეორე გვერდზეც კონგრუენტულ მონაკვეთებს მოკვეთს. თუ $OA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3$, მაშინ $OB_1 \cong B_1B_2 \cong B_2B_3$ იქნება.

დამტკიცება რეგულში დაასრულეთ.

დამტკიცება. B_2 წერტილზე გავავლოთ OA_3 -ს პარალელური წრფე.

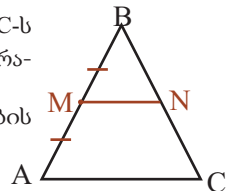
პირობა	საფუძველი
1. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 \cong A_2A_3$	1. მოცემულია
2. $A_1A_2 \cong EB_2$, $A_2A_3 \cong B_2F$	2.
3. $EB_2 \cong B_2F$	3. $A_1A_2 \cong A_2A_3$
4. $\angle E \cong \angle F$	4.
5. $\angle EB_2B_1 \cong \angle FB_2B_3$	5. ვერტიკალური კუთხეები
6. $\triangle EB_2B_1 \cong \triangle FB_2B_3$	6. ზმწ ნიშანი
7. $B_1B_2 \cong B_2B_3$	7.



თაღისის თეორემის პირობაში კუთხის გვერდების ნაცვლად შეიძლება ნებისმიერი ორი წრფის აღება. ამ შემთხვევაში შედეგი არ იცვლება.

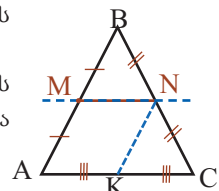
გამოკვლევა. 1) $\triangle ABC$ -ში AB გვერდის M შუაწერტილზე გავვლეთ AC -ს პარალელური წრფე: $MN \parallel AC$. რომელი ფიგურები მიიღეთ? $AMNC$ ტრაპეცია? გაზომეთ და შეადარეთ ამ ტრაპეციის ფუძეები.

2) გაზომეთ და შეადარეთ BN და NC მონაკვეთები. $BN = NC$ ტოლობის სისწორის შესახებ გადაწყვეტილების მიღება შეიძლება?



განსაზღვრება. სამკუთხედის ორი გვერდის შუაწერტილების შემართებელ მონაკვეთს ამ სამკუთხედის შუახაზი ეწოდება.

თეორემა. სამკუთხედის მოცემული ორი გვერდის შუაწერტილების შემართებელი მონაკვეთი მისი მესამე გვერდის პარალელურია და მის ნახევარს უდრის: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$.

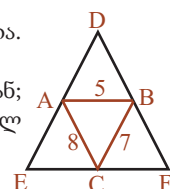


დამტკიცება. MN იყოს $\triangle ABC$ -ს შუახაზი. M წერტილიდან გავავლოთ AC -ს პარალელური წრფე. თაღისის თეორემის თანახმად, ის AC მონაკვეთის შუა წერტილზე ძვს. ე.ი. შუახაზი მასზეა. მაშასადამე, შუახაზი AC -ს პარალელურია. ახლა გავავლოთ NK შუახაზი. რადგან $NK \parallel AB$, ამიტომ $AMNK$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. პარალელოგრამის თვისებების თანახმად, $MN \cong AK$. თაღისის თეორემის თანახმად $AK \cong KC$. მაშინ მივიღებთ: $MN = \frac{AC}{2}$. თეორემა დამტკიცებულია.

1) სამკუთხედის გვერდები 4 სმ, 6 სმ და 8 სმ-ია. იპოვეთ იმ სამკუთხედის გვერდები, რომლის წვეროებსაც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს.

2) ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 40 სმ-ია. სამკუთხედის შუახაზი 5 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის გვერდები.

3) A, B, C წერტილები DEF სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია.
 ა) იპოვეთ DE, DF, EF გვერდები; ბ) იპოვეთ $\triangle DEF$ -ის პერიმეტრი;
 გ) იპოვეთ $\triangle DEF$ -ის პერიმეტრის შეფერდება $\triangle ABC$ -ის პერიმეტრთან;
 დ) დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შუახაზები მას 4 კონგრუენტულ სამკუთხედად ყოფს.

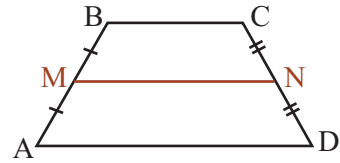


ტრაპეციის შუახაზი

ტრაპეციის შუახაზი

ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს ტრაპეციის შუახაზი ეწოდება.

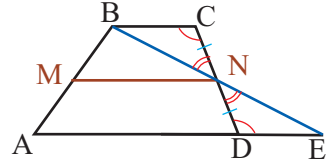
$AM = MB$,
 $CN = ND$,
 MN ტრაპეციის შუახაზია.



თეორემა. ტრაპეციის შუახაზი ფეძეების პარალელურია და მათ ნახევარჯამს უდრის.

$$MN \parallel AD, MN \parallel BC,$$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$



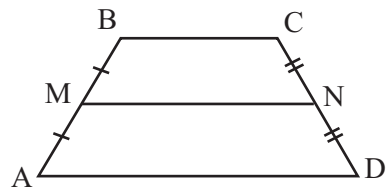
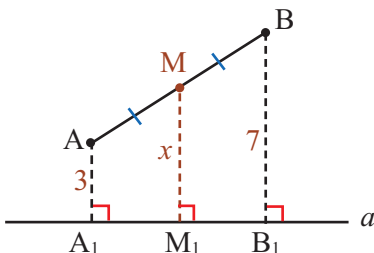
დამტკიცება: B წერტილზე CD-ს შუა წერტილზე გავავლოთ წრფე და მისი AD წრფესთან გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ E-თი.

პირობა	საფუძველი
1. $CN \cong ND$	1. აგების თანახმად
2. $\angle C \cong \angle EDN$	2. შიგა ჯვარედინი კუთხეები
3. $\angle CNB \cong \angle DNE$	3. ვერტიკალური კუთხეები.
4. $\triangle CNB \cong \triangle DNE$	4. გზნის თანახმად
5. $BC \cong DE, BN \cong NE$,	5. კონგრუენტული სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები
6. $MN \parallel AE, MN = \frac{AE}{2}$	6. MN მონაკვეთი $\triangle ABE$ -ს შუახაზია
7. $MN = \frac{AD + DE}{2}$	7. $AE = AD + DE$
8. $MN = \frac{AD + BC}{2}$	8. $DE \cong BC$

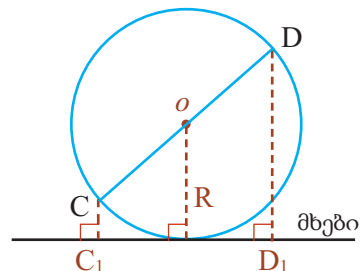
1 ტრაპეციის ფუძეები 0,6 მ და 2,4 მ-ია. იპოვეთ შუახაზის სიგრძე

2 მონაკვეთის ბოლოებიდან წრფემდე მანძილი 3 სმ და 7 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი მონაკვეთის შუაწერტილიდან წრფემდე.

3 $MN = 5$ სმ შუახაზის მქონე ABCD ტრაპეციაში $BC : AD = 2 : 3$ იპოვეთ მისი ფუძეები.

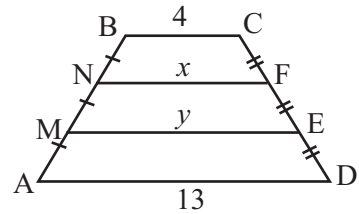


4 დიამეტრის ბოლოები წრეწირის მხები წრფიდან 4 სმ და 8 სმ მანძილზეა. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

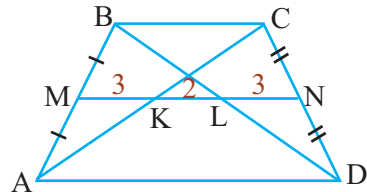


ტრაპეციის შუახაზი

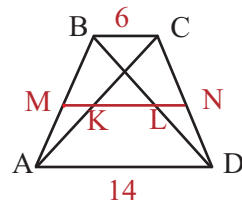
- 5» ABCD ტრაპეციის AB გვერდი M და N წერტილებით სამ კონგრუენტულ მონაკვეთადაა დაყოფილი და დაყოფის წერტილებიდან ტრაპეციის ფუძეების პარალელური წრფეები გავლებული. მონაკვეთების მიხედვით იპოვეთ ME და NF მონაკვეთის სიგრძე.



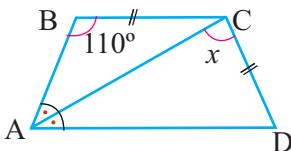
- 6» MN ტრაპეციის შუახაზია. სურათზე მონაკვეთების მიხედვით იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.



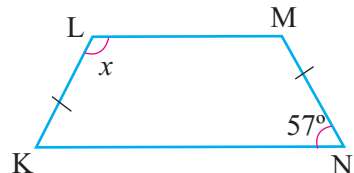
- 7» ტრაპეციის ფუძეები 6 სმ და 14 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის დიაგონალებს შორის მოქცეული შუახაზის KL მონაკვეთის სიგრძე.



- 8» მოცემულია: ABCD ტრაპეცია
BC = CD
AC ბისექტრისაა
იპოვეთ: $\angle ACD$

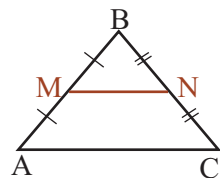


- 9» მოცემულია: KLMN ტოლფერდა ტრაპეცია $\angle KNM = 57^\circ$
იპოვეთ: $\angle KLM$

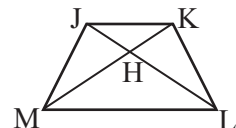


- 10» დახაზეთ ტოლფერდა სამკუთხედი. დაწერეთ თქვენი მოსაზრებები ამ სამკუთხედის შუახაზის გავლებით მიღებული სამკუთხედისა და ტრაპეციის შესახებ.

- 11» $\triangle ABC$ -ში MN შუახაზია.
თუ $AB = 10$ სმ-ია, $BC = 12$ სმ-ია, $AC = 14$ სმ-ია. იპოვეთ შუახაზის მიერ ამ სამკუთხედიდან გამოყოფილი ტრაპეციის პერიმეტრი.

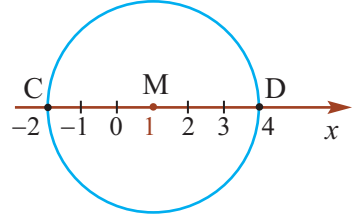


- 12» ნარგიზისათვის მიცემული საშინაო დავალების ამოცანაში მოცემული იყო, რომ $JM \cong KL$. ნარგიზს უნდა დაემტკიცებინა, რომ MJKL ტრაპეციაში $\triangle MJL \cong \triangle LKM$. თქვენც ამოხსენით ეს ამოცანა.



მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები

გამოკვლევა. დახაზეთ რიცხვითი წრფე. ააგეთ წრე-წირი რომლის ცენტრი არის $M(1)$ წერტილში და რადიუსია 3 ერთეული. წრეწირის რიცხვით ღერძთან გადაკვეთის წერტილები აღნიშნეთ C და D -თი. გამოვთვალოთ $(-2 + 4) : 2$ გამოსახულების მნიშვნელობა. რაკვეთი არსებობს ამ გამოსახულების მნიშვნელობასა და M წერტილის კოორდინატს შორის?

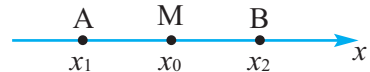


მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები

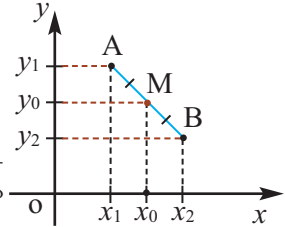
1) რიცხვით ღერძზე მოცემულია $A(x_1)$ და $B(x_2)$ წერტილები. AB მონაკვეთის შუაწერტილი იყოს $M(x_0)$.

$$AM = MB \quad AM = |x_0 - x_1| \quad MB = |x_2 - x_0|$$

$$\text{სურათის თანახმად } x_0 - x_1 = x_2 - x_0 \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



2) თაღისის თეორემის თანახმად M წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული AB მონაკვეთის შუაწერტილი თუ არის, აბსცისთა ღერძზე x_0 -ის შესაბამისი წერტილიც x_1 და x_2 აბსცისიანი ბოლოების მქონე მონაკვეთის შუაწერტილია.



3) $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წვეროს წერტილების მქონე AB მონაკვეთის $M(x_0; y_0)$ შუაწერტილის კოორდინატები მოიძებნება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

შეამოწმეთ ამ ფორმულის სისწორე იმ შემთხვევისათვის, როდესაც AB მონაკვეთი ერთ-ერთი საკოორდინატო ღერძის პარალელურია.

1 იპოვეთ AB მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები.

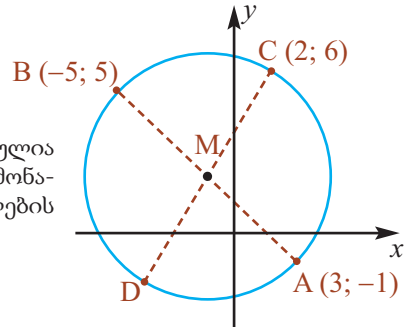
ა) $A(2; 5), B(4; 1)$; ბ) $A(-2; 3), B(6; -1)$

2 M წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები. ა) $A(2; 1), M(3; 2)$ ბ) $A(3; -1), M(-1; 1)$

3 იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები, თუ სამკუთხედის წვეროებია: $A(0; 0), B(0; 4)$ და $C(-6; 0)$

4 ა) $A(2; 3)$ და $C(4; 1)$ წერტილები $ABCD$ პარალელოგრამის მოპირდაპირე წვეროებია. იპოვეთ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

ბ) $A(1; 3), B(2; 6)$ და $C(5; 7)$ წერტილები $ABCD$ პარალელოგრამის წვეროებია. იპოვეთ D წერძოს კოორდინატები.



5 წრეწირზე, რომლის ცენტრიც არის M , აღნიშნულია A, B, C, D წერტილები. სურათზე არსებული მონაცემების მიხედვით იპოვეთ M და D წერტილების კოორდინატები.

კანმაზოგადებული დაჯალექები

- 1 რვეულში ჩაიხაზეთ ქვემოთ მოცემული ფიგურები და გაავლეთ შესაძლო სიმეტრიის ღერძები. რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს თითოეულ მათგანს?

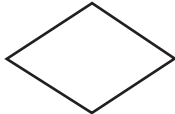
კვადრატი



მართკუთხედი



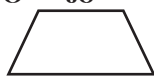
რომბი



პარალელოგრამი



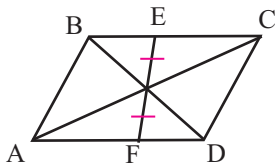
ტოლფერდა ტრაპეცია



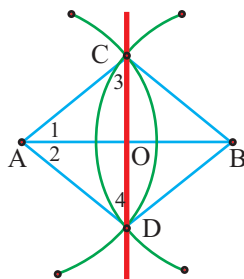
- 2 პარალელოგრამის ორი კუთხის სხვაობა: ა) 80° -ია; ბ) 100° -ია. იპოვეთ მისი კუთხეები.

- 3 პარალელოგრამის პერიმეტრი 28 სმ-ია. დიაგონალები მას 4 სამკუთხედად ყოფენ. ამ სამკუთხედებიდან ორის პერიმეტრის სხვაობა 2 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

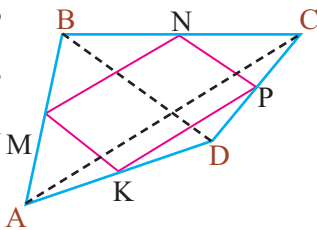
- 4 დაამტკიცეთ, რომ: 1) პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გამავალი წრფის პარალელოგრამზე მდებარე მონაკვეთი ამ წერტილით შუაზე იყოფა. 2) პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრია.



- 5 სურათზე მოცემული აგებულების მიხედვით $\triangle ACB \cong \triangle BDA$ და $\triangle ACD \cong \triangle BDC$. ამ ინფორმაციების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ CD არის AB მონაკვეთის შუამართობი.

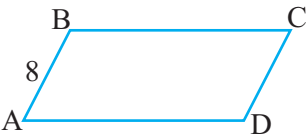


- 6 ABCD ოთხკუთხედში M, N, P, K წერტილები შესაბამისი გვერდების შუაწერტილებია.
ა) MN და PK მონაკვეთების ურთიერთმდებარეობის შესახებ რომელი მოსაზრების გამოთქმა შეიძლება?
ბ) MNPK ფიგურის რომელი სახის ოთხკუთხედი-სათვის მიკუთვნება შეიძლება?
გ) ABCD ოთხკუთხედის დიაგონალები $AC = 8$ სმ, $BD = 7$ სმ. იპოვეთ, MNPK ოთხკუთხედის პერიმეტრი.



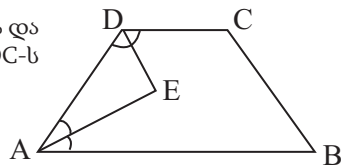
- 7 დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის გვერდების შუაწერტილების მიმდევრობით შეერთებით რომბი მიიღება, ხოლო რომბის გვერდების შუაწერტილების მიმდევრობით შეერთებით - მართკუთხედი.

- 8 სურათზე მოცემული პარალელოგრამის ორი ისეთი ტოლფერდა კონგრუენტული ტრაპეციითაა აგებული, რომელთა შუახაზი 12 სმ-ია, ფერდის სიგრძე კი 8 სმ.
1) პარალელოგრამზე ერთი ხაზის გავლებით გამოაცალკევეთ ეს ტრაპეციები.
2) იპოვეთ გამოცალკევებული ტრაპეციების პერიმეტრები.
3) იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

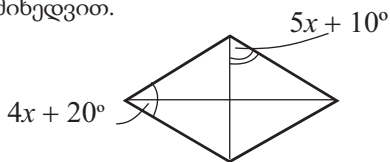


განმაზოგადებელი დავალებები

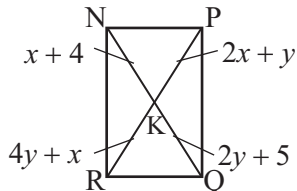
- 9» ABCD ტრაპეციაში AE და DE შესაბამისად $\angle DAB$ -სა და $\angle CDA$ -ის ბისექტრისებია და $DE \parallel CB$. იპოვეთ DC-ს სიგრძე, თუ $AD = 5$ სმ და $AB = 12$ სმ.



- 10» იპოვეთ ცვლადი, სურათზე გამოსახული რომბის მონაცემების მიხედვით.



- 11» ნახაზის მიხედვით იპოვეთ RNPQ მართკუთხედის NQ დიაგონალის სიგრძე.



- 12» ა) ტრაპეციის პერიმეტრი 24 სმ-ია, ფერდები 4 სმ და 5 სმ-ია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის შუახაზი.

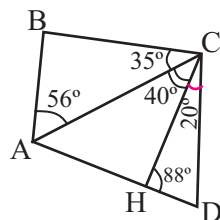
ბ) ტრაპეციის შუახაზი მისი დიდი ფუძის $\frac{2}{3}$ ნაწილის ტოლია. რამდენჯერ მეტია ამ ტრაპეციის შუახაზი მცირე ფუძესთან შედარებით?

- 13» სურათის მიხედვით, ფერადი წრის ადგილას ჩაწერეთ $<$, $>$, $=$ ნიშნები. მოსაზრება დაასაბუთეთ.

CD $\bullet$ CH

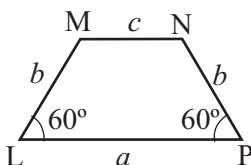
BC $\bullet$ AB

AC $\bullet$ CD

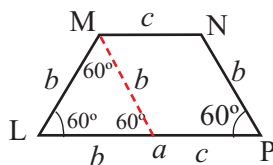


- 14» LMNP ტოლფერდა ტრაპეციაში $LM + NP = LP + MN$ -ისა და სურათზე აღნიშნული ინფორმაციების მიხედვით იპოვეთ $a : c$ შეფარდება.

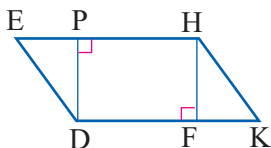
მითითება: M წვეროდან გაავლეთ NP გვერდის პარალელური წრფე.



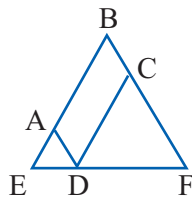
მითითება:



- 15» მოცემულია: $\square$ DEHK, $FH \perp DK$, $DP \perp EH$
დაამტკიცეთ: $\triangle DPE \cong \triangle HFK$



- 16» მოცემულია: $\square$ ABCD, $EB \cong EF$
დაამტკიცეთ: $\angle F \cong \angle ADC$



- 17» იპოვეთ პარალელოგრამის მეოთხე წვეროს კოორდინატები, თუ სამი წვეროს წერტილებია $N(1;0)$, $K(3;4)$, $L(5;2)$. გამოიკვლიეთ ყველა შემთხვევა.

2.1. ირაციონალური რიცხვები

2.2. პითაგორას თეორემა

თქვენ ამ განყოფილებაში შეისწავლით:

- რაციონალური და ირაციონალური რიცხვების განსხვავებას;
- კვადრატული ფესვის ნიშნის შემცველ გამოსახულებათა გამარტივებას;
- კვადრატული ამოფესვით ამოსახსნელი ამოცანების ამოხსნას;
- პითაგორას თეორემას;
- პითაგორას თეორემის გამოყენებით პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნას.

ისეთი ამოცანების ამოხსნისას, როგორიცაა ზღვაზე შტორმის ძალის გამოთვლა, ავარიის დროს ავტომობილის სიჩქარის, პარაშუტით ხტომის დროს დაშვების ადგილის განსაზღვრა, ხშირად ხდება გამოთვლები ფესვის ნიშნის ქვეშ მდგომ რიცხვებზე.

პითაგორას თეორემა გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნაში ყველაზე მეტად გამოყენებული თეორემაა.

ეს საინტერესოა!

პითაგორას სახელი ჩვენთვის უფრო მეტად ცნობილია თეორემით მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების შესახებ. ბერძენი მეცნიერი პითაგორა, რომელიც ცხოვრობდა ჩვენს წელთაღრიცხვამდე VI საუკუნეში იყო იმ სკოლის დამაარსებელი, სადაც ასწავლიდნენ მუსიკას, ტანვარჯიშს, ფილოსოფიასა და გეომეტრიას. ისინი, ვინც ამ სკოლაში იღებდნენ განათლებას, თავის თავს პითაგორელებს უწოდებდნენ. ისინი თვლიდნენ, რომ ბუნებაში არსებობდა მუსიკისა და ციფრების ჰარმონია. არ სჯეროდათ ირაციონალური და ათწილადი რიცხვების არსებობისა.

სურათზე გამოსახულია პითაგორა ქვიშაზე საკუთარი თეორემის განმარტების დროს.



$y = x^2$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

პრაქტიკული შეცადინება. 1) ცხრილს თითოეული 2-3 წუთის განმავლობაში დააკვირდით. შემდეგ წიგნი დახურეთ და ერთმანეთს ცხრილიდან რიცხვების გამოთვლის შესახებ კითხვები დაუსვით. მაგალითად, “რას უდრის 5-ის კვადრატის?” ან კიდევ “რომელი რიცხვის კვადრატია 36?” ცხრილის ცოდნა-არ ცოდნა ზეპირად შეამოწმეთ.

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$
$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$
$16^2 = 256$	$17^2 = 289$	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$
$21^2 = 441$	$22^2 = 484$	$23^2 = 529$	$24^2 = 576$	$25^2 = 625$

2) შეავსეთ ცხრილი.

x	-4	-3	-2	1	0	1		3	
$y = x^2$	16			1	0	1	4		16

3) საკოორდინატო სიბრტყეზე, რომელთა აბსცისები x -ის ცხრილში მოცემული მნიშვნელობები, ორდინატები კი y -ის შესაბამისი მნიშვნელობებია აღნიშნეთ წერტილები და ეს წერტილები სურათზე ნაჩვენებიათ გლუვი ხაზით შეაერთეთ.

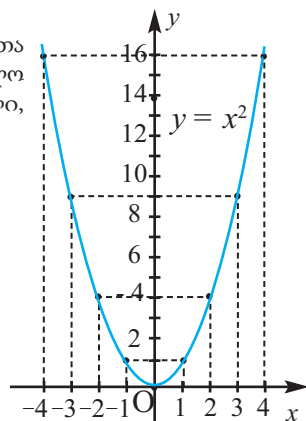
4) x -ისათვის კიდევ რამდენიმე, მაგალითად, 1,5; 2,5 და ა.შ. მნიშვნელობის მინიჭებით იპოვეთ y -ის მნიშვნელობები და შესაბამისი კოორდინატების მქონე წერტილების ამ ხაზზე მდებარეობა დააზუსტეთ.

შეავსეთ ცხრილის 1 სტრიქონში x არგუმენტის ზოგიერთი მნიშვნელობა, თუ მეორე სტრიქონში კი $y = x^2$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობებია მოცემული. ამ ფუნქციას x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის აქვს აზრი და არაუარყოფით მნიშვნელობებს იძენს.

$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი

საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილთა სიმრავლე, რომელთა აბსცისებიც არგუმენტის მნიშვნელობების ტოლია, ხოლო ორდინატები - ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობების ტოლი, ქმნის ფუნქციის გრაფიკს.

$y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკს პარაბოლა ეწოდება. **პარაბოლა** განთავსებულია ზედა ნახევარსიბრტყეში (x ღერძის ზევით) და მხოლოდ ერთი წერტილი $O(0; 0)$ არის აბსცისთა ღერძზე. ამ წერტილს პარაბოლის წვერო ეწოდება. იმდენად, რამდენადაც $(-x)^2 = x^2$, გრაფიკის თითოეულ $A(x; y)$ წერტილს ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული $B(-x; y)$ წერტილი შეესაბამება. ამრიგად, ორდინატთა ღერძი $y = x^2$ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძია.



სასწავლო დაფალებები.

1 M (-2; 4), N (1,2; 1,44), K (3; -9) წერტილებიდან რომლები მდებარეობენ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე?

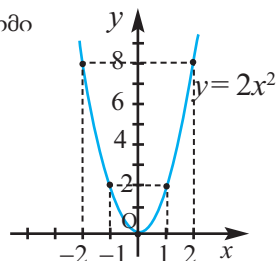
2 იპოვეთ:

- ა) y -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = -1,5$;
- ბ) x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, თუ $y = 2$, $y = 3$, $y = 4,5$.

კვადრატული ფესვები. არითმეტიკული კვადრატული ფესვი

- 3> ერთ კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $y = x^2$ და $y = 4$ ფუნქციების გრაფიკები. x -ის რომელი მნიშვნელობებისათვის პარაბოლაზე მდებარე წერტილები იმყოფება: ა) წრფის ზემოთ; ბ) წრფის ქვემოთ?
- 4> იპოვეთ x -ის რამდენიმე ისეთი მნიშვნელობა, რომ $y = x^2$ ფუნქციის მნიშვნელობა იყოს: ა) 9-ზე მეტი; ბ) 9-ზე ნაკლები.
- 5> დაწერეთ $A(2; 4)$ წერტილის ა) ორდინატა ღერძის მიმართ; ბ) აბსცისა ღერძის მიმართ; გ) კოორდინატა სათავის მიმართ სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები.
- 6> გამოიკვლიეთ $y = 2x^2$ ფუნქციის გრაფიკის აგების ალგორითმი და ააგეთ ა) $y = 3x^2$; ბ) $y = -2x^2$
გ) $y = \frac{1}{2}x^2$ ფუნქციების გრაფიკები.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



- 7> <http://go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html> ააგეთ $y = ax^2$ ფუნქციის გრაფიკი a -ს დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის. განიხილეთ a -ს ნიშანზე დამოკიდებულებით, როგორია პარაბოლის მდებარეობა საკოორდინატო სისტერეზე.

არითმეტიკული კვადრატული ფესვი

ამოცანა 1. იპოვეთ კვადრატული ფორმის ბოსტნეულის ნათესის ფართობი, თუ მისი გვერდი 8 მ-ია. კვადრატის ფართობი მისი გვერდის კვადრატის ტოლია. მაშასადამე, $S = 8^2 = 64$ (მ²)

ამოცანა 2. იპოვეთ კვადრატის გვერდი, რომელსაც აქვს კვადრატის ფორმა და ფართობი 49მ² ეს ამოცანა 1-ლი ამოცანის შებრუნებული ამოცანაა. აღვნიშნოთ კვადრატის გვერდი x -ით. ვიპოვოთ ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი არის $x^2 = 49$. ეს რიცხვია 7. თუმცა -7 -იც არის ამ განტოლების ფესვი. მაგრამ ვინაიდან სიგრძე გამოსახება დადებითი რიცხვებით, ამ შემთხვევაში პასუხად აიღება რიცხვი 7.

- a რიცხვიდან კვადრატული ფესვი ეწოდება რიცხვს, რომლის კვადრატი a -ს ტოლია
- კვადრატული ფესვის პოვნის მოქმედებას კვადრატული ამოფესვა ეწოდება.
- ამოფესვის მოქმედება კვადრატში აყვანის მოქმედების შებრუნებულია.
- კვადრატული ფესვი უარყოფითი რიცხვიდან არ არსებობს.
- ერთადერთი რიცხვი, რომლის კვადრატი 0-ია, არის 0.
- დადებით რიცხვს ორი კვადრატული ფესვი აქვს: ერთი დადებითია, მეორე - უარყოფითი. მართლაც, $b^2 = a$ მაშინ, $(-b)^2 = (-b) \cdot (-b) = b^2 = a$ იქნება.
- არითმეტიკული კვადრატული ფესვი არაუარყოფითი რიცხვიდან ეწოდება ისეთ არაუარყოფით რიცხვს, რომლის კვადრატიც a -ს ტოლია. ეს იწერება როგორც, $\sqrt{a}$ და ასე იკითხება: “კვადრატული ფესვი a რიცხვიდან. ნიშანი”. “ $\sqrt{a}$ ” არითმეტიკული კვადრატული ფესვის ნიშანია. გამოსახულებას, რომელიც ფესვის ნიშნის ქვეშ არის მოცემული, ფესქვეშა გამოსახულება ეწოდება.

ნამუშაო. $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$ გამოსახულებას აზრი არა აქვს (არც ერთი რიცხვის კვადრატი უარყოფითი არ არის). $\sqrt{0} = 0$. $\sqrt{49} = 7$ (რადგან $7 > 0$ და $7^2 = 49$), $\sqrt{81} = 9$ (რადგან $9 > 0$ და $9^2 = 81$) ზოგადად, თუ $b \geq 0$, $b^2 = a$, მაშინ $b = \sqrt{a}$ ტოლობას აკმაყოფილებს.

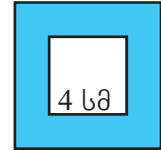
დასკვნა. $(\sqrt{a})^2 = a$ (რაც $a \geq 0$)

კვადრატული ფესვები. არითმეტიკული კვადრატული ფესვი

სახვადო დავალებები

1 იპოვეთ კვადრატის გვერდი, რომლის ფართობიც არის: ა) 64 მ²; ბ) 81 მ²; გ) 0,36 სმ².

2 სურათზე მოცემული ფიგურა შედგება ორი კვადრატისაგან. ფერადი ნაწილის ფართობია 48 სმ², პატარა კვადრატის გვერდი კი - 4 სმ-ია, იპოვეთ დიდი კვადრატის გვერდი.



3 სწორია თუ არა ტოლობა?

ა) $\sqrt{36} = 6$ ბ) $\sqrt{16} = -4$ გ) $\sqrt{64} = -8$ დ) $\sqrt{0} = 0$

4 იპოვეთ ფესვის მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{64}$ ბ) $\sqrt{121}$ გ) $\sqrt{0,04}$ დ) $\sqrt{1,44}$ ე) $\sqrt{0,4}$
 ვ) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ზ) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ თ) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ ი) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ კ) $\sqrt{\frac{81}{121}}$

5 შეავსეთ ცხრილი.

a	4	33	-25	1	2	-2	0,4	0,4	9	64
b	32	-8	26	0,21	0,25	11	0,09	-0,04	16	36
$\sqrt{a+b}$										

6 გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{144+25}$ ბ) $\sqrt{144} + \sqrt{25}$ გ) $\sqrt{11+\sqrt{25}}$ დ) $\sqrt{29-\sqrt{16}}$

7 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25}$ ბ) $4 \cdot \sqrt{9} - 3 \cdot \sqrt{4}$ გ) $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,25}$ დ) $\sqrt{0,25 - 0,09}$

8 აქვს თუ არა გამოსახულებას აზრი?

ა) $\sqrt{25 \cdot 4}$ ბ) $\sqrt{(-25) \cdot (-4)}$ გ) $\sqrt{(-5 \cdot 2)^2}$ დ) $\sqrt{-5^2 \cdot 2^2}$

9 ცვლადის რომელი მნიშვნელობებისათვის არის სწორი ტოლობა?

ა) $\sqrt{x} = 3$ ბ) $\sqrt{x} = 4$ გ) $\sqrt{x} - 1 = 4$ დ) $\sqrt{x} + 4 = 1$

10 გამოთვალეთ.

ა) $(\sqrt{9})^2$ ბ) $(-2 \cdot \sqrt{4})^2$ გ) $(3 \cdot \sqrt{5})^2$ დ) $(-2 \cdot \sqrt{3})^2$

11 შეადარეთ რიცხვები.

ა) $\sqrt{0,04}$ და $\sqrt{0,09}$ ბ) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ და $\sqrt{\frac{9}{16}}$ გ) $\sqrt{2,56}$ და $\sqrt{3,24}$

12 ფერადი წრეების ადგილას ჩაწერეთ შესაბამისი შედარების ნიშნები (>, <, =).

ა) $\sqrt{16+9}$ ● $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ ბ) $\sqrt{36+64}$ ● $\sqrt{36} + \sqrt{64}$

კვადრატული ფესვები. არითმეტიკული კვადრატული ფესვი

13» ნიმუშის შესაბამისად ამოხსენით განტოლებები:

ა) $x^2 = 81$

ბ) $x^2 = 3$

გ) $x^2 = 16$

დ) $2x^2 - 10 = 0$

ნიმუში:

ამოვხსნათ განტოლება $x^2 = 6$.

$$x^2 - 6 = 0, x^2 - (\sqrt{6})^2 = 0, (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{6} = 0 & x_1 = \sqrt{6} \\ x + \sqrt{6} = 0 & x_2 = -\sqrt{6} \end{cases}$$

14» ამოხსენით განტოლებები.

1) $x^2 = 1$

2) $x^2 + 7 = 56$

3) $12x^2 = 108$

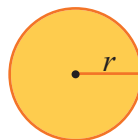
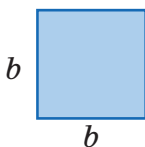
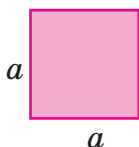
4) $x^2 - 12 = -4$

15» იპოვეთ ზომები ფიგურების ფართობების მიხედვით.

$S = 256 \text{ მ}^2$

$S = 2,25 \text{ კმ}^2$

$S = 625\pi \text{ მ}^2$

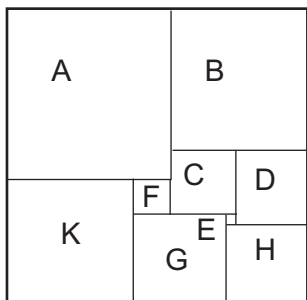


გამოყენებითი დაფალებები

16» ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობის გაანგარიშებისათვის $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ფორმულა გამოიყენება. იპოვეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი, თუ მისი ფართობი $9\sqrt{3} \text{ სმ}^2$ -ია.

17» აინურმა უნდა ამოჭრას 8 სმ გვერდის მქონე კვადრატული ფორმის ფურცელი და იგივე ფართობის წრის ფორმის ფურცელი. მიახლოებით რამდენი სანტიმეტრი იქნება წრის რადიუსი?

18» ქსოვილის ნაჭრების ერთმანეთზე მიკერებით მიღებული ნაკერი კერვის ცნობილი მეთოდია. წარსულში აზერბაიჯანელი ქალები პატარა ქსოვილის ნაჭრებსაც კი არ გადააგდებდნენ, მათი გამოყენებით ამზადებდნენ მცირე ზომის ლეიბების (დოშაგების) ზედაპირებს, ღოგინის გადასაფარებლებს, დეკორატიულ სუფრებს და ამით სახლის მორთვასთან ერთად ხდებოდა ოჯახის ბიუჯეტის ეკონომიაც. ალიეს ბებიისაგან სახსოვრად დარჩენილი, ნაჭრებისაგან დამზადებული ლოგინის გადასაფარებლის ნაწილები სქემაზე ასოებითაა აღნიშნული. A-ს გარდა დანარჩენი ნაწილები კვადრატის ფორმისაა, ხოლო მთლიანად - მართკუთხა ფორმისა. განსაზღვრეთ მისი ზომები, თუ D ნაწილის ფართობი 49 სმ^2 -ია, H ნაწილის ფართობი კი 64 სმ^2 -ია.



ირაციონალური რიცხვები

პრაქტიკული შეცადინება 1. დიდი ბერმენი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, ასტრონომი და გამომგონებელი არქიმედე ცდილობდა მოეძებნა რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატის 3-ის ტოლია, მის მიერ ამ მიზნით შერჩეული რიცხვებიდან ორი $\frac{265}{153}$ და $\frac{1351}{780}$ იყო.

თქვენც შეამოწმეთ ამ რიცხვების კვადრატები რომელი სიზუსტითაა 3-ის ტოლი. ამ პირობების შესაბამისად სხვა რიცხვი თქვენც შემოგვთავაზეთ.



რიცხვების კლასიფიკაცია

ნებისმიერი რაციონალური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს $\frac{m}{n}$ სახით, სადაც $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. თითოეული რაციონალური რიცხვი სასრული ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახითაც შეიძლება წარმოდგენილი იქნას. შერბუნებული პირობაც სწორია. ყოველი უსასრულო პერიოდული ათწილადი გარკვეულ რაციონალურ რიცხვს გამოსახავს. სხვადასხვა უსასრულო პერიოდული ათწილადი სხვადასხვა რიცხვებს უჩვენებს. გამონაკლისს წარმოადგენენ ათწილადები, რომელთა პერიოდია 9. იგი შეიძლება მიღებული იქნას, როგორც პერიოდი 0-ის მქონე წილადების სხვა ჩანაწერი. მაგალითად, $0,(9) = 0,999... = 1,000... = 1$, $(0) = 1$

$$3,1(9) = 3,1999... = 3,200... = 3,2$$

თითოეული სასრული ათწილადი შეიძლება ჩაიწეროს, როგორც 0-ის პერიოდის მქონე უსასრულო ათწილადი. არსებობს ისეთი რიცხვები, რომ მათი პერიოდული ათწილადის სახით წარმოდგენა შეუძლებელია. უსუსრულო ათწილადები, რომლებსაც პერიოდი არ გააჩნიათ გამოსახვენ არარაციონალურ რიცხვებს. ასეთ რიცხვებს ირაციონალური რიცხვები ეწოდება. ირაციონალური რიცხვების

$\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) სახით წარმოდგენა შეუძლებელია. ირაციონალური რიცხვების მაგალითებია: ა) $0,1010010001...$ (1-იანებს შორის ნულების რაოდენობა ყოველ ჯერზე ერთი ერთეულით იზრდება);

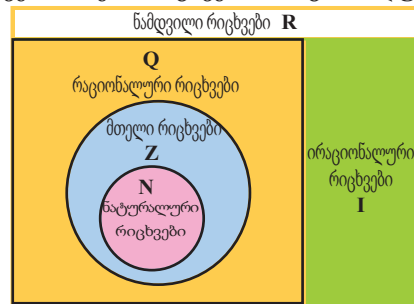
ბ) $0,123456789101112...$ (წილად ნაწილში ნატურალური რიცხვები მიმდევრობითაა ჩაწერილი);

გ) $\pi = 3,14159265...$ (უჩვენებს წრეწირის სიგრძის შეფარდებას დიამეტრთან).

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ თუ n რიცხვი რომელიმე ნატურალური რიცხვის კვადრატს არ წარმოადგენს, მაშინ $\sqrt{n}$ ირაციონალური რიცხვია. მაგალითად, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ირაციონალური რიცხვებია.

ირაციონალური რიცხვების სიმრავლე I ასოთი აღინიშნება. ირაციონალურ რიცხვებზე გამოთვლის მოქმედებები და მათი თვისებები რაციონალურ რიცხვებზე არსებულის მსგავსია.

ყველა რაციონალური და ირაციონალური რიცხვი ქმნის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R ასოთი აღინიშნება $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.



სასწავლო დაფალებები

1 უჩვენეთ რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები:

$$5; 2,3; -\frac{1}{3}; \sqrt{2}; 0; \pi; 4,(2); \sqrt{3}; -2,3(4); \sqrt{1,21}; \sqrt{\frac{4}{9}}; \sqrt{5}; \sqrt{144}$$

$0,21211211121...$ (2-იანებს შორის 1-იანების რაოდენობა ყოველ ჯერზე იზრდება ერთი ერთეულით)

2 ქვემოთ მოცემულ რიცხვებს შორის შეარჩიეთ ირაციონალური რიცხვები.

$$\sqrt{64}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\sqrt{16}$$

$$\frac{7}{22}$$

$$\sqrt{12}$$

$$0,8$$

$$\sqrt{27}$$

$$\sqrt{8}$$

$$\pi$$

$$\sqrt{121}$$

ირაციონალური რიცხვები

3 თითოეული პირობის წინ დაწერეთ მცდარია თუ ჭეშმარიტი. თუ მცდარია, მაშინ ერთი მაგალითის მოყვანით დაასაბუთეთ:

- 1) თითოეული ნატურალური რიცხვი მთელი რიცხვია.
- 2) თითოეული რაციონალური რიცხვი, თან ნამდვილი რიცხვიცაა.
- 3) 7-ის ყველა ჯერადი კენტი რიცხვებია.
- 4) ყველა უარყოფითი რიცხვი მთელი რიცხვია.

4 25 მ სიგრძის ლენტის ტოლ ნაწილებად დაიჭრა. შეიძლება თუ არა, ნაჭრების სიგრძე იყოს ირაციონალური რიცხვი?

5 დავუშვათ $a = 32,6378\dots$ და $b = 27,4637\dots$ a და b -ჯერ დაამრგვალოთ: ა) მათედებამდე; ბ) მესამედამდე; გ) მეათესამდე, შემდეგ იპოვეთ $(a + b)$ ჯამისა და $(a - b)$ სხვაობის მიახლოებითი მნიშვნელობები.

6 იმის დამტკიცება, რომ $\sqrt{2}$ ირაციონალურ რიცხვს წარმოადგენს, წერტილების ადგილას “ლუწი”, “კვევადი”, “უკვეცი” სიტყვებიდან შესაბამისი ჩაწერით დაასრულეთ და განიხილეთ.

დამტკიცება: უნდა დავამტკიცოთ, რომ არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს ისეთი $\dots\dots\dots \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ წილადი, რომ $(\frac{m}{n})^2 = 2$. აქედან $m^2 = 2n^2$. ვინაიდან $2n^2$ არის $\dots\dots\dots$ რიცხვი m^2 , ე.ი. m -იც ლუწი რიცხვია: $m = 2k (k \in \mathbb{N})$. თუ ამას $m^2 = 2n^2$ ტოლობაში გავითვალისწინებთ, $4k^2 = 2n^2$, აქედან კი მიიღება $n^2 = 2k^2$. ეს კი ნიშნავს, რომ $n \dots\dots\dots$ რიცხვია. აქედან კი მიიღება, რომ $\frac{m}{n}$ წილადი $\dots\dots\dots$, ეს კი ეწინააღმდეგება მსჯელობას. მაშასადამე, არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. ე.ი. $\sqrt{2}$ ირაციონალური რიცხვია.

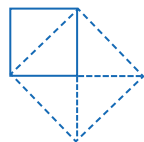
7 იპოვეთ n -ის ისეთი ნატურალური მნიშვნელობები, რომ $\sqrt{(3n+1)}$ გამოსახულების მნიშვნელობა იყოს: ა) ნატურალური, ბ) ირაციონალური.

8 დაწერეთ 2-სა და 2,1-ს შორის მოთავსებული ორი რაციონალური და ორი ირაციონალური რიცხვი.

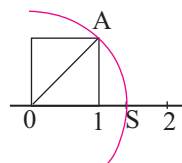
9 იპოვეთ 2,5 სმ რადიუსიანი წრეწირის სიგრძის მიახლოებითი მნიშვნელობა. π რიცხვი მესამედამდე დაამრგვალოთ.

10 a რაციონალური, b კი ირაციონალური რიცხვია. რაციონალური თუ ირაციონალური რიცხვია: ა) $a + b$, ბ) $a - b$, გ) ab , დ) $a : b$ გამოსახულებების მნიშვნელობა?

11 **პრაქტიკული მეცადინეობა.** 1) დახაზეთ კვადრატი, რომლის გვერდი ერთეული მონაკვეთის ტოლია და გაავლეთ მისი დიაგონალი. კვადრატის დიაგონალზე ააგეთ ახალი კვადრატი. სურათის მიხედვით დაადგინეთ, რომ ამ კვადრატის ფართობი, ერთეულოვანი კვადრატის ფართობთან შედარებით 2-ჯერ მეტია. აჩვენეთ, რომ ახალი კვადრატის გვერდის გამომსახველი რიცხვი $\sqrt{2}$ -ია.



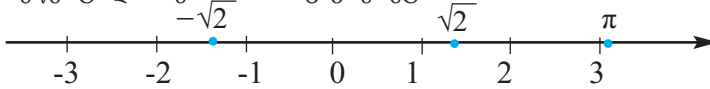
2) მეცადინეობა გაიმეორეთ ქვემოთ მოცემულის მსგავსად. რიცხვით ღერძზე ააგეთ ერთეულოვანი მონაკვეთის ტოლი გვერდის მქონე კვადრატი. კოორდინატა სათავიდან, როგორც ცენტრიდან შემოხაზეთ კვადრატის დიაგონალის ტოლრადიუსიანი წრეწირის რკალი, რომელიც რიცხვით ღერძს გადაკვეთს. აღნიშნეთ გადაკვეთის წერტილი. განმარტეთ კავშირი ამ წერტილის შესაბამის რიცხვსა და დიაგონალის სიგრძეს შორის.



ირაციონალური რიცხვები

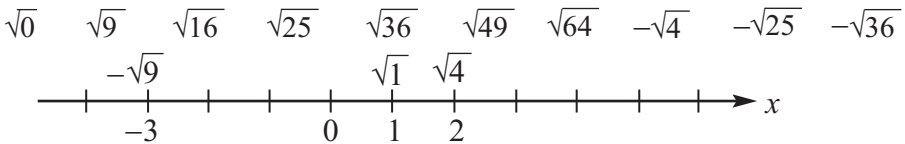
რიცხვითი ღერძი, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები

ყოველ წერტილს რიცხვით ღერძზე შეესაბამება ერთადერთი რიცხვი (რაციონალური ან ირაციონალური) და თითოეულ რიცხვს, რიცხვით ღერძზე შეესაბამება ერთადერთი წერტილი. ამაზე დაყრდნობით შეიძლება რიცხვების შედარება. ასე, რომ რიცხვით ღერძზე მარჯვნივ მდებარე წერტილის შესაბამისი რიცხვი, მარცხნივ მდებარე წერტილის შესაბამისი რიცხვზე მეტია.



სასწავლო დაფალებები

- 1) აღნიშნეთ რიცხვები რიცხვით ღერძზე.

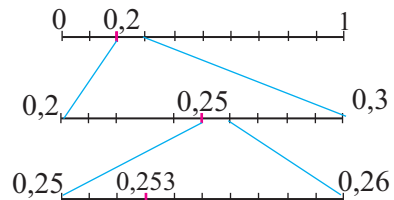


- 2) 1-ლი სავარჯიშოს რიცხვითი ღერძის გამოყენებით მიახლოებით განსაზღვრეთ $\sqrt{27}$; $\sqrt{38}$; $\sqrt{53}$; $-\sqrt{10}$ რიცხვების შესაბამისი წერტილების ადგილი.

- 2) 0,538; 0,674; 0,128 რიცხვების ადგილი რიცხვით ღერძზე უჩვენეთ ნიმუშში ნაჩვენები წესით და დაწერეთ ერთეულოვანი მონაკვეთის რომელ ინტერვალს მიეკუთვნებიან ისინი.

- 2) დახაზეთ $0,(8) = 0,8888\dots$ რიცხვის მძიმის მომდევნო ოთხი ციფრის ასახვის მაჩვენებელი რიცხვითი ღერძი.

ნიმუში. 0,253 ათწილადის რიცხვით ღერძზე ადგილი მძიმის შემდგომი თითოეული ციფრის მნიშვნელობის შესაბამისად ნაბიჯ-ნაბიჯადაა ნაჩვენები. რიცხვით ღერძზე ერთეული მონაკვეთები $0-1$; $0,2-0,3$; $0,25-0,26$ ინტერვალს შეესაბამება.



- 3) ორივე რიცხვის: ა) ჩვეულებრივ წილადად; ბ) ათწილადად ჩაწერეთ შეადარეთ.

1) $2,(6)$ და $\frac{17}{6}$ 2) $0,(3)$ და $\frac{2}{5}$ 3) $0,2(7)$ და $\frac{23}{65}$ 4) $0,(54)$ და $\frac{45}{88}$

- 4) დაწერეთ ორი რიცხვს შორის მდებარე სამი რაციონალური რიცხვი.

1) $\frac{4}{5}$ და $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{7}{9}$ და $\frac{5}{8}$ 3) $\frac{11}{13}$ და $\frac{6}{7}$

- 5) $A = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2; \pi; -3\}$; $B = \{2; -3; \sqrt{5}; \sqrt{0}; 0,(2)\}$; $C = \{\frac{2}{3}; 1,2; \sqrt{7}; -3; 2\}$ სიმრავლეებიდან აირჩიეთ ორი ისეთი, რომ: ა) სხვაობა ირაციონალური რიცხვებისაგან შედგებოდეს; ბ) თანაკვეთა მთელი რიცხვებისაგან შედგებოდეს. ამოხსენით ამოცანა ვენის დიაგრამის აგებით.

- 6) A-თი აღნიშნულია არაუმეტეს 20-ის ნატურალური რიცხვებიდან კვადრატული ფესვები, B-თი კი რიცხვი 60-ის გამყოფების სიმრავლე. იპოვეთ ა) $A \cap B$, ბ) $A \setminus B$, გ) $B \setminus A$ იპოვეთ სიმრავლეების ელემენტები.

$y = \sqrt{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

პრაქტიკული მეცადინეობა.

- 1) კალკულატორის გამოყენებით x -ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის გამოთვალეთ $\sqrt{x}$ შედეგები მათედებამდე დაამრგვალებთ და ცხრილი შეავსეთ.
- | | | | | | | | | | |
|------------|---|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| $\sqrt{x}$ | 0 | | 1 | | | 2 | | | 3 |
- 2) საკოორდინატო სიბრტყეზე აღნიშნეთ ცხრილში მოცემული რიცხვების შესაბამისი წერტილები და გლუვი წირით შეაერთეთ.
 - 3) x -სათვის უარყოფითი მნიშვნელობების მინიჭება შეიძლება?
 - 4) x -ის მნიშვნელობების ზრდის კვალობაზე, როგორ იცვლება $\sqrt{x}$ -ის შესაბამისი მნიშვნელობა?

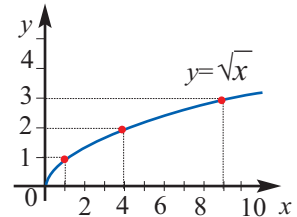
$y = \sqrt{x}$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

შესავსები ცხრილის 1-ელ სტრიქონში x არგუმენტის ზოგიერთი მნიშვნელობა, მე-2 სტრიქონში კი $y = \sqrt{x}$ ფორმულით მოცემული ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები ნაჩვენები.

$y = \sqrt{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია არგუმენტის არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის ($x \geq 0$), მნიშვნელობათა სიმრავლეც არაუარყოფითი რიცხვებია (რადგან უარყოფითი რიცხვებიდან კვადრატული ფესვი არ არსებობს და არითმეტიკული კვადრატული ფესვი არაუარყოფით მნიშვნელობებს იძენს).

$y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლის შტოს გავს.

როცა $x = 0$, მაშინ $y = 0$, ე.ი. კოორდინატთა სათავე გრაფიკზე მდებარეობს, როცა $x > 0$, მაშინ $y > 0$, ე.ი. გრაფიკი I მეოთხედში მდებარეობს. x -ის მეტ მნიშვნელობას y -ის მეტი მნიშვნელობა შეესაბამება. მაგალითად, $\sqrt{3} > \sqrt{2}$; $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ ა.შ

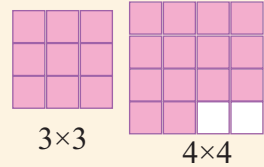


სასწავლო დაგვლებები

- 1) წრის ფართობი $S = \pi r^2$ ან $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ფორმულით გაიანგარიშება, სადაც r წრის რადიუსია, d - წრის დიამეტრია. დაწერეთ ა) r -ის S -ზე ბ) d -ს S -ზე დამოკიდებულების ფორმულა.
- 2) A (9; 3), B(64; 8), C(-81; 9), D(81; -9) წერტილებიდან რომლები ეკუთვნიან $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკს?
- 3) იპოვეთ $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით.
 - ა) y , როცა $x = 10$;
 - ბ) x , როცა $y = 2,5$
- 4) შეადარეთ რიცხვები $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით.
 - ა) $\sqrt{10}$ და $\sqrt{11}$
 - ბ) $\sqrt{3}$ და $\sqrt{4}$
 - გ) $\sqrt{12}$ და $\sqrt{15}$
 - დ) $\sqrt{8}$ და $\sqrt{9}$
- 5) ფერადი წრეების ადგილას ჩაწერეთ შესაბამისი შედარების ნიშანი:
 - ა) $\sqrt{17} \bullet 4$
 - ბ) $\sqrt{12} \bullet 3$
 - გ) $7 \bullet \sqrt{50}$
 - დ) $\sqrt{0,1} \bullet 0,3$
- 6) დაწერეთ ორი მიმდევრობითი მთელი რიცხვი, რომელთა შორის იმყოფება რიცხვი:
 - ა) $\sqrt{2}$
 - ბ) $\sqrt{5}$
 - გ) $\sqrt{8}$
 - დ) $\sqrt{10}$
- 7) განსაზღვრეთ სხვაობის ნიშანი.
 - ა) $\sqrt{10} - \sqrt{14}$
 - ბ) $\sqrt{7} - \sqrt{8}$
 - გ) $1,4 - \sqrt{2}$
 - დ) $1,8 - \sqrt{3}$
- 8) დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.
 - ა) $\sqrt{2}; \sqrt{5}; 1,4; \sqrt{3}; 1,8$
 - ბ) $-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; -\sqrt{7}; -3; -1,7$

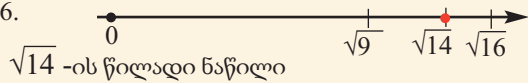
მიახლოებითი კვადრატული ფესვი

პრაქტიკული მეცადინეობა. 14 ერთი და იგივე ზომის პატარა, ერთეულოვანი გვერდის მქონე კვადრატისაგან აგებული უდიდესი კვადრატის გვერდი რამდენი ერთეული იქნება? თქვენ ამას როგორ განსაზღვრავთ? რიცხვი 14, რომელი ორი მთელი რიცხვის კვადრატის გამომსახველ რიცხვს შორის მდებარეობს?



რიცხვის კვადრატული ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა კალკულატორის დახმარებით შეიძლება. ცნობილია კვადრატული ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნის სხვა ხერხებიც. მიახლოებითი კვადრატული ფესვის გამოთვლა მთელი კვადრატების რიცხვებისა და რიცხვითი ღერძის დახმარებით შეიძლება. მაგალითად, ვიპოვოთ $\sqrt{14}$ ამ ხერხით.

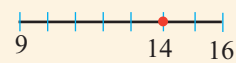
რიცხვი 14 მდებარეობს 9-სა და 16-ს შორის. ამ რიცხვებიდან კვადრატული ფესვები შესაბამისად 3 და 4-ია. 14-ის კვადრატული ფესვის მთელი ნაწილი 3-ია. წილადი ნაწილი ვიპოვოთ მიახლოებით: $\sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$.



14-დან 9-მდე 5 ერთეულია.

9-დან 16-მდე 7 ერთეულია.

$$\frac{14 - 9}{16 - 9} = \frac{5}{7}$$



მიახლოებითი მნიშვნელობა $\sqrt{14} \approx 3 \frac{5}{7} \approx 3,714$

კალკულატორით გამოანგარიშებული მნიშვნელობა: $\sqrt{14} \approx 3,741$

სასწავლო დაგვალეები

1 იპოვეთ რიცხვების მთელი ნაწილები: ა) $\sqrt{6}$ ბ) $\sqrt{11}$ გ) $\sqrt{17}$ დ) $\sqrt{30}$

2 ქვემოთ მოცემული ცხრილი რვეულში ჩაიხაზეთ და შეავსეთ.

რიცხვის კვადრატული ფესვი	ფესქვეშა რიცხვთან ყველაზე ახლოს მდგომი მთელი რიცხვის კვადრატი გამოსახული რიცხვები	რომელ ორი ერთმანეთის მომდევნო მთელ რიცხვს შორის მდებარეობს?	მიახლოებითი წილადობით.	მიახლოებითი ათწილადობით.	კალკულატორით გამოანგარიშებული.
$\sqrt{91}$	$\sqrt{81}$ და $\sqrt{100}$	9 და 10	$9 \frac{10}{19}$	9,526	9,539
$\sqrt{40}$					
$\sqrt{55}$					
$\sqrt{284}$					
$\sqrt{78}$					
$\sqrt{176}$					

3 40 ერთი და იგივე ზომის ერთეულოვანი კვადრატის გამოყენებით აგებული უდიდესი კვადრატის გვერდი რამდენი ერთეული იქნება? რამდენი ერთეული კვადრატი დარჩება ზედმეტი?

4 ღია ტიპის შეკითხვა. დაწერეთ ისეთი ოთხი დადებითი მთელი რიცხვი, რომ ამ რიცხვებმა გამოსახონ 5 ერთეულსა და 6 ერთეულს შორის არსებული კვადრატის ფართობი. პასუხები შეადარეთ.

ამოცანების ამოხსნა. ირაციონალური რიცხვები

1 S ფართობიანი წრის რადიუსი $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ ფორმულით გამოითვლება. თუ წრიული ფორმის ჩარჩოს ფართობი 42 სმ^2 იქნება, მიახლოებით რამდენი სანტიმეტრი იქნება მისი რადიუსი: (ჩათვალით, რომ $\pi \approx 3$).

2 ფეხბურთის ბურთი h მეტრ სიმაღლეზეა. ბურთის ამ სიმაღლიდან მიწაზე დაშვების დრო $t = \sqrt{\frac{2h}{9,8}}$ ფორმულით შეიძლება გამოითვალოს. იპოვეთ t თუ ბურთი 20 მ-ის სიმაღლეზეა.

3 გამომგონებელმა ავტომობილის სიჩქარის განსაზღვრისათვის დამუხრუჭების დაწყების შემდეგ გავლილი გზა გაზომა და გამოიყენა ფორმულა $v \approx 5,5 \cdot \sqrt{0,75d}$. იპოვეთ ტრანსპორტის სიჩქარე (მ/წმ), რომლის დამუხრუჭების გზაც (d) ნაჩვენებია სურათზე.



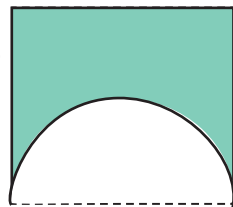
4 სურათზე მოცემული ფიგურა ტოლი კვადრატებისგანაა აგებული. ფიგურის ფართობი 32 კვადრატული ერთეულია. იპოვეთ კვადრატის გვერდის სურათის მიახლოებითი მნიშვნელობა. შედეგი მეთხუთმედამდე დაამრგვალოთ.



5 სიმაღლეზე ჭოკით მხტომელი სპორტსმენის სიჩქარე $v \approx 8 \sqrt{h}$ ფორმულით შეიძლება გამოითვალოს. იპოვეთ სპორტსმენის სიჩქარე თუ სიმაღლე, რომელიც უნდა გადალახოს სპორტსმენმა $h = 6$ მ-ია. შედეგი მეთხუთმედამდე დაამრგვალოთ.



6 კვადრატი, რომლის ფართობია 324 მ^2 , სურათზე ნაჩვენებია ფორმით, ნახევარწრით დაყოფილია ნაწილებად. იპოვეთ ამ ნახევარწრის ფართობი. შედეგი მეთხუთმედამდე დაამრგვალოთ.



7 დამკვირვებლიდან ჰორიზონტამდე მანძილი $d \approx 113 \sqrt{h}$ ფორმულით შეიძლება გამოითვალოს, სადაც h ზღვის დონიდან დამკვირვებლის ადგილის სიმაღლეს უჩვენებს.

- სიმაღლე $h = 2,5$ კმ მთის მწვერვალზე მდგომი დამკვირვებლისათვის;
- სიმაღლე $h = 8,85$ კმ ევერესტის მთის მწვერვალზე მდგომი დამკვირვებლისათვის;
- სიმაღლე $h = 4,23$ კმ შაჰდადის მწვერვალზე მდგომი დამკვირვებლისათვის გამოთვალეთ მანძილი ჰორიზონტამდე. შედეგი მეთხუთმედამდე დაამრგვალოთ.

კვადრატული ფესვი ნამრავლიდან და წილადიდან

გამოკვლევა. გამოთვალეთ $\sqrt{25 \cdot 4}$ და $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$ გამოსახულებების მნიშვნელობები.
 $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$ ტოლობა სწორია?

შესაბამისი ტოლობების სისწორე ორი არაუარყოფითი რიცხვის შერჩევით სხვა მაგალითებზე შეამოწმეთ.

კვადრატული ფესვი ნამრავლიდან და წილადიდან

თუ $a \geq 0, b \geq 0$, მაშინ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

არაუარყოფითი მამრავლების ნამრავლიდან ფესვი ამ მამრავლებიდან ფესვების ნამრავლის ტოლია. ეს თვისება ძალაშია მაშინაც, როდესაც მამრავლების რაოდენობა ორზე მეტია.

ანალოგიური წესით, შეიძლება იმის ჩვენება, რომ თუ $a \geq 0, b > 0$, მაშინ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ შეფარდებიდან ფესვი ფესვების შეფარდების ტოლია.

ნამუშეო. ა) $\sqrt{64 \cdot 0,25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} = 8 \cdot 0,5 = 4$ ბ) $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ და $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ტოლობებში მარცხენა და მარჯვენა მხარეებს თუ შევცვლით, მივიღებთ:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ და } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ნამუშეო. ა) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{50 \cdot 18} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{25 \cdot 4 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$
 ბ) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$

სასწავლო დაგვარებები

1 იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{64 \cdot 121}$ ბ) $\sqrt{0,01 \cdot 144}$ გ) $\sqrt{81 \cdot 36}$ დ) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04}$

2 გამოთვალეთ ფესვის მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{\frac{9}{64}}$ ბ) $\sqrt{\frac{25}{121}}$ გ) $\sqrt{5 \cdot \frac{1}{16}}$ დ) $\sqrt{5 \cdot \frac{4}{9}}$

3 გამოთვალეთ ფესვის მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{9 \cdot 81 \cdot 0,36}$ ბ) $\sqrt{1,44 \cdot 25 \cdot 64}$ გ) $\sqrt{5 \cdot \frac{4}{9} \cdot 6 \cdot \frac{1}{4}}$

4 გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ ბ) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ გ) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ დ) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1,6}$

5 თუ $a \geq 0, b \geq 0$, მაშინ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ტოლობის ქვემოთ მოცემული დამტკიცება დაასრულეთ.

პირობა	საფუძველი
1. $a \geq 0, b \geq 0$	1. მოცემულია
2. $\sqrt{a} \geq 0, \sqrt{b} \geq 0$	2.
3. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$	3.
4. $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$	4. ნამრავლის ხარისხი
5. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	5. არითმეტიკული კვადრატული ფესვის განსაზღვრის თანახმად.

6» გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{72 \cdot 50}$ ბ) $\sqrt{50 \cdot 18}$ გ) $\sqrt{90 \cdot 3,6}$
 დ) $\sqrt{2,5 \cdot 14,4}$ ე) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$ ვ) $\sqrt{45 \cdot 80}$

ნიმუში:
 $\sqrt{72 \cdot 32} = \sqrt{36 \cdot 2 \cdot 32} =$
 $= \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} =$
 $= 6 \cdot 8 = 48$

7» გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ ბ) $\sqrt{122^2 - 22^2}$ გ) $\sqrt{313^2 - 312^2}$ დ) $\sqrt{5^2 + 12^2}$

8» იპოვეთ ნამრავლის მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50}$ ბ) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$ გ) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$ დ) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6}$

9» იპოვეთ განაყოფის მნიშვნელობა.

ა) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ ბ) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{52}}$ გ) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$ დ) $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{6}}$

10» დაწერეთ გამოსახულება ფესვების ნამრავლის სახით.

ა) $\sqrt{15}$ ბ) $\sqrt{30}$ დ) $\sqrt{35}$ გ) $\sqrt{21}$ ე) $\sqrt{42}$ ვ) $\sqrt{56}$ ზ) $\sqrt{14}$

11» დაწერეთ გამოსახულება ფესვების შეფარდების სახით.

ა) $\sqrt{\frac{5}{7}}$ ბ) $\sqrt{\frac{3}{10}}$ გ) $\sqrt{\frac{a}{7}}$ დ) $\sqrt{\frac{3}{a}}$

12» $\sqrt{3} \approx 1,73$ მიახლოებითი ტოლობის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{75}$ ბ) $\sqrt{27}$ გ) $\sqrt{48}$ დ) $\sqrt{0,0003}$

13» გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{32400}$ ბ) $\sqrt{44100}$ გ) $\sqrt{0,0144}$ დ) $\sqrt{0,0049}$

14» გამოთვალეთ.

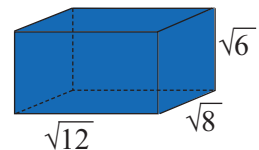
ა) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ ბ) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{3}$ გ) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{2}$ დ) $\frac{\sqrt{444}}{\sqrt{111}}$ ე) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$

15» გამოთვალეთ სხვადასხვა გამრავლების ფორმულების გამოყენებით.

ა) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$ ბ) $\sqrt{\frac{98}{176^2 - 112^2}}$ გ) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$

16» იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, თუ მისი სიგრძე $\sqrt{48}$ სმ-ია, ხოლო სიგანე კი $\sqrt{12}$ სმ.

17» სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა. რამდენი კუბური ერთეული იქნება.



კვადრატული ფესვი ხარისხიდან

კვადრატული ფესვი ხარისხიდან

იქიდან გამომდინარე, რომ არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს არ შეუძლია მიიღოს უარყოფითი მნიშვნელობა, $\sqrt{a^2} = a$ ტოლობა ყოველთვის სწორი არ არის.

ეს ტოლობა მხოლოდ $a \geq 0$ პირობებშია სწორი. როცა $a < 0$ -ზე, მაშინ სწორია ტოლობა: $\sqrt{a^2} = -a$. მაგალითად, $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = -(-6)$, $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 = -(-7)$ მართლაც, როცა $a \geq 0$, არითმეტიკული კვადრატული ფესვის განსაზღვრების თანახმად $\sqrt{a^2} = a$, როცა $a < 0$, მაშინ $(-a) > 0$, როცა $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. ამრიგად, როცა $a \geq 0$, მაშინ $\sqrt{a^2} = a$, $a < 0$, მაშინ $\sqrt{a^2} = -a$. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა ყოველთვის დადებითია (ან ნულის ტოლია) და გავაერთიანებთ ზემოთ მოცემულ ორ ტოლობას, მივიღებთ შემდეგს: $\sqrt{a^2} = |a|$.

ლუწი ხარისხის ფესვის ამოღებისათვის საჭიროა ფესვქვეშა გამოსახულება წარმოვადგინოთ განსაზღვრული გამოსახულების კვადრატის სახით, ხოლო შემდეგ გამოვიყენოთ იგივეობა $\sqrt{a^2} = |a|$.

- ნიმუში.**
- 1) როცა $a > 0$, $\sqrt{64a^2} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{a^2} = 8|a| = 8a$
 - 2) როცა $c < 0$, $\sqrt{25c^6} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{c^6} = 5 \cdot \sqrt{(c^3)^2} = 5|c^3| = -5c^3$
 - 3) $\sqrt{3^6 \cdot 4^4} = \sqrt{(3^3)^2 \cdot (4^2)^2} = 3^3 \cdot 4^2 = 3^3 \cdot 4^2 = 27 \cdot 16 = 432$

სასწავლო დაფალებები

- 1** გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{1,5^2}$ ბ) $\sqrt{(-1,5)^2}$ გ) $\sqrt{(-2,3)^2}$ დ) $\sqrt{(-3,2)^2}$

- 2** შეავსეთ ცხრილი

x	5	6	0	-3	-9	-5	-6	1,2	-1,2
$\sqrt{x^2}$									

- 3** გაამარტივეთ.

ა) $\sqrt{a^2}$ თუ $a > 0$, ბ) $\sqrt{25x^2}$ თუ $x < 0$,
 გ) $\sqrt{16c^2}$ თუ $c > 0$, დ) $0,5\sqrt{4a^2}$ თუ $a < 0$.

- 4** გარდაქმენით გამოსახულება.

ა) $\sqrt{49x^6}$, $x > 0$ ბ) $\sqrt{36x^6}$, $x < 0$ გ) $\sqrt{0,01y^8}$ დ) $\sqrt{25x^4}$

- 5** გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{(-3)^6}$ ბ) $\sqrt{(-6)^4}$ გ) $\sqrt{3^6 \cdot (-5)^2}$ დ) $\sqrt{(-8)^2 \cdot 3^4}$

- 6** გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^4}$ ბ) $\sqrt{5^4} \cdot \sqrt{2^6}$ გ) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 5^6}{10^4}}$ დ) $\sqrt{\frac{5^2 \cdot 3^4}{2^6}}$

- 7** წარმოადგინეთ ფესვქვეშა გამოსახულება ხარისხის სახით და გამოთვალეთ კვადრატული ფესვის მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{1225}$ ბ) $\sqrt{3969}$ გ) $\sqrt{19600}$ დ) $\sqrt{44100}$

- 8** გაამარტივეთ.

ა) $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2}$ ბ) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}$

- 9** ა) იპოვეთ კვადრატის გვერდი, თუ მისი ფართობი ტოლია $(1-x)^2$ -ის, როცა $x > 1$;

ბ) გაამარტივეთ გამოსახულება $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2}$, როცა $1 < x < 3$.

კვადრატული ფესვის შემცველ გამოსახულებათა გარდაქმნა

მამრავლის გამოტანა ფესვის ნიშნის გარეთ

ნიმუში 1. შევადაროთ რიცხვები $\sqrt{50}$ და $4\sqrt{2}$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{2} > 4\sqrt{2}$$

ამოხსნისას ჩვენ $\sqrt{50}$ შევცვალეთ $5\sqrt{2}$ -ით. ასეთ გარდაქმნას მამრავლის ფესვის ნიშნის გარეთ გამოტანა ეწოდება.

ნიმუში 2. $\sqrt{8a^3} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a} = 2|a| \cdot \sqrt{2a} = 2a\sqrt{2a}$ ($\sqrt{8a^3}$ გამოსახულება აზრი აქვს როცა $a \geq 0$)

მამრავლის შეტანა ფესვის ნიშნის ქვეშ

ნიმუში 3. შევადაროთ რიცხვები $\sqrt{73}$ და $6\sqrt{2}$

რიცხვი 6 შევცვალეთ $\sqrt{36}$ -ით

$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72} < \sqrt{73}$ რიცხვი $6\sqrt{2}$ შევცვალეთ $\sqrt{72}$ -ით. ასეთ გარდაქმნას მამრავლის ფესვის ნიშნის ქვეშ შეტანა ეწოდება.

როცა $a > 0$, $a = |a| = \sqrt{a^2}$ როცა $a < 0$, $a = -|a| = -\sqrt{a^2}$

ნიმუში 4. ა) $-4 \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{48}$

ბ) როცა $a < 0$, $a\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$

გ) როცა $a > 0$, $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$

სასწავლო დავალებები

- 1** გამოიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის გარეთ
 ა) $\sqrt{12}$ ბ) $\sqrt{80}$ გ) $\sqrt{48}$ დ) $\sqrt{18}$ ე) $\frac{1}{2} \sqrt{24}$ ვ) $-3\sqrt{12}$
- 2** გამოიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის გარეთ.
 ა) $\sqrt{50x^3y^2}$, $y > 0$ ბ) $\sqrt{18x^2y^4}$, $x < 0$ გ) $\sqrt{12x^5y^2}$, $y < 0$
- 3** შეიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის ქვეშ.
 ა) $2\sqrt{3}$ ბ) $-4\sqrt{3}$ გ) $3\sqrt{2}$ დ) $-4\sqrt{5}$ ე) $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{32}$ ვ) $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$
- 4** შეიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის ქვეშ.
 ა) $c\sqrt{3}$, $c > 0$ ბ) $c\sqrt{3}$, $c < 0$ გ) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ დ) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$
- 5** შეადარეთ რიცხვები.
 ა) $3\sqrt{2}$ და $2\sqrt{3}$ ბ) $2\sqrt{5}$ და $5\sqrt{2}$ გ) $5\sqrt{2}$ და $4\sqrt{3}$
- 6** დაწერეთ რიცხვები ზრდის მიხედვით.
 ა) $6\sqrt{2}$; $\sqrt{58}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{11}$ ბ) $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{29}$
- 7** განსაზღვრეთ სხვაობის ნიშანი.
 ა) $7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ ბ) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ გ) $3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$
- 8** იპოვეთ რიცხვის მთელი ნაწილი.
 ა) $7\sqrt{2}$ ბ) $5\sqrt{5}$ გ) $-3\sqrt{2}$ დ) $4\sqrt{5}$

კვადრატული ფესვის შემცველ გამოსახულებათა გარდაქმნა

კვადრატული ფესვის შემცველ გამოსახულებათა გარდაქმნა

ერთი და იგივე ფესვქვეშ გამოსახულებიანი $a\sqrt{b}$ და $c\sqrt{b}$ სახის გამოსახულებათა შეკრება და გამოკლება $2x$ და $5x$ მსგავსი გამოსახულებების შეკრებისა და გამოკლების მსგავსია. როგორც $2x + 5x = 7x$ ასევე $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ არის. $3\sqrt{5}$ და $2\sqrt{5}$ და მსგავსი ფესვებია.

ამოცანა. რისი ტოლია ორი ფიგურის ნაჭრის სიგრძე, თუ თითოეულის სიგრძე $\sqrt{14}$ სმ-ია?

$\sqrt{14} + \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$

$\sqrt{14}$
 $\sqrt{14}$

ნიმუში 1. $3 \cdot \sqrt{8} - 4 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{50} = 3\sqrt{4 \cdot 2} - 4 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{25 \cdot 2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} =$
 $= \sqrt{2} \cdot (6 - 4 + 5) = 7\sqrt{2}$

ნიმუში 2. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{24} = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - \sqrt{4 \cdot 6} =$
 $= 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} = 5$

ნიმუში 3. შევვეცეთ წილადი: $\frac{a^2 - 5}{a^2 + \sqrt{5}a}$

$$\frac{a^2 - 5}{a^2 + \sqrt{5}a} = \frac{a^2 - (\sqrt{5})^2}{a(a + \sqrt{5})} = \frac{(a - \sqrt{5})(\cancel{a + \sqrt{5}})}{a(\cancel{a + \sqrt{5}})} = \frac{a - \sqrt{5}}{a}$$

სასწავლო დაფალებები

1 გაამარტივეთ.

ა) $2\sqrt{14} + 5\sqrt{14}$

ბ) $1,5\sqrt{17} - 0,8\sqrt{17}$

გ) $12\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 7\sqrt{6}$

დ) $4,5\sqrt{3} - 0,7\sqrt{3}$

ე) $\frac{8}{11}\sqrt{17} - \frac{5}{11}\sqrt{17}$

ვ) $1,5\sqrt{13} + 1,7\sqrt{13} - 4\sqrt{13}$

2 ნიმუშის შესაბამისად იპოვეთ რიცხვების მთელი ნაწილები.

ა) $5\sqrt{2} + \sqrt{18}$ ბ) $5\sqrt{3} - \sqrt{27}$ გ) $\sqrt{75} - \sqrt{48}$ დ) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

ნიმუში. იპოვეთ $\sqrt{3} + \sqrt{75}$ რიცხვის მთელი ნაწილი.

$$\sqrt{3} + \sqrt{75} = \sqrt{3} + \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot (1 + 5) = 6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108} \approx 10,4 \quad \text{მაშასადამე, მოცემული რიცხვის მთელი ნაწილი 10-ია}$$

3 გაამარტივეთ გამოსახულება.

ა) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$

ბ) $3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 2\sqrt{18}$

გ) $\sqrt{16n} + \sqrt{25n} - \sqrt{9n}$

დ) $\sqrt{3a} - 2\sqrt{12a} + 3\sqrt{75a}$

4 გაამარტივეთ.

ა) $\sqrt{2x} + \sqrt{9y} + \sqrt{18x}$

ბ) $2\sqrt{27} + \sqrt{48x} + \sqrt{12x}$

გ) $\sqrt{24} + \sqrt{12} - \sqrt{6} + \sqrt{3}$

დ) $\sqrt{4} + \sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{36}$

კვადრატული ფესვის შემცველ გამოსახულებათა გარდაქმნა

5 შესრულეთ მოქმედებები.

ა) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{2})$

ბ) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$

გ) $(4\sqrt{3} - \sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{3}$

დ) $(\sqrt{12} + 2\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

6 გაამარტივეთ.

ა) $\sqrt{8} + 5\sqrt{2}$

ბ) $3\sqrt{18} + 4\sqrt{2}$

გ) $3\sqrt{20} + 2\sqrt{45}$

ბ) $\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$

დ) $2\sqrt{54} + 7\sqrt{24}$

ვ) $\sqrt{50} - \sqrt{200}$

7 შეადარეთ:

ნიმუში: $\sqrt{2} + \sqrt{8} \quad \bullet \quad \sqrt{10}$

$\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} \quad \bullet \quad \sqrt{10}$

$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad \bullet \quad \sqrt{10}$

$3\sqrt{2} \quad \bullet \quad \sqrt{10}$

$\sqrt{9 \cdot 2} \quad \bullet \quad \sqrt{10}$

$\sqrt{18} > \sqrt{10}$

1) $\sqrt{5} + \sqrt{5} \quad \bullet \quad \sqrt{20}$

2) $\sqrt{18} + \sqrt{8} \quad \bullet \quad \sqrt{54}$

3) $\sqrt{63} + \sqrt{28} \quad \bullet \quad \sqrt{168}$

4) $\sqrt{200} + \sqrt{200} \quad \bullet \quad \sqrt{400}$

5) $5\sqrt{27} + 2\sqrt{48} \quad \bullet \quad 9\sqrt{2}$

8 იპოვეთ ფიგურების პერიმეტრები და ფართობები.

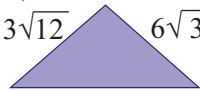
ა)  $2\sqrt{5}$
 $8\sqrt{3}$

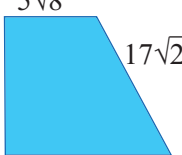
ბ)  $3\sqrt{8}$
 $9\sqrt{2}$

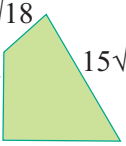
გ)  $4\sqrt{3}$
 $4\sqrt{3}$

9 იპოვეთ ფიგურების პერიმეტრები.

ა)  $4\sqrt{6}$ $3\sqrt{6}$
 $5\sqrt{6}$

ბ)  $3\sqrt{12}$ $6\sqrt{3}$
 $3\sqrt{27}$

გ)  $5\sqrt{8}$ $17\sqrt{2}$
 $15\sqrt{2}$ $9\sqrt{8}$

დ)  $2\sqrt{18}$ $15\sqrt{2}$
 $9\sqrt{2}$ $6\sqrt{8}$

10 გაამარტივეთ.

ა) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

ბ) $\sqrt{60} + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

გ) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

დ) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2$

11 დაშალეთ მამრავლებად კვადრატების სხვაობის ფორმულის გამოყენებით.

ა) $x^2 - 3$

ბ) $4y^2 - 5$

გ) $2 - c^2$

დ) $4 - a, a > 0$

12 შეკვეთე წილადი.

ა) $\frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}}$

ბ) $\frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$

გ) $\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$

დ) $\frac{c\sqrt{c} + c}{c + \sqrt{c}}$

მნიშვნელის ირაციონალურობისაგან განთავისუფლება

რაციონალური რიცხვისა და ირაციონალური რიცხვის ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი ("0"-ზე ნამრავლის გარდა) და განაყოფი ირაციონალური რიცხვია. ორი ირაციონალური რიცხვის ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და განაყოფი კი შეიძლება რაციონალური რიცხვი იყოს.

ნიმუში 1: ა) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$; ბ) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$

$a \geq 0$ $b \geq 0$ პირობით, ნებისმიერი a და b რაციონალური გამოსახულებებისათვის $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ და $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ ტოლობები სწორია. ამ ტოლობების გამოყენებით წილადის მნიშვნელს ათავისუფლებენ ირაციონალურობისაგან.

ნიმუში 2: $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ $\sqrt{6}$ -ზე და გავამარტივოთ.

$$\frac{3}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{18 - 3} = \frac{(3\sqrt{2} + 3)}{5}$$

მრიცხველი და მნიშვნელი შემოკლებული გამრავლებით გავამარტივოთ. $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$ -ზე ბის ფორმულის თანახმად

სასწავლო დავალებები

1 გაათავისუფლეთ წილადის მნიშვნელი ირაციონალურობისაგან.

1) $\frac{2}{5\sqrt{3}}$ 2) $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$ 3) $\frac{17}{3\sqrt{2} + 1}$ 4) $\frac{4}{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 5) $\frac{7}{\sqrt{18} + 2\sqrt{2} + 1}$

2 $a = \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$, $b = \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $c = \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$ გამოსახულებებიდან რომლის მნიშვნელობაა ირაციონალური?

3 შეადარეთ $a = \sqrt{8} - \sqrt{7}$ და $b = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ რიცხვები.

4 იპოვეთ $\sqrt{5} - 2$ რიცხვის შებრუნებულისა და მოპირდაპირეს ჯამი

5 გამოთვალეთ.

1) $\frac{4 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{4 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ 2) $\frac{3 + \sqrt{7}}{3 - \sqrt{7}} + \frac{3 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$ 3) $\frac{6}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

6 უჩვენეთ ტოლობის სისწორე.

$$\frac{1}{3 + \sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = 1$$

7 იპოვეთ $\frac{\sqrt{a} - 3}{a - 9}$ წილადის უდიდესი მნიშვნელობა.

8 გაამარტივეთ.

ა) $\left(\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} + \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a^2 + b}$ ბ) $\left(\frac{c - \sqrt{d}}{c + \sqrt{d}} - \frac{c + \sqrt{d}}{c - \sqrt{d}} \right) \cdot \frac{2c\sqrt{d}}{c + \sqrt{d}}$

განმაზოგადებელი დავალებები

- 1) გამოსახულებებიდან რომლის მნიშვნელობის სასრული ათწილადის ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით ჩაწერაა შეუძლებელი?

1) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ 2) $\sqrt{98 \cdot 50}$ 3) $-2\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{\frac{50}{49}}$ 5) $\sqrt{\frac{2}{25}}$

- 2) გამოსახულებებიდან რომლის მნიშვნელობაა ირაციონალური რიცხვი?

1) $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ 3) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^2$ 4) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

- 3) გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$ ბ) $\sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{16}}}}$

- 4) მოცემულ რიცხვებს შორის შეარჩიეთ უდიდესი და უმცირესი რიცხვი.

1) $2\sqrt{5}; 3\sqrt{2}; \sqrt{14}; \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 2) $-\sqrt{7}; -3\sqrt{2}; -2; -\sqrt{\frac{25}{4}}$

- 5) დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.

1) $5\sqrt{2}; 4\sqrt{3}; \sqrt{47}; \frac{3}{2}\sqrt{8}$ 2) $-\sqrt{8}; -2\sqrt{3}; -3; -\sqrt{\frac{27}{4}}$

- 6) ააგეთ $y = x^2$ და $y = 6$ ფუნქციების გრაფიკები ერთსა და იმავე საკოორდინატო სისტემაში. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილების ასბცისები და განსაზღვრეთ თითოეული მათგანი რომელ ორი მიმდევრობით მთელ რიცხვს შორის მდებარეობს.

- 7) გამოტოვებული სიტყვების ჩაწერით დაასრულეთ წინადადებები.

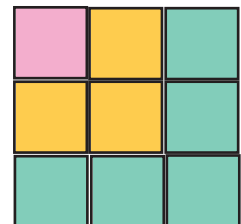
- 1) ორ ირაციონალურ რიცხვს შორის რაციონალური რიცხვია.
2) ორ ირაციონალურ რიცხვს შორის რაციონალური რიცხვია.
3) ორ ირაციონალურ რიცხვს შორის ირაციონალური რიცხვია.

- 8) წიგნების მაღაზიის სალონი კვადრატის ფორმისაა და მისი ფართობი 225 მ²-ია. ორი მეზობელი კედლის შუაწერტილების შეერთებით, ერთ კუთხეში კაფესათვის სექტორის ფორმის ადგილი გამოიყო. იპოვეთ კაფეს ფართობი.



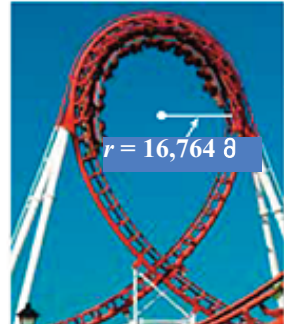
- 9) $l \approx 0,8v^2$ ფორმულით თითოეული პიროვნების ფეხის სიგრძის ცოდნით მაქსიმალური გარბენის სიჩქარის მიახლოებით განსაზღვრა შეიძლება. აქ l პიროვნების ფეხის სიგრძეა, ხოლო v კი – მაქსიმალური სიჩქარე. მიახლოებით რისი ტოლი შეიძლება იყოს პიროვნების მაქსიმალური სიჩქარე (მ/წმ), თუ მისი ფეხის სიგრძე 64 სმ-ია?

- 10) ლალეს მათემატიკის მასწავლებელმა შეკითხვაზე: “თქვენ რამდენი წლისა ხართ?” - ასეთი პასუხი გასცა: ჩემი ასაკის 1-დან დაწყებული კენტი რიცხვების მიმდევრობითი ჯამის სახით წარმოდგენა შეიძლება. რამდენი წლისა შეიძლება იყოს ლალეს მასწავლებელი? მარჯვნივ მოცემული სურათი შეიძლება დაგეხმაროთ ამ შეკითხვაზე პასუხის გაცემაში.

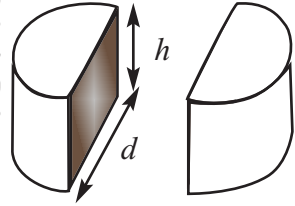


- 11) ა) იპოვეთ, $2b^2 - 14b + 1$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ $b + \sqrt{b} - 3 = 0$.
ბ) იპოვეთ $|a - b|$ თუ $a + b = 2\sqrt{6}$, $ab = 2$.

- 12** კარუსელზე მოძრავი ავტომობილების v სიჩქარის $v = 3\sqrt{6r}$ ფორმულით განსაზღვრა შეიძლება, აქ r კარუსელის წრის რადიუსია. მიახლოებით რისი ტოლია ამ წრის გარშემო მოძრავი ავტომობილის სიჩქარე (მ/წმ)? პასუხი მეთედებამდე დაამრგვალეთ.



- 13** ცილინდრის ფორმის რკინის კონსტრუქცია სურათზე ნაჩვენებია წესით, ფუძეების დიამეტრის გასწვრივ ორ ტოლ ნაწილად გაიჭრა. იპოვეთ ცილინდრის ფუძის რადიუსი, თუ ცნობილია, რომ ცილინდრის სიმაღლე ფუძის დიამეტრის ტოლია ($h = d$) და დაშტრიხული ნაწილის ფართობი 8 მ^2 -ია.



- 14** გამოთვალეთ.

$$\text{ა) } \sqrt{1,2 \cdot 3,7} \cdot \left(\sqrt{\frac{3,7}{1,2}} - \sqrt{\frac{1,2}{3,7}} \right) \quad \text{ბ) } \left(\sqrt{\frac{7}{6}} - \sqrt{\frac{6}{7}} \right) : \sqrt{42}$$

- 15** რიცხვი $\sqrt{150}$ გამოსახეთ a და b -თი, თუ $\sqrt{3} = a$, $\sqrt{2} = b$.

- 16** წარმოადგინეთ ორი ისეთი ირაციონალური რიცხვი, რომ: ა) ჯამი იყოს რაციონალური, ბ) ნამრავლი იყოს რაციონალური.

- 17** იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

$$\text{ა) } \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \quad \text{ბ) } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

- 18** რამდენჯერ აღემატება 825 დმ^2 ფართობიანი კვადრატის გვერდი 33 სმ^2 ფართობის მქონე კვადრატის გვერდს?

- 19** გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } \sqrt{4c^2} + 3c, \text{ თუ } c < 0; \quad \text{ბ) } \sqrt{9c^2} + 2c, \text{ თუ } c > 0.$$

- 20** გამოთვალეთ.

$$\text{ა) } \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{17}} \quad \text{ბ) } \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} - \sqrt{1,2} \cdot \sqrt{20}$$

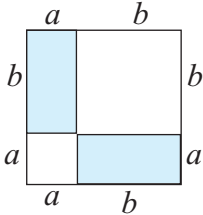
- 21** ელ ჰერაჯის ამოცანა. იპოვეთ ისეთი რიცხვი, რომ $(3 - \sqrt{5})$ -ზე გამრავლებისას მიიღოთ 1.

პითაგორას თეორემა

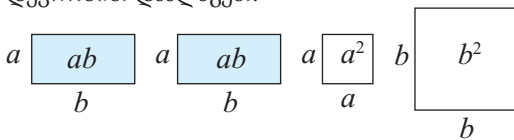
პრაქტიკული მეცადინეობა

1-ლი ნაბიჯი. გამოჭერით კვადრატული ფორმის ერთი და იგივე ზომის ორი მუყაოს ფურცელი.

მე-2-ე ნაბიჯი. მუყაოს ფურცლებიდან ერთ-ერთის გვერდებზე, სურათზე ნაჩვენების მსგავსად, a და b და მონაკვეთები აღნიშნეთ. იგი ორ კვადრატად და ორ მართკუთხედად დაჭერით და გააცალკევეთ.

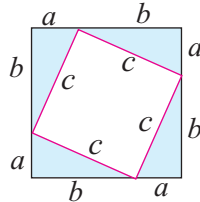


მე-3-ე ნაბიჯი. გაცალკევებული ფიგურები სურათზე მოცემული მიმდევრობით დაალაგეთ:



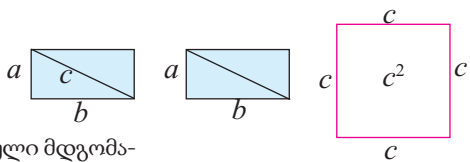
მე-7-ე ნაბიჯი. მე-3 და მე-6 ნაბიჯებით მიღებული მდგომარეობები შეადარეთ. რა დასკვნა გამოიტანეთ?

მე-4-ე ნაბიჯი. მეორე ფურცლის გვერდებზე სურათზე ნაჩვენებია წესით a და b მონაკვეთები გამოაცალკევეთ და თითოეული c -ს ტოლი ჰიპოტენუზის მქონე 4 მართკუთხა სამკუთხედი ამოჭერით.



მე-5-ე ნაბიჯი. რისი თქმა შეგიძლიათ ამ მართკუთხა სამკუთხედების კონგრუენტულობის შესახებ? ამ სამკუთხედების ამოჭრა – ალების შემდეგ დარჩენილი ფიგურა რომელი სახის ოთხკუთხედი იქნება? რამდენი გრადუსია ამ ოთხკუთხედის თითოეული შიგა კუთხე?

მე-6-ე ნაბიჯი. დაჭრილი ფიგურები სურათზე მოცემული წესით დაალაგეთ.



პითაგორას თეორემა

მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზას კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია. $c^2 = a^2 + b^2$

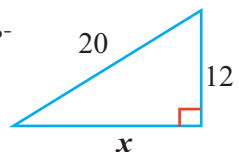
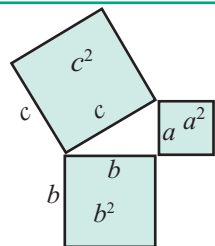
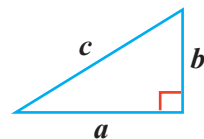
პითაგორას თეორემის გვერდებზე აგებული კვადრატების ფართობებით გამოსახვა ქვემოთ მოცემული წესით შეიძლება. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობი კათეტებზე აგებული კვადრატების ფართობების ჯამის ტოლია:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

მართკუთხა სამკუთხედში, თუ ორი გვერდი მოცემულია, მესამე გვერდი პითაგორას თეორემის მიხედვით შეიძლება ვიპოვოთ.

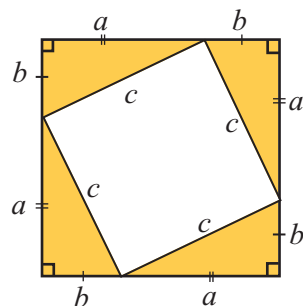
ნიმუში. ვიპოვოთ სურათზე მოცემული სამკუთხედის უცნობი კათეტი:

$$x^2 = 20^2 - 12^2; \quad x^2 = 400 - 144 = 256; \quad x = 16$$



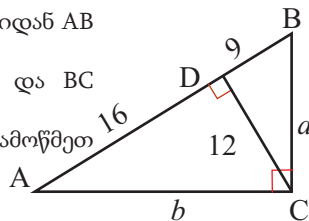
პითაგორას თეორემა

- 1» პითაგორას თეორემის მრავალი (400–მდე) სხვადასხვა ხერხით დამტკიცებაა ცნობილი. მათ შორის ერთი პრაქტიკულ მეცადინეობაზე განვიხილეთ. კიდევ ერთხელ დაწერეთ დამტკიცება მარჯვენა სურათის მიხედვით.

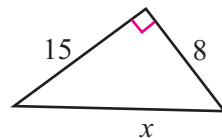
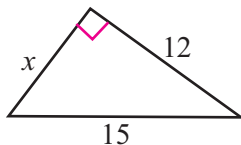
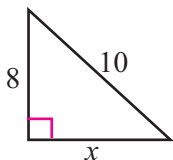


- 2» ABC მართკუთხა სამკუთხედში C მართი კუთხის მხრიდან AB ჰიპოტენუზაზე CD სიმაღლეა გაგლეხული.

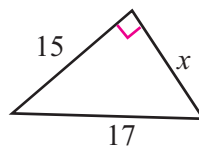
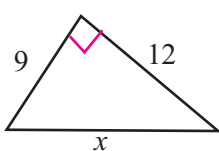
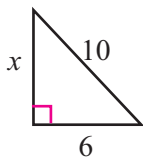
ა) სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ AC და BC კათეტების სიგრძე
 ბ) დაწერეთ პითაგორას თეორემა $\triangle ABC$ -სათვის და შეამოწმეთ დაწერილი ტოლობის სისწორე.



- 3» პითაგორას თეორემის გამოყენებით იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის უცნობი გვერდი.



- 4» პითაგორას თეორემის გამოყენებით გამოთქვით თქვენი მოსაზრება ამ სამკუთხედების მე-3 სავარჯიშოში მოცემული სამკუთხედებისაგან განსხვავების შესახებ.



ისტორიული ინფორმაცია. პითაგორა დაიბადა ჩვ.წ.აღ–მდე 569 წელს საბერძნეთის კუნძულ სამოსზე. პითაგორას სახელის უკვდავყოფა მოხდა იმ თეორემით, რომელიც პითაგორას თეორემის სახელითაა ცნობილი. იგი ცნობილია თავისი სიმარტივითა და პრაქტიკული მნიშვნელობით. ეს თეორემა ცნობილი იყო პითაგორამდე დიდი ხნით ადრე. თუმცა, წერილობითი წყაროებიდან ცნობილია, რომ ეს თეორემა პირველად სწორედ პითაგორამ დაამტკიცა. თვით პითაგორას მიერ თეორემის ორიგინალურ დამტკიცებასთან ერთად, ცნობილია ასევე ევკლიდეს, ლეონარდო და ვინჩის, ამერიკის პრეზიდენტ ჯეიმს ჰარფილდის დამტკიცებები. 1940 წელს ფართო საზოგადოებას წარედგინა წიგნი, რომელშიც მოყვანილი იყო თეორემის 370 დამტკიცება. სურათზე თქვენ ხედავთ ძეგლს, რომელიც პითაგორას პატივსაცემად აღმართულია მის სამშობლოში, კუნძულ სამოსზე.

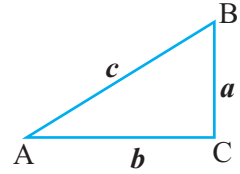


პითაგორას თეორემა

შებრუნებული თეორემა

თუ სამკუთხედის ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხა სამკუთხედი.

თუ $c^2 = a^2 + b^2$, მაშინ $\triangle ABC$ მართკუთხა სამკუთხედი.



მართკუთხა სამკუთხედებს, რომელთა გვერდები ნატურალური რიცხვებითაა გამოსახული პითაგორას სამკუთხედებს უწოდებენ. 3, 4, 5 გვერდების მქონე სამკუთხედი ყველაზე მეტად გამოყენებული მართკუთხა სამკუთხედი. ძველი ეგვიპტელები მიწის გაზომვის დროს ხშირად იყენებდნენ ამ სამკუთხედებს. ამ სამკუთხედს ეგვიპტის სამკუთხედსაც უწოდებენ. ამასთან გვერდების 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25, . . . მქონე სამკუთხედებიც პითაგორას სამკუთხედებია. ამ რიცხვებს კი პითაგორას სამეულები ეწოდება. თუ a, b, c რიცხვები პითაგორას სამეულია, მაშინ ak, bk, ck რიცხვებიც ($k > 0$) პითაგორას სამეული იქნება.

1) რიცხვების რომელი ჯგუფი გამოსახავს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს?

1) 8, 15, 17 2) 7, 24, 25 3) 20, 21, 31 4) 37, 12, 34

5) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$ 6) 10, 12, $\sqrt{22}$ 7) 2, 3, 4 8) $\sqrt{7}, 8, \sqrt{71}$

2) ერთის გარდა საერთო მამრავლის არმქონე სამი ნატურალური რიცხვი თუ გამოსახავს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს, ამ რიცხვებს პითაგორას მარტივ სამეულს ვუწოდებთ. დაწერეთ ცხრილში მოცემული პითაგორას მარტივი სამეულები.

a	b	c
5	12	13
10	24	?
15	?	39
?	48	52

2) განსაზღვრეთ ცხრილში მოცემული პითაგორას რიცხვების შეცვლის წესი.

3) დაწერეთ თითოეული პითაგორას მარტივი სამეულის შესაბამისი ახალი პითაგორას სამეული.

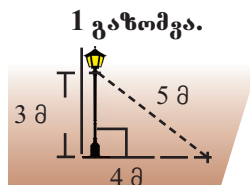
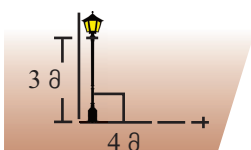
1) 8; 15; 17;

2) 9; 40; 41;

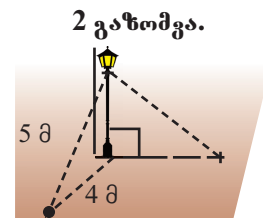
3) 7; 24; 25.

3) მართკუთხა სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძე 7 სმ და 10 სმ-ია. იპოვეთ მესამე გვერდის სიგრძის შესაძლო მნიშვნელობები.

4) **გამოკვლევა.** პითაგორას სამეულის გამოყენებით როგორ შეიძლება 3 მ სიმაღლის სინათლის ბოდის მიწისპირთან პერპენდიკულარობის შემოწმება? გაეცით შეკითხვაზე პასუხი თითოეულ სურათზე გამოსახული განმარტებით.



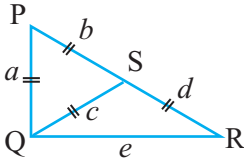
1 გაზომვა.



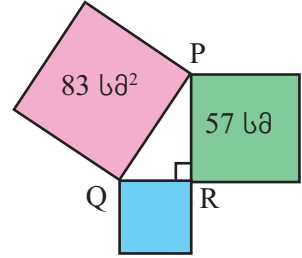
2 გაზომვა.

პითაგორას თეორემის გამოყენება

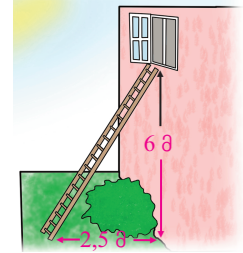
- 1) მოცემულია: ΔPQR -ში $a = b = c = d$.
 1) დაამტკიცეთ, რომ $\angle PQR = 90^\circ$.
 2) იპოვეთ b -ს მნიშვნელობა, როცა $a = 1$



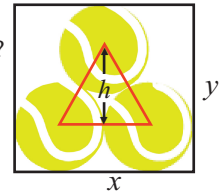
- 2) სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ QR გვერდზე აგებული კვადრატის ფართობი.



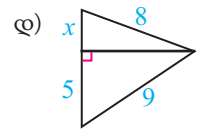
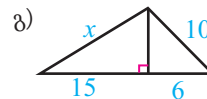
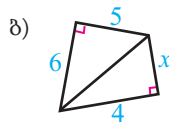
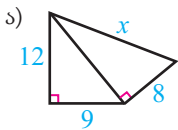
- 3) მეორე სართულის ფანჯარა მიწიდან 6 მ-ის სიმაღლეზეა. კედლიდან 2,5 მ მოშორებით კიბის დადგმით მეორე სართულზე ასვლა შეიძლება. რამდენი მეტრის სიგრძის კიბეა საჭირო ამისათვის?



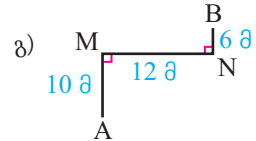
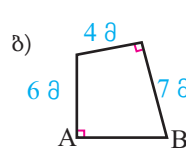
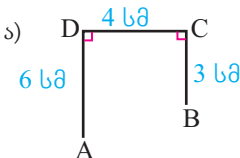
- 4) ჩოგბურთის ბურთები ყუთში სურათზე ნაჩვენები წესითაა ჩაწყობილი. თითოეული ბურთის დიამეტრი 6 სმ-ია.
 1) იპოვეთ ყუთის x -ით აღნიშნული ზომა.
 2) შეიძლება თუ არა, რომ ყუთის ფუძე იყოს კვადრატის ფორმის? პასუხი y -ის პოვნით დაასაბუთეთ.



- 5) იპოვეთ უცნობი გვერდი.



- 6) იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის.



- 7) ფანჯრის სიმაღლე 180 სმ, სიგანე 240 სმ და დიაგონალი კი 300 სმ-ია. შეიძლება ითქვას, რომ ეს ფანჯარა მართკუთხედის ფორმისაა?

- 8) მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები მიმდევრობითი ლუწი რიცხვებია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები

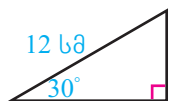
პითაგორას თეორემის გამოყენება

9 **გამოკვლევა.** პითაგორას სამეულებების უმრავლესობა კენტი რიცხვებით იწყება.

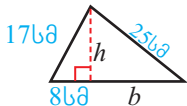
- 1) მოცემულ პითაგორას სამეულებში პირველი რიცხვი აიყვანეთ კვადრატში. ამ რიცხვს აქვს რაიმე კავშირი დანარჩენ ორ რიცხვთან?
- 2) თუ პითაგორას სამეულს გამოვსახავთ x , y , $y + 1$ -ით, დაწერეთ 1-ელ პუნქტში მიღებული შედეგი y -ის x -ით გამოსახვით.
- 3) მე-2 პუნქტის შედეგების მიხედვით, შეიძლება ითქვას, რომ არსებობს პითაგორას რიცხვების უსასრულო სიმრავლე?
- 4) Excel პროგრამის დახმარებით შეადგინეთ პითაგორას ყველა სამეულის ცხრილი, რომელთა პირველი რიცხვი იმყოფება ინტერვალში 3–დან 31–მდე.

10 **შეასრულეთ დავალებები.**

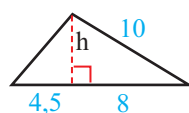
- 1) იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.



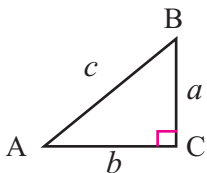
- 2) იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლე და პერიმეტრი.



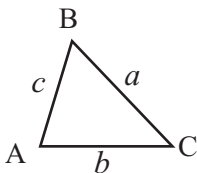
- 3) იპოვეთ სამკუთხედის სიმაღლე და პერიმეტრი.



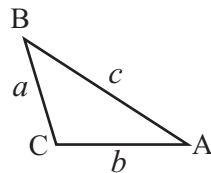
სამკუთხედის სახის განსაზღვრა გვერდების სიგრძეების მიხედვით



თუ $c^2 = a^2 + b^2$, მაშინ $\angle C = 90^\circ$. $\triangle ABC$ მართკუთხა სამკუთხედი.



თუ $c^2 < a^2 + b^2$, მაშინ $\angle C < 90^\circ$.



თუ $c^2 > a^2 + b^2$, მაშინ $\angle C > 90^\circ$. $\triangle ABC$ მართკუთხა სამკუთხედი.

11 1) მოცემული გვერდების მიხედვით შესაძლებელია სამკუთხედის აგება? თუ შესაძლებელია, მაშინ განსაზღვრეთ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა თუ ზღაგვკუთხა.
პითაგორას: პირველი კითხვის პასუხი დაასაბუთეთ სამკუთხედების უტოლობების დაწერით

- 1) 16, 18, 26
- 2) 1; 3; $2\sqrt{2}$
- 3) 6; 7; 8
- 4) 8; 12, $4\sqrt{3}$
- 5) 15, 8, 17
- 6) 12, 36, 35
- 7) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

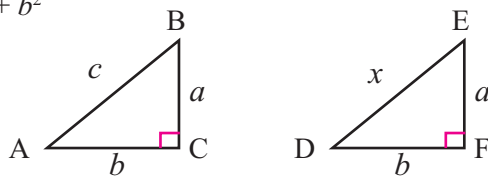
12 **ღია ტიპის შეკითხვა.** დახაზეთ ისეთი მართკუთხედი, რომლის დიაგონალის სიგრძე სიგანეზე 2-ჯერ მეტია. შემდეგ იპოვეთ მართკუთხედის სიგრძე პითაგორას თეორემის დახმარებით. დაწერეთ სამკუთხედის სიგანის, სიგრძისა და დიაგონალის თანაფარდობა. თქვენი პასუხები განიხილეთ.

პითაგორას თეორემის გამოყენება

13 რვეულში დაასრულეთ პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემის დამტკიცება.

მოცემულია: $\triangle ABC$, $c^2 = a^2 + b^2$

დაამტკიცეთ: $\angle C = 90^\circ$



1. დავაზოთ a და b და კათეტებიანი DEF მართკუთხა სამკუთხედი და ჰიპოტენუზა აღვნიშნოთ x -ით.

2. $x^2 = ?$

3. $c^2 = ?$

4. $c = x$

5. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

6. $\angle F$ მართი კუთხეა

7. $\triangle ABC$ მართკუთხა

სამკუთხედია.

$\triangle DEF$ -ში პითაგორას თეორემის თანახმად:

მოცემულია

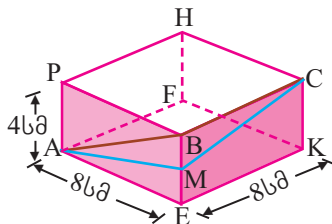
?

$\triangle$ კონგრუენტულობის ? ნიშნის თანახმად

?

?

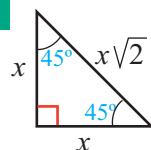
14 მართკუთხა პრიზმის ზედაპირზე A და C წვეროებს შორის ორი განსხვავებული გზაა ნაჩვენები. M წერტილი BE წიბოს შუაწერტილია. რომელი გზა უფრო მოკლეა: ABC თუ AMC?



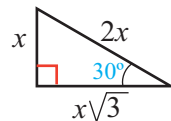
პითაგორას თეორემის დახმარებით შესაძლებელია 45° ; 45° ; 90° და 30° ; 60° ; 90° კუთხეებიანი მართკუთხა სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებს შორის კავშირის წესის სახით გამოსახვა.

განსაკუთრებული მართკუთხა სამკუთხედის შესახებ

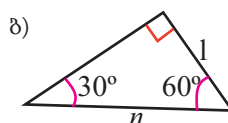
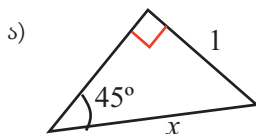
თეორემა 1. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზა თითოეულ კათეტზე $\sqrt{2}$ -ჯერ მეტია. გვერდების შეფარდება; $1 : 1 : \sqrt{2}$ -ია.



თეორემა 2. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კუთხეებიდან ერთ-ერთი 30° -ია ჰიპოტენუზა მცირე კათეტზე ორჯერ გრძელია. დიდი კათეტი კი მცირე კათეტზე $\sqrt{3}$ -ჯერ გრძელია. გვერდების შეფარდება $1 : \sqrt{3} : 2$ -ია.

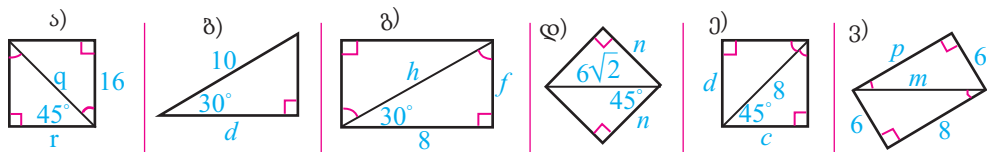


15 შეამოწმეთ თეორემები ქვემოთ მოცემული ამოცანების ამოხსნით.



პითაგორას თეორემის გამოყენება

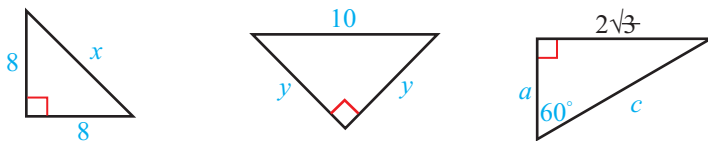
16 იპოვეთ ცვლადით აღნიშნული გვერდი ან დიაგონალი.



17 მოცემული პირობების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი ნაწილის სიგრძე. საჭიროების შემთხვევაში შედეგი დაამრგვალეთ მათედებამდე.

- 1) დახაზეთ 5 სმ გვერდებიანი ტოლგვერდა სამკუთხედი და იპოვეთ მისი სიმაღლე.
- 2) კვედრატის პერიმეტრი 24 სმ-ია. იპოვეთ დიაგონალი.
- 3) კვადრატის დიაგონალი 16 სმ-ია. იპოვეთ გვერდი.

18 იპოვეთ უცნობი გვერდები.



19 მოცემული გვერდების შესაბამისად, მოახდინეთ სამკუთხედების კლასიფიკაცია კუთხეების მიხედვით.

- 1) 4; 4; 7
- 2) 8; 8; $8\sqrt{2}$
- 3) 20; 15; 21

20 დაამტკიცეთ თეორემები განსაკუთრებული მართკუთხა სამკუთხედების შესახებ.

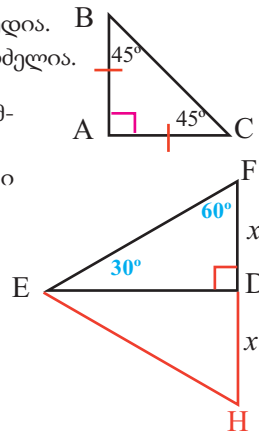
1) **მოცემულია:** $\triangle ABC$ ტოლგვერდა მართკუთხა სამკუთხედი.

დაამტკიცეთ: ჰიპოტენუზა თითოეულ კათეტზე $\sqrt{2}$ -ჯერ გრძელია.

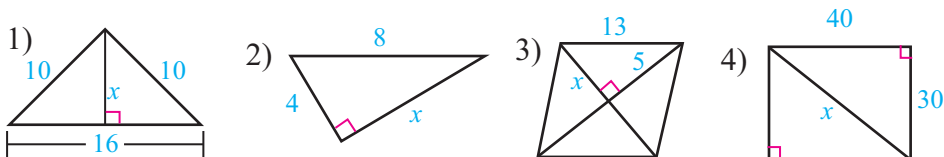
2) **მოცემულია:** $\triangle EFD$ არის მართკუთხა სამკუთხედი რომლის ერთ-ერთი მახვილი კუთხე 30° -ია.

დაამტკიცეთ: ჰიპოტენუზა მცირე კათეტზე 2-ჯერ, დიდი კათეტი კი მცირე კათეტზე $\sqrt{3}$ -ჯერ გრძელია.

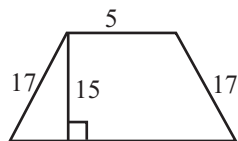
გეგმა დამტკიცებისათვის: ააგეთ $\triangle EFD$ -ს კონგრუენტული სამკუთხედი. დამტკიცეთ, რომ $\triangle HFE$ ტოლგვერდა სამკუთხედი.



21 მოწაყემების მიხედვით იპოვეთ x .

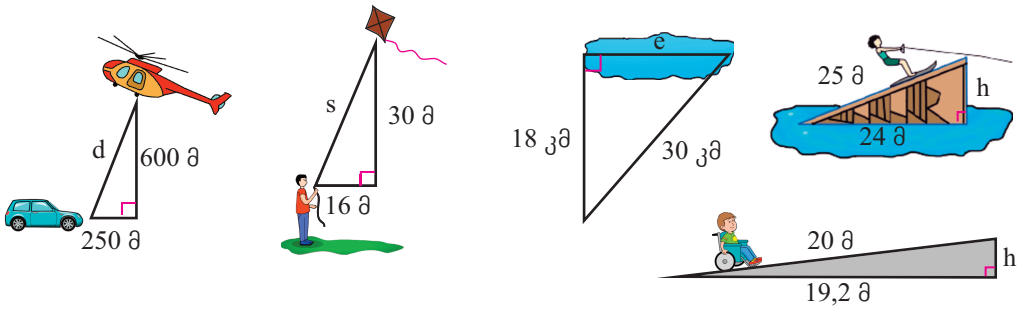


22 სურათზე მოწაყემების მიხედვით იპოვეთ ტოლგვერდა ტრაპეციის პერიმეტრი.

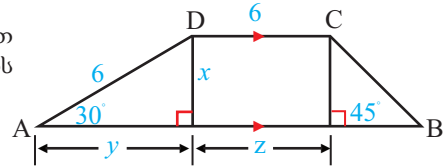


პითაგორას თეორემის გამოყენება

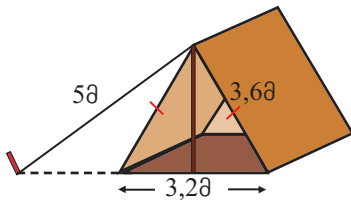
23 სურათზე მოცემულის მიხედვით იპოვეთ უცნობის მნიშვნელობა.



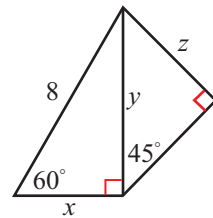
24 სურათზე მოცემულის მიხედვით იპოვეთ უცნობის მნიშვნელობები და ტრაპეციის პერიმეტრი.



25 კარავის მდგრადობის მომატებისათვის რკინის მავთულშებმული სამაგრი მიწაშია დარჭობილი. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კარავის უახლოეს წერტილამდე.



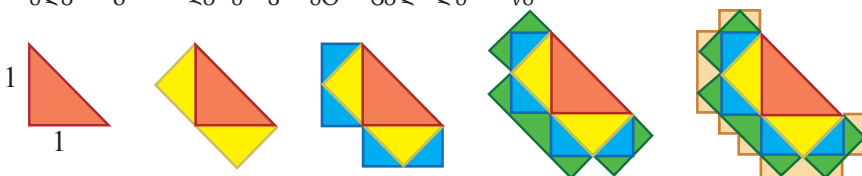
26 სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x , y , z .



27 ელჩინი $50 \text{ მ} \times 120 \text{ მ}$ მართკუთხა ფორმის პარკში წამში 1,6 მ სისწრაფით ხან დიაგონალის გასწვრივ, ხან პერიმეტრის გასწვრივ ქვეითად დადის. ელჩინის მიერ პარკის ერთი წვეროდან მეორე წვეროში დიაგონალის გასწვრივ გავლაზე დახარჯული დრო რამდენით ნაკლებია პერიმეტრის გასწვრივ ერთი სრული წრისათვის დახარჯულ დროზე?

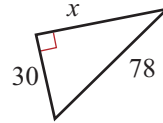
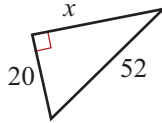
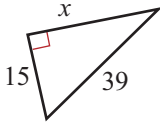
28 ჰესენმა ავტომობილით 60 კმ/სთ სიჩქარით რკინიგზის სადგურიდან 14 : 00 საათზე აღმოსავლეთის მიმართულებით დაიწყო მოძრაობა. 1 საათის შემდეგ კი ბეშირმა იმავე წერტილიდან ჩრდილოეთის მიმართულებით 50 კმ/სთ სიჩქარით დაიწყო მოძრაობა. რა მანძილი იქნება მათ შორის 16:00 საათზე?

29 **გამოკვლევა.** პირველ ნაბიჯში ჩავთვალოთ, რომ კატეტების ზომა 1 ერთეულია. ყოველ მომდევნო ნაბიჯზე იპოვეთ დამატებული სამკუთხედების კატეტები. მნიშვნელის ირაციონალობისაგან განთავისუფლებით, წინა მდგომარეობის მიხედვით განსაზღვრეთ კატეტის ცვლილების წესი.

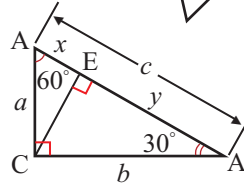


განმარტავადელი დავალებები

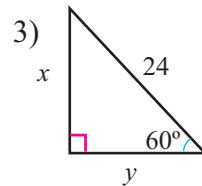
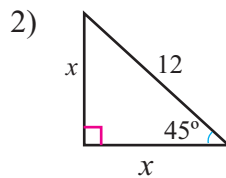
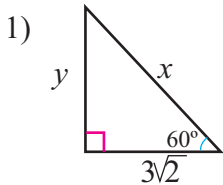
- 1) ქვემოთ მოცემული სამკუთხედების უცნობი გვერდები ამ რიცხვების შესაბამისად მარტივი პითაგორას სამეულის მოძებნით გამოთვალეთ. მითითება: იპოვეთ მოცემული რიცხვების საერთო გამყოფი.



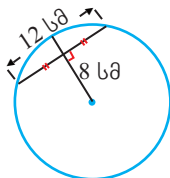
- 2) 1) იპოვეთ y და CE , თუ $a = 10$.
2) იპოვეთ a , b , y თუ $x = 8$.



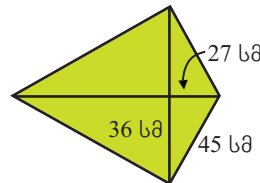
- 3) იპოვეთ უცნობი გვერდები.



- 4) 12 სმ სიგრძის ქორდის შუა წერტილიდან წრეწირის ცენტრამდე მანძილი 8 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.



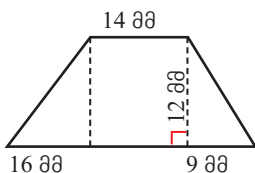
- 5) სურათის მონაცემების მიხედვით როგორ შეიძლება შევამოწმოთ დიაგონალების პერპენდიკულარულობა?



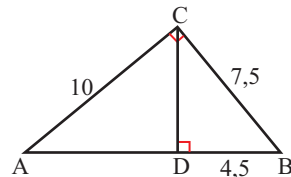
- 6) იპოვეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლე, რომლის გვერდი a -ს ტოლია.

- 7) იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ მისი სიმაღლე 12 სმ-ია, ხოლო მცირე დიაგონალი 13 სმ-ია.

- 8) იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი სურათის მონაცემების მიხედვით.



- 9) იპოვეთ AD -ს სიგრძე სურათის მონაცემების მიხედვით.



- 10) რომბის დიაგონალები 12 სმ და 16 სმ-ია. იპოვეთ რომბის პერიმეტრი.

3.1. კვადრატული განტოლებები

3.2. ფიგურების ფართობი

თქვენ ამ განყოფილებაში შესწავლით:

- კვადრატული განტოლებების სხვადასხვა ხერხებით ამოხსნას;
- კვადრატული განტოლებების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას;
- სამკუთხედებისა და ოთკუთხედების ფართობის გამოთვლის ფორმულებს;
- ფართობის ფორმულების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას;
- რთული ფიგურების უფრო მარტივ ფიგურებად დაყოფით მათი ფართობების გამოთვლას.

კვადრატული განტოლებები მშენებლობაში, ფინანსებში, დიზაინის ამოცანების გადაწყვეტაში ფართოდ გამოიყენება.

პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრაში ფართობების გამოთვლა ხშირად გვიწევს.

ეს საინტერესოა!

აღმოსავლეთის უდიდესმა მეცნიერმა ალ-ხორეზმმა თავის ნაშრომში - “ალგებრა და შედარებითი არითმეტიკა”, აჩვენა განტოლებების ამოხსნის სხვადასხვა ხერხები. ამ ხერხებიდან ერთ-ერთი იყო შერჩევის გზით განტოლების ამოხსნა. ხორეზმი ირჩევდა რიცხვს, სვამდა განტოლებაში და ამოწმებდა, რის შედეგად გასაგები ხდებოდა, იყო თუ არა ეს რიცხვი განტოლების ფესვი.



მაგალითად,

$$c + 9 = 47$$

$$\text{დავუშვათ } c = 31.$$

$$c + 9 = 40 \text{ მაშინ,}$$

$$40 + \boxed{7} = 47$$

$$c = 31 + 7, c = 38$$

$$3x = 84$$

$$\text{ცდისათვის}$$

$$x = 7 \text{ ავიღოთ}$$

$$3x = 21$$

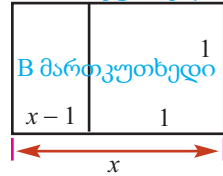
$$21 \cdot \boxed{4} = 84, x = 7 \cdot 4 = 28$$



კვადრატული განტოლებები

გამოკვლევა. დიზაინში ხშირად გამოიყენება მართკუთხედები, რომელთა გვერდების თანაფარდობაც შეადგენს ოქროს პროპორციას. ასე რომ, თუ ამ მართკუთხედიდან ჩამოვჭრით ყველაზე დიდ კვადრატს, მაშინ დარჩენილი პატარა მართკუთხედის გვერდების თანაფარდობა მოცემული მართკუთხედის გვერდების თანაფარდობის ტოლი იქნება.

A მართკუთხედი



$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$ პროპორციიდან შეიძლება დავწეროთ: $x(x-1) = 1$. აქედან $x^2 - x = 1$ და $x^2 - x - 1 = 0$ განტოლებების ამოხსნით უნდა ვიპოვოთ x . მიღებულ განტოლებაში ერთი უცნობია და ამ ცვლადის უმაღლესი ხარისხი 2-ია. ასეთ განტოლებებს კვადრატული განტოლებები ეწოდებათ. ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნისათვის კვადრატული განტოლებების ამოხსნის სხვადასხვა ხერხი უნდა შევისწავლოთ.

კვადრატული განტოლებები

$ax^2 + bx + c = 0$ სახის განტოლებას, სადაც $a \neq 0$, კვადრატული განტოლება ეწოდება.

აქ a, b, c - მუდმივი რიცხვებია, x - ცვლადია.

a -ს პირველი კოეფიციენტი, b -ს მეორე კოეფიციენტი, c -ს თავისუფალი წევრი ეწოდება.

მაგალითად, $3x^2 - x - 7 = 0$ განტოლებაში $a = 3$, $b = -1$, $c = -7$.

თუ კვადრატული განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ a -ზე, მივიღებთ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ განტოლებას. აქ, თუ აღვნიშნავთ $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ იგი შეგვიძლია ჩავწეროთ $x^2 + px + q = 0$ სახით. $x^2 + px + q = 0$ სახის განტოლებას დაყვანილი კვადრატული განტოლება ეწოდება.

მაგალითად, თუ $2x^2 - 6x - 8 = 0$ განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ 2-ზე, მივიღებთ მის ტოლფას $x^2 - 3x - 4 = 0$ დაყვანილ კვადრატულ განტოლებას:

გამოყენებითი დაფალებები

1 შეარჩიეთ კვადრატული განტოლებები და თითოეული კვადრატული განტოლებისათვის დაწერეთ კოეფიციენტები.

- ა) $3x^2 + 4x - 5 = 0$ ბ) $\frac{3}{4}x^2 - 2x - 3 = 0$ გ) $x - 4 = 5$
 დ) $\frac{6}{x^2} - x + 2 = 0$ ე) $6x^2 + x = 0$ ვ) $-x^2 + 5 = 0$

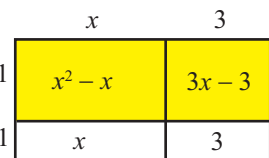
2 დაიყვანეთ განტოლებები $ax^2 + bx + c = 0$ სახეზე.

- 1) $(x-2)(x+1) = (2x-5)^2 + 1$ 4) $(2x-1)^2 = (x-1)(x+7)$
 2) $-2(x+5)(x-8) = 0$ 5) $4(x-1)^2 + 9 = 0$
 3) $(x+3)^2 + 3(2x+1)^2 - 54 = 0$ 6) $(3x-2)^2 - 15(x-2)^2 + 12 = 0$

3 მოცემული კვადრატული განტოლება შეცვალეთ მისი ტოლფასი დაყვანილი განტოლებით.

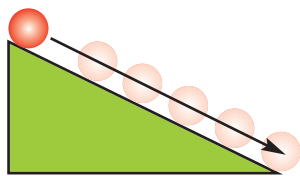
- ა) $3x^2 + 6x - 12 = 0$ ბ) $2x^2 - 10x + 12 = 0$
 გ) $5x^2 - 4x - 1 = 0$ დ) $-x^2 + 6x + 3 = 0$

4 სურათზე მართკუთხედის ფერადი ნაწილის ფართობი 21 კვადრატული ერთეულია. დაწერეთ კვადრატული განტოლება, რომელიც მართკუთხედის გვერდების სიგრძის გამოთვლის შესაძლებლობას მოგცემთ.



არასრული კვადრატული განტოლებები

გამოცვლა. ფიზიკის გაკვეთილზე ჩატარდა ცდა დახრილ სიბრტყეზე ბურთის მოძრაობის შესასწავლად, ისე როგორც ეს სურათზეა ნაჩვენები. გაირკვა, რომ სიმაღლე, რომელზეც იმყოფება ბურთი ნებისმიერი t დროის მომენტში, შეიძლება ვიპოვოთ ფორმულით $h = -4,9t^2 + 4$.



ა) გამოიკვლიეთ ამ მოძრაობის გამომსახველი ფორმულისა და $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების მსგავსი და განსხვავებული ნიშნები.

ბ) გამოსაკვლევ დავალებაში იმის მოსაძებნად, თუ ბურთი რამდენ წამში შეეხება მიწას, $h = 0$ პირობით. $-4,9t^2 + 4 = 0$ განტოლება უნდა ამოვხსნათ. იფიქრეთ, რომელი რიცხვითი სიდიდე უფრო რეალურია ფორმულაში რიცხვი 4-ის ნაცვლად ჩასაწერად?

არასრული კვადრატული განტოლებები

თუ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატულ განტოლებაში b და c კოეფიციენტებიდან თუნდაც ერთი ნულის ტოლია, ასეთ განტოლებას არასრული კვადრატული განტოლება ეწოდება.

$$ax^2 = 0 \quad (b = c = 0), \quad ax^2 + bx = 0 \quad (c = 0, b \neq 0),$$

$$ax^2 + c = 0 \quad (b = 0, c \neq 0) \text{ არასრული კვადრატული განტოლებებია.}$$

1) $ax^2 = 0$ ტიპის განტოლების ამოხსნა. განტოლების ორივე მხარეს თუ გავყოფთ $a \neq 0$ რიცხვზე, მივიღებთ განტოლებას $x^2 = 0$ მისი ფესვები იქნება $x_1 = x_2 = 0$.

ნამუშე 1. $3x^2 = 0$ განტოლების ორივე მხარე გავყოთ 3-ზე: $x^2 = 0, x = 0$

2) $ax^2 + bx = 0$ ტიპის განტოლების ამოხსნა. ამ ტიპის განტოლება მამრავლებად დაშლით იხსნება: $x \cdot (ax + b) = 0$.

იმისათვის, რომ ნამრავლი იყოს ნულის ტოლი მამრავლებიდან ერთ-ერთი მაინც უნდა იყოს ნული. ე.ი. ან $x = 0$, ან $ax + b = 0$. აქედან მიიღება, რომ $ax^2 + bx = 0$ განტოლებას აქვს 2 ფესვი, რომელთაგან ერთი ყოველთვის ტოლია 0-ის. $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$

ნამუშე 2. $2x^2 - 5x = 0$ განტოლების ამოხსნისათვის მარცხენა მხარე დავშალოთ მამრავლებად: $x \cdot (2x - 5) = 0 \quad x_1 = 0; \quad 2x - 5 = 0; \quad x_2 = 2,5$

3) $ax^2 + c = 0$ ტიპის განტოლების ამოხსნა.

$$ax^2 + c = 0 \text{ ჩაწეროთ } ax^2 = -c, x^2 = -\frac{c}{a} \text{ განტოლება სახით.}$$

თუ a -სა და c -ს აქვთ ერთნაირი ნიშნები, განტოლებას ფესვები არა აქვს (რატომ?)

თუ a -სა და c -ს აქვთ განსხვავებული ნიშნები, განტოლებას

$$\text{ორი ფესვი აქვს: } x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ და } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ნამუშე 3. ამოვხსნათ განტოლება: $4x^2 - 8 = 0 \quad 4x^2 = 8, \quad x^2 = 2, x = \pm\sqrt{2}$

სასწავლო დავალებები

5 ამოხსენით განტოლებები.

1) $2x^2 = 0;$

2) $x^2 - 16 = 0$

3) $-2x^2 = -50$

4) $8x^2 = 2x^2$

5) $x^2 - 3 = 0;$

6) $2x^2 + x = 0;$

7) $6x^2 = x$

8) $3x = 2x^2$

6 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $4x^2 = 8$

ბ) $\frac{x^2}{25} - 4 = 5$

გ) $7x^2 - 10 = 18$

დ) $6x^2 + 3x = 3x^2 - x$

ე) $3x^2 - 18 = 2x^2 + 7$

ვ) $x^2 = 2x^2 + 2x$

არასრული კვადრატული განტოლებები

7 იპოვეთ k -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ მოცემული განტოლება გახდეს არასრული კვადრატული განტოლება. დაწერეთ k -ს ამ მნიშვნელობების შესაბამისი განტოლება და ამოხსენით.

ა) $2x^2 + (k-2)x - (k+6) = 0$ ბ) $2x^2 - (k+1)x - 15 + k = 0$

8 1) რომელი ნატურალური რიცხვის კვადრატია მისი სამმაგის ტოლი?
2) იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი, რომლის სიგრძე სიგანეზე 4-ჯერ მეტია და მართკუთხედის ფართობი 100 მ²-ია.
3) რამდენი სანტიმეტრია წრის რადიუსი, რომლის ფართობი 16 სმ²-ია?

9 ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\frac{x^2 - 1}{3} + \frac{x^2 + 1}{2} = 3,5$

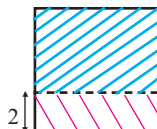
ბ) $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x^2 + 5}{6} = \frac{1}{2}$

გ) $x^2 + 2x = \frac{2x^2 + 9x}{6}$

დ) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$

გამოყენებითი დავალებები

10 კვადრატისაგან ჩამოიჭრა 2 სმ სიგანის ზოლი. იპოვეთ კვადრატის გვერდი, თუ ჩამოჭრილი ზოლის ფართობი დანარჩენ ფართობზე 2-ჯერ ნაკლებია.



11 დაწერეთ $x^2 + c = 0$ სახის ისეთი განტოლება, რომ: ა) ჰქონდეს ორი ამონახსენი; ბ) ჰქონდეს ერთი ამონახსენი; გ) არ ჰქონდეს ამონახსენი.

12 უჩვენეთ, რომ $x^2 = 4$ და $|x| = 2$ განტოლებების ფესვები ერთი და იგივეა.

13 დეკორატორს სურს, რომ 7 მ-იანი გვერდის მქონე კვადრატული ფორმის ყვავილნარი იგივე ფართობიანი წრიული ფორმით შეცვალოს.

1) მიახლოებით რამდენი მეტრი უნდა იყოს ახალი ნაკვეთის რადიუსი?
2) დაწერეთ ერთი და იგივე ფართობიანი კვადრატის გვერდსა და წრის რადიუსს შორის საერთო დამოკიდებულება.

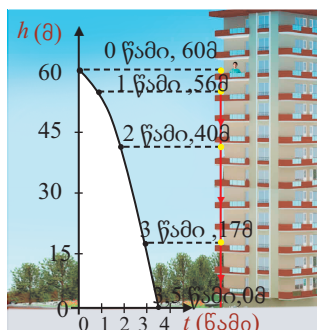


14 სხეულის განსაზღვრული სიმაღლიდან თავისუფალი ვარდნისას მისი t წამის შემდეგ მიწიდან დაშორება (მ-ობით) $h = -4,9t^2 + h_0$ ფორმულით იანგარიშება. (ამასთან ჰაერის წინააღმდეგობა მხედველობაში არ მიიღება). h_0 უჩვენებს სხეულის ვარდნის დაწყების სიმაღლეს. სხეული მიწის ზედაპირს აღწევს, როცა $h = 0$.

სურათზე გამოსახულია 60 მ სიმაღლიდან ჰორიზონტალური მიმართულებით ნასროლი სხეულის მოძრაობა.

$-4,9t^2 + 60 = 0$ განტოლების ამოხსნით შეიძლება ვიპოვოთ, რამდენი წამის შემდეგ მოხდება სხეულის მიწაზე ვარდნა. მიახლოებით რამდენი წამის შემდეგ დავარდება სხეული მიწაზე თუ h_0 სიმაღლე იქნება ა) 120 მ; ბ) 250 მ;

“ამ ამოცანას ერთი დადებითი და ერთი უარყოფითი პასუხი აქვს” - მოსაზრება სწორია?



$x^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლის სერით

$x^2 + bx + c = 0$ განტოლების მარცხენა ნაწილის მამრავლებად დაშლისათვის საჭიროა ორი ისეთი რიცხვის მოძებნა, რომ (თუ ასეთი რიცხვები არსებობს) მათი ნამრავლი c -ს, ჯამი კი b -ს ტოლი იყოს. როცა b და c მთელი რიცხვებია, მაშინ m და n -იც მთელი რიცხვებია. ამ შემთხვევაში, რადგან $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$ მოცემული განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს $(x + m)(x + n) = 0$ სახით და ამოიხსნას.

ნიმუში 1. $b > 0, c > 0$ $x^2 + 6x + 8 = 0$, $b = 6, c = 8$, რადგან b და c დადებითი რიცხვებია, უნდა მოვძებნოთ ორი ისეთი დადებითი რიცხვი, რომ ნამრავლი 8, ჯამი კი 6 იყოს. ეს რიცხვებია 2 და 4.

რადგან $(x + 2)(x + 4) = x^2 + 6x + 8$, განტოლებას
 $(x + 2)(x + 4) = 0$ სახით ვწერთ,
 ვპოულობთ: $x_1 = -2, x_2 = -4$.

8-მამრავლები	მამრავლების ჯამი
1 და 8	9
2 და 4	6

ნიმუში 2. $b < 0, c > 0$, $x^2 - 9x + 18 = 0$ რადგან b უარყოფითია, c დადებითი, ორი ისეთი უარყოფითი რიცხვი უნდა ვიპოვოთ, რომ ნამრავლი 18, ჯამი -9 იყოს.
 რადგან $(x - 3)(x - 6) = x^2 - 9x + 18$, განტოლებას
 $(x - 3)(x - 6) = 0$ სახით შეიძლება ჩაიწეროს.
 აქედან $x_1 = 3, x_2 = 6$.

18-მამრავლები	მამრავლების ჯამი
-2 და -9	-11
-3 და -6	-9

ნიმუში 3. $b > 0, c < 0$, $x^2 + 5x - 14 = 0$
 $(x - 2)(x + 7) = x^2 + 5x - 14$ და
 $(x - 2)(x + 7) = 0$ განტოლების ფესვები $x_1 = 2, x_2 = -7$.

-14 -მამრავლები	მამრავლების ჯამი
2 და -7	-5
-2 და 7	5

ნიმუში 4. $b < 0, c < 0$, $x^2 - 4x - 21 = 0$
 $(x - 7)(x + 3) = x^2 - 4x - 21$ და
 $(x - 7)(x + 3) = 0$ განტოლებიდან $x_1 = 7, x_2 = -3$.

-21 -მამრავლები	მამრავლების ჯამი
7 და -3	4
-7 და 3	-4

გამოყენებითი დავალებები

1) ამოხსენით განტოლებები მარცხენა მხარის მამრავლებად დაშლით.

- | | | |
|--------------------|------------------------|-----------------------|
| 1) $x^2 = 64$ | 5) $x^2 - 4x + 3 = 0$ | 9) $x^2 - 3x + 2 = 0$ |
| 2) $x^2 - 100 = 0$ | 6) $x^2 + 2x - 3 = 0$ | 10) $-x^2 + 6x = 0$ |
| 3) $x^2 - 9x = 0$ | 7) $x^2 - 3x - 10 = 0$ | 11) $x^2 + 18x = -81$ |
| 4) $4x^2 - 25 = 0$ | 8) $x^2 - 6x + 5 = 0$ | 12) $x^2 + 3x = 18$ |

2) მარცხენა მხარე მამრავლებად დაშლილი $(x - m_1)(x - m_2) = 0$ სახით კვადრატული განტოლების ფესვები m_1 და m_2 რიცხვების ტოლია. მოცემული ფესვების მიხედვით დაწერეთ კვადრატული განტოლებები.

- | | | | |
|------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| 1) 1 და -3 | 2) -8 და -2 | 3) 3 და -3 | 4) -5 და 2 |
| 5) 2 და $-\frac{1}{3}$ | 6) $\frac{2}{3}$ და $-\frac{2}{3}$ | 7) $\frac{5}{4}$ და $\frac{1}{2}$ | 8) 9 და $\frac{1}{6}$ |

ნიმუში. 1) 1 და -3 ; $(x - 1)(x + 3) = 0$; $x^2 + 3x - x - 3 = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$

3) k -ს ადგილას ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები, რომ განტოლების ფესვები მთელი რიცხვები იყოს.

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $x^2 + kx + 24 = 0$ | 2) $x^2 + kx + 12 = 0$ | 3) $x^2 + kx + 27 = 0$ |
|------------------------|------------------------|------------------------|

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლის ხერხით

4 ამოხსენით განტოლებები მამრავლებად დაშლის ხერხით.

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$y^2 + 13y + 36 = 0$$

$$x^2 + 22x + 40 = 0$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

$$x^2 - 13x + 12 = 0$$

$$r^2 - 11r + 18 = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$n^2 - 12n + 27 = 0$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$m^2 - 5m - 14 = 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$c^2 + 2c - 63 = 0$$

$$x^2 + 10x - 75 = 0$$

$$t^2 - 7t - 44 = 0$$

5 კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებიც არის -7 და 5 ფერიდემ, ელმირამ და სონამ ქვემოთ მოცემული სახით დაწერეს. ვინ შეასრულა დავალება უშეცდომოდ?

ფერიდე

$$(x + 7)(x - 5) = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

ელმირა

$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

სონა

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

6 განტოლებებიდან რომლის ფესვები არ არის მთელი რიცხვები?

ა) $x^2 - 3x - 18 = 0$

ბ) $n^2 - 3n + 9 = 0$

გ) $r^2 + 2r - 63 = 0$

დ) $x^2 + x - 12 = 0$

ე) $x^2 + 2x - 13 = 0$

ვ) $x^2 + 8x + 15 = 0$

7 მართკუთხედის ფართობი 28-მ^2 -ია. რომელი მთელი რიცხვები შეიძლება იყოს ამ მართკუთხედის გვერდები?

8 სხვადასხვა გამრავლების ფორმულის გამოყენებით მარცხენა მხარე დაშალეთ მამრავლებად და ამოხსენით განტოლება.

1) $0,25t^2 - 0,16 = 0$

2) $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 54 = 0$

3) $3600z^2 - 4900 = 0$

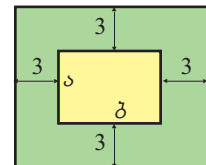
4) $(x - 2)^2 - 15(x - 2) + 56 = 0$

გამოყენებითი დავალებები

9 1) დაწერეთ ყვითელი ნაწილის ფართობის მაჩვენებელი გამოსახულება მამრავლებად დაშლილი სახით.

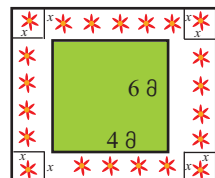
2) დაწერეთ საერთო ფართობის მაჩვენებელი გამოსახულება მამრავლებად დაშლილი სახით.

3) დაწერეთ მწვანე ნაწილის ფართობის მაჩვენებელი გამოსახულება..



10 $24\text{ სმ} \times 16\text{ სმ}$ ზომებიანი ფიგურის ჩარჩოს ნაპირების გასწვრივ 276 სმ^2 ფართობის მქონე ფიგურის არშია აქვს შემოვლებული. იპოვეთ არშიის სიგანე. დახაზეთ ამოცანის შესაბამისი ნახაზი.

11 ძია თაპირმა $4 \times 6\text{მ}$ ბაღის გარშემო ყვავილების დარგვით მისი ფართობი ბაღის ფართობს გაუტოლა. იპოვეთ ყვავილიანი ფართობის სიგანე.



12 1) $x^2 + bx + c$ სამწევრის მამრავლებად დაშლისას, როგორ იღებთ მხედველობაში c -ს ნიშანს? განაზოგადეთ მაგალითების ჩვენებით.

2) b -ს რა მნიშვნელობებისათვის იქნება $x^2 + bx + 7 = 0$ განტოლების ფესვები მთელი რიცხვები?

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლის ხერხით

$ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლის ხერხით

$ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების მარცხენა მხარის მამრავლებად დაშლისათვის საჭიროა ორი ისეთი რიცხვის მოძებნა, რომ მათი ნამრავლი ac -ს, ჯამი კი b -ს ტოლი იყოს. ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლება შეიძლება დაიწეროს $(ax + m)(x + \frac{n}{a}) = 0$ სახით.

ნიმუში 1. $2x^2 + 6x + 4 = 0$ ჩავწეროთ

$2x^2 + 6x + 4 = 2x^2 + mx + nx + 4$ სახით, სადაც

m და n ისეთი რიცხვებია, რომ $mn = ac$, $m + n = b$.

ამ შემთხვევაში $mn = 2 \cdot 4 = 8$, $m + n = 6$,

$2x^2 + mx + nx + 4 = 2x^2 + 2x + 4x + 4 = (2x^2 + 2x) + (4x + 4) =$

$= 2x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(2x + 4)$,

$(2x + 4)(x + 1) = 0$,

$2x + 4 = 0$, $x_1 = -2$; $x + 1 = 0$, $x_2 = -1$

8-ის მამრავლები	მამრავლების ჯამი
1 და 8	9
2 და 4	6

ნიმუში 2. $4x^2 - 13x + 10 = 0$ $a = 4$, $b = -13$, $c = 10$ $ac = 4 \cdot 10 = 40$, $b = -13$ პირობებში m და n რიცხვებიდან თითოეული უარყოფითი უნდა იყოს. ვირჩევთ უარყოფითი მთელი რიცხვების ისეთ წყვილს, რომ ჯამი იყოს -13 , ხოლო ნამრავლი 40 , ეს რიცხვებია -5 და -8 .

$4x^2 - 13x + 10 = 4x^2 - 5x - 8x + 10 =$

$= x(4x - 5) - 2(4x - 5) = (4x - 5)(x - 2)$,

$(4x - 5)(x - 2) = 0$,

$4x - 5 = 0$, $x_1 = 1,25$, $x - 2 = 0$, $x_2 = 2$

40-ის მამრავლები	მამრავლების ჯამი
-4 და -10	-14
-5 და -8	-13

ნიმუში 3. $4x^2 - 5x + 4$ სამწევრში $mn = 16$,

$m + n = -5$. 16-დავწეროთ უარყოფითი მთელი

მამრავლების ნამრავლი რომელიც გვადლევს 16-ს.

როგორც ვხედავთ $mn = 16$,

$m + n = -5$ პირობების დამაკმაყოფილებელი მთელი

რიცხვები არ არსებობს. მაშასადამე ამ სამწევრის მთელი

რიცხვების გამოყენებით მამრავლებად დაშლა

შეუძლებელია.

16-ის მამრავლები	მამრავლების ჯამი
-4 და -4	0
-2 და -8	-10
-1 და -16	-17

სასწავლო დავალებები

13 ჩაიხაზეთ ცხრილი რვეულში და შეავსეთ.

კვადრატული სამწევრის მამრავლები	$ax^2 + mx + nx + c$	$ax^2 + bx + c$	$m + n = b$	$mn = ac$
$(2x + 1)(x + 4)$	$2x^2 + 8x + x + 4$	$2x^2 + 9x + 4$	$8 + 1 = 9$	$8 \cdot 1 = 2 \cdot 4$
$(x + 1)(2x - 4)$				
$(2x - 1)(4x + 1)$				
$(3x + 1)(x + 5)$				
$(4x - 3)(2x - 1)$				

14 ამოხსენით განტოლებები მამრავლებად დაშლის ხერხით.

1) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

7) $4x^2 + 8x + 3 = 0$

2) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

5) $4x^2 - 7x - 11 = 0$

8) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

3) $2x^2 - 7x + 5 = 0$

6) $3x^2 - 13x - 30 = 0$

9) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლის ხერხით

- 15** მოცემული კვადრატული განტოლებებიდან ამოხსენით ისინი, რომელთა მარცხენა მხარის მთელი რიცხვების მამრავლებად დაშლა შესაძლებელია, დანარჩენების წინ კი დაწერეთ * ნიშანი.

$$4x^2 + 7x + 14 = 0$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$5x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

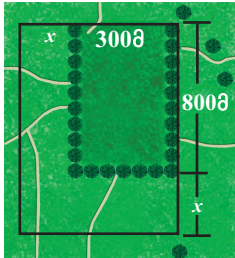
$$3x^2 - 8x + 11 = 0$$

$$4x^2 + 22x + 10 = 0$$

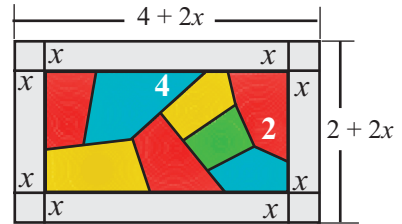
$$3x^2 - 8x + 15 = 0$$

გამოყენებითი დაგალებები

- 16** გამწვანების ზონას ეკავა $300 \text{ მ} \times 800 \text{ მ}$ ფართობი. სურათზე ნაჩვენებია წესით შეცვლის შემდეგ, მისი ფართობის 1,5-ჯერ გაზრდა დაგეგმილი. განსაზღვრეთ ახალი ნაკვეთის ზომები.



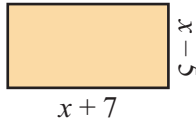
- 17** დიზაინერმა ქსელის ფანჯარას, რომლის ზომებია 2 მ და 4 მ, გარშემო 7 მ² ფართობის მქონე უფერო შუშის არშია შემოავლო. რისი ტოლია მისი სიგანე?



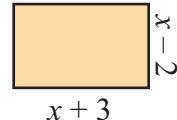
- 18** მართკუთხედის სიგანე სიგრძეზე 18 სმ-ით ნაკლებია. იპოვეთ მისი პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ ფართობი 319 სმ^2 -ია.

- 19** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x ცვლადის მნიშვნელობა.

64 კვადრატული
ერთეული



ფართობი 36
კვადრატული
ერთეული

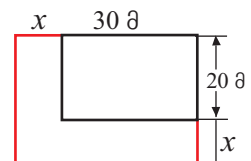


- 20** ნაილემ $40 \text{ სმ} \times 48 \text{ სმ}$ ზომის ქსოვილზე მოხატულობები მოჭარბა. მას სურს, რომ ნაქარგს გარშემო 180 სმ^2 ფართობის მოხატული ქსოვილისაგან არშია შემოავლოს. რამდენი სანტიმეტრი იქნება ამ არშიის სიგანე?

- 21** **ძველი ჩინური ამოცანა.** ჯოხით, რომლის სიგრძეც ცნობილი არ არის, გაზომეს კარები. ჯოხის სიგრძე კარის სიგანეზე 4 ჩ'-ით, სიმაღლეზე კი 2 ჩ'-ით გრძელია, დიაგონალი კი ჯოხის სიგრძის ტოლია. იპოვეთ კარის ზომები.

შენიშვნა: 1 ჩ'ი მიახლოებით 30 სმ-ია და ჩინეთში სიგრძის საზომად გამოიყენება.

- 22** **ღია ტიპის შეკითხვა.** ნახაზის შესაბამისად შეადგინეთ და ამოხსენით ამოცანა.



კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლის ხერხით

პრაქტიკული მეცადინეობა. ალგებრული ბარათების დახმარებით, მართკუთხედის აგებით მამრავლებად დაშლა.

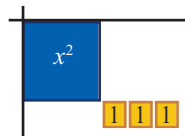
ფერადი ქალაქებისაგან სურათზე ნაჩვენებების მსგავსი ბარათები ამოჭერთ.



ნიმუში 1. ამოვხსნათ $x^2 + 4x + 3 = 0$ განტოლება მამრავლებად დაშლის ხერხით. ამისათვის $x^2 + 4x + 3$ სამწევრი ალგებრული ბარათების დახმარებით დავშალოთ მამრავლებად.

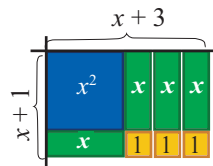


1. ჯერ x^2 -ის ბარათი მოათავსეთ. შემდეგ ერთეულის მაჩვენებელი ბარათები მართკუთხა ფორმით დაალაგეთ. ამ შემთხვევაში, ვინაიდან 3 წარმოადგენს მარტივ რიცხვს, იგი მართკუთხედის ფორმით მხოლოდ ერთადერთი სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ (1×3).



2. x ბარათების დალაგებით დავასრულოთ მართკუთხედი. მიღებული მართკუთხედის სიგანე $(x + 1)$, სიგრძე კი $(x + 3)$ იქნება, მაშინ $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

დავწეროთ განტოლება $(x + 3)(x + 1) = 0$ სახით. აქედან, $x + 3 = 0$, $x_1 = -3$; $x + 1 = 0$ $x_2 = -1$

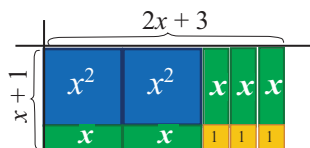


ნიმუში 2. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

ანალოგიური წესით $2x^2 + 5x + 3$ სამწევრი შეიძლება დავშალოთ მამრავლებად $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$

$(2x + 3)(x + 1) = 0$,

$2x + 3 = 0$, $x_1 = -1,5$ $x + 1 = 0$ $x_2 = -1$,

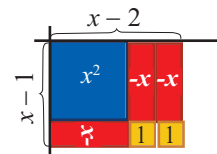


ნიმუში 3. $x^2 - 3x + 2 = 0$ როგორც სურათზეა ნაჩვენები,

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$,

$(x - 1)(x - 2) = 0$,

$x - 1 = 0$, $x = 1$; $x - 2 = 0$, $x = 2$.



23 ნიმუშების შესაბამისად ქვემოთ მოცემული განტოლებები ამოხსენით მამრავლებად დაშლის ხერხით.

ა) $x^2 + 4x + 3 = 0$

ბ) $x^2 - 4x - 5 = 0$

გ) $x^2 + 5x + 4 = 0$

დ) $x^2 - 2x + 1 = 0$

ე) $x^2 - 2x - 8 = 0$

ვ) $x^2 + 7x + 10 = 0$

24 ნიმუშის შესაბამისად დახაზეთ ფართობის მოდელები და დაწერეთ შესაბამისი კვადრატული სამწევრები.

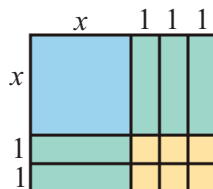
ნიმუში. $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$

1) $(x + 2)(x + 6)$

3) $(x + 4)(x + 3)$

2) $(x + 1)(x + 4)$

4) $(2x + 1)(x + 3)$



25 ალგებრული ბარათებით შესაბამისი მართკუთხედის აგებით განტოლების მარცხენა მხარე დაშალოთ მამრავლებად და ამოხსენით განტოლება.

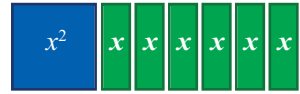
1) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

2) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა სრული კვადრატის გამოყოფით

გამოკვლევა. სურათზე მოცემული ალგებრული ბარათები $x^2 + 6x$ გამოსახულებას შეესაბამება.

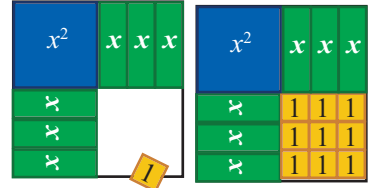


1. x ბარათები ორ ტოლ ნაწილად დავყოთ და სურათზე მოცემული წესით დავალაგოთ.

2. მოდელის კვადრატამდე შესავსებად 3×3 რაოდენობის ერთეული ალგებრული ბარათია საჭირო.

3. შევსებული კვადრატის შესაბამისი სამწევრი $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ იქნება.

4. ერთი ნიმუშიც თქვენ წარმოადგინეთ.



5. არის თუ არა რაიმე კავშირი დამატებით ერთეულოვან ბარათებსა და b კოეფიციენტს შორის? განსაზღვრეთ ეს კავშირი.

სრული კვადრატული გაყოფის ხერხი

$x^2 + bx$ სახის სამწევრის სრულ კვადრატამდე შესავსებად $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ წევრი დაემატება.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

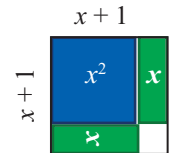
ეს წესი ერთნაირია მიუხედავად იმისა b დადებითია თუ უარყოფითი.

ნიმუში 1. $x^2 - 5x - 6 = 0$ განტოლება $x^2 - 5x = 6$ სახით დავწეროთ. განტოლების

ორივე მხარეს $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ მივუმატოთ. $x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}; \quad x - \frac{5}{2} = \pm \frac{7}{2}; \quad x_1 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

ნიმუში 2. $x^2 + 2x - 3 = 0$ განტოლების სრული კვადრატის გამოყოფის ხერხით ამოხსნისათვის ჯერ $x^2 + 2x = 3$ სახით ჩავწეროთ. მარცხენა მხარეს მოცემული გამოსახულების შესაბამისი მოდელი კვადრატი რომ გახდეს, ერთი ალგებრული ერთეულოვანი ბარათი არ ჰყოფნის. მაშასადამე, თუ განტოლების ორივე მხარეს 1-ს მივუმატებთ, მარცხენა მხარე შეიძლება ორწევრის კვადრატის სახით ჩაიწეროს.



$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1,$$

$$(x + 1)^2 = 4,$$

$$\text{აქედან } x + 1 = 2, \quad x_1 = 1; \quad x + 1 = -2, \quad x_2 = -3.$$

სასწავლო დაფალებები

1 ფერადი უჯრების ადგილას ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები, რომ მოცემული გამოსახულება ორწევრის კვადრატი გახდეს. ამოხსნა მოდელის სახითაც წარმოადგინეთ.

$$x^2 + 8x + \square$$

$$x^2 + 4x + \square$$

$$x^2 + 10x + \square$$

$$x^2 - 12x + \square$$

$$x^2 - x + \square$$

$$x^2 + 3x + \square$$

2 ამოხსენით განტოლებები სრული კვადრატის გამოყოფის ხერხით.

ა) $x^2 - 2x = 8$

ბ) $x^2 - 4x = 21$

გ) $x^2 + 6x = 16$

დ) $x^2 + 2x - 3 = 0$

ე) $x^2 + 6x - 7 = 0$

ვ) $x^2 + 3x - 10 = 0$

ზ) $x^2 - 20x + 36 = 0$

თ) $x^2 - 3x = 4$

ი) $x^2 - x = 12$

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა სრული კვადრატის გამოყოფით

ისტორიული ინფორმაცია. ალგებრის “მამად” წოდებული ალ-ხორეზმი 780 წელს უზბეკეთში დაბადებული და ბაღდადში მცხოვრები, ალგებრის შესახებ მოძღვრების სისტემაში მომყვანი თურქი მათემატიკოსია.



სრული კვადრატის გამოყოფით განტოლების ამოხსნის ხერხი, პირველად ხორეზმის მიერაა მოცემული. მისმა სახელმა ლათინურად, ფრანგულად, ინგლისურად დაწერის დროს სახე შეიცვალა და დღეს ყველა ენაზე მიღებული სიტყვაა “ალგორითმი” წარმოიშვა. “ალგებრა” და “ჯებრი” სიტყვები მისი “*Al-jabr w'al muqabala*” ნაწარმოების სახელწოდებიდანაა აღებული. მათემატიკაში პირველად “წული” ციფრის გამოყენებულმა ალ-ხორეზმმა ამ ნაწარმოებში მოახდინა ალგებრის მეცნიერული და მეთოდური სისტემატიზაცია. სურათზე მოცემული საფოსტო მარკა მისი 1200 წლის იუბილის აღსანიშნავადაა გამოცემული.

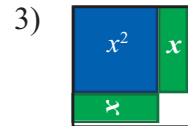
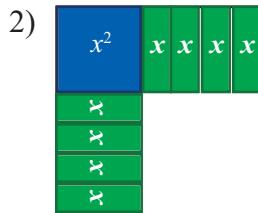
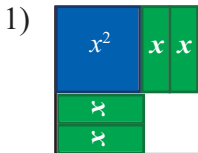
ალ-ხორეზმი $x^2 + 10x = 39$ განტოლებას მარცხენა მხარის სრულ კვადრატმდე შევსებით ქვემოთ მოცემულივით ხსნიდა. ის განტოლების ორივე მხარეს $(10/2)^2$ უმატებდა:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25, \quad (x + 5)^2 = 64, \quad x + 5 = \pm 8$$

$x_1 = 3, \quad x_2 = -13$. ალ-ხორეზმი -13 პასუხს არ ითვალისწინებდა და პასუხად $x = 3$ წერდა. ამასთან ალ-ხორეზმი ამოხსნას გეომეტრიულად, ნახაზზე მოცემულივით უჩვენებდა.

	x	5	
x	x^2	$5x$	x
5	$5x$	25	5
	x	5	

3 შეავსეთ მოდელები კვადრატამდე. დაწერეთ ალგებრული ბარათების საერთო ფართობისა და კვადრატის გვერდის სიგრძის მაჩვენებელი გამოსახულებები.



4 განტოლების ორივე მხარე გაყავით 1-ელ კოეფიციენტზე და ამოხსენით სრული კვადრატის გამოყოფით.

ა) $9x^2 - 6x + 1 = 4$

ბ) $2x^2 - 8x + 8 = 32$

გ) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

დ) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

ე) $0,2x^2 - 1,2x + 1,8 = 5$

ვ) $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$

ნიმუში. $2x^2 - 8x - 24 = 0$; $2x^2 - 8x = 24$, თითოეული წევრი გავყოთ 2-ზე.

$$x^2 - 4x = 12; \quad x^2 - 4x + \left(-\frac{4}{2}\right)^2 = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 + 12$$

$$x^2 - 4x + 4 = 16; \quad (x - 2)^2 = 16; \quad x - 2 = \pm 4; \quad x_1 = 6, \quad x_2 = -2$$

5 ბანკში შეტანილი P თანხის წლიური $r\%$ დანამატთან ერთად 2 წელიწადში $A = P(1 + \frac{r}{100})^2$ მანეთი იქნება. ეს რთული პროცენტის მატების ფორმულაა. რამდენი პროცენტი იყო წლიური მატება თუ 2 წლის მანძილზე 800 მანეთი ფული 882 მანეთი გახდა?

გრაფიკული ხერხი

ჩავწეროთ $x^2 + px + q = 0$ განტოლება $x^2 = -px - q$ სახით. $y = x^2$ პარაბოლისა და $y = -px - q$ წრფის გადაკვეთის წერტილების აბსცისები იქნება მოცემული განტოლების ამონახსენი. პარაბოლა და წრფე შეიძლება კვეთდნენ ერთმანეთს (ამ შემთხვევაში განტოლებას ორი სხვადასხვა ფესვი აქვს), შეიძლება ერთი საერთო წერტილი ჰქონდეთ (ამ შემთხვევაში განტოლებას ერთი ფესვი აქვს) ან საერთოდ არ ჰქონდეთ საერთო წერტილი (ამ შემთხვევაში მოცემულ განტოლებას ნამდვილი ფესვები არ აქვს).

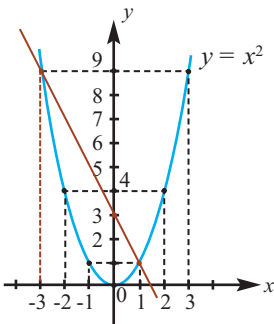
ნიმუში 1.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 = 3 - 2x$$

x	0	±1	±2	±3
$y = x^2$	0	1	4	9

x	0	1
$y = 3 - 2x$	3	1



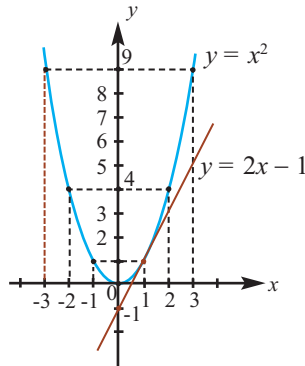
გრაფიკები ორ წერტილში იკვეთებიან. გადაკვეთის წერტილების აბსცისებია -3 და 1. შემოწმებით შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ ორივე რიცხვი მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს.

ნიმუში 2. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x^2 = 2x - 1$$

$y = 2x - 1$ წრფის აგებისათვის შეადგინეთ ცხრილი.

x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1



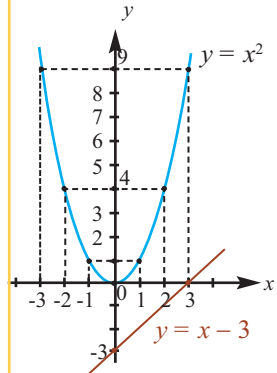
პარაბოლა და წრფე ეხებიან წერტილში, რომლის აბსცისაც არის 1. განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი $x = 1$.

ნიმუში 3.

$$x^2 - x + 3 = 0$$

$$x^2 = x - 3$$

x	0	3
$y = x - 3$	-3	0



გრაფიკებს გადაკვეთის წერტილი არ გააჩნიათ. მაშადამე, მოცემულ განტოლებას ნამდვილი ფესვი არ გააჩნია.

$ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ორივე მხარის $a \neq 0$ რიცხვზე გაყოფით დაყვანილ კვადრატულ განტოლებაზე დაყვანა შეიძლება და ზემოთ მოცემული გრაფიკული ხერხით ამოხსნა უფრო ხელსაყრელი ხდება.

სასწავლო დაგეგმვები

- 1 გრაფიკული ხერხით გარკვეით აქვს თუ არა განტოლებას ამონახსენი. თუ ფესვი აქვს, იპოვეთ მათი ზუსტი ან მიახლოებითი მნიშვნელობები.
 - ა) $x^2 = 6 - x$
 - ბ) $x^2 - x + 4 = 0$
 - გ) $x^2 - 4x + 4 = 0$
 - დ) $x^2 - 2x - 6 = 0$
- 2 ამოხსენით განტოლებები გრაფიკული ხერხით.
 - ა) $x^2 - 3x = 0$
 - ბ) $x^2 - 2 = 0$
 - გ) $x^2 + 4x = 0$
 - დ) $x^2 + 4 = 0$
- 3 მიეცით განტოლებას დაყვანილი განტოლების სახე და ამოხსენით გრაფიკული ხერხით.
 - ა) $2x^2 - 2x - 4 = 0$
 - ბ) $-2x^2 + 4x + 6 = 0$
 - გ) $-x^2 + 5x = 4$

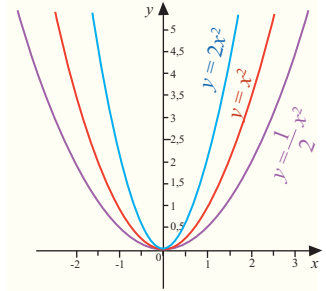
კვადრატული განტოლების ამოხსნა გრაფიკული ხერხით

გრაფიკული კალკულატორი

გრაფიკული კალკულატორის გამოყენებით სხვადასხვა გრაფიკების აგება შეიძლება.

სურათზე $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ ფუნქციების

www.meta-calculator.com/online გრაფიკკალკულატორის გამოყენებით აგებული გრაფიკებია მოცემული.

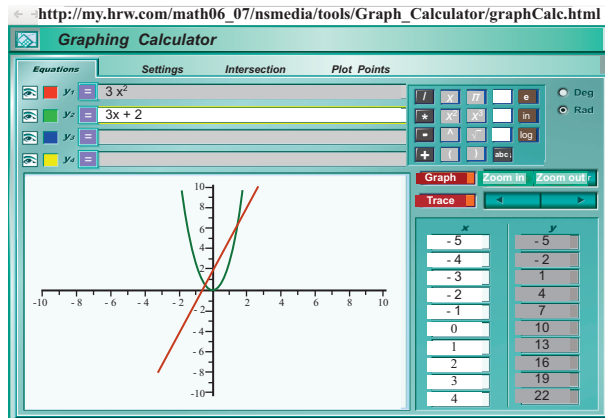


გრაფიკული კალკულატორით, ერთ საკოორდინატო სისტემაზე პარაბოლისა და წრფის აგებით, შეგძლიათ კვადრატული განტოლება ამოხსნათ გრაფიკული ხერხით.

სურათზე $3x^2 - 3x - 10 = 0$

განტოლების $3x^2 = 3x + 10$ სახით ჩაწერით მისი

www.my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html გრაფიკულ კალკულატორზე გრაფიკული ხერხით ამოხსნაა მოცემული. გრაფიკის მიხედვით იპოვეთ ამ განტოლების ფესვები.



4 ამოხსენით მოცემული განტოლებები გრაფიკული კალკულატორების დახმარებით:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$4x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$5x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$-2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 9 = 0$$

$$0,5x^2 + 4x + 6 = 0$$

5 ამოხსენით განტოლებები თქვენს მიერ არჩეული ხერხით.

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

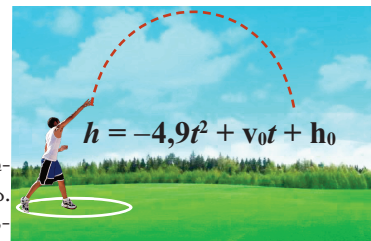
$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$7x^2 - 8x - 12 = 0$$

6 v_0 (მ/წმ) საწყისი სიჩქარით ვერტიკალურად ასროლილი სხეულის დედამიწის ზედაპირიდან h (მეტრი) მანძილის t (წამი) ფრენის დროზე დამოკიდებულება $h = -4,9t^2 + v_0t + h_0$ ფორმულითაა მოცემული. h_0 უჩვენებს საწყის სიმაღლეს.

სკოლაში მოსწავლეები ერთმანეთს დისკის სროლაში ეჯიბრებიან. ელჩინის სიმაღლე 1,6 მ-ია.

1) ელჩინის მიერ 24 მ/წმ საწყისი სიჩქარით ნასროლი დისკი დაახლოებით რამდენი წამის შემდეგ დაეცემა დედამიწაზე? 2) მერამდენე წამზე იქნება დისკი 20 მ-ის სიმაღლეზე? აქ h_0 -ად მიიღეთ ელჩინის სიმაღლე.



7 ადგილიდან 30 მ/წმ საწყისი სიჩქარით მაღლა ასროლილი სხეულის t წამის მომენტში დედამიწიდან მანძილის $h = -4,9t^2 + 30t$ ფორმულით გამოთვლა შეიძლება. რამდენი წამის შემდეგ იქნება სხეული 40 მ-ის სიმაღლეზე?

კვადრატული განტოლების ფესვების ფორმულა

ჩვენ შევისწავლეთ კვადრატული განტოლებების ამოხსნა მამრავლებად დაშლისა და სრული კვადრატის გამოყოფის ხერხებით. სრული კვადრატის გამოყოფის ხერხებით კი ნებისმიერი $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლებების ამოხსნისათვის შესაძლებელია ზოგადი ფორმულის დაწერა.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ორივე მხარე გაგვყოთ a -ზე.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

ორივე მხარეს გამოვავლოთ $\frac{c}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

მარცხენა მხარის სრულ კვადრატამდე შესაგებად განტოლების ორივე მხარეს მივუმატოთ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

მარცხენა მხარე ჩაგწეროთ ორი გამოსახულების ჯამის კვადრატის სახით, მარჯვენა მხარე კი გავამარტივოთ.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

თუ მარცხენა მხარე უარყოფითი არაა, ორივე მხრიდან ამოვიღოთ კვადრატული ფესვი.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ორივე მხარეს გამოვავლოთ $\frac{b}{2a}$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ფორმულა, სადაც $a \neq 0$, მაშინ $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლების ფესვების ფორმულაა.

კვადრატული განტოლების ფესვების ფორმულა, $D = b^2 - 4ac$ აღნიშვნით,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

სახით შეიძლება ჩავეწეროთ.

კვადრატული განტოლების ფესვების არსებობა D -ს ნიშანზეა დამოკიდებული. D -ს კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი (განმასხვავებელი) ეწოდება.

1) თუ $D < 0$, განტოლებას ნამდვილი ფესვები არა აქვს.

2) თუ $D = 0$, განტოლებას ერთი (ან ორი ტოლი) ფესვი აქვს $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

თუ $D > 0$, განტოლებას ორი სხვადასხვა ნამდვილი ფესვი აქვს: $x_1 \neq x_2$

მაგალიტი. $4x^2 + 7x + 3 = 0$, $a = 4$, $b = 7$, $c = 3$, $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1 > 0$ ამიტომ განტოლებას ორი სხვადასხვა ნამდვილი ფესვი აქვს.

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4}, \quad x_1 = \frac{-7 + 1}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{-7 - 1}{8} = -1.$$

$x^2 + px + q = 0$ განტოლებაში $a = 1$, $b = p$, $c = q$, ამიტომ დაყვანილი განტოლების დისკრიმინანტი $D = p^2 - 4q$ ფორმულით გაიანგარიშება. როცა $D > 0$ დაყვანილი განტოლების ფესვებისთვის მართებულია ფორმულები:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა

სასწავლო დაფალებები

- 1 განტოლების დისკრიმინანტის გამოთვლით გაარკვეით, აქვს თუ არა მას ნამდვილი ფესვები.

ა) $3x^2 + x + 5 = 0$

გ) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

ბ) $2x^2 - x - 6 = 0$

დ) $x^2 + x - 7 = 0$

- 2 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

გ) $5x^2 + 8x + 3 = 0$

ბ) $5x^2 + 6x + 1 = 0$

დ) $2x^2 - 9x + 7 = 0$

- 3 ამოხსენით ქვემოთ მოცემული განტოლებები დაყვანილი კვადრატული განტოლების ფესვების ფორმულის გამოყენებით.

ა) $x^2 - 8x + 15 = 0$

ბ) $x^2 + 14x + 40 = 0$

გ) $x^2 - 7x + 6 = 0$

დ) $x^2 - 11x + 10 = 0$

- 4 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $5t^2 - 11t + 2 = 0$

ბ) $35y^2 + 2y - 1 = 0$

გ) $2z^2 + 7z + 4 = 0$

დ) $x^2 - x - 1 = 0$

- 5 x -ის რა მნიშვნელობისათვის:

ა) $x^2 - 11x + 32$ სამწევრი იღებს 2-ის ტოლ მნიშვნელობას;

ბ) $3x^2 - 2x + 5$ სამწევრი იქნება $7x - 1$ ორწევრის ტოლი;

გ) $3x^2 - 4x + 2$ და $x^2 + x$ მრავალწევრების მნიშვნელობები იქნება ტოლი.

- 6 ამოხსენით განტოლებები სხვადასხვა ხერხით.

$x^2 + 10x + 24 = 0$

$x^2 - 4x = 3$

$(3p - 5)(p + 1) = -4$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$-24 = -2y^2 + 2y$

$3x(x - 2) = 24$

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$9y^2 - 12y - 5 = 0$

$m(m + 10) = 2$

- 7 ამოხსენით განტოლებები თქვენს მიერ შერჩეული ხერხით.

$t^2 + 8t + 15 = 0$

$m^2 + 6m + 8 = 0$

$t^2 - \frac{2}{5}t = 0$

$p^2 + 4p + 1 = 0$

$q^2 + 2q + 1 = 0$

$n(n - 4) = n$

$2a^2 + 4a + 1 = 7$

$3a^2 + 6a - 3 = 0$

$n^2 - \frac{2}{3}n = \frac{8}{9}$

- 8 1) ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 84-ია, სხვაობა კი 5. იპოვეთ ეს რიცხვები.
2) რიცხვის კვადრატი, მის 4-მაგზე 5 ერთეულით მეტია. იპოვეთ ეს რიცხვი.
3) რიცხვის კვადრატის ორმაგი ამ რიცხვის 5-მაგისა და 3-ის ჯამის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვი.

- 9 თუ კვადრატის გვერდს 4,5 სმ-ით გავზრდით, ფართობი 2,25-ჯერ გაიზრდება. იპოვეთ მოცემული კვადრატის გვერდის სიგრძე.

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა

- 10** 1) თუ რიცხვს მივუმატებთ მისი კვადრატის ორმაგს, ჯამი 6-ის ტოლი გახდება. იპოვეთ ეს რიცხვი.
 2) იპოვეთ ორი მიმდევრობითი რიცხვი, რომელთა ნამრავლი 56-ის ტოლია.
 3) კვადრატული განტოლებით ამოსახსნელი მსგავსი ერთი ამოცანა თქვენც შეადგინეთ და ამოხსენით.

- 11** ამოხსენით განტოლებები.

ა) $5x^2 - 4x = 9$ ბ) $x^2 + 51 = 52x$ გ) $4 - x^2 = 5x$ დ) $25 + x^2 = 26x$

- 12** მართკუთხა ფორმის ეზოს სიგრძე სიგანეზე 1 მ-ით მეტია. თუ სიგანეს 4მ-ით, ხოლო სიგრძეს 5მ-ით გავზრდით, ფართობი 120 მ² იქნება. იპოვეთ ეზოს თავდაპირველი ზომები.

- 13** მართკუთხედის სიგანე 4 სმ, სიგრძე კი 8 სმ-ია. მართკუთხედის სიგანისა და სიგრძის ერთი და იგივე ზომით გაზრდით, მისი ფართობი 3-ჯერ გაიზარდა. იპოვეთ მართკუთხედის ახალი ზომები.

- 14** ამოხსენით განტოლებები სხვადასხვა ხერხებით.

$x^2 + 6x = 7$	$16x^2 = 25x^2 + 7x - 2$	$3x^2 + 24x = 13x^2 + 13x + 1$
$8y^2 - 36y + 28 = 0$	$x^2 + 7x - 8 = 0$	$(2w + 5)(w - 1) = 9$
$2x(x - 6) = 14$	$3r^2 + 2r - 1 = 0$	$(3p - 5)(p + 1) = 3$

როცა მეორე კოეფიციენტი ლუწი რიცხვია (ე.ი. $b = 2k$) მაშინ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლება ჩაწერეთ $ax^2 + 2kx + c = 0$ სახით.

მაშინ $D = (2k)^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

თუ $D_1 = k^2 - ac$ აღვნიშნავთ, მივიღებთ $D = 4 \cdot D_1$, მაშინ:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} \quad (\text{სადაც } D_1 = k^2 - ac).$$

ნამუშაო. ამოვხსნათ განტოლება $9x^2 - 14x + 5 = 0$

$a = 9$ $b = -14 = 2 \cdot (-7)$, $k = -7$, $c = 5$

$D_1 = k^2 - ac = (-7)^2 - 9 \cdot 5 = 49 - 45 = 4$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{4}}{9} = \frac{7 \pm 2}{9} \quad x_1 = \frac{5}{9} \quad x_2 = 1$$

- 15** ამოხსენით განტოლებები.

ა) $3x^2 - 14x + 15 = 0$ ბ) $5x^2 - 16x + 3 = 0$ გ) $5x^2 + 26x - 24 = 0$
 დ) $x^2 - 22x - 23 = 0$ ე) $x^2 - 34x + 289 = 0$ ვ) $3x^2 + 32x + 80 = 0$

გამოყენებითი დაგვალებები

- 16** ჯერ განტოლების ორივე მხარე ისეთ რიცხვებზე გავამრავლოთ, რომ კოეფიციენტები მთელი რიცხვები მივიღოთ და შემდეგ ამოვხსნათ ეს განტოლება.

ა) $x^2 - 2,5x + 1 = 0$ გ) $0,4x^2 + x - 0,3 = 0$ ე) $0,7x^2 = 1,3x + 3$
 ბ) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 9$ დ) $\frac{x^2}{3} - 7x = 1$ ვ) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$

კვადრატული განტოლებების ამოხსნა

17 განტოლებების ამოხსნისათვის შეარჩიეთ სხვადასხვა ხერხები.

ა) $7(x+3)^2 = 28$
 დ) $10x^2 + 3x = 0$

ბ) $3x^2 - 10x = 7 - 6x$
 ე) $2x^2 - 12x + 7 = 5$

გ) $x^2 + 9 = 8x$
 ვ) $21 = (x-2)^2 + 5$

18 ამოხსენით განტოლებები.

$400x^2 + 40x - 100 = 0$
 $x^2 + 1,3x - 0,4 = 0$

$0,05x^2 - x - 0,06 = 0$
 $4y^2 - 0,2y + 3,2 = 0$

$0,25x^2 - 0,16 = 0$
 $3600x^2 - 4900 = 0$

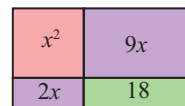
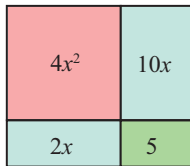
19 წიგნების მაღაზიის მეპატრონის, წიგნების გაყიდვიდან მიღებული მოგება $G = 0,02n^2 + 0,4n$ ფორმულით გამოითვლება, სადაც n გაყიდული წიგნების რაოდენობას უჩვენებს. რამდენი წიგნის გაყიდვიდან მიიღებს მეპატრონე 70 მანეთის მოგებას?

20 ფართობები შესაბამისი კვადრატული სამწევრებისა და მამრავლებად დაშლილი სახით გამოსახეთ. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი ფართობის მოცემული მნიშვნელობისათვის.

ფართობი: 165 კვ.ერთეული

ფართობი: 300 კვ.ერთეული

ფართობი: 144 კვ.ერთეული



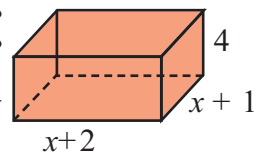
21 $(a^2 + 7a + 6)$ სამწევრი და $(a + 1)$ ორწევრი a -ს რა მნიშვნელობებისათვის იღებენ თანაბარ მნიშვნელობას? იპოვეთ სამწევრის a -ს ამ მნიშვნელობის შესაბამისი მნიშვნელობა.

22 დაამტკიცეთ, $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ რომ განტოლების ფესვებიდან ერთი 1-ის ტოლია?

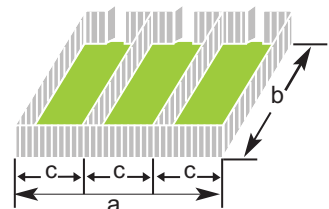
23 73-ის რომელ ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას არასრული განაყოფი იქნება გამყოფზე 3 ერთეულით მეტი, ხოლო ნაშთი კი გამყოფზე 4 ერთეულით ნაკლები იქნება?

24 ამოხსენით ამოცანები სურათის მონაცემების მიხედვით.

- ა) მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ყუთის მოცულობა 120 სმ^3 -ია. განსაზღვრეთ მისი ზომები. მოსაზრება - “ამოცანას ორი პასუხი აქვს” - სწორია? დაწერეთ თქვენი აზრი.
 ბ) ყუთის დამზადებისათვის რამდენი კვადრატული სანტიმეტრი მუყაო გამოიყენეს?



25 ფერმერი ღობის სიგრძე (პერიმეტრი) 80 მ მქონე მართკუთხა ფორმის ფართობის სურათზე ნაჩვენები სახით სამი ტოლი მართკუთხედის ფორმის ნაწილებად დაყოფას გეგმავს. იპოვეთ თითოეული ნაწილის ზომები, თუ საერთო ფართობი 300 მ^2 -ია.



ვიეტის თეორემა

ამოხსნათ დაყვანილი კვადრატული განტოლება: $x^2 - 7x + 12 = 0$. დაყვანილი კვადრატული განტოლების ფესვებს $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2}$ ფორმულით ვპოულობთ და აქედან მივიღებთ $x_1 = 3$; $x_2 = 4$.

ყურადღება! თუ შევკრებთ მოძებნილ ფესვებს, მივიღებთ x -ის კოეფიციენტის მოპირდაპირე რიცხვს. მართლაც, განტოლებაში $p = -7$, მეორე მხრივ კი $x_1 + x_2 = 4 + 3 = 7$. თუ ფესვების ნამრავლს მოვძებნით, განტოლების თავისუფალი წევრის ტოლ რიცხვს მივიღებთ: $3 \cdot 4 = 12$. ეს თვისება ნებისმიერი დაყვანილი კვადრატული განტოლებისათვის ჭეშმარიტია.

თეორემა: დაყვანილი კვადრატული განტოლების ფესვების ჯამი მეორე კოეფიციენტის მოპირდაპირე რიცხვია, ფესვების ნამრავლი კი თავისუფალი წევრის ტოლია.

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

დამტკიცება: ცნობილია რომ $x^2 + px + q = 0$ დაყვანილი კვადრატული განტოლების ფესვები არის $x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$ და $x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$ აქედან:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-p - \sqrt{D} - p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q$$

ამრიგად, $x^2 + px + q = 0$ განტოლებისათვის $x_1 + x_2 = -p$ და $x_1 \cdot x_2 = q$ ნებისმიერი $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების ორივე მხარის a -ზე გაყოფით, მისი ტოლფასი $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ დაყვანილი კვადრატული განტოლებით შეგვიძლია შევცვალოთ. მაშინ ვიეტის თეორემის გამოყენება შეიძლება.

$ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვების ჯამი $-\frac{b}{a}$ -ს, ნამრავლი კი $\frac{c}{a}$ -ს ტოლია. როცა $D=0$ (როცა კვადრატულ განტოლებას ორი ტოლი ფესვი აქვს), ვიეტის თეორემა მაშინაც ძალაში რჩება. შერჩევის ხერხით ვიპოვოთ $x^2 - 9x + 20 = 0$ განტოლების ფესვები.

ვიეტის თეორემის თანახმად.

$$x_1 + x_2 = 9, \quad x_1 \cdot x_2 = 20.$$

განტოლების ფესვებია 4 და 5.

20-ის მამრავლები	მამრავლების ჯამი
1 · 20	21
2 · 10	12
4 · 5	9

გამოყენებითი დავალებები

1 ვიეტის თეორემის მიხედვით იპოვეთ განტოლების ფესვების ჯამი და ნამრავლი. განტოლების ამოხსნით შეამოწმეთ შედეგის სისწორე.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$x^2 - 6x - 40 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2d^2 + 12d - 16 = 0$$

ვიეტის თეორემა

2» შერჩევის მშვეობით იპოვეთ განტოლების ფესვები.

ა) $x^2 - 5x - 6 = 0$

გ) $x^2 - 8x + 12 = 0$

ე) $x^2 - 8x + 15 = 0$

ბ) $x^2 - 4x + 3 = 0$

დ) $x^2 - 6x + 8 = 0$

ვ) $x^2 - 2x - 48 = 0$

3» 1) $x^2 + px - 35 = 0$. 1) განტოლების ფესვებიდან ერთი 7-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე ფესვი და p კოეფიციენტი.

2) $x^2 - 13x + q = 0$ განტოლების ფესვებიდან ერთი 1-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე ფესვი და q კოეფიციენტი.

3) $3x^2 + bx + 12 = 0$ განტოლების ფესვებიდან ერთი 2-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე ფესვი და b კოეფიციენტი.

4) $x^2 - 12x + q = 0$ განტოლების ფესვების სხვაობა 2-ის ტოლია. იპოვეთ q .

4» თუ $x^2 - 3x - 5 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 , გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობები.

ა) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

ბ) $x_1^2 + x_2^2$

გ) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

5» განტოლების ამოუხსნელად განსაზღვრეთ განტოლების ფესვები.

ა) $x^2 - 17x + 16 = 0$

ბ) $2x^2 - x - 54 = 0$

გ) $3x^2 - x - 1 = 0$

დ) $x^2 + 13x + 12 = 0$

ვიეტის თეორემის შებრუნებული თეორემა

შებრუნებული თეორემა. თუ m და n რიცხვების ჯამი p -ს ტოლია, ნამრავლი კი უდრის q -ს, მაშინ ეს რიცხვები $x^2 + px + q = 0$ განტოლების ფესვებია.

ეს თეორემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასეც: ნებისმიერი m და n რიცხვები $x^2 - (m + n)x + m \cdot n = 0$ განტოლების ფესვებია.

დამტკიცება. მართლაც, განტოლებაში თუ ჩავწერთ, $x = m$ მივიღებთ, $m^2 - (m + n) \cdot m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0$ ე.ი. m რიცხვი განტოლებას აკმაყოფილებს. იგივე წესით შეიძლება იმის ჩვენებაც, რომ $x = n$ რიცხვიც არის განტოლების ფესვი.

ნიმუში. ავაგოთ განტოლება, რომლის ფესვებია $m = 3$ და $n = -5$.

ვინაიდან $m + n = 3 + (-5) = -2$, $m \cdot n = 3 \cdot (-5) = -15$,

ამიტომ საძიებელი განტოლება იქნება $x^2 + 2x - 15 = 0$.

6» შეადგინეთ დაყვანილი კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვები მოცემული რიცხვებია:

ა) 3 და 4

ბ) 2 და 5

გ) -3 და 6

დ) -4 და 2

7» მოცემული ფესვების მიხედვით დაწერეთ კვადრატული განტოლება.

ა) $x_1 = -1$ და $x_2 = 5$

ბ) $x_1 = 4$ და $x_2 = 3$

გ) $x_1 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$ და $x_2 = 3$

დ) $x_1 = 5$ და $x_2 = 6$

ე) $x_1 = \sqrt{2} - 1$ და $x_2 = \sqrt{2} + 1$

ვ) $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ და $x_2 = 3 + \sqrt{2}$

8) 1) $x^2 - 7x + 10 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 . იპოვეთ $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

2) $4x^2 - 17x + 4 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 . იპოვეთ $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ნამუშაო. $x^2 - 6x + 5 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 . იპოვეთ $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ვიეტის თეორემის თანახმად $x_1 + x_2 = 6$ და $x_1x_2 = 5$

$$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = 5 \cdot 6 = 30$$

9) კვადრატული განტოლების ფესვების ფორმულის გამოყენებით, აჩვენეთ რომ, თუ მთელკოეფიციენტებიანი განტოლების ფესვებიდან ერთი $(m + \sqrt{n})$ სახის ირაციონალური რიცხვია, მაშინ $(m - \sqrt{n})$ რიცხვიც დააკმაყოფილებს ამ განტოლებას.

10) 1) ქვემოთ მთელკოეფიციენტებიანი კვადრატული განტოლების ერთ-ერთი ფესვია მოცემული. იპოვეთ განტოლების მეორე ფესვი. ამოხსნა წერილობით განმარტეთ.

ა) $-2 + \sqrt{3}$ ბ) $2\sqrt{5} + 1$ გ) $3 - \sqrt{7}$ დ) $m + \sqrt{n}$

2) დაწერეთ კვადრატული განტოლება, რომლის ერთ-ერთი ფესვია $2 - \sqrt{3}$.

11) $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ განტოლებაში m -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება განტოლების ფესვები ტოლი?

12) $x^2 - 8x + n = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 . იპოვეთ n -ის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $3x_1 - x_2 = 4$

მითითება: ამოხსენით განტოლებათა სისტემა: $3x_1 - x_2 = 4$ და $x_1 + x_2 = 8$.

13) $x^2 - nx + 8 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 . იპოვეთ n -ის მნიშვნელობა, იმის გათვალისწინებით, რომ:

ა) $x_1 = 2x_2$; ბ) $x_1 = x_2^2$

14) 1) $x^2 - 6x + n = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 .

ა) იპოვეთ n -ის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$

ბ) იპოვეთ n -ის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{7}$

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

2) $x^2 + (n - 5)x + n - 6 = 0$ განტოლების ფესვებია x_1 და x_2 .

იპოვეთ n -ის მნიშვნელობა თუ ცნობილია, რომ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$

15) 1) ცნობილია, რომ x_1 და x_2 არის $x^2 - x - 1 = 0$ განტოლების ფესვები. შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია $2x_1 - 3$ და $2x_2 - 3$.

2) ცნობილია, რომ $2x^2 - bx + c = 0$ განტოლების ფესვებიდან ერთი $(3 - \sqrt{2})$ -ია. იპოვეთ $(b + c)$. სადაც, b და c მთელი რიცხვებია.

16) დისკრიმინანტების გამოთვლით განსაზღვრეთ, აქვთ თუ არა ნამდვილი ფესვები. განტოლებებს, თუ აქვთ, მაშინ განსაზღვრეთ მათი ნიშნები.

ა) $x^2 - 2x - 1 = 0$

გ) $3x^2 - 4x + 7,2 = 0$

ბ) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

დ) $x^2 + x - 1 = 0$

1 ამოხსენით განტოლებები ახალი ცვლადის შემოტანით.

1) $(x+2)^2 + 3(x+2) - 54 = 0$

4) $(x-2)^2 - 15(x-2) + 56 = 0$

2) $6(x+5)^2 - 5(x+5) + 1 = 0$

5) $3(2x-3)^2 + 17(2x-3) + 10 = 0$

3) $(x^2-x)^2 - 8(x^2-x) + 12 = 0$

6) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

ნიმუში. $(x+3)^2 + 3(x+3) - 54 = 0$

განტოლებაში შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $x+3 = t$

$t^2 + 3t - 54 = 0$ განტოლება $(t+9)(t-6) = 0$ სახით ჩავწეროთ და ამოვხსნათ.

$t_1 = -9$; $t_2 = 6$. ჩანაცვლებას თუ გავითვალისწინებთ.

$x+3 = -9$, $x_1 = -12$; $x+3 = 6$ $x_2 = 3$

x -ის მნიშვნელობების პირველად განტოლებაში შეტანით შეამოწმეთ ამოხსნის სისწორე.

2 ამოხსენით განტოლება.

ა) $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

ბ) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

ნიმუში. ამოვხსნათ განტოლება $x - \sqrt{x} - 6 = 0$. თუ შემოვიტანთ $\sqrt{x} = t$ ცვლადს, მივიღებთ $x = t^2$ და მოცემული განტოლება ახალი t ცვლადის მიხედვით მიიღებს სახეს: $t^2 - t - 6 = 0$. თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას, მივიღებთ $t_1 = 3$, $t_2 = -2$. დავუბრუნდეთ თავდაპირველ ცვლადს:

1) $\sqrt{x} = 3$, $x = 9$, 2) $\sqrt{x} = -2$ ფესვი არა აქვს.

მოცემული განტოლების ფესვია 9.

3 ამოხსენით განტოლებები. ისარგებლეთ ჩანაცვლებით $|x| = t$.

ა) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

ბ) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$

4 იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $(m+1)x^2 + (2m-1)x + m-1 = 0$ განტოლებას ერთი ნამდვილი ფესვი აქვს.

5 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $(x+1)(x+2) = 18 + 3x$

გ) $(x-2)^2 + x(x+4) = 22$

ბ) $(x-3)^2 + (x+1)^2 = 10$

დ) $8 - 3x = (x+2)(x+4)$

6 იპოვეთ განტოლებების ფესვები.

ა) $(x+1)(2x-3) = 7$

გ) $(x+8)(x-9) + 52 = 0$

ბ) $x(3x-2) = (5x-2)(x-1)$

დ) $x(x+7) = (2-x)(x+2)$

7 იპოვეთ განტოლებების ფესვები.

ა) $(x+1)^2 = (2x-1)^2$

ბ) $x^3 + 8 = (x+2)^3$

გ) $\frac{6x+1}{3} - \frac{4x^2-3}{2} = \frac{7}{3}$

დ) $\frac{-7x-5}{4} = \frac{4x^2-3}{2}$

8 მართკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძე მეორე გვერდის ორმაგზე 3 მ-ით ნაკლებია. იპოვეთ მისი პერიმეტრი, თუ ცნობილია რომ ფართობი 299 მ^2 -ია.

ამოცანების ამოხსნა კვადრატული განტოლების გამოყენებით

ამოცანა. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებიდან ერთი მეორეზე 2 სმ-ით მეტია, ხოლო ჰიპოტენუზაზე 2 სმ-ით ნაკლებია. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

1-ლი ეტაპი – ინფორმაციების განსაზღვრა.

თუ დიდი კათეტის სიგრძეს აღვნიშნავთ x -ით, პირობის თანახმად, მცირე კათეტი იქნება $(x - 2)$, ჰიპოტენუზა კი $-(x + 2)$.

მე-2 ეტაპი – განტოლების შედგენა.

პითაგორას თეორემის თანახმად მივიღებთ განტოლებას:

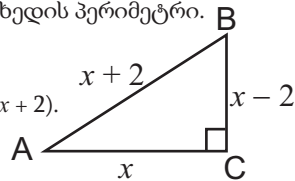
$$x^2 + (x - 2)^2 = (x + 2)^2$$

მე-3 ეტაპი – განტოლების ამოხსნა. გან-

ტოლება დავიყვანოთ შემდეგ სახეზე:

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4; \quad x^2 - 8x = 0$$

$$\text{აქედან } x(x - 8) = 0; \quad x = 0 \text{ და } x = 8$$



მე-4 ეტაპი – ამონახსნების გამოკვლევა.

ვინაიდან სიგრძე უნდა იყოს დადებითი რიცხვი, განტოლების $x = 8$ ფესვი შეესაბამება ამოცანის ამოხსნას. ე.ი. დიდი კათეტის სიგრძე 8 სმ-ია, მაშინ მცირე კათეტი $x - 2 = 8 - 2 = 6$ სმ, ჰიპოტენუზა კი $x + 2 = 8 + 2 = 10$ სმ იქნება. პერიმეტრი: $P = 6 + 8 + 10 = 24$ (სმ). **პასუხი:** სამკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია.

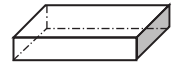
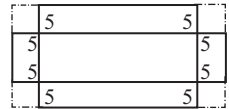
- 1** მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 4 სმ-ით მეტია. იპოვეთ მისი პერიმეტრი, თუ მისი ფართობი 60 სმ²-ია.
- 2** მიმდევრობით მოცემული ორი ნატურალური რიცხვის ჯამის კვადრატი მათი კვადრატების ჯამზე 112-ით მეტია. იპოვეთ ეს რიცხვები.
- 3** . მართკუთხა სამკუთხედში ერთი კათეტი ჰიპოტენუზაზე 1 სმ-ით, ხოლო მეორე კი 8 სმ-ით ნაკლებია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.
- 4** საჭადრაკო ტურნირზე 45 პარტია გათამაშდა. იპოვეთ ტურნირში მონაწილეთა რაოდენობა, თუ ცნობილია, რომ თითოეულმა თითო მეტოქესთან მხოლოდ ერთხელ ითამაშა.
- 5** ერთი პორტიდან ერთდროულად გასული გემებიდან ერთმა აღმოსავლეთით, მეორემ კი ჩრდილოეთით დაიწყო მოძრაობა. 1 სთ-ის შემდეგ გემებს შორის მანძილი 40 კმ იყო. ჩრდილოეთით მიმავალი გემის სიჩქარე აღმოსავლეთით მიმავალი გემის სიჩქარეზე საათში 8 კმ-ით მეტია. იპოვეთ გემების სიჩქარეები.
- 6** მართკუთხედის ფორმისა და კვადრატული ფორმის ორი ნაკვეთის ფართობები ტოლია. მართკუთხა ნაკვეთის სიგრძე, კვადრატის გვერდის სიგრძის ორმაგზე 5 მ-ით მეტია, სიგანე კი კვადრატის გვერდზე 6 მ-ით ნაკლებია. იპოვეთ კვადრატის გვერდის სიგრძე.
- 7** ერთი წერტილიდან ურთიერთმართობულ გზებზე ერთდროულად ორმა სატვირთო მანქანამ დაიწყო მოძრაობა. ერთის სიჩქარე საათში 5 კმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ სატვირთო მანქანების სიჩქარე, თუ 2 სთ-ის შემდეგ მათ შორის მანძილი 50 კმ იქნება.

- 8» ნერმინი მართკუთხა ფორმის ნაკვეთის 15 მ სიგრძის დიაგონალზე ფეხით მოძრაობს, შემდეგ უბრუნდება საწყის წერტილს და ამჯერად ნაკვეთის პერიმეტრის გარშემო 42 მ-ს გაივლის. იპოვეთ ამ მართკუთხა ფორმის ნაკვეთის ზომები.

- 9» ყუთის ძირი მართკუთხა ფორმისაა და სიგანე სიგრძეზე 2-ჯერ ნაკლებია. ყუთის სიმაღლე 0,5 მ-ია. იპოვეთ ყუთის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ ყუთის ფუძის ფართობი $1,08 \text{ მ}^2$ -ით ნაკლებია მისი გვერდითი წახნაგების ფართობზე.

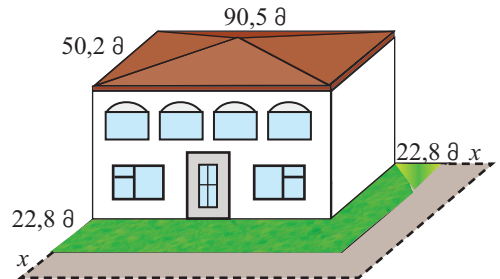


- 10» მართკუთხა ფორმის მუყაოს სიგრძე სიგანეზე 2-ჯერ მეტია. მისი კუთხეებიდან ამოიჭრა 5 სმ გვერდიანი კვადრატები. შემდეგ მუყაოს დაკეცვა-დაწებებით პარალელეპიპედის ფორმის პირლია ყუთი დამზადდა. იპოვეთ მუყაოს თავდაპირველი ზომები, თუ ცნობილია რომ ყუთის მოცულობა 1500 სმ^3 -ია.



- 11» ყოველ ჯერზე ერთი და იგივე პროცენტით გაიაფების შემდეგ, ფოტოაპარატის ფასი 300 მანეთიდან 192 მანეთზე ჩამოვიდა. რამდენი პროცენტით მცირდებოდა ფასი ყოველ ჯერზე, თუ ფოტოაპარატის გაიაფება მოხდა 2-ჯერ?

- 12» საავადმყოფოს ბაღის ორჯერ გაფართოების მიზნით მისი ეზო, სურათზე ნაჩვენებვით, ერთი და იგივე ზომით გაიზარდა. რამდენი კვადრატული მეტრი გახდა მისი ფართობი? სათანადო გამოთვლები კალკულატორით მოახდინეთ. შედეგები მეთაუდებამდე დაამრგვალეთ.



- 13» მე-8 კლასის მოსწავლეებმა წინასადღესასწაულოდ ერთმანეთს თითო-თითო წიგნი აჩუქეს. რამდენი მოსწავლეა ამ კლასში, თუ სულ საჩუქრად 380 წიგნი იქნა გადაცემული?

- 14» სპორტსმენების 10 მ სიმაღლის ტრამპლინიდან წყალში ხტომისას, დროის ნებისმიერ t მომენტში სიმაღლის მოძებნისათვის $h = -4,9t^2 + 3t + 10$ ფორმულის გამოყენება შეიძლება, სადაც t არის დრო წამებით, h კი - სიმაღლეა. რამდენი წამის შემდეგ აღმოჩნდება სპორტსმენი აუზში?



განმარტოვადებილი დავალებები

1) ამოხსენით განტოლებები:

$$2x^2 - 5 = 0$$

$$-(x - 2)^2 + 1 = 0$$

$$1,5(x - 4)^2 = 6$$

$$-x^2 + 3 = 0$$

$$-3(x + 3)^2 + 48 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x + 1)^2 = 8$$

$$(x + 1)^2 - 4 = 0$$

$$\frac{4}{9}x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 4)^2 = \frac{1}{4}$$

2) $h = -4,9t^2 + 1600$ ფორმულა გვიჩვენებს პარაშუტის-
ტის 1600მ-ის სიმაღლიდან გადმოხტომიდან t წამის
შემდეგ რა სიმაღლეზე იმყოფება. პარაშუტისტი
თვითმფრინავიდან გადმოხტომის შემდეგ პარა-
შუტის გახსნამდე, გარკვეულ ხანს ჰაერში თავი-
სუფალ ვარდნაშია. პარაშუტით გადმოხტარი პირი
რამდენ წამს იქნება თავისუფალ ვარდნაში, თუ
პარაშუტი 1000 მ-ის სიმაღლეზე გაიხსნება?



3) ამოხსენით განტოლებები მამრავლებად დაშლის ხერხით.

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$3x^2 + 15x + 18 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$5x^2 + 21x + 22 = 0$$

4) ამოხსენით განტოლებები სრული კვადრატის გამოყოფით.

$$x^2 - 18x + 81 = 49$$

$$x^2 + 20x + 100 = 64$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 16$$

$$36x^2 + 12x + 1 = 18$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 4$$

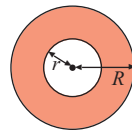
$$25x^2 + 40x + 16 = 28$$

$$4x^2 - 28x + 49 = 64$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 81$$

$$100x^2 - 60x + 9 = 121$$

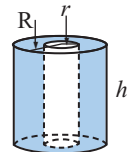
5) დიდი წრის რადიუსი მცირე წრის რადიუსზე 3 სმ-ით მეტია. იპოვეთ
მცირე წრის ფართობი, თუ ფერადი ნაწილის ფართობი 85 სმ²-ია ($\pi \approx 3$
მივიღოთ).



6) $x^2 - (m - 5)x + n = 0$ განტოლების ფესვებიდან ერთი 5-ის, $x^2 - (2m - 1)x + k = 0$ გან-
ტოლების ფესვებიდან კი -3-ის ტოლია. ამ განტოლებების მეორე ფესვების ტო-
ლობიდან გამომდინარე, იპოვეთ m -ის მნიშვნელობა.

7) კინოთეატრის თითოეულ რიგში ადგილების რაოდენობა რიგების რაოდენობაზე
8-ით მეტია. რამდენი რიგია კინოთეატრში, თუ სულ 884 ადგილია?

8) მამრავლებად დაშლილი ფორმით ჩაწერეთ ფერადი ნაწილის
მოცულობის მაჩვენებელი გამოსახულება.



9) $mx^2 + (2m - 3)x + m - 2 = 0$ კვადრატულ განტოლებას ერთი ფესვი აქვს. იპოვეთ m .

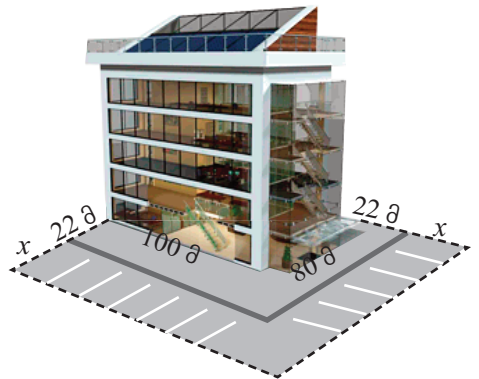
10) ცნობილია რომ x_1 და x_2 რიცხვები $x^2 - x - 1 = 0$ განტოლების ფესვებია.

შეადგინეთ კვადრატული განტოლება, რომლის ფესვებია: ა) $\frac{1}{x_1}$ და $\frac{1}{x_2}$;

ბ) $x_1 + 2$ და $x_2 + 2$

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 11**) ქალწულის კოშკის სიმაღლე 28 მ-ია. რამდენ წამში მიაღწევს დედამიწამდე ამ კოშკიდან ჩამოვარდნილი სხეული? გამოიყენეთ ფორმულა $h = -4,9t^2 + h_0$.
- 12**) იატაკზე გაშლილი ხალიჩა იატაკის საერთო ფართობის ნახევარს ფარავს და ოთახის კედლებიდან თანაბრადაა დაშორებული. ცნობილია, რომ ხალიჩის ზომები $4 \text{ მ} \times 6 \text{ მ}$ -ია. იპოვეთ მართკუთხა ფორმის ოთახის ზომები. დახაზეთ ამოცანის შესაბამისი სურათი.
- 13**) მართკუთხა ფორმის $40 \text{ სმ} \times 60 \text{ სმ}$ ზომის მიწის დაფის სიგრძიდან და სიგანიდან ერთი და იმავე ზომით ჩამოჭრისას, მისი ფართობი 3-ჯერ შემცირდა. იპოვეთ მიწის დაფის ახალი ზომები.
- 14**) $d \approx \frac{v^2}{12}$ ფორმულის გამოყენებით შეიძლება ავარიის მომენტში ავტომობილის მოძრაობის სიჩქარის (მ/წმ) გამოთვლა. აქ d არის დამუხრუჭების მომენტიდან ავტომობილის სრულ გაჩერებამდე გავლილი მანძილი. ავარიის ადგილას ჩატარებული გამოკვლევები უჩვენებს, რომ $d = 18$. რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი?
- 15**) 1) დაწერეთ განტოლება რომლის ფესვებია 3 და -4 .
2) $x^2 + bx + 20 = 0$ განტოლების ფესვებიდან ერთი 5-ია. იპოვეთ მეორე ფესვი.
- 16**) ამოხსენით განტოლებები.
ა) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
ბ) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
გ) $(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3) = 21$
დ) $(x^2 - 2x)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x)$



- 18** ა) $2x^2 + bx - 10 = 0$ განტოლების ფესვი თუ 5-ის ტოლია, იპოვეთ b და ამოხსენით განტოლება.
 ბ) $3x^2 + bx + 24 = 0$ განტოლების ფესვი თუ 3-ის ტოლია, იპოვეთ b და ამოხსენით განტოლება.

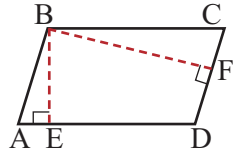
პარალელოგრამის ფართობი

ფართობის აქსიომა

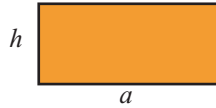
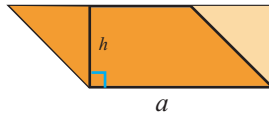
ფართობების ტოლობის აქსიომა. კონგრუენტული ფიგურების ფართობები ტოლია.
ფართობების შეერთების აქსიომა. თუ ფიგურა საერთო შიგა წერტილის არმქონე ფიგურებად დაიყოფა, მისი ფართობი ამ ფიგურების ფართობების ჯამის ტოლია.

პარალელოგრამის სიმაღლე

განსაზღვრა. პარალელოგრამის გვერდის ნებისმიერი წერტილიდან მოპირდაპირე გვერდის შემცველ წრფეზე დაშვებულ პერპენდიკულარს პარალელოგრამის სიმაღლე ეწოდება. თუ პარალელოგრამი რომში არ არის, მაშინ მას ორი განსხვავებული სიგრძის სიმაღლე აქვს (სურათზე BE და BF).



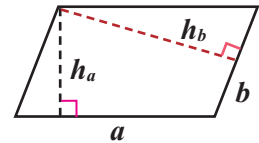
პრაქტიკული მეცადინეობა. ქაღალდზე დახაზეთ პარალელოგრამი და მისი სიმაღლე, პარალელოგრამი სიმაღლის გასწვრივ ერთი მხრიდან ნაჩვენები წესით გაჭერით და მარჯვენა მხარეს მიაწებეთ. მიღებული ფიგურის შესახებ გამოთქვით მოსაზრებები. დაწერეთ მართკუთხედის ფართობის ფორმულა. პარალელოგრამის ფართობის შესახებ მოსაზრებები განაზოგადეთ.



პარალელოგრამის ფართობი ტოლია იმ მართკუთხედის ფართობისა, რომლის სიგრძე ამ პარალელოგრამის სიგრძის, ხოლო სიმაღლე კი პარალელოგრამის სიმაღლის ტოლია.

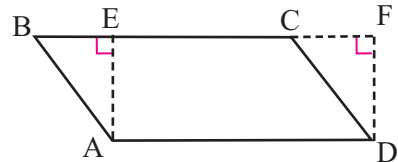
პარალელოგრამის ფართობი

პარალელოგრამის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
 $S = ah_a$ ან $S = bh_b$



1 სურათის მიხედვით დაამტკიცეთ, რომ ABCD პარალელოგრამის ფართობი AEFD მართკუთხედის ფართობის ტოლია.

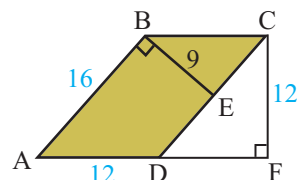
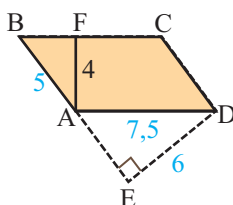
მითითება: $\triangle ABE$ და $\triangle DCF$ -ის კონგრუენტულობიდან და ფართობის აქსიომებით ისარგებლეთ.



2 უჯრიან ფურცელზე დახაზეთ 3 სხვადასხვა პარალელოგრამი, რომელთა ფუძე 6 ერთეულია, ხოლო სიმაღლე 4 ერთეული. შეადარეთ ფართობები.

3 1. ABCD პარალელოგრამის ფართობის მოსაძებნად, თუ AB-ს ჩათვლით ფუძედ, რომელი სიმაღლე უნდა გამოიყენოთ?

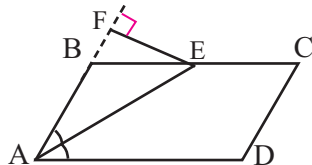
2. სურათის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ ABCD პარალელოგრამის ფართობი ორი ხერხით.



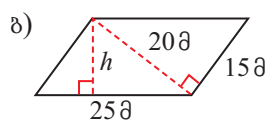
4 პარალელოგრამის ფართობი 48 სმ²-ია. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან გვერდებამდე მანძილი 2 სმ და 3 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდების სიგრძეები და პერიმეტრი.

5 პარალელოგრამის გვერდები 15 სმ და 12 სმ-ია. პარალელოგრამის სიმაღლეებიდან ერთი 10 სმ-ია, იპოვეთ მეორე სიმაღლე. რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?

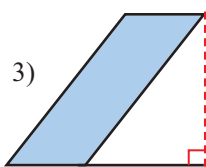
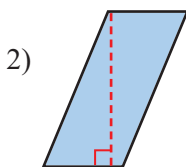
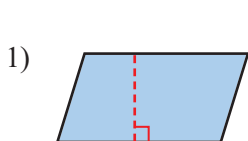
6 AE მონაკვეთი $\angle A$ -ს ბისექტრისაა. EF = 12 სმ.
AD = 24 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.



7 იპოვეთ პარალელოგრამის h -ით აღნიშნული სიმაღლე.

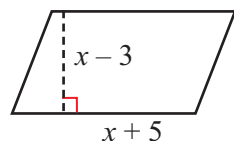


8 შესაბამისი გაზომვების შესრულებით გამოთვალეთ სურათზე მოცემული პარალელოგრამების ფართობები. რომელი პარალელოგრამის ფართობი უფრო მეტია?



9 რომელი კვადრატული სამწევრი გამოსახავს სურათზე მოცემული პარალელოგრამის ფართობს?

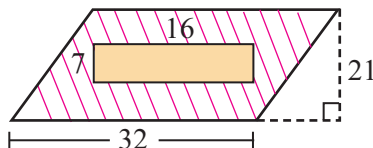
1) $x^2 + 2x - 15$ 2) $x^2 - 2x + 15$ 3) $2x^2 - x + 15$



10 მართკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძე $(2x+3)$ სმ, ფართობი კი $(2x^2 + 7x + 6)$ -სმ²-ია. გამოსახეთ მართკუთხედის პერიმეტრი x ცვლადით.

11 პარალელოგრამის გვერდები 12 სმ და 16 სმ-ია. მისი ერთ-ერთი სიმაღლე 14 სმ-ია. რომელ გვერდზე დაშვებული სიმაღლეა ეს? იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

12 ნახაზის მიხედვით გამოთვალეთ დაშვებული ნაწილის ფართობი.



13 გამოკვლევა. მოცემული მართკუთხედის პერიმეტრი 12მ-ია.

1) მართკუთხედის პერიმეტრი $2x+2y=12$ სახით დაწერეთ და იპოვეთ y . ჩასვით ფართობის $S=xy$ ფორმულაში y -ის ადგილას და გაამარტივეთ.

2) მიღებულ გამოსახულებაში გამოყავით ორწევრის სრული კვადრატი.

3) იპოვეთ უდიდესი ფართობის შესაბამისი მართკუთხედის ზომები.

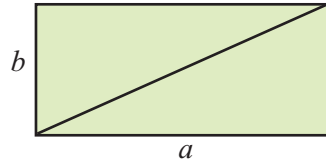
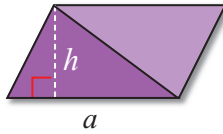
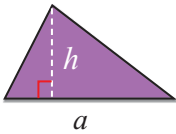
4) როგორ შეიძლება განისაზღვროს 5 მ² ფართობიანი მართკუთხედის შესაძლო ზომები?

14 იპოვეთ მართკუთხედის ზომები, რომლის: ა) პერიმეტრი 20 ერთეული, ფართობი - 24 კვადრატული ერთეულია. ბ) პერიმეტრი 72 ერთეული, ფართობი კი - 288 კვადრატული ერთეულია.

სამკუთხედის ფართობი

პრაქტიკული შეცადინება 1. 1. უჯრიან ქაღალდზე დახაზეთ სამკუთხედი და ამოჭერით. ეს სამკუთხედი ქაღალდზე დადეთ და კიდევ ერთი კონგრუენტული სამკუთხედი ამოჭერით. სამკუთხედები სხვა ქაღალდზე სურათზე ნაჩვენები წესით დააწყებეთ. რა ფიგურა მიიღეთ? სამკუთხედის ფართობსა და პარალელოგრამის ფართობს შორის კავშირის შესახებ მოსაზრებები გამოთქვით და დაწერეთ.

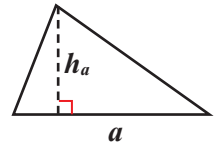
2. დახაზეთ მართკუთხედი და დიაგონალით ორ სამკუთხედად გაყავით. სამკუთხედების კონგრუენტულობა ერთმანეთზე დადებითა და გეომეტრიული მსჯელობებით დაამტკიცეთ. სამკუთხედის ფართობსა და მართკუთხედის ფართობს შორის დამოკიდებულების შესახებ გამოთქვით მოსაზრებები.



სამკუთხედის ფართობი

სამკუთხედის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

$$S = \frac{1}{2} ah_a$$



თუ გვერდებს a, b, c , -თი ავლიწმნავთ, შესაბამის სიმაღლეებს კი h_a, h_b, h_c -თი, მაშინ

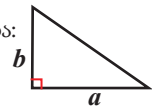
$$S = \frac{1}{2} ah_a$$

$$S = \frac{1}{2} bh_b$$

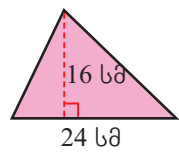
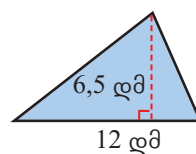
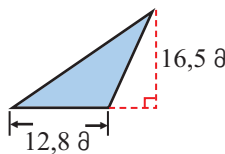
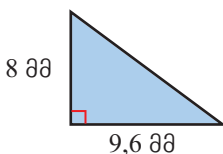
$$S = \frac{1}{2} ch_c$$

მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი კათეტების ნამრავლის ნახევრის ტოლია:

$$S = \frac{1}{2} ab$$

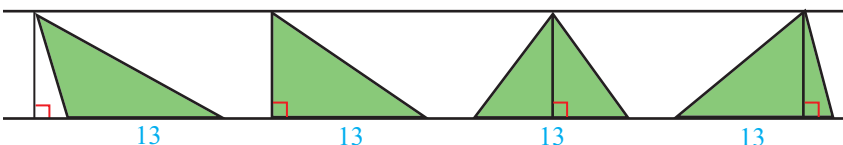


1 სურათზე მოწმეებების მიხედვით იპოვეთ თითოეული სამკუთხედის ფართობი.



2 სამკუთხედის ფართობი 24 სმ^2 -ია. მისი სიმაღლე $5,5 \text{ სმ}$ -ია. იპოვეთ გვერდი რომელზეც დაშვებულია სიმაღლე. შედეგი მეათედებამდე დაამრგვალეთ.

3 **გამოკვლევა.** ფართობი 52 სმ^2 , ფუძე 13 სმ -იან სამკუთხედში იპოვეთ ამ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე, ამ სიმაღლისა და ფუძის შესაბამისი სხვადასხვა სამკუთხედები სურათზეა მოცემული. დახაზეთ ამ ზომების შესაბამისი ბლაგვკუთხა ან მახვილკუთხა კიდევ რამდენიმე სამკუთხედი.



სამკუთხედის ფართობი

4) ღია ტიპის შეკითხვა.

ა) დახაზეთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთი კათეტი 8 სმ-ია, ფართობი კი 24 სმ² -ია.

ბ) დახაზეთ რამდენიმე სამკუთხედი, რომლის ფუძე 8 სმ, ფართობი კი 24 სმ²-ია.

გ) დახაზეთ რამდენიმე სამკუთხედი, რომლის ფუძე 4 სმ-ია, ხოლო დანარჩენი გვერდებიდან ერთი 3 სმ და შეადარეთ მათი ფართობები. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება შეიძინოს ასეთი სამკუთხედის ფართობმა?

5) 1) $\triangle ABC$ -ს ფუძე 4 ერთეული, სიმაღლე 8 ერთეულია. $\triangle DEF$ -ის ფუძე და სიმაღლე შესაბამისად 2-ჯერ მეტია. დაწერეთ ამ სამკუთხედების ფართობების შეფარდება.

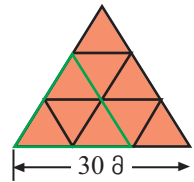
2) $\triangle ABC$ -ს ფუძე 15 ერთეული, სიმაღლე 12 ერთეულია. $\triangle DEF$ -ის ფუძე და სიმაღლე მასზე 3-ჯერ ნაკლებია. დაწერეთ ამ სამკუთხედების ფართობების შეფარდება.

6) სურათზე მოცემული მოდელი კონგრუენტული ტოლგვერდა სამკუთხედებისგანაა შედგენილი.

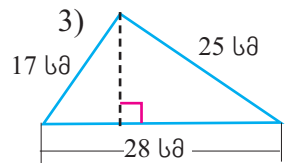
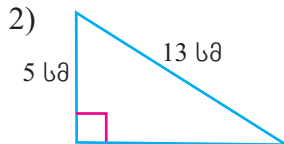
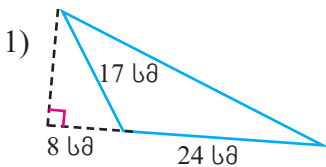
ა) იპოვეთ დიდი სამკუთხედის ფართობი.

ბ) იპოვეთ ერთი პატარა სამკუთხედის ფართობი.

გ) იპოვეთ მწვანე ფანქრით დახაზული სამკუთხედის ფართობი.



7) იპოვეთ სამკუთხედების ფართობები.



ჰერონის ფორმულა სამკუთხედების ფართობისათვის

a, b, c გვერდებიანი სამკუთხედის ფართობისათვის მართებულია $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ფორმულა, სადაც p სამკუთხედის ნახევარპერიმეტრია:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

ამოცანა. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ, და 15 სმ.

მოცემულია: $a=13$ სმ, $b=14$ სმ, $c=15$ სმ. აქედან $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$.

ჰერონის ფორმულის თანახმად

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 84 \text{ (სმ}^2\text{)}$$

8) იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდებია: ა) 26 სმ, 30 სმ და 28 სმ; ბ) 10 სმ, 13 სმ და 13 სმ.

9) იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის სიმაღლეები, რომლის გვერდებია 10 სმ, 10 სმ და 16 სმ.

10) იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდი და სიმაღლე თუ მისი გვერდებია 8 სმ და 10 სმ, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი 6 სმ-ია.

სამკუთხედის ფართობი

11

1) იპოვეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი

ა) $P=24$ სმ; ბ) $a=5$ სმ.

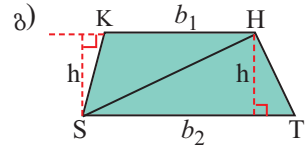
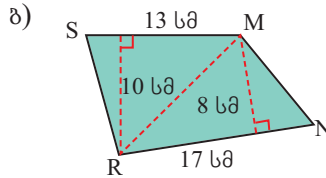
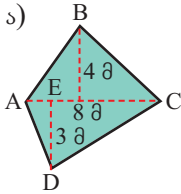
2) დაწერეთ ფორმულა ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობის გამოთვლისათვის, თუ მისი გვერდი a -ს ტოლია.

3) რისი ტოლი შეიძლება იყოს 20 სმ და 25 სმ გვერდებიანი სამკუთხედის მაქსიმალური ფართობი?

4. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები 15 სმ და 20 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი და ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე. ააგეთ ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის ფართობი ამ სამკუთხედის ფართობის ტოლია.

12

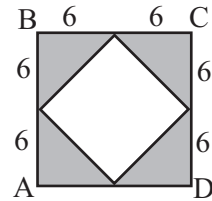
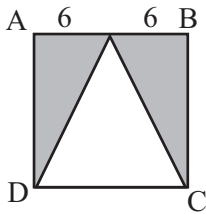
გამოთვალეთ ოთკუთხედების ფართობი სამკუთხედებად დაყოფით.



13

მონაცემების მიხედვით ABCD კვადრატში იპოვეთ:

ა) ნაცრისფერი ნაწილის ფართობი; ბ) თეთრი ნაწილის ფართობი.

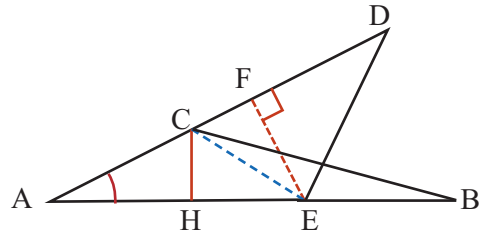


14

მოცემულია: $\triangle ABC$ და $\triangle ADE$

$\angle DAE \cong \angle BAC$

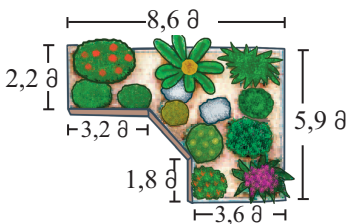
დაამტკიცეთ: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$



მითითება: სურათის მიხედვით $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEC}}$ და $\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle ADE}}$ შეფარდებები დაწერეთ და მხარეების მიხედვით გაამრავლეთ.

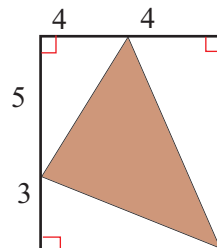
15

ბალის გეგმა ჩაიხაზეთ ახლიდან და იპოვეთ ფართობი.



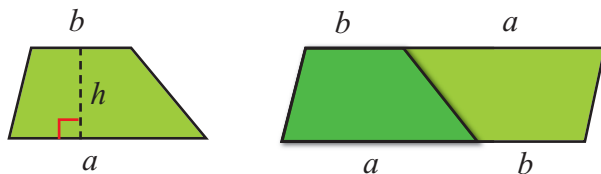
16

სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



ტრაპეციის ფართობი

პრაქტიკული მეცადინეობა. ქაღალდზე ტრაპეცია დახაზეთ და ამოჭერით. ეს ტრაპეცია ქაღალდზე დადეთ და კიდევ ერთი ტრაპეცია ამოჭერით. ტრაპეციები სხვა ქაღალდზე სურათზე ნაჩვენები წესით დააწებეთ. რომელი ფიგურა მიიღეთ? გამოთქვით და დაწერეთ მოსაზრებები ტრაპეციის ფართობსა და პარალელოგრამის ფართობს შორის კავშირის შესახებ.

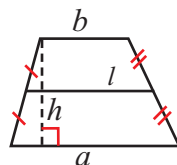


ტრაპეციის ფართობი

ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძიდან მეორე ფუძის შემცველი წრფისადმი გავლებულ მართობს ამ ფუძეებს შორის ტრაპეციის სიმაღლე ეწოდება.

ტრაპეციის ფართობი მისი ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

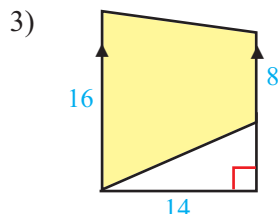
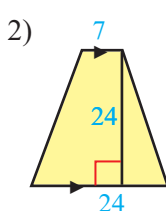
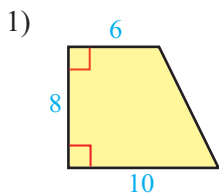
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



ტრაპეციის ფართობი შუახაზის სიგრძისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

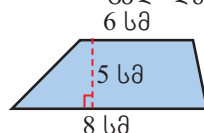
$$S = lh$$

1 იპოვეთ ტრაპეციათა ფართობები სურათის მიხედვით.

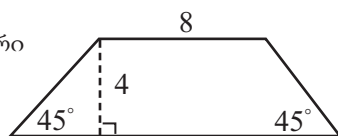


2 მოცემული პირობების მიხედვით გამოიკვლიეთ ტრაპეციის ფართობის ცვლილება:

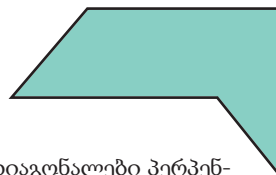
- 1) თუ ქვედა ფუძე ორჯერ გაიზრდება;
- 2) თუ ზედა ფუძე ორჯერ გაიზრდება;
- 3) თუ სიმაღლე ორჯერ გაიზრდება;
- 4) თუ ორივე ფუძე და სიმაღლე ორჯერ გაიზრდება.



3 სურათის მიხედვით იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი და ფართობი.



4 სახაზავით მოახდინეთ საჭირო გაზომვები. სურათზე მოცემული ფიგურის ფართობი გამოთვალეთ სხვადასხვა ხერხით. ერთი წრფით: ა) ორ ტრაპეციად გაყავით; ბ) პარალელოგრამად და სამკუთხედად გაყავით.



5 ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეები 8 სმ და 12 სმ-ია. მისი დიაგონალები პერპენდიკულარულია. იპოვეთ ამ ტრაპეციის ფართობი.

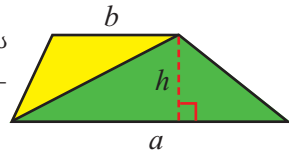
ტრაპეციის ფართობი

6) ქვემოთ მოცემული მოსაზრებები სურათზე ჩვენებით დაასაბუთეთ.

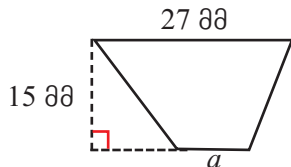
1) ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობის ორი კონგრუენტული ტრაპეციის ფართობის ჯამის სახით გამოსახვა შესაძლებელია.

2) ტრაპეციის ფართობის ერთი მართკუთხედისა და ორი მართკუთხა სამკუთხედის ფართობების ჯამის სახით გამოსახვა შესაძლებელია.

7) სამკუთხედის ფართობის ფორმულისა და ფართობების შეკრების აქსიომების გამოყენებით ტრაპეციის ფართობისათვის დამტკიცეთ, რომ $S = \frac{1}{2}(a + b)h$.

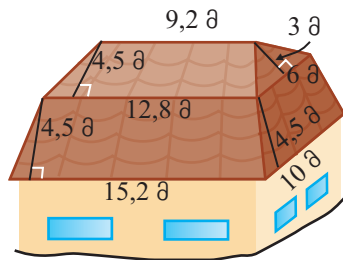


8) ტრაპეციის ფართობი 270 მმ²-ია. იპოვეთ a სურათის მონაცემების მიხედვით.



9) სურათზე მოცემული სახლის გადახურვისათვის რამდენი კვადრატული მეტრი მასალაა საჭირო?

1) ერთი თუნუქის ფურცლის ფართობი 2,8 მ²-ია ფასი კი - 8,6 მანეთი. სურათზე მოცემული სახურავისათვის რამდენი მანეთი დაიხარჯება? გაითვალისწინეთ, რომ მასალის დაახლოებით 10% დანაკარგი იქნება და თუნუქის ფურცლების რაოდენობა მთელ რიცხვამდე დაამრგვალოთ.



2) ორი ხელოსანი ერთ თვეში გეგმავს შენობის გადახურვას. თუმცა 20 დღეში სამუშაოს მხოლოდ ერთი მეოთხედი შეასრულეს. სამუშაოს დროულად შესრულების მიზნით სახლის პატრონმა იმავე სიჩქარით მომუშავე კიდევ ორი ხელოსნის დამატება გადაწყვიტა. რამდენ დღეში შეასრულებს დარჩენილ სამუშაოს 4 ხელოსანი?

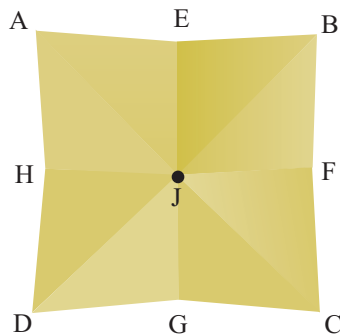
3) ერთი თვის განმავლობაში გადასახური მასალები ჯერ 3,6%-ით, შემდეგ კი 4,8%-ით გაძვირდა. რამდენი პროცენტით მეტი ფული გადაიხადა ბოლო ფასმომეტების შემდეგ გადასახური მასალის მყიდველმა?

10) სურათზე ABCD კვადრატული სახის ფურცელია მოცემული. H, E, F, J კვადრატის გვერდების შუა წერტილებია.

1) ცნობილია, რომ $AB = 8$ ერთეულს, იპოვეთ ქვემოთ მოცემული ფიგურების ფართობი:

- ABFH მართკუთხედი;
- ABFJ ტრაპეცია;
- AEJ სამკუთხედი.

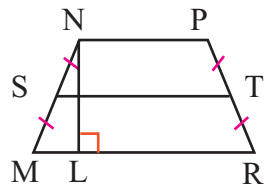
2) ფურცლის ფართობი წარმოადგინეთ ორი კონგრუენტული ტრაპეციისა და ერთი ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობების ჯამის სახით და გამოთვალეთ.



ტრაპეციის ფართობი

- 11** MNPR ტოლფერდა ტრაპეციაა. ამოხსენით ამოცანები მოცემული ინფორმაციების მიხედვით.

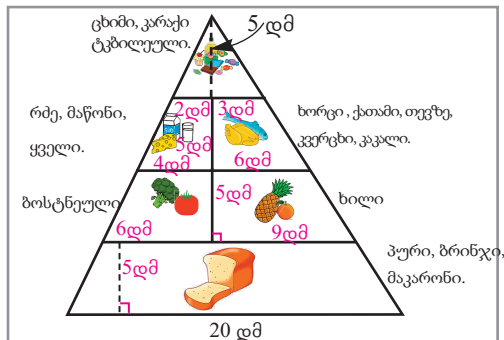
- 1) იპოვეთ ST, თუ $NP = 12$, $MR = 18$.
- 2) იპოვეთ MR, თუ $ST = 16$, $NP = 8$.
- 3) იპოვეთ ST, თუ $NP + MR = 5x + 12$, $ST = 3x + 4$
- 4) იპოვეთ MS, თუ ტრაპეციის პერიმეტრია 64, $ST = 12$.



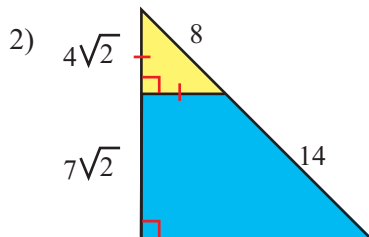
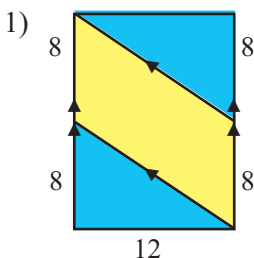
- 5) იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი თუ $NL = 8$ სმ, $NP + MR = 24$ სმ

- 12** პირამიდის ფორმის ვიტრინაში სურსათი ჯგუფებადაა განთავსებული. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ შემდეგი ნაწილების ფართობები:

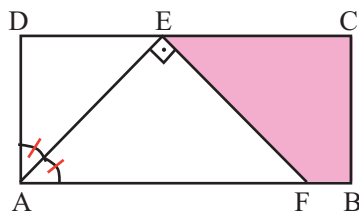
- ა) კარაქის, ტკბილეულის;
- ბ) ხილის;
- გ) პურის, ბრინჯის, მაკარონის.



- 13** გამოთვალეთ ცისფერი და ყვითელი ნაწილების ფართობები.

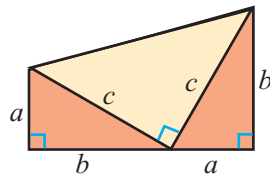


- 14** მოცემულია : ABCD მართკუთხედი
 $AB = 15$ სმ, $AD = 4$ სმ, $\angle DAE \cong \angle EAF$
იპოვეთ: FBCE ტრაპეციის ფართობი.



- 15** ცნობილია პითაგორას თეორემის მრავალნაირი დამტკიცება. მათ შორის ერთი აშშ-ის ყოფილ პრეზიდენტს, ჯეიმს ჰარფილდს ეკუთვნის. მან ეს 1876 წელს, წარმომადგენელთა პალატაში მუშაობისას შეძლო. გამოიკვლიეთ ამ დამტკიცების ქვემოთ მოცემული გეგმა და დამტკიცება რვეულში ჩაიწერეთ.

- 1) ტრაპეციის ფართობი a და b ცვლადებით იყო გამოსახული.
- 2) სამი მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი a , b და c ცვლადებით იყო გამოსახული.
- 3) ფართობების ტოლობის აქსიომის თანახმად, 1-დან და 2-დან მიღებული შედეგები ჩაწერილი და გამარტივებული იყო.

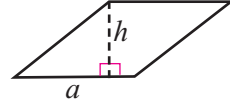


რომბის ფართობი

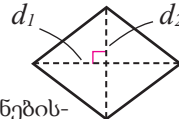
პრაქტიკული მეცადინეობა. გაავლეთ რომბის და ფრანის ფორმის ფიგურის დიაგონალი. დიაგონალზე გაჭრითა და ერთმანეთზე დაწყობით უჩვენეთ მიღებული სამკუთხედების კონგრუენტულობა. გამოიკვლიეთ კავშირი რომბისა და ფრანის ფართობსა და სამკუთხედის ფართობს შორის.

რომბის ფართობი

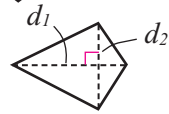
1. რომბის ფართობი მისი გვერდისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია: $S = ah$



2. რომბის ფართობი დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის ტოლია: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

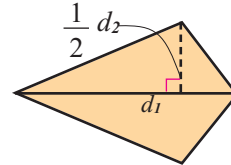
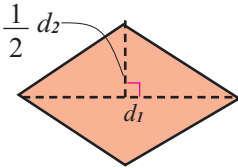


3. ურთიერთპერპენდიკულარული დიაგონალების მქონე ნებისმიერი ამოხსნეილი ოთხკუთხედის ფართობი დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის ტოლია: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

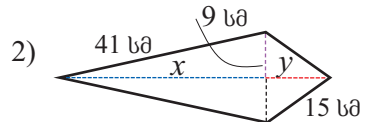
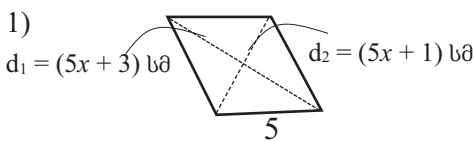


1 ქვემოთ მოცემული ნახაზის მიხედვით დაამტკიცეთ რომბისა და ფრანის ფორმის ფიგურის ფართობის ფორმულა. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

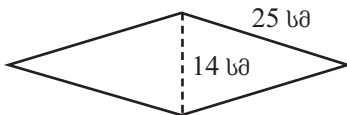
დამტკიცების სქემა. 1. დაამტკიცეთ, რომ რომბისა და ფრანის დიაგონალები მათ ორ კონგრუენტულ სამკუთხედად ყოფს. 2. შეკრიბეთ ორი სამკუთხედის ფართობი.



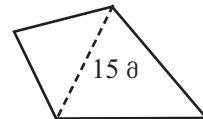
2 სურათზე მოწაწემების მიხედვით იპოვეთ რომბისა და ფრანის ფართობი.



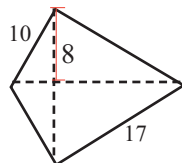
3 1) იპოვეთ რომბის ფართობი.



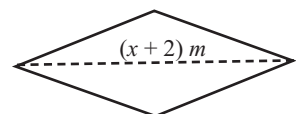
2) ფრანის ფართობი 180მ^2 -ია. იპოვეთ მეორე დიაგონალი.



4 1) იპოვეთ სურათზე მოცემული ფიგურის ფართობი.



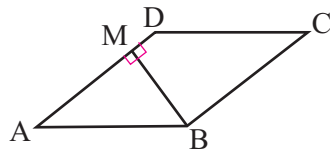
2) რომბის ფართობი $(4x^2 + 8x)\text{მ}^2$ -ია. გამოსახეთ მეორე დიაგონალი x ცვლადით.



რომბის ფართობი

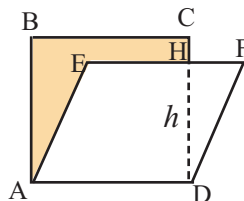
- 5) რომბის AD გვერდზე დაშვებული სიმაღლე 6 სმ-ია. დაშვებულმა სიმაღლემ AD გვერდი $AM:MD=4:1$ შეფარდებით დაყო. იპოვეთ რომბის ფართობი.

მითითება: $AM = 4x$ და $MD = x$ -ით აღნიშნეთ და გვერდის მოძებნისათვის გამოიყენეთ $\triangle AMB$ მართკუთხა სამკუთხედი.



- 6) ABCD კვადრატის ფართობი 625 სმ^2 -ია, ხოლო AEFD რომბისა კი 500 სმ^2 -ია. იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.

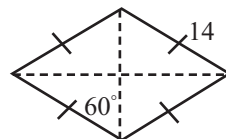
მითითება: ჯერ რომბის DH სიმაღლე, შემდეგ იპოვეთ $\triangle DHF$ -ის ფართობი.



- 7) 1) ABCD მართკუთხედის ფართობი 60 სმ^2 -ია. იპოვეთ იმ რომბის ფართობი, რომლის წვეროები მოცემული მართკუთხედის გვერდების შუა წერტილებზეა.

2) იპოვეთ რომბის ფართობი, რომლის პერიმეტრი 80 სმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი 24 სმ-ია.

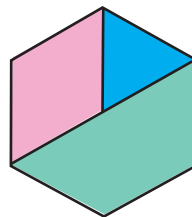
- 8) სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ რომბის პერიმეტრი და ფართობი.



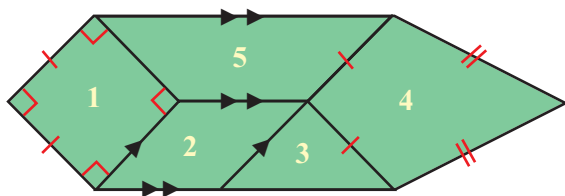
- 9) 1) იპოვეთ რომბის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობი $9,6 \text{ მ}^2$ -ია, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი $3,2 \text{ მ}$ -ია.

2) იპოვეთ რომბის დიაგონალების სიგრძეები თუ მისი ფართობი 54 სმ^2 -ია, დიაგონალები კი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 3 : 4.

- 10) სახაზავით ჩაატარეთ გაზომვები 1 მმ-ის სიზუსტით და იპოვეთ სურათზე მოცემული ფიგურის ფერადი ნაწილებისა და მთელი ფიგურის ფართობი.



- 11) შეარჩიეთ ფიგურის დანომრილი ნაწილების შესაბამისი ფორმულები.

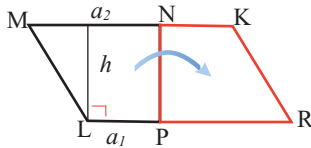


- A) $S = a^2$
 B) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$
 C) $S = \frac{1}{2} ah$
 D) $S = \frac{1}{2} h(a_1 + a_2)$
 E) $S = ah$

განმარტავადელი დავალბები

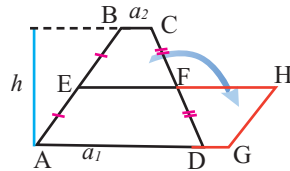
- 1» მოცემულია: LMNP ტრაპეცია.
LMNP $\cong$ KPN

დამტკიცეთ: $S_{LMNP} = \frac{1}{2} h(a_1 + a_2)$



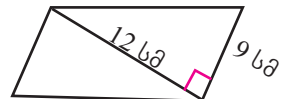
- 2» მოცემულია: ABCD ტრაპეცია.
EBCF $\cong$ HGDF

დამტკიცეთ: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} h(a_1 + a_2)$

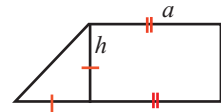


- 3» ძია რასიმმა ბაღში პომიდორის დასარგავად 15 მ $\times$ 25 მ მართკუთხა ფორმის ნაკვეთი სპეციალური მასალით შემოღობა, ძია რასიმს სურს, რომ იყიდოს ახალი შემოსაღობი მასალა, გაზარდოს საპომიდვრე ფართობი და მისცეს მას კვადრატის ფორმა. რამდენი კვადრატული მეტრით გაიზრდება ამ შემთხვევაში პომიდვრის დაკავებული ფართობი?

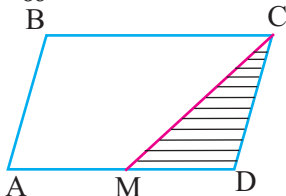
- 4» პარალელოგრამის დიაგონალი გვერდთან მართ კუთხეს ქმნის. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.



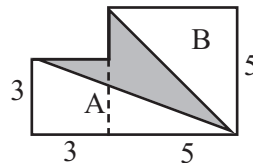
- 5» დაწერეთ მონაცემების მიხედვით ფიგურის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა.



- 6» მოცემულია ABCD პარალელოგრამი.
AM = MD; $S_{\Delta CDM} = 8 \text{ სმ}^2$
იპოვეთ: S_{ABCM}

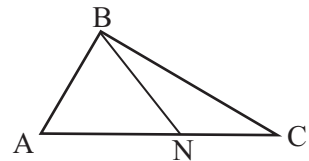


- 7» გამოთვალეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



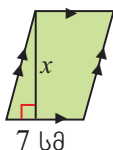
- 8» 1) იპოვეთ ΔABN -ის ფართობი, თუ $S_{\Delta ABC} = 90 \text{ სმ}^2$, AN : NC = 3 : 2

- 2) იპოვეთ ΔABN -ის ფართობი, თუ $S_{\Delta ABC} = 60 \text{ სმ}^2$, BN მედიანაა.

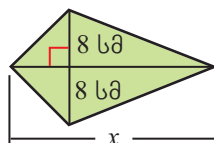


- 9» მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x.

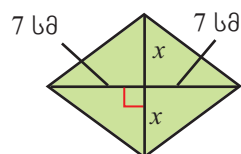
$S = 63 \text{ სმ}^2$



$S = 168 \text{ სმ}^2$



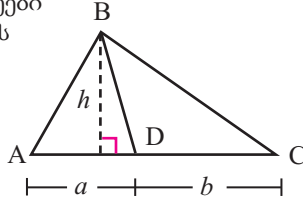
$S = 56 \text{ სმ}^2$



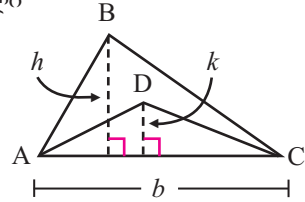
განმარტოვადებული დავალებები

- 10» გამოკვლევა.** ორი სამკუთხედის ფართობების შეფარდება სხვადასხვა შემთხვევებისათვის გამოიკვლიეთ. თითოეული შემთხვევისათვის დაწერეთ განმარტოვადებული დასკვნა და ფორმულა.

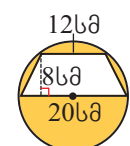
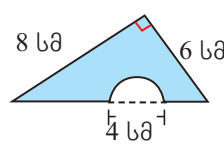
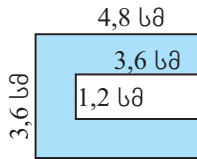
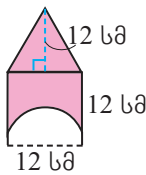
1) სიმაღლეები
ტოლი იყოს



2) ფუძეები ტოლი
იყოს.



- 11»** მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.

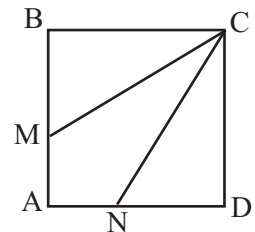


- 12»** დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის გვერდები მისი სიმაღლეების უკუპროპორციულია, ანუ:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

- 13»** 1) იპოვეთ h სიმაღლიანი ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი.
2) იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები თუ მისი ჰიპოტენუზა 13 სმ-ია, ხოლო ფართობი 30 სმ²-ია?
3) მახვილკუთხა სამკუთხედის ერთ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე ამ გვერდს 3 სმ და 9 სმ სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი თუ მისი სიმაღლე 7 სმ-ია.

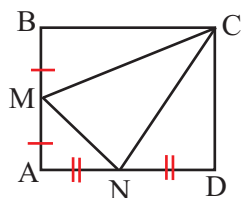
- 14»** კვადრატის გვერდი 3 სმ-ია და CM და CN მონაკვეთებით ფართობი 3 ტოლ ნაწილად დაიყო. იპოვეთ CM მონაკვეთის სიგრძე.



- 15»** ABCD მართკუთხედის ფართობი 72 კვადრატული ერთეულია. M და N წერტილები მართკუთხედის გვერდების შუა წერტილებია. იპოვეთ $\triangle CMN$ -ის ფართობი.

მითითება: $S_{\triangle CMN} = S_{ABCD} - S_{\triangle BMC} - S_{\triangle AND} - S_{\triangle AMN}$.

აღნიშნეთ $AD = a$, $AB = b$ და ფართობი ab ნამრავლით გამოსახეთ.



4.1. რაციონალური განტოლებები

4.2. ფიგურების მსგავსება

თქვენ ამ განყოფილებაში შესწავლით:

- რაციონალური განტოლების შედგენით სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნას;
- მსგავსი სამკუთხედების თვისებებს;
- მსგავსი ოთხკუთხედების თვისებებს;
- სამკუთხედების მსგავსების ნიშნების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას;
- მსგავსების გარდაქმნის ამსახველი სურათების დახაზვას;
- ფიგურების სხვადასხვა მოძრაობების ასახვას;

რაციონალური განტოლებების ამოხსნა ფართოდ გამოიყენება ხელსაწყოთმშენებლობაში, კოსმოსურ გამოკვლევებში, ფინანსურ სამუშაოებში და სხვ.

ფიგურების მსგავსება ფართოდ გამოიყენება გაზომვის, კონსტრუირების, დიზაინერულ და სხვა სამუშაოებში.

ეს საინტერესოა!

სურათზე ნაჩვენები თვითმფრინავი, ტურისტების კოსმოსში სამოგზაუროდ გათვალისწინებული ორბიტული კოსმოსური თვითმფრინავის მოდელია. თვითმფრინავი 6 მგზავრსა და 2 პილოტზეა გათვალისწინებული.

კონსტრუქტორებს, ინჟინრებს თვითმფრინავის ოპტიმალური ვარიანტის გამზადებისათვის მრავალი რაციონალური განტოლების ამოხსნა მოუწიათ.

ორბიტალური თვითმფრინავის გამზადებისას სპეციალისტებმა ჩათვალეს, რომ ეს შესაძლებელია 2011 წლის შემდეგ.



რაციონალური განტოლებები

თუ განტოლების მარჯვენა და მარცხენა მხარე რაციონალური გამოსახულება იქნება, ასეთ განტოლებას რაციონალური განტოლება ეწოდება. ზევრ ამოცანაში მნიშვნელში უცნობის შემოტანით რაციონალური განტოლების ამოხსნა ხდება საჭირო. ამ შემთხვევაში განტოლებაში არსებული ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობების (ცმ-ის მითითებაა საჭირო.

ამოცანა 1. $\frac{1}{x-3} = 2$ მოცემულ განტოლებაში ცმ $x \neq 3$. რადგან $x \neq 3$ განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $(x-3)$ -ზე.

$$\frac{(x-3)}{x-3} = 2(x-3) \quad \text{აქედან} \quad 1 = 2(x-3) \text{ მიიღება, } 2x = 7 \quad x = 3,5$$

შევიტანოთ მოცემულ განტოლებაში, მივიღებთ: $\frac{1}{3,5-3} = \frac{1}{0,5} = 2 \quad 2 = 2$

მაშასადამე $x = 3,5$ მოცემული განტოლების ფესვია. მოცემულ განტოლებას სხვა ფესვები არა აქვს.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ განტოლება: $\frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3} = \frac{-8}{(x-1)(x-3)}$

ცმ $x \neq 1, x \neq 3$ გათვალისწინებით მოცემული განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $(x-1)(x-3)$ საერთო მნიშვნელზე.

$$(x-1)(x-3) \cdot \frac{x+5}{x-1} - (x-1)(x-3) \cdot \frac{x+1}{x-3} = \frac{-8(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} \quad \text{ტოლობის ნიშნის თანახმად}$$

$$(x+5)(x-3) - (x+1)(x-1) = -8 \quad \text{შეკვეცის შემდეგ}$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{ფრჩხილების გახსნითა და მტკიცის წევრების შეერთებით}$$

$$x = 3 \text{ ვპოულობთ.}$$

$x=3$ მნიშვნელობის განტოლებაში შეტანისას უაზრო გამოსახულება მიიღება (წილადის მნიშვნელი "0"-ად იქცევა), მაშასადამე, მოცემულ განტოლებას ფესვები არა აქვს.

ამოცანა 3. $\frac{12}{x+5} = \frac{4}{x+2}$ აქ, ცმ $x \neq -5, x \neq -2$.

პროპორციის თვისების გამოყენებით მივიღებთ:

$$12(x+2) = 4(x+5)$$

$$12x + 24 = 4x + 20 \quad 8x = -4 \quad x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

სასწავლო დაფალებები

1 ამოხსენით განტოლებები.

$$\frac{4}{a} = \frac{3}{a-2}$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x-6}{x-1}$$

$$\frac{m-1}{m+1} - \frac{2m}{m-1} = -1$$

$$\frac{a-1}{a+1} - \frac{2a}{a-1} = 1$$

$$\frac{a}{3a+6} - \frac{a}{5a+10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2n}{n-1} + \frac{n-5}{n^2-1} = 1$$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{3}{3n-1} = \frac{2}{2n-1}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{x} = \frac{x}{12}$$

რაციონალური განტოლებები

ამოცანა 1. ამოვხსნათ განტოლება $\frac{12}{6-x} = x+1$ აქ, $6 \neq x$.

განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $(6-x)$ -ზე: $12 = (x+1)(6-x)$

აქედან $12 = 6x - x^2 + 6 - x$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x_1 = 2, x_2 = 3$$

შეამოწმეთ ორივე რიცხვი არის თუ არა განტოლების ფესვი.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ განტოლება $\frac{x^2-3x}{x-2} = \frac{2}{2-x}$ აქ $x \neq 2$

დავწეროთ განტოლება $\frac{x^2-3x}{x-2} = \frac{-2}{x-2}$ სახით და ორივე მხარე გავამრავლოთ $(x-2)$

საერთო მნიშვნელზე: $x^2 - 3x = -2$

აქედან $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 2$

შემოწმებიდან ვნახავთ, რომ $x=2$ არ არის ამ განტოლების ფესვი, რადგან წილადის მნიშვნელს „0“-ად აქცევს. „0“-ზე გაყოფა არ შეიძლება!

მაშასადამე, მოცემული განტოლების ფესვია მხოლოდ $x=1$.

ყურადღება! მნიშვნელში უცნობის შემცველი განტოლების ამოხსნის შემდეგ საჭიროა ფესვების შემოწმება..

1 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\frac{10}{2x-3} = x-1$

ბ) $\frac{8}{x} = 3x+2$

გ) $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{5x-6}{x^2-4}$

დ) $\frac{x^2+4x}{x+2} = \frac{2x}{3}$

ე) $\frac{3}{x^2+2} = \frac{1}{x}$

ვ) $\frac{x^2-6x}{x-5} = \frac{5}{5-x}$

2 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2t} + \frac{2}{t^2} = 0$

ბ) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{1}{2}$

გ) $\frac{1}{t-2} + \frac{1}{t+2} = \frac{2}{3}$

დ) $\frac{5z-7}{2z-2} - \frac{3z+2}{z+1} = 0$

3 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $x = \frac{4}{x} - \frac{x}{9} + 2$

ბ) $(1 + \frac{1}{x})^2 = \frac{9}{x^2}$

4 ა) რიცხვის შებრუნებული კვადრატზე 8-ჯერ მეტია. იპოვეთ ეს რიცხვი.

რიცხვისა და მისი შებრუნებულის ჯამი $\frac{10}{3}$ -ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვი.

ბ) ჩვეულებრივი წილადის მნიშვნელი მის მრიცხველზე 3 ერთეულით მეტია. თუ წილადის მრიცხველს 7-ს, ხოლო მნიშვნელს 5-ს მივუმატებთ, წილადი $\frac{1}{2}$ -მდე გაიზრდება. იპოვეთ ეს წილადი.

5 ცვლადის რომელი მნიშვნელობისათვის: ა) $\frac{x^2+2x}{x+6}$ გამოსახულების მნიშვნელობა ტოლია 1-ის;

ბ) $\frac{6}{x-3}$ და $\frac{x+1}{x+3}$ წილადების სხვაობა არის მათი ნამრავლის ტოლი?

შეფარდების, პროცენტის ამოცანები

- 1 ეჭმედის გუნდმა მეტოქე გუნდთან აქამდე ჩატარებული 20 თამაშიდან 8-ში გაიმარჯვა. მათ ამ გუნდთან ჩასატარებელი თამაშებიდან რამდენში უნდა გაიმარჯვონ ზედიზედ, რომ 75%-იანი წარმატების შედეგს მიაღწიონ?

ამოხსნის გეგმა. 1. გამარჯვებული თამაშების რაოდენობის შეფარდება თამაშების საერთო რაოდენობასთან: $\frac{8}{20}$

2. თუ კიდე x თამაში ჩატარდება და ამ თამაშებში ზედიზედ გაიმარჯვებენ, გამარჯვებული თამაშების რაოდენობის შეფარდება თამაშების საერთო რიცხვთან იქნება: $\frac{8+x}{20+x}$

3. განტოლება: $\frac{8+x}{20+x} = 0,75$

- 2 ალიემ 20 საჩოგბურთო თამაშიდან 12-ში გაიმარჯვა. ალიემ მორიგ რამდენ თამაშში ზედიზედ უნდა წააგოს, რომ გამარჯვებული თამაშების რაოდენობა 50% იყოს?

- 3 კლასში 8 ბიჭი და 16 გოგონაა. კლასში რამდენიმე ბიჭი მიიღეს. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული მოსწავლე იქნება ბიჭი $\frac{1}{3}$ - ის ტოლია. რამდენი ბიჭი მიიღეს კლასში?

- 4 10 ლიტრი წვეწის 60% სუფთა ხილის ექსტრაქტია. რამდენი ექსტრაქტის დამატება არის საჭირო იმისათვის, რომ ამ წვეწის 75% იყოს ხილის ექსტრაქტი?

- 5 10%-იან 40 ლ მარილის ხსნარში რამდენი მარილის დამატებაა საჭირო, რომ მივიღოთ 20%-იანი ხსნარი?

- 6 30%-იანი და 10%-იანი მარილის ორი ხსნარია. 1 ლ 10%-იან ხსნარზე რამდენი ლიტრი 30%-იანი ხსნარის დამატებაა საჭირო 22%-იანი ხსნარის მისაღებად?

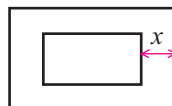
გეომეტრიული ამოცანები

- 7 1) მართკუთხედის გვერდებიდან ერთი გვერდი მეორეზე 14 სმ-ით მეტია. დიაგონალი 34 სმ-ია. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

2) მართკუთხა სამკუთხედში ერთი კათეტი ჰიპოტენუსზე 3 სმ-ით, ხოლო მეორე კათეტი 6 სმ-ით ნაკლებია. იპოვეთ ჰიპოტენუსი.

3) მართკუთხედის სიგრძე სიგანეზე 7 სმ-ით მეტია. მისი ფართობი 60 სმ²-ია. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.

- 8 მ სიგრძისა და 4 მ სიგანის მართკუთხა ფორმის ბაღის ნაკვეთის გარშემო, პერიმეტრის გასწვრივ ტოლი სიგანის ყვავილნარია გაშენებული. ყვავილნარისა და ბაღის ფართობი ერთად 165 მ²-ია. იპოვეთ ყვავილნარის სიგანე.



- 9 მართკუთხა ფორმის 2 მ × 4 მ ზომის ნაკვეთის სიგანე და სიგრძე ერთი და იგივე ზომით გაზარდეს და ფართობი 3-ჯერ გაიზარდა. იპოვეთ ახალი ნაკვეთის ზომები.

- 10 სამკუთხედის ფუძის სიგრძე სიმაღლეზე 20 სმ-ით მეტია, ფართობი 78 სმ²-ია. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძე.

სამუშაო ამოცანები

ამოცანა. ორი მუშა ერთობლივი მუშაობით სამუშაოს 12 დღეში ასრულებს. მათ შორის ერთ-ერთს სამუშაოს ცალკე შესასრულებლად მეორესთან შედარებით 10 დღით მეტი დრო სჭირდება. რამდენ დღეში შეასრულებს ამ სამუშაოს თითოეული მუშა ცალ-ცალკე?

ამოხსნა: დავუშვათ, რომ მეორე მუშა სამუშაოს x დღეში შეასრულებს, მაშინ 1-ლი მუშა სამუშაოს $(x + 10)$ დღეში შეასრულებს.

1-ლი მუშა 1 დღეში სამუშაოს $\frac{1}{x+10}$ ნაწილს, მეორე მუშა 1 დღეში $\frac{1}{x}$ ნაწილს, ორივე ერთად კი $\frac{1}{x+10} + \frac{1}{x}$ ნაწილს შეასრულებს.

პირობის თანახმად, მუშები ერთად, ერთ დღეში სამუშაოს $\frac{1}{12}$ ნაწილს ასრულებენ, აქედან $\frac{1}{x+10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$ განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $12x(x+10)$ -ზე.

$$12x + 12(x+10) = (x+10) \cdot x$$

გამარტივების შედეგად მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას $x^2 - 14x - 120 = 0$. ამ განტოლებას ორი ფესვი აქვს: $x_1 = 20$ და $x_2 = -6$. თუმცა $x > 0$ უნდა იყოს. $x = 20$, $x + 10 = 30$

პასუხი: მეორე მუშა სამუშაოს 20 დღეში, 1-ლი მუშა $x + 10 = 20 + 10 = 30$ დღეში შეასრულებს.

- 1> ფერიდი მარტო სამუშაოს 3 საათში, ხოლო ქემრანთან ერთად 2 საათში ასრულებს. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს ქემრანი?
- 2> ორმა ბრიგადამ ერთად სარემონტო სამუშაო 6 დღეში დაასრულა. რამდენ დღეში შეასრულებს ამ სამუშაოს თითოეული ბრიგადა ცალ-ცალკე თუ ერთ მათგანს მეორეზე 5 დღით მეტი დრო სჭირდება?
- 3> ორი ტრაქტორისტი ერთად მინდორს 4 საათში ხნავს. ამ სამუშაოს მარტო შესრულებისათვის ერთ ტრაქტორისტს მეორესთან შედარებით 6 საათით მეტი დრო სჭირდება. რამდენ საათში მოხნავს ამ ფართობს თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე?
- 4> ერთი მილი აუზს მეორესთან შედარებით 2-ჯერ სწრაფად ავსებს. რამდენი საათი დასჭირდება თითოეულ მილს ცალ-ცალკე აუზის ასავსებად, თუ ორივე ერთად 4 საათში ავსებს მას?
- 5> ერთი მილი აუზს მეორეზე 3 სთ-ით ადრე ავსებს. თუ ჯერ მხოლოდ პირველი მილი 1 საათი, შემდეგ მხოლოდ მეორე მილი 4 საათი იმუშავებს აუზი გაივსება. რამდენ საათში გაივსება აუზი, თუ ორივე მილი ერთდროულად იმუშავებს?
- 6> ორ კომპიუტერზე კომპანიის თანამშრომლების ხელფასი 3 საათში იანგარიშება. თუ ეს კომპიუტერები ცალ-ცალკე იმუშავებენ, ახალი პროგრამით უზრუნველყოფილი კომპიუტერი ამ სამუშაოს მეორესთან შედარებით 3 საათით ადრე დაამთავრებს. რამდენ საათში შესრულდება ეს სამუშაო თითოეულ კომპიუტერზე? პასუხი მესაქვამდე დაამრგვალოთ.
- 7> ორმა მუშაკმა ერთობლივი მუშაობით ორ საათში ახალი ინფორმაციები მოამზადეს e-mail-ით მომხმარებლებს გადაუგზავნეს. თუ ისინი ცალ-ცალკე იმუშავებენ ერთი სამუშაოს მეორეზე 3 სთ-ით ადრე დაამთავრებს. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს თითოეული მათგანი, თუ ცალ-ცალკე იმუშავებენ?

ამოცანების ამოხსნა რაციონალური განტოლებების გამოყენებით

ამოცანები მოძრაობის შესახებ

ამოცანა. 480 კმ სიგრძის გზის 80 კმ მოუასფალტებელია, დანარჩენი მოასფალტებული. ავტომობილის სიჩქარე მოუასფალტებელ გზაზე 40 კმ წაკლები იყო ვიდრე მოასფალტებულზე. რამდენი საათი მიდიოდა ავტომობილი მოუასფალტებელ გზაზე, თუ სულ გზას 7 საათი დაუთმო?

1-ლი ხერხი:

გზა	გავლილი მანძილი (კმ)	სიჩქარე კმ/სთ	დრო (საათი).	მანძილი=სიჩქარე x დრო
ასფალტიანი გზა	400	$v + 40$	t	$(v + 40)t = 400$
მოუასფალტებელი გზა	80	v	$7 - t$	$v(7 - t) = 80$

1-ლი ხერხი: ცხრილის მე-2 სტრიქონიდან: $v + 40 = \frac{400}{t}$, $v = \frac{400 - 40t}{t}$
 ცხრილის მე-3 სტრიქონიდან: $v = \frac{80}{7 - t}$

აქედან $\frac{40(10 - t)}{t} = \frac{80}{7 - t}$ რაციონალური განტოლება მიიღება.

ორივე მხარე გავყოთ 40-ზე: $\frac{10 - t}{t} = \frac{2}{7 - t}$ გამოვიყენოთ პროპორციის თვისება:

$$t^2 - 19t + 70 = 0; \quad t_1 = 5; \quad t_2 = 14.$$

$t_2 = 14$ ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას. პასუხი: მოუასფალტებელ გზაზე მიდიოდა $7 - 5 = 2$ საათი.

მე-2 ხერხი: ავტომობილმა ასფალტიან გზაზე $\frac{400}{v + 40}$ მოუასფალტებელზე კი $\frac{80}{v}$ სთ

იმოძრავა. მთელი გზის გავლას 7 სთ მოანდომა. შეგვიძლია დავწეროთ განტოლება:

$$\frac{400}{v + 40} + \frac{80}{v} = 7 \quad \text{ამ განტოლების ამოხსნით ვიპოვით: } v = 40 \text{ კმ/სთ.}$$

მოუასფალტებელი გზის გავლა: $80 : 40 = 2$ საათი.

1 ავტომობილი v კმ/სთ სიჩქარით A ქალაქიდან B ქალაქში 10 საათში ჩავიდა. რა დროში ჩავა ავტომობილი A ქალაქიდან B ქალაქში, თუ ავტომობილის სიჩქარე გზის პირველ ნახევარზე იქნება $\frac{v}{2}$, ხოლო მეორე ნახევარზე $\frac{v}{3}$?

2 A ქალაქიდან B ქალაქისაკენ მიმავალმა ავტომობილმა 2 საათის შემდეგ სიჩქარე საათში 10 კმ-ით გაზარდა და დარჩენილი გზა 4 საათში გაიარა. იპოვეთ ავტომობილის სიჩქარე პირველ 2 საათში თუ A და B ქალაქებს შორის მანძილი 460 კმ-ია.

3 ერთმა მოთხილამურემ 20 კმ მანძილი მეორეზე 20 წუთით ადრე გაიარა. იპოვეთ თითოეული მოთხილამურის სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ ერთი მათგანის სიჩქარე მეორეზე 2 კმ/სთ-ით მეტი იყო.

4 ტურისტმა ნიჩბიანი ნავით მდინარის დინების მიმართულებით 20 კმ გაიარა. შემდეგ უკან დაბრუნდა. მან მთელ გზას 7 საათი მოანდომა. ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში 7 კმ/სთ-ია. იპოვეთ მდინარის დინების სიჩქარე.

5 ნავმა მდინარის დინების მიმართულებით 48 კმ გარკვეულ დროში გაიარა. ამ გზის უკან გავლას კი 1,6 სთ-ით მეტი დრო მოანდომა. მდინარის დინების სიჩქარე 4 კმ/სთ-ია.
 1) იპოვეთ ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში.
 2) რა დრო მოანდომა ნავმა ორივე მიმართულებით მოძრაობას ერთად?

განმაზოგადებელი დავალებები

1» ამოხსენით განტოლებები.

$$ა) \frac{x-3}{x} = \frac{x-3}{x-6} \quad ბ) \frac{4}{a} = \frac{3}{a-2} \quad გ) \frac{3}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{6}{1-x^2}$$

$$დ) \frac{5}{4} + \frac{3y}{2} = \frac{7y}{6} \quad ე) \frac{3}{x} = \frac{1}{x-2} \quad ვ) \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$$

2» მობილურმა ოპერატორულმა კომპანიამ გამოაცხადა, 10 მანეთიანი სააბონენტოს გადახდით ნებისმიერ ქვეყანაში 1 წუთიანი საუბრის ფასი 50 კაპიკია. საშუალოდ რა დაუჯდება 1 წუთის საუბარი კლიენტს, თუ მან ერთი თვის მანძილზე x წუთი ილაპარაკა? დაწერეთ შესაბამისი გამოსახულება, რამდენი წუთი ილაპარაკა კლიენტმა, თუ მას ერთი წუთი 60 კაპიკი დაუჯდა?

3» ამოხსენით განტოლება.

$$\begin{array}{l|l|l} \frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x-6}{x-1} & \frac{5}{y-2} - \frac{4}{y-3} = \frac{1}{y} & \frac{3}{y-2} + \frac{7}{y+2} = \frac{10}{y} \\ \frac{3x-3}{x^2-1} + \frac{2}{x} = 2 & \frac{12}{x-1} - \frac{8}{x+1} = 1 & \frac{4x}{2x+3} - \frac{2x}{2x-3} = 1 \\ \frac{4}{x^2-9} + \frac{x+1}{x-3} = 1 & \frac{2n}{n-1} + \frac{n-5}{n^2-1} = 1 & \frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4} \end{array}$$

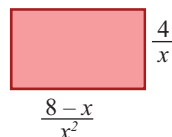
4» რაჰილე და სონა თუ ერთად იმუშავენ სახლს 2 საათში მოიყვანენ წესრიგში. თუ სონა მარტო იმუშაებს, რაჰილეზე 3 საათით ადრე დაამთავრებს. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს რაჰილე?

5» შეასრულეთ დავალებები მართკუთხედის მოცემული ზომების მიხედვით.

1) დაწერეთ მართკუთხედის სიგრძისა და სიგანის სხვაობის მაჩვენებელი რაციონალური გამოსახულება.

2) დაწერეთ მართკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება.

3) იპოვეთ x ცვლადის მნიშვნელობა, თუ მართკუთხედის პერიმეტრი 22 სმ-ია.



6» ყუთში 30 შავი, n ცალი თეთრი ბურთულაა. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთულა იქნება თეთრი $\frac{2}{5}$ -ია. იპოვეთ n .

7» 5%-იან 40 გრამ მარილის ხსნარში რამდენი წყლის დამატება საჭირო, რომ 4%-იანი ხსნარი მივიღოთ?

8» **ოპარ ზაიაშის ამოცანა.** ამოხსენით განტოლება სხვადასხვა ხერხით.

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{4}$$

განმაზოგადებელი დაგალებები

9 ერთი ცხენოსანი მთის აღმართზე ადის და უკან ბრუნდება. აღმავალი გზის სიგრძე 6,5 კმ-ია. აღმართზე v კმ/სთ სიჩქარით ამაველი მხედარი, აღმართიდან 3-ჯერ უფრო მეტი სიჩქარით დაბრუნდა. დაწერეთ გამოსახულება, რომელიც მხედრის მიერ დახარჯულ მთელ დროს უჩვენებს.

10 ამოხსენით განტოლებები. გამოიყენეთ კვადრატული სამწევრის მამრავლებად დაშლის ხერხი.

$$1) \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^3 + x^2}{x} = -3 \quad 2) \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} + \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = x^2 - 3$$

$$3) \frac{3}{x^2 - 9} - \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{3}{2x^2 + 6x} \quad 4) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3}$$

11 ერთი მილი ბენზინის ავზს n საათში, მეორე მილი კი ამავე ავზს m საათში ავსებს, რამდენ საათში აივსება ავზი თუ ორივე მილი ერთდროულად იმუშავებს?

12 უდაბნოს მცენარეები შეგროვილ წყალს ეკონომიურად მოიხმარენ. წყალი მცენარის ზედაპირიდან ორთქლდება. მცენარის ზედაპირის ფართობის შეფარდება მცენარეში არსებული წყლის მოცულობასთან რაც უფრო მეტია, მისი უდაბნოში არსებობის ალბათობა იმდენად ნაკლებია. კაქტუსებს შორის არსებობს ასეთი სახე “ვარილ კაქტუსი” იგი დაახლოებით სფეროს ფორმისაა. სფეროს ზედაპირის ფართობი, $S = 4\pi r^2$, ხოლო მოცულობა $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ფორმულით იანგარიშება.



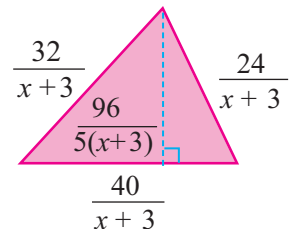
- 1) განსაზღვრეთ ვარილ კაქტუსის ზედაპირის ფართობის შეფარდება მცენარეში არსებული წყლის მოცულობასთან.
- 2) კაქტუსის უდაბნოში არსებობისათვის რომელი უფრო ხელსაყრელია $r = 12$ სმ თუ 8 სმ?

13 დაწერეთ სურათზე მოცემული წრის ფართობის შეფარდება კვადრატის ფართობთან.



14 სურათზე ნაჩვენებია მონაცემების მიხედვით ამოხსენით ქვემოთ მოცემული ამოცანები.

- 1) დაწერეთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი გამოსახულება.
- 2) დაწერეთ სამკუთხედის პერიმეტრის გამოსათვლელი გამოსახულება.
- 3) იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები და სურათზე ნაჩვენები სიმაღლე, თუ სამკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია.



ფიგურების გარდაქმნები, მობრუნება

სიბრტყეებზე ფიგურების ისეთ გარდაქმნას, როცა ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება მოძრაობა ეწოდება. ცენტრული სიმეტრია, ღერუული სიმეტრია. მობრუნება (ბრუნვა), მოცურება (პარალელური გადატანა). ეს გარდაქმნები მოძრაობის ნიმუშებია.

პრაქტიკული მეცადინეობა. მუყაოს ქაღალდზე ამოჭერით სხვადასხვა ასოები. ამ ასოებზე შესასრულეთ ნიმუშზე ნაჩვენები მოძრაობები.



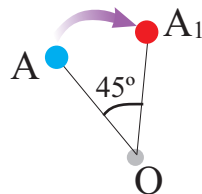
მობრუნება

დავუშვათ, რომ მოცემულია O წერტილი და α კუთხე. ისეთ მოძრაობას, როდესაც O წერტილიდან გამოსული ნებისმიერი სხივი ერთი და იმავე მიმართულებით α კუთხით მობრუნდება, ამ მოძრაობას სიბრტყეზე O წერტილის გარშემო α კუთხით მობრუნება, ხოლო O წერტილს კი მობრუნების ცენტრი ეწოდება. მობრუნება შეიძლება მოხდეს საათის ისრისა და საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ნებისმიერი O ცენტრის გარშემო მობრუნების დროს თუ A წერტილი A_1 წერტილად გარდაიქმნება, მაშინ ჰეშმარიტია შემდეგი:

1. თუ A და O წერტილები არ ემთხვევა ერთმანეთს, $AO = A_1O$

2. თუ A და O წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ A და A_1 წერტილებიც ემთხვევა.

ნიმუში 1. $\angle AOA_1 = 45^\circ$ მობრუნების კუთხეა. A წერტილი O წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 45° -ით მობრუნებულია.

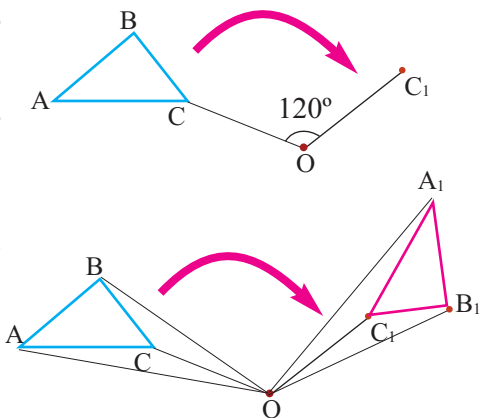


ნიმუში 2. $\triangle ABC$ O წერტილის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 120° -იანი მობრუნების მოძრაობის შედეგად მიღებული ახალი სამკუთხედის აგების ნაბიჯები გამოარკვეით და ეს ნაბიჯები რვეულში ჩაწერით გაიმეორეთ.

1. O წერტილი C წერტილთან მონაკვეთით შეაერთეთ.

2. ტრანსპორტირის დახმარებით საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით OC -თან 120° -იანი კუთხის შემქმნელი წრფე გაავლეთ და ფარგლის დახმარებით OC -ს კონგრუენტული OC_1 მონაკვეთი გამოყავით.

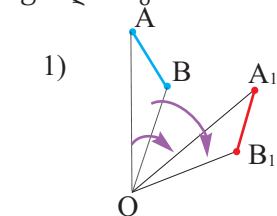
3. იგივე წესით O წერტილი A წერტილთან და B წერტილთან შეაერთეთ. მიღებული მონაკვეთების კონგრუენტული და მათთან 120° -იანი კუთხის შემქმნელი OA_1 და OB_1 მონაკვეთები დახაზეთ. C_1, A_1 და B_1 მოცემული სამკუთხედის წვეროებია. შეაერთეთ ეს წვეროები..



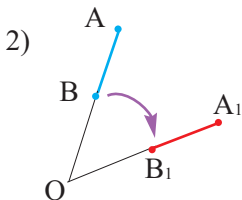
შენიშვნა. ცენტრული სიმეტრია სიბრტყის სიმეტრიის ცენტრის გარშემო 180° -ით მობრუნებაა.

ფიგურების გარდაქმნები, მობრუნება

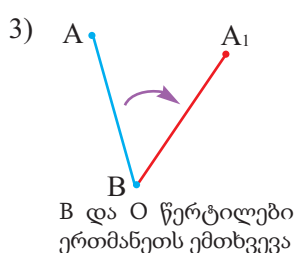
- 1) ქვემოთ მოცემულ სურათებზე A და B წერტილების O წერტილის მიმართ სხვადასხვა მდგომარეობით AB მონაკვეთის საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მობრუნებაა ასახული. თქვენც რვეულებში თითოეული ნიმუშის შესაბამისი 2 ნიმუში დახაზეთ.



A, B და O წერტილები ერთ წრფეზე არ არიან

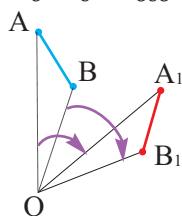


A, B და O წერტილები ერთ წრფეზეა



B და O წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა

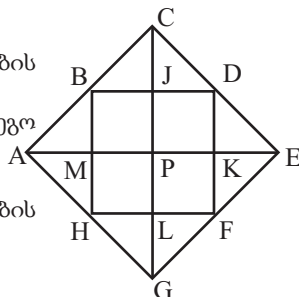
- 2) O წერტილის გარშემო მობრუნებისას A წერტილი A_1 წერტილად, B წერტილი კი B_1 წერტილად გარდაიქმნება. დაამტკიცეთ, რომ $AB \cong A_1B_1$.



დამტკიცების გეგმა: 1. მობრუნების განსაზღვრების მიხედვით განსაზღვრეთ კონგრუენტული მონაკვეთები და კუთხეები. 2. გამოიყენეთ კუთხეების შეკრების აქსიომა. 3. გამოიყენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობის ელემენტები.

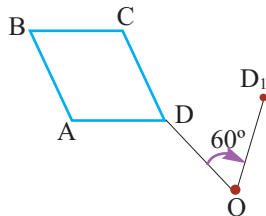
- 3) სურათი რვეულში ჩაიხაზეთ. 1) მოცემული პირობებით განსაზღვრეთ ბრუნვით მიღებული ფიგურა:

- ა) AB-ს P წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 90° -ით მობრუნებით;
 ბ) CE-ს E წერტილის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90° -ით მობრუნებით;
 გ) $\triangle KEF$ -ის P წერტილის გარშემო 180° -ით მობრუნებით;
 დ) $\triangle APG$ -ს P წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 90° -იანი მობრუნებით.



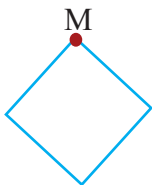
2) სურათის მიხედვით რაიმე მონაკვეთის და სამკუთხედის მობრუნების შესახებ ერთი კითხვა თქვენ მოიფიქრეთ და დაწერილი სახით თქვენი მერხის ამხანაგს მიეცით.

- 4) ახალი პარალელოგრამის დახაზვით უჩვენეთ ABCD პარალელოგრამის O წერტილის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 60° -იანი მობრუნება. სურათზე D წერტილის 60° -იანი მობრუნებაა ასახული.

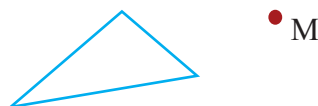


- 5) დახაზეთ ქვემოთ მოცემული ფიგურების აღნიშნული M წერტილის გარშემო მოცემული კუთხით მობრუნებით მიღებული სურათი.

- 1) საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ 100°

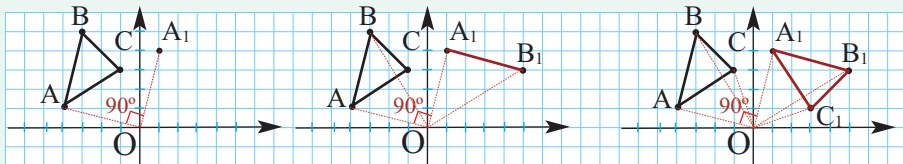


- 2) საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 75°



გამოიკვლიეთ, რეკულში ჩაიხაზეთ.

წეროები $A(-4; 1)$, $B(-3; 5)$, $C(-1; 3)$ წერტილებში მყოფი ABC სამკუთხედის კოორდინატა სათავის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 90° -ით მობრუნება ნაბიჯ-ნაბიჯ ქვემოთ მოცემულ სურათზეა ნაჩვენები.



სათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 90° -ით მობრუნებისას სამკუთხედის წეროების კოორდინატები ქვემოთ მოცემული სახითაა წარმოდგენილი:

$$\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$$

$$A(-4; 1) \rightarrow A_1(1; 4)$$

$$B(-3; 5) \rightarrow B_1(5; 3)$$

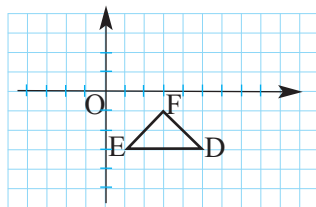
$$C(-1; 3) \rightarrow C_1(3; 1)$$

კოორდინატები $(x; y) \rightarrow (y; -x)$ -ვით იცვლება

ყურადღება! $|OA| = |OA_1|$, $|OB| = |OB_1|$, $|OC| = |OC_1|$

$|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$

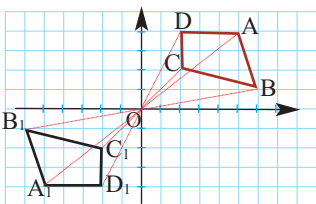
- 6) სამკუთხედის წეროებია $E(1; -3)$, $F(3; -1)$, $D(5; -3)$ დახაზეთ სამკუთხედის O წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, 90° -ით მობრუნების ამსახველი სურათი. წეროს წერტილების ცვლილება უჩვენეთ ზოგადი სახით.



- 7) სურათზე ოთხკუთხედის O კოორდინატა სათავის მიმართ 180° -ით მობრუნებაა ნაჩვენები.

1) გამოიკვლიეთ ახალი ფიგურის კოორდინატები ძირითადი ფიგურის მიმართ და მოსაზრებები განაზოგადეთ.

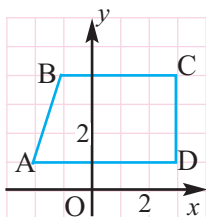
2) დაწერეთ სურათის მიხედვით შესაძლო კონგრუენტული მონაკვეთები.



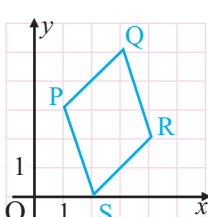
- 8) დახაზეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე რაიმე სამკუთხედის საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით კოორდინატა სათავის მიმართ 90° , 180° , 270° , 360° - ით მობრუნების მაჩვენებელი სურათები.

- 9) დაწერეთ ფიგურების კოორდინატა სათავის მიმართ მოცემული კუთხით საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მობრუნების შემდეგ მდგომარეობის მიხედვით წეროს წერტილების კოორდინატები.

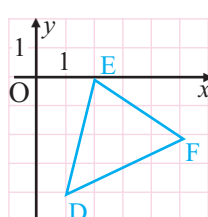
1) 90°



2) 180°



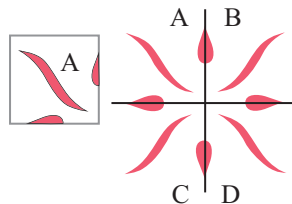
3) 360°



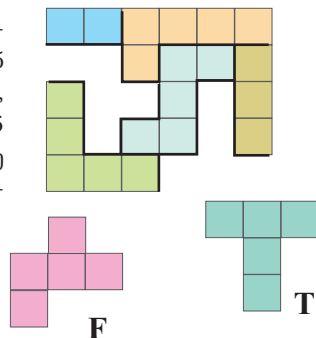
ფიგურების გარდაქმნები, მობრუნება

- 10) $\Delta A_1B_1C_1$ საკოორდინატო სისტემაში ΔABC -ს აბსცისთა ღერძის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნით, $\Delta M_1N_1K_1$ კი ΔMNK -ს კოორდინატთა სათავის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით 90° -ით მობრუნებითაა მიღებული. დახაზეთ ამ პირობის შესაბამისი სურათი.

- 11) სურათზე ნაჩვენები მოხატულობების მისაღებად ქაღალდის 4 ტოლ ნაწილად გადაიკვეცება და ერთ ნაწილზე მოხატულობების ამოჭრით 4 ნაჭერზე სიმეტრიული მოხატულობები მიიღება. თითოეული მოხატულობის ნაწილის ერთი მეორის მიმართ მდგომარეობა მოძრაობის მიხედვით განმარტეთ.



- 12) მართკუთხედის ფართობის შევსების (მოზაიკის აგების) კომპიუტერული თამაშები კვადრატებისაგან შემდგარ დომინო (ორეული), ტრიმინო (სამეული), პენტამინო (ხუთეული) ფიგურებზეა აგებული. 6×5 ზომის მოზაიკის შესავსებად F და T პენტამინონებზე რომელი მოძრაობის შესრულებაა საჭირო? ეს მოძრაოები უჩვენეთ სურათზე.

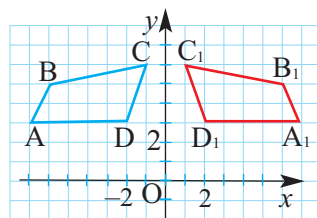


- 13) $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი ABCD-ს ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიით (ასახვით) არის მიღებული.

1) ნიმუშის მიხედვით დაწერეთ ოთხკუთხედის წვეროს წერტილების კოორდინატების ცვლილება.

$$A(-7;3) \rightarrow A_1(7;3)$$

2) ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიისათვის დაწერეთ წერტილების კოორდინატების ცვლილების ზოგადი სახე.



- 14) დახაზეთ წვეროს წერტილების კოორდინატების მოცემული ფიგურების სიმეტრიული გარდაქმნის მაჩვენებელი სურათები.

- 1) $E(-3; 2)$, $F(0; 2)$, $G(-2; 5)$; აბსცისთა ღერძის მიმართ;
- 2) $J(2; -1)$, $K(4; -2)$, $L(4; -3)$, $M(2; -3)$; ორდინატთა ღერძის მიმართ;
- 3) $P(2; -2)$, $Q(4; -2)$, $R(3; -4)$; $y = x$ წრფის მიმართ;
- 4) $A(2; 2)$, $B(-2; 2)$, $C(-1; 4)$; $y = -x$ წრფის მიმართ.

- 15) დახაზეთ წვეროს წერტილების კოორდინატების მოცემული ფიგურების კოორდინატთა სათავის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მოცემული კუთხით მობრუნების მაჩვენებელი სურათები.

- 1) $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(4; 4)$; 90°
- 2) $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(4; 4)$; 180°
- 3) $M(2; 2)$, $N(5; 2)$, $P(3; -2)$, $Q(0; -2)$; 90°
- 4) $G(-2; 1)$, $H(-3; -2)$, $J(-1; -4)$; 180°

თანაფარდობა, პროპორცია

1) შეავსეთ:

თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ მაშინ

ა) $\frac{a+2b}{b} = \frac{\square}{\square}$

ბ) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{\square}{\square}$

გ) $\frac{a+b}{c+d} = \frac{\square}{\square}$

თანაფარდობის თვისებები

თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ $ad = bc$

თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

2) გაამარტივეთ შეფარდება.

1) $\frac{3 \text{ მ}}{12 \text{ კმ}}$

2) $\frac{60 \text{ სმ}}{1 \text{ მ}}$

3) $\frac{350 \text{ გრ}}{1 \text{ კგ}}$

4) $\frac{2 \text{ კმ}}{3000 \text{ მ}}$

5) $\frac{6 \text{ კმ}}{10 \text{ მ}}$

6) $\frac{2 \text{ კმ}}{20 \text{ გრ}}$

7) $\frac{400 \text{ მ}}{0,5 \text{ კმ}}$

8) $\frac{20 \text{ კმ}}{4 \text{ გრ}}$

3) გაამარტივეთ შეფარდებები.

1) $\frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 - 49}$

2) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 36}$

3) $\frac{x^2 - 3x - 4}{(x - 4)^2}$

4) $\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 9x + 18}$

4) ამოხსენით განტოლება.

1) $\frac{2}{b+2} = \frac{4}{b}$

2) $\frac{5y+7}{4} = \frac{5y}{3}$

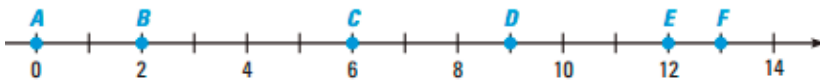
3) $\frac{4}{2c+6} = \frac{10}{7c-2}$

4) $\frac{2a-4}{a^2+2a} = \frac{3}{a}$

5) რომელია ჭეშმარიტი?

1) თუ $\frac{c}{8} = \frac{d}{12}$, მაშინ $\frac{c}{d} = \frac{2}{3}$; 2) თუ $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$, მაშინ $\frac{b+4}{4} = \frac{c+4}{5}$.

6) იპოვეთ რიცხვით ღერძზე აღნიშნულ წერტილებს შორის მანძილების შეფარდება.



1) $\frac{AB}{CD}$

2) $\frac{BD}{CF}$

3) $\frac{BF}{AD}$

4) $\frac{CF}{AB}$

5) $\frac{FD}{EC}$

7) 1) ნეზრინმა კომპიუტერულ თამაშში 12 ცდიდან 3 მიზანში მოარტყა. თქვენი აზრით ნეზრინი 100 ცდიდან რამდენს მოარტყამს მიზანში?

2) საავტომობილო ქარხანაში ცდაგამოვლილი 400 ავტომობილიდან 4-ში წუნი იქნა აღმოჩენილი. მოახდინეთ პროგნოზირება, შემოწმებისას 2000 ავტომობილიდან რამდენს შეიძლება აღმოაჩნდეს წუნი?

- 8» გადაცემის შეფარდება წამყვანი დისკოს კბილანებსა და გამყოლი დისკოს კბილანებს შორის შეფარდებით იზომება. იპოვეთ გამყოლი დისკოს კბილანების რაოდენობა თუ გადაცემის შეფარდება არის 5 : 2 და წამყვანი დისკოს კბილანების რაოდენობა არის 20.



გამყოლი დისკო

- 9» სამკუთხედის კუთხეების გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2 : 3 : 4. რამდენი გრადუსია სხვაობა უდიდეს და უმცირეს კუთხეს შორის?

- 10» სირაქლემა 60 წუთში 55 კმ-ს გარბის, რამდენ წუთში გაირბენს სირაქლემა 22 კმ-ს?

- 11» ამოხსენით ამოცანები მთელი-ნაწილი მოდელის აგებით.

1) ალპინისტთა ჯგუფში გოგონების რაოდენობა ბიჭების რაოდენობის $\frac{3}{8}$ -ის ტოლია. იპოვეთ გოგონების რაოდენობა, თუ ბიჭების რაოდენობა 20-ით მეტია გოგონებზე.

2) დილარეს ფულის $\frac{2}{3}$ ნაწილი ჯავიდის ფულის $\frac{1}{2}$ -ის ტოლია. იპოვეთ დილარეს ფულის შეფარდება ჯავიდის ფულთან.

3) ლალეს წიგნების რაოდენობის შეფარდება მურადის წიგნების რაოდენობასთან არის 1 : 2. ლალემ კიდევ 12 წიგნი შეიძინა შეფარდება გახდა 2 : 1.

ა) რამდენი წიგნი აქვს მურადს?

ბ) თუ მურადი ეხლა კიდევ 4 წიგნს შეიძენს, როგორ შეიცვლება ეს შეფარდება?

- 12» სამირი გაყიდული ყოველი წიგნიდან 40 კაპიკ ფულს იგებს, ამასთან გაყიდული ყოველი 50 წიგნიდან მოგებას 4 მანეთი ემატება. რამდენ მანეთს მოიგებს სამირი, თუ იგი 775 წიგნს გაყიდის?

- 13» მაჰირმა 5 სმ × 7 სმ ზომების არგანის ხის სურათის გაზრდით პლაკატი უნდა გაამზადოს. მას სურს პლაკატის სიგანე 0.75 მ იყოს. რამდენი მეტრი უნდა იყოს პლაკატის სიგრძე?



7 სმ

- 14» “თქვენზე წერილია” ფლემშობში ახალგაზრდებმა აზერბაიჯანის ტერიტორიული მთლიანობისათვის ბრძოლებში გამოჩენილი არნახული მამაცობისათვის ეროვნული გმირის წოდება მინიჭებული მუბარიზ იბრაჰიმოვის მშობლებისთვის მიწერილი ბოლო წერილი მოქალაქეებს დაურიგეს. ფლემშობის მონაწილეებმა გმირი ჯარისკაცის გამოსამშვიდობებელი წერილი წაიკითხეს, “გმირთა ხეივანში” მის საფლავს ეწვივნენ. ფლემშობის მონაწილეთა $\frac{2}{3}$ ნაწილი 16-25 წლის ახალგაზრდები იყვნენ. კიდევ 55 ახალგაზრდის ამ ჯგუფთან შეერთების შემდეგ, ახალგაზრდების რაოდენობის შეფარდება მთელ მონაწილეთა რაოდენობასთან გახდა 5 : 7. რამდენი ახალგაზრდა იყო ფლემშობის მონაწილეთა შორის?

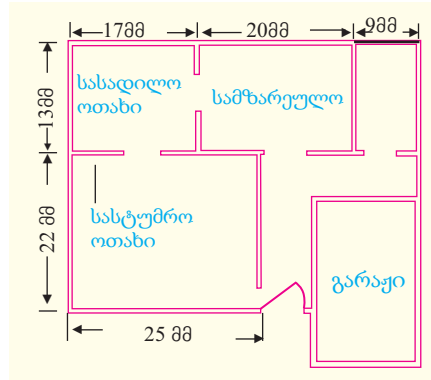
მასშტაბი

- 1 ბინის გეგმა 1 სმ : 3 მ მასშტაბით იყო დახაზული. იპოვეთ ყველა ოთახის ნამდვილი ზომები. ნიშნულისათვის სალონის ზომები იქნა ნაპოვნი.

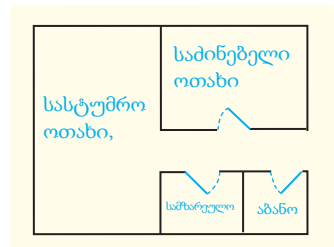
სურათზე სალონის სიგრძე 2,5 სმ-ია, სიგანე 2,2 სმ. მისი ნამდვილი ზომები (მეტრობით) შეძლება:

$$\frac{1 \text{ სმ}}{3 \text{ მ}} = \frac{2,5 \text{ სმ}}{x \text{ მ}}; x = 3 \cdot 2,5 = 7,5$$

$$\frac{1 \text{ სმ}}{3 \text{ მ}} = \frac{2,2 \text{ სმ}}{y \text{ მ}}; y = 3 \cdot 2,2 = 6,6$$



- 2 სახაზავით აწარმოეთ გავომეხები. განსაზღვრეთ ოთახების ზომები სურათზე და მასშტაბის მიხედვით იპოვეთ ნამდვილი ზომები.



მასშტაბი: 1 სმ → 5 მ

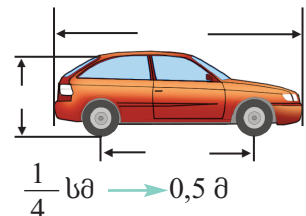
- 3 ქვემოთ მოცემული ფართობები მასშტაბის შემოტანით დახაზეთ. განმეორებითი გაზომვებითა და გამოთვლებით შეამოწმეთ მასშტაბის სწორედ გამოყენება.

- 1) 1,6 მ × 3,2 მ ზომის ბილიარდის მაგიდის;
- 2) 28 მ × 15 მ ზომის კალათბურთის მოედნის;

- 3) 18,2 მ × 1,7 მ ბოლინგის ბილიკების;
- 4) 64 მ × 100 მ ფეხბურთის მოედნის.

- 4 გაზეთის დიზაინერმა 6 სმ × 9 სმ ფოტოსურათის დასაბეჭდად სიგანე 4 სმ-მდე რომ შეამციროს, რამდენი სანტიმეტრი უნდა იყოს სიგრძე?

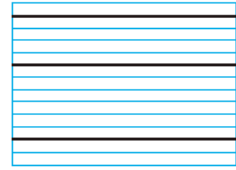
- 5 იპოვეთ ავტომობილის რეალური ზომები მასშტაბისა და სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით.



- 6 1) სურათზე ყოველი 2,5 სმ მანძილი 15 კმ-ს შეესაბამება. რუკაზე ორ ქალაქს შორის მანძილი 23,2 სმ-ია. რამდენი კილომეტრი მანძილია სინამდვილეში ამ ორ ქალაქს შორის?
- 2) ლეილა ძეგლის შემცირებულ მოდელს ხატავს. სურათზე მოდელის სიმაღლე 18,4 სმ-ია. რამდენი მეტრია ძეგლის ნამდვილი სიმაღლე, თუ ლეილამ სურათი 1 : 85 მასშტაბით შეასრულა?

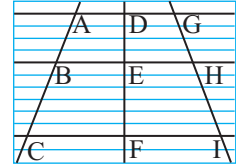
პრაქტიკული მეცადინეობა. პროპორციული მონაკვეთები

1. რეულში გაავლეთ ერთმანეთის პარალელური 3 წრფე.
2. გაავლეთ თითოეულის 3 მკვეთი.
3. გაზომეთ AB, BC, AC, DE, EF, DF, GH, HI და GI მონაკვეთები.
4. ჩაიწერეთ და გამოთვალეთ ქვემოთ მოცემულ შეფარდებათა ჯგუფი.



$$1) \frac{AB}{BC}, \frac{DE}{EF}, \frac{GH}{HI} \quad 2) \frac{AB}{AC}, \frac{DE}{DF}, \frac{GH}{GI}$$

$$3) \frac{BC}{AC}, \frac{EF}{DF}, \frac{HI}{GI}$$



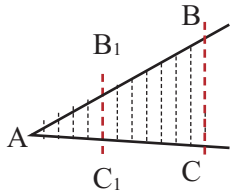
5. შედეგების მიხედვით პარალელური წრფეებიდან ჩამოკვეთილი მონაკვეთების პროპორციულობაზე შეიძლება ვისაუბროთ?

პროპორციული მონაკვეთები

თუ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, AB, CD, A₁B₁, C₁D₁ მონაკვეთებისათვის ამბობენ, რომ AB და CD მონაკვეთები A₁B₁ და C₁D₁ მონაკვეთების პროპორციულია.

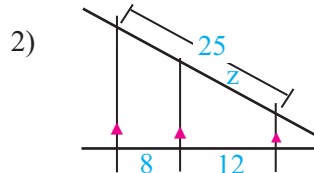
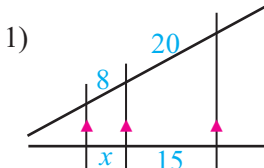
თეორემა. კუთხის გვერდების გადამკვეთი პარალელური წრფეები კუთხის გვერდებიდან პროპორციულ მონაკვეთებს ჩამოკვეთს.

დამტკიცება. წარმოვიდგინოთ, რომ პარალელური წრფეები A კუთხის გვერდებს შესაბამისად B და C, B₁ და C₁ წერტილებში კვეთს. სიმარტივისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ δ ისეთი სიგრძის მონაკვეთია, რომ AC მონაკვეთში და AC₁ მონაკვეთში მთელ რიცხვჯერ თავსდება AC = nδ, AC₁ = mδ (n > m) AC მონაკვეთი n ტოლ ნაწილად დავყოთ (δ სიგრძის). ამ შემთხვევაში C₁ წერტილი ერთ-ერთი დანაყოფის წერტილი იქნება. დავოფის წერტილებიდან გავავლოთ BC-ს პარალელური წრფეები. თაღისის თეორემის თანახმად ეს წრფეები AB მონაკვეთს რაიმე δ₁ სიგრძის ტოლ მონაკვეთებად დავოფს. მივიღებთ, რომ AB = nδ₁, AB₁ = mδ₁.

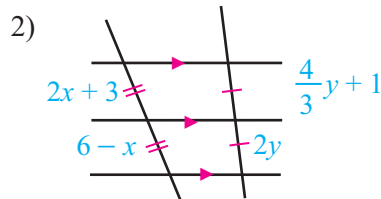
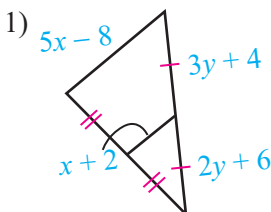


აქედან $\frac{AC}{AC_1} = \frac{n\delta}{m\delta} = \frac{n}{m}$ და $\frac{AB}{AB_1} = \frac{n\delta_1}{m\delta_1} = \frac{n}{m}$. მაშასადამე $\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1}$

1) მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობი.

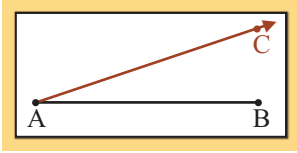


2) მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x და y.

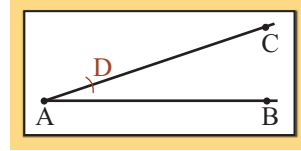


3 ა) მონაკვეთის კონგრუენტულ ნაწილებად დაყოფის ნაბიჯები რვეულში შეასრულეთ.

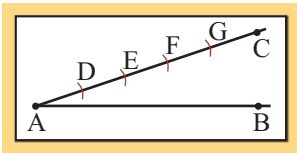
1. გაავლეთ AB მონაკვეთი. აღნიშნეთ მასზე არამდებარე C წერტილი და A წერტილთან შეაერთეთ.



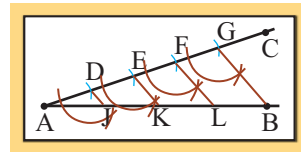
2. ფარგალი A წერტილში მოათავსეთ და AC-ს მკვეთი რკალი გაავლეთ. გადაკვეთის წერტილი D-თი აღნიშნეთ.



3. ფარგლის ზომების შეუცვლელად AC-ს მკვეთი ახალი რკალები დავხაზოთ, გადაკვეთის წერტილები E, F, G, H ასოებით აღვნიშნოთ.



4. გაავლოთ GB მონაკვეთი. D, E, F-ზე გამავალი GB-ს პარალელური წრფეები ავაგოთ. რის საფუძველზე ვამბობთ AJ, JK, KL, LB კონგრუენტულებია?



ბ) გაავლეთ ნებისმიერი AB მონაკვეთი და იგი 1 : 2 : 3 შეფარდებით დაყავით.

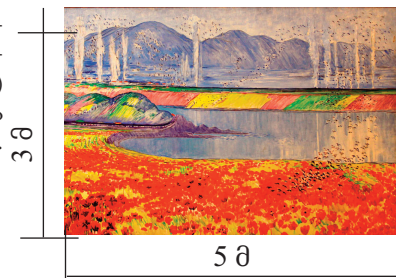
4 1) სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 8 : 7 : 5. მისი პერიმეტრი 40 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

2) სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც

$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$ მისი პერიმეტრი 9,4 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

3) თუ სამკუთხედის კუთხეების შეფარდება იქნება 2 : 3 : 7 რომელი სახის სამკუთხედს შეიძლება მივაკუთვნოთ იგი?

5 მაღაზიაში სეთთარ ბეჰლულზადეს ნაწარმოების “მიწის სურვილი” (აზერბაიჯანის ეროვნული ხელოვნების მუზეუმში ინახება) სურათზე ნაჩვენები ზომის რეპროდუქცია იყიდება. მისი ორიგინალის სიგანე 1,5 მ-ია. რამდენი მეტრია მისი სიგრძე?



6 გვერდების სიგრძეების ოქროს თანაფარდობიანი მართკუთხედი სურათზე ნაჩვენებოვით კვადრატად და პატარა მართკუთხედად დაიყო.

1) იპოვეთ პატარა მართკუთხედის უცნობი გვერდი.

2) დაამტკიცეთ, რომ პატარა მართკუთხედის გვერდების სიგრძეებიც ოქროს თანაფარდობაში არიან.

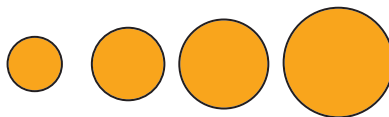
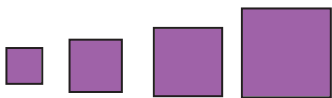
$$2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 2 + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} 2$$

$1+\sqrt{5} \qquad 2 \qquad x$

მსგავსი ოთხკუთხედები, მსგავსი სამკუთხედები

მსგავსი ოთხკუთხედები, მსგავსი სამკუთხედები

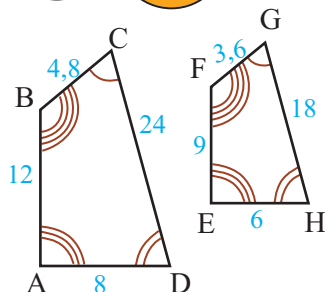
ფორმით იგივე, ზომებით კი სხვადასხვა ფიგურები მსგავსი ფიგურებია, მაგალითად ყველა კვადრატი ერთმანეთის მსგავსია, ასევე სხვადასხვა რადიუსიანი წრეები ერთმანეთის მსგავსია.



მრავალკუთხედები, რომლებსაც შესაბამისი კუთხეები კონგრუენტული, შესაბამისი გვერდები პროპორციული აქვთ მსგავსი მრავალკუთხედებია. მაგალითად სურათზე ABCD და EFGH ოთხკუთხედები მსგავსი ოთხკუთხედებია, რადგან

$$\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G, \angle D \cong \angle H,$$

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{4}{3}$$

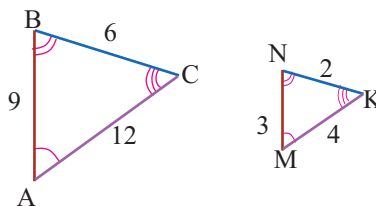


სამკუთხედებს, რომლებსაც შესაბამისი კუთხეები კონგრუენტული, შესაბამისი გვერდები პროპორციული აქვთ მსგავსი სამკუთხედები ეწოდება. აქ შესაბამისი გვერდებში იგულისხმება კონგრუენტული კუთხეების მოპირდაპირე გვერდები.

სურათზე მოცემულ $\triangle ABC$ და $\triangle MNK$ -ში:

კონგრუენტული კუთხეები შესაბამისი გვერდები.

$\angle A \cong \angle M$	BC და NK
$\angle B \cong \angle N$	AC და MK
$\angle C \cong \angle K$	AB და MN

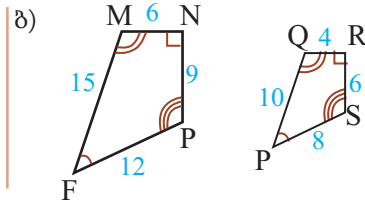
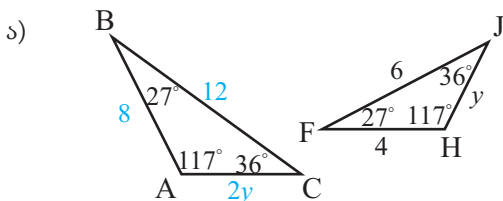


$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK} = 3, \text{ ამიტომ } \triangle ABC \text{ და } \triangle MNK \text{ სამკუთხედები მსგავსია.}$$

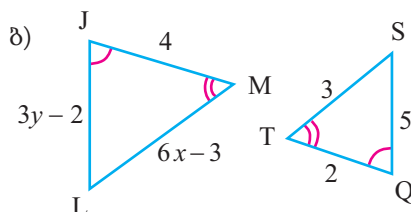
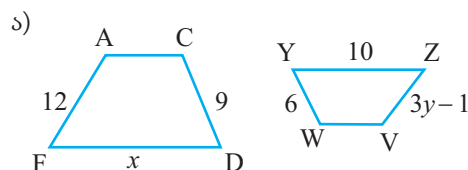
ფიგურების მსგავსება : “~” ნიშნით იწერება: $\triangle ABC \sim \triangle MNK$.

შესაბამისი გვერდების შეფარდებას მსგავსების კოეფიციენტი ეწოდება და k ასოთი აღინიშნება. სურათზე მოცემული სამკუთხედების მსგავსების კოეფიციენტი 3-ის ტოლია.

1 სურათზე მოცემული ა) სამკუთხედების; ბ) ოთხკუთხედების მსგავსება შესაბამისი პირობების ჩაწერით დაასაბუთეთ.



2 სურათზე მოცემული ა) ტრაპეციების; ბ) სამკუთხედების მსგავსების მიხედვით იპოვეთ ცვლადები.



მსგავსი ოთხკუთხედები, მსგავსი სამკუთხედები

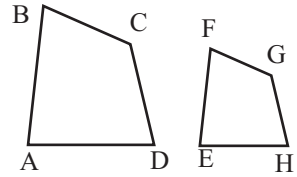
მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრების შესახებ

თეორემა. ორი მსგავსი მრავალკუთხედის პერიმეტრის შეფარდება შესაბამისი გვერდების სიგრძეების შეფარდების (ან მსგავსების კოეფიციენტის) ტოლია.

თუ $ABCD \sim EFHG$ მაშინ,

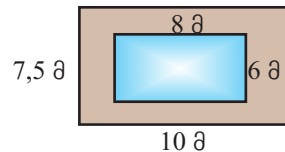
$$\frac{AB+BC+CD+DA}{EF+FG+GH+HE} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$$

მსგავსების კოეფიციენტი ჩათვალეთ k -ად და დაწერეთ მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრების შეფარდების შესახებ თეორემის დამტკიცება. ამისათვის შესაბამისი გვერდების შეფარდებით, $AB = k \cdot EF$ -ის მსგავსი ტოლობები გამოიყენეთ.



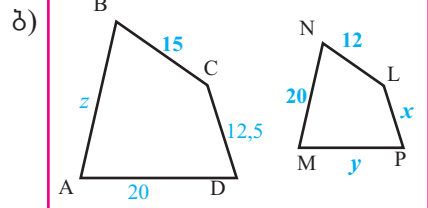
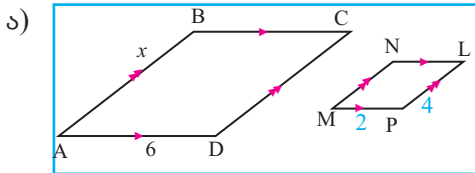
3 სურათზე აუზისა და მის გარშემო ქვაფენილის მართკუთხა ფორმის ფართობის გეგმა მოცემულია. გეგმაზე ნაჩვენებია მართკუთხედების მსგავსების პირობის მიხედვით იპოვეთ:

- 1) მსგავსების კოეფიციენტი;
- 2) პერიმეტრების შეფარდება.



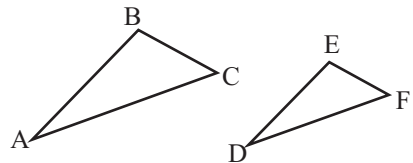
4 ვინაიდან $ABCD \sim MNLP$ იპოვეთ შემდეგი:

- 1) $ABCD$ -ს $MNLP$ -ის მიმართ მსგავსების კოეფიციენტი;
- 2) $MNLP$ -ს $ABCD$ -ს მიმართ მსგავსების კოეფიციენტი;
- 3) x , y , z ცვლადები;
- 4) პერიმეტრების შეფარდება.



5 მოცემულია: $ABC \sim DEF$, $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

დაამტკიცეთ: $\frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle DEF)} = \frac{m}{n}$



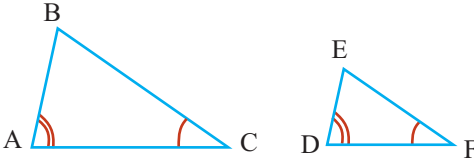
- 6** 1) ორი მსგავსი მართკუთხედის მსგავსების კოეფიციენტი $\frac{3}{2}$ -ია. დიდი მართკუთხედის პერიმეტრი 90 სმ-ია. რას უდრის პატარა მართკუთხედის პერიმეტრი?
- 2) ორი მსგავსი სამკუთხედის მსგავსების კოეფიციენტი $\frac{4}{5}$ -ია. პატარა სამკუთხედის პერიმეტრი 0.64მ-ია. იპოვეთ დიდი სამკუთხედის პერიმეტრი.

სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები

კუთხე-კუთხე (კპ) ნიშანი

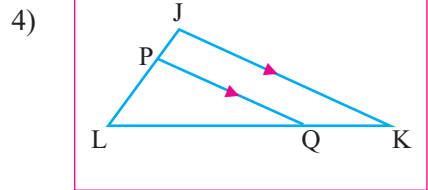
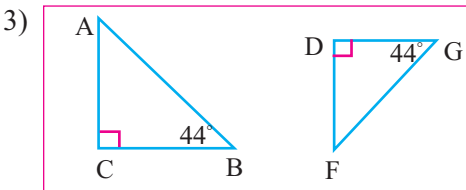
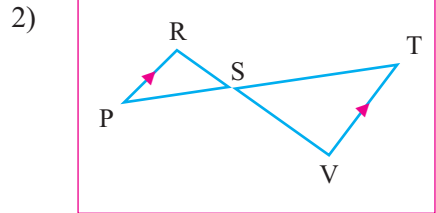
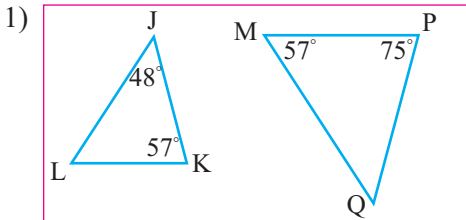
თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის კონგრუენტულია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

ეს მსგავსების ნიშანი მოკლედ ასე იწერება: კპ



თუ $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$,
მაშინ
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

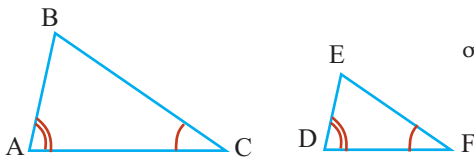
1) რომელი კუთხეებია კონგრუენტული? დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება.



ბპპ ნიშანი

თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი მეორე სამკუთხედის სამი გვერდის პროპორციულია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

მსგავსების ეს ნიშანი მოკლედ ასე იწერება: ბპპ

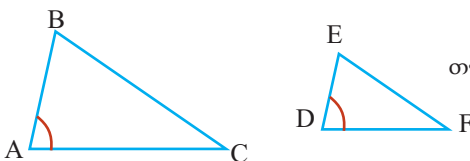


თუ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, მაშინ
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

ბპპ ნიშანი

თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის პროპორციულია და ამ გვერდებს შორის კუთხეები კონგრუენტულია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.

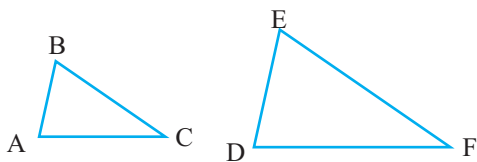
მსგავსების ეს ნიშანი მოკლედ ასე იწერება: ბპპ



თუ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ და $\angle A \cong \angle D$,
მაშინ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

- 2» გამოიკვლიეთ ზგზ ნიშნის ქვემოთ მოცემული დამტკიცება. რვეულებში დამოუკიდებლად შეასრულეთ.

მოცემულია: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$



დაამტკიცეთ: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

დამტკიცება: $\triangle DEF$ -ის DE გვერდზე M

წერტილი ისე ავიღოთ, რომ

$ME \cong AB$ მივიღოთ.

M წერტილიდან DF გვერდის პარალელური

MN მონაკვეთი გაავლოთ.

$\triangle DEF$ და $\triangle MEN$ -ში $\angle E$ საერთო კუთხეა,

$MN \parallel DF$ და DE მკვეთით შექმნილი

შესაბამისი კუთხის გამო $\angle EMN \cong \angle D$. ამ ნიშნის თანახმად $\triangle DEF \sim \triangle MEN$. ამ სამკუთხედების მსგავსების გამო:

$$\frac{ME}{DE} = \frac{EN}{EF} = \frac{MN}{DF}$$

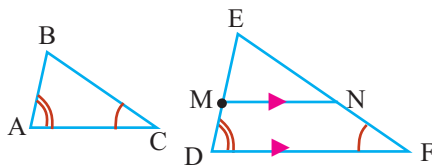
$ME \cong AB$, ამის გათვალისწინებით $\frac{AB}{DE} = \frac{EN}{EF} = \frac{MN}{DF}$ შეგვიძლია დავწეროთ.

სხვა მხრივ, ვინაიდან $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

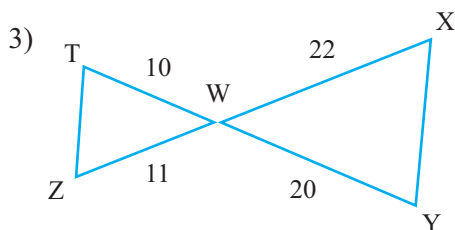
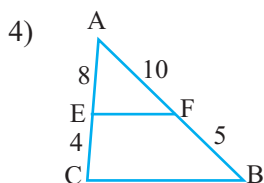
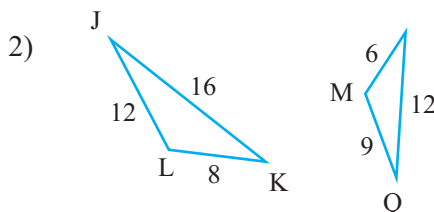
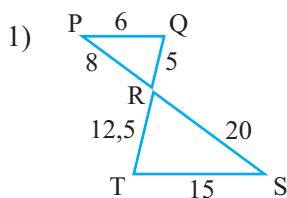
$$\frac{BC}{EF} = \frac{EN}{EF}, \quad \frac{AC}{DF} = \frac{MN}{DF} \quad . \text{ ეს კი ნიშნავს } EN = BC, MN = AC.$$

აქედან სამკუთხედების კონგრუენტულობის ზგზ ნიშნის თანახმად $\triangle ABC \cong \triangle MEN$.

ამრიგად, $\triangle MEN \sim \triangle DEF$ და $\triangle ABC \cong \triangle MEN$ ამიტომ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

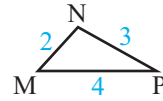
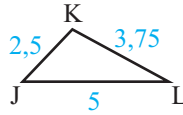
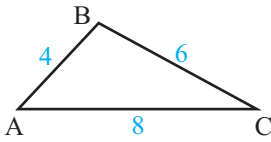


- 3» სამკუთხედების მსგავსება რომელი ნიშნის საფუძველზე შეიძლება განისაზღვროს? დაწერეთ შესაბამისი კუთხეების კონგრუენტულობა და შესაბამისი გვერდების შეფარდებების ტოლობა.



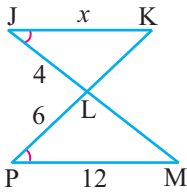
სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები

4) რომელი სამკუთხედია $\triangle ABC$ -ს მსგავსი? მოსაზრებები დაასაბუთეთ.

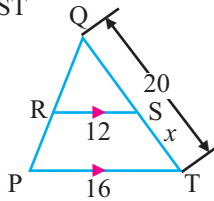


5) მონაცემების მიხედვით დაამტკიცეთ სამკუთხედების მსგავსება და იპოვეთ მოთხოვნილი ზომები.

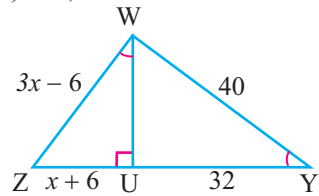
1) JK



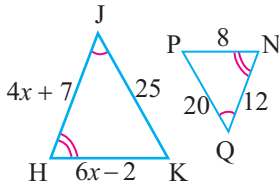
2) ST



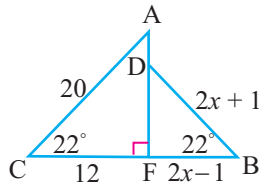
3) WZ, UZ



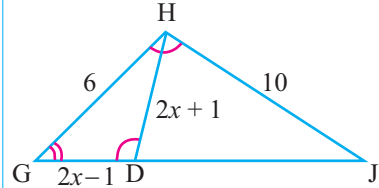
4) HJ, HK



5) DB, CB



6) GD, DH

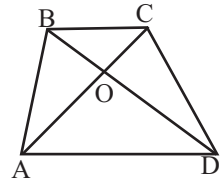


6) სურათის მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

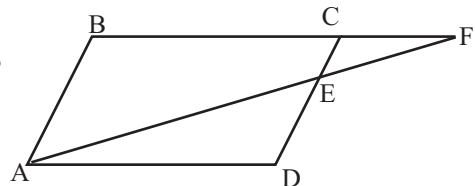
1) ABCD ტრაპეციის დიაგონალები რომელ მსგავს სამკუთხედებად ყოფს მას?

2) დაწერეთ მსგავს სამკუთხედებში შესაბამისი კუთხეების ტოლობა და შესაბამისი გვერდების შეფარდებების ტოლობის პირობები.

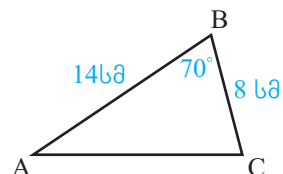
იპოვეთ BC თუ $BO = 8$ სმ, $OD = 12$ სმ, $AD = 15$ სმ.



7) მოცემულია: ABCD პარალელოგრამი. $AB = 6$ სმ, $AD = 9$ სმ, $CF = 3$ სმ. იპოვეთ CE და ED სიგრძეები.



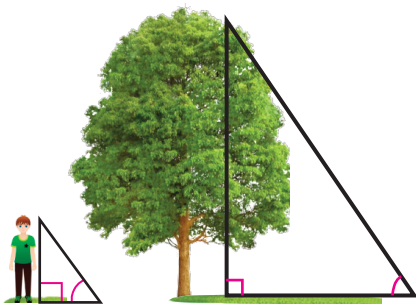
8) ააგეთ სურათზე მოცემული სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედი, შესაბამისი კუთხეების ტოლობისა და შესაბამისი გვერდების პროპორციულობის ჩაწერით. დაასაბუთეთ სამკუთხედების მსგავსება.



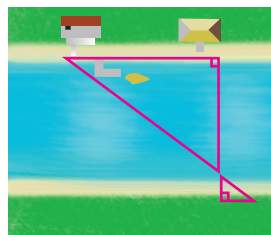
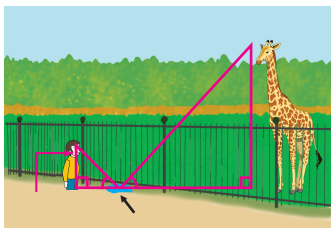
სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები

- 9» იმ ობიექტების ზომების განსაზღვრისათვის, რომლებთანაც ახლოს მისვლაც შეუძლებელია სამკუთხედების მსგავსების გამოყენება შეიძლება. დამტკიცეთ, რომ სურათზე მოცემული სამკუთხედები მსგავსია და ხის სიმაღლის მოძებნისათვის განმარტეთ რომელი გაზომვითი სამუშაოების ჩატარება არის საჭირო.

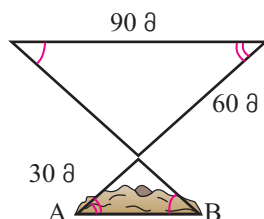
მითითება: პარალელურად დაცემული მზის სხივები დედამიწასთან კონგრუენტულ კუთხეებს ქმნის.



- 10» განმარტეთ სურათზე მოცემული სამკუთხედები რომელი ნიშნის მიხედვითაა მსგავსი?



- 11» მთის სურათზე ნაჩვენებ ნაწილში მიწისქვეშა გვირაბი უნდა გაითხაროს. იპოვეთ გვირაბის სიგრძე (AB).



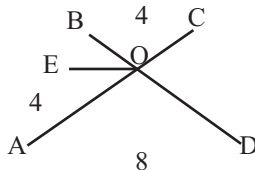
- 12» მზიან ამინდში დროშის ჩრდილი 12 მ-ია. მისგან ცოტა მოშორებით დგას ადამიანი, რომლის სიმაღლეა 1,65 მ. ჩრდილის სიგრძე კი 2,2 მ-ია. იპოვეთ დროშის სიმაღლე. ამოცანის შესაბამისად სურათზე დახატეთ მზე, დროშა და ადამიანის სურათი.

- 13» მოცემულია ABCD ტრაპეცია.

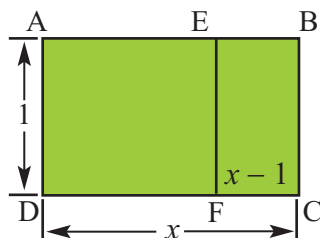
$$AD = 8, BC = 4, AE = 4$$

$$OE \parallel AD$$

იპოვეთ: BE



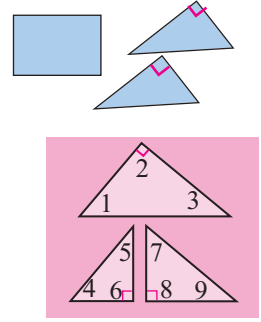
- 14» სურათზე მოცემული ABCD მართკუთხედი ოქროს თანაფარდობითი მართკუთხედი. ოქროს თანაფარდობიანი მართკუთხედი იყოფა ერთ კვადრატად და მის მსგავს პატარა მართკუთხედად. ამ მართკუთხედების გრძელი გვერდის მოკლე გვერდთან შეფარდება ოქროს შეფარდებაა. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x ცვლადის მნიშვნელობა.



მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება

გამოკვლევა.

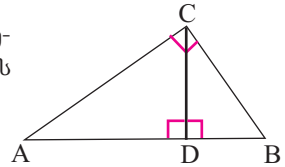
1. სურათზე მოცემული ქაღალდისაგან დიაგონალის გასწვრივ ორი კონგრუენტული მართკუთხა სამკუთხედი ამოჭერთ.
2. სამკუთხედებიდან ერთის გადაკეცვით მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლის კვალი დაამჩნიეთ.
3. სამკუთხედი ამ სიმაღლის გასწვრივ ორ სამკუთხედად გაჭერთ.
4. გაზომეთ თითოეული სამკუთხედის კუთხეები.
5. $\angle 1$ რომელი კუთხეების კონგრუენტულია?
6. $\angle 2$ რომელი კუთხეების კონგრუენტულია?
7. დაწერეთ მოსაზრებები ამ სამკუთხედების მსგავსების შესახებ.



ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე

თეორემა. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე სამკუთხედს მის მსგავს ორ სამკუთხედად ყოფს.

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$



ეს თეორემა სამკუთხედების $\pi\pi$ მსგავსების ნიშნის მიხედვით მტკიცდება. განსაზღვრეთ სამივე სამკუთხედში კონგრუენტული ორი კუთხე.

გეომეტრიული საშუალო

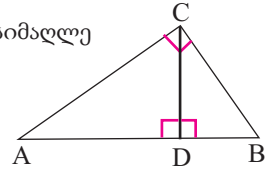
გეომეტრიული საშუალო. დადებითი a და b რიცხვების გეომეტრიული

საშუალო $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ ტოლობის დამაკმაყოფილებელ დადებით x რიცხვს ეწოდება.

მაშასადამე, $x = \sqrt{ab}$.

მართი კუთხის მხრიდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ჰიპოტენუზას ორ მონაკვეთად ყოფს (სურათზე AD და DB).

შედეგი 1. მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ჰიპოტენუზის მონაკვეთების გეომეტრიული საშუალოა.



$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \quad CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

შედეგი 2. მართკუთხა სამკუთხედში თითოეული კათეტი ჰიპოტენუზისა და ამ კათეტთან მდებარე ჰიპოტენუზის მონაკვეთის გეომეტრიული საშუალოა.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \quad AC = \sqrt{AB \cdot AD}; \quad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} \quad BC = \sqrt{AB \cdot BD}$$

1 ქვემოთ მოცემული რიცხვების წყვილებისათვის იპოვეთ გეომეტრიული საშუალო.

1) 9 და 16

2) 4 და 9

3) 12 და 48

4) 6 და 12

5) 15 და 20

მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება

2) 1) $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ მსგავსებიდან შესაბამისი პროპორციების დაწერით დაამტკიცეთ თეორემა ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის შესახებ (გვ 141).

2) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ და $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. წერილობით დაამტკიცეთ შესაბამისი გვერდების შეფარდებათა ტოლობა.

3) სურათის მიხედვით შეავსეთ პროპორციები.

1. $\frac{r}{h} = \frac{h}{\blacksquare}$

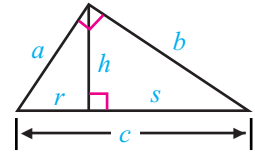
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{\blacksquare}$

3. $\frac{\blacksquare}{b} = \frac{b}{s}$

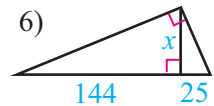
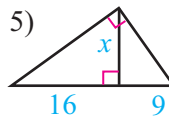
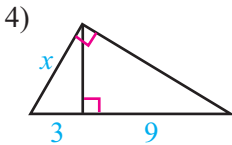
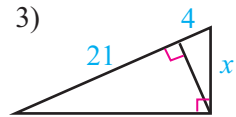
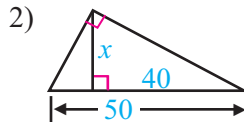
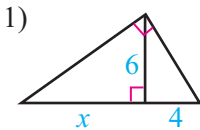
4. $\frac{r}{\blacksquare} = \frac{\blacksquare}{c}$

5. $\frac{r}{h} = \frac{\blacksquare}{s}$

6. $\frac{s}{b} = \frac{\blacksquare}{c}$

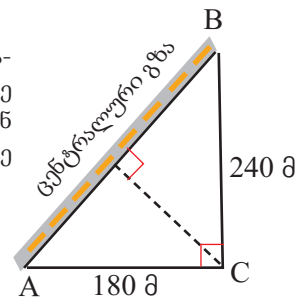


4) მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x .

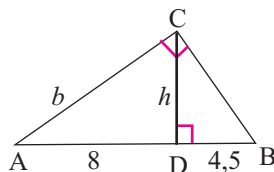


5) მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ჰიპოტენუზას 2 სმ და 8 სმ მონაკვეთებად ჰყოფს. იპოვეთ ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე.

6) A, B, და C კომპანიებისათვის ცენტრალურ გზაზე სასადილოს მშენებლობა და სასადილოდან C კომპანიამდე ახალი გზის გაყვანა იგეგმება. სასადილოს A კომპანიიდან რა მანძილზე აშენდება საჭირო, რომ C კომპანიამდე მანძილი უმოკლესი აღმოჩნდეს?



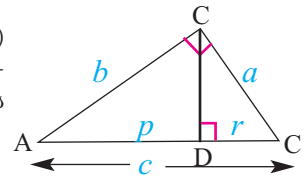
7) სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ b და h .



მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება

8

პიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის შესახებ (გვ 141) თეორემის დასკვნის გამოყენებით დაამტკიცეთ პითაგორას თეორემა. თითოეული მოსაზრების საფუძვლის ჩაწერით დამტკიცება რვეულში დაასრულეთ.



მოცემულია: ABC სამკუთხედი და მისი CD სიმაღლე.

დაამტკიცეთ: $c^2 = a^2 + b^2$

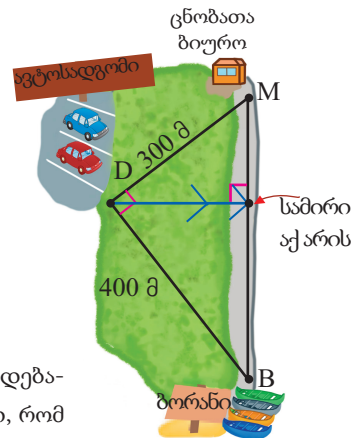
პირობა	საფუძველი
1. CD $\triangle ABC$ -ის სიმაღლეა	1. ?
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{r}$, $\frac{c}{b} = \frac{b}{p}$	2. ?
3. $cr = a^2$, $cp = b^2$	3. ?
4. $cr + cp = a^2 + b^2$	4. ?
5. $c(r + p) = a^2 + b^2$	5. ?
6. $(r + p) = c$	6. ?
$c^2 = a^2 + b^2$	7. ?

9

ქალაქ მინგეჩაურში გახსნილ ოლიმპიურ სასწავლო-სპორტულ ცენტრ “მტკვარში” ნიშნოსნობის სვ გადასვლა სახეების მიხედვით საერთაშორისო შეჯიბრებები ტარდება.

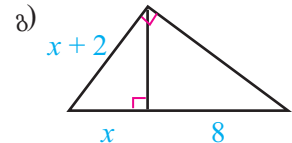
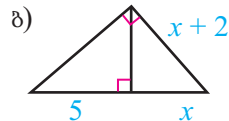
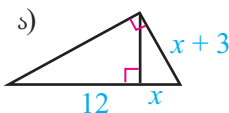
სამირი აქ მიმდინარე ნიჰოსანთა შეჯიბრში მონაწილეობის მისაღებად ემზადება. მან ავტომობილის გაჩერებიდან, სურათზე ნაჩვენები გზით იარა და საგზაო ნიშნის მიხედვით ბორანისაკენ მიმავალი გზა განსაზღვრა.

რა მანძილია სამირის ამჟამინდელი ადგილმდებარეობიდან ცნობათა ბიურომდე? გაითვალისწინეთ, რომ ავტოსადგომიდან ცნობათა ბიურომდე 300 მ-იანი გზა და კანოეს ბორანამდე 400 მ-იანი გზა მართ კუთხეს ქმნიან.



10

მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x .



სამკუთხედების მსგავსების გამოყენება

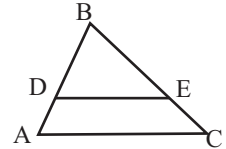
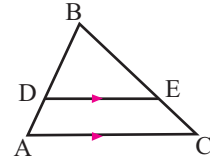
პროპორციული მონაკვეთები

თეორემა. თუ სამკუთხედის ერთი გვერდის პარალელური წრფე დანარჩენ ორ გვერდს კვეთს, მაშინ ეს წრფე სამკუთხედის გვერდებს პროპორციულ მონაკვეთებად ყოფს.

თუ $DE \parallel AC$, მაშინ $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$

შებრუნებული თეორემა. თუ წრფე სამკუთხედის ორ გვერდს პროპორციულ მონაკვეთებად ყოფს, მაშინ ეს წრფე მესამე გვერდის პარალელურია.

თუ $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$, მაშინ $DE \parallel AC$



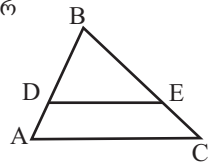
1) ქვემოთ მოცემული გეგმის მიხედვით თეორემის დამტკიცება ჩაიწერეთ რვეულში ტექსტის სახით.

1. $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ დამტკიცეთ Δ ნიშნის მიხედვით.

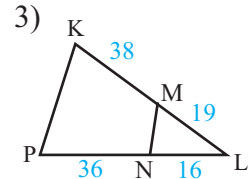
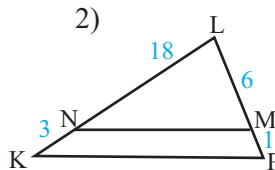
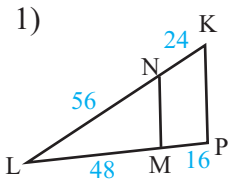
2. დაწერეთ შესაბამისი პროპორციები, გამოიყენეთ მონაკვეთების შეკრების აქსიომა..

2) $\triangle ABC$ -ში $AB = 15$, $BD = 10$ ერთეულს. BE -ს სიგრძე EC -ზე 2-ჯერ მეტია.

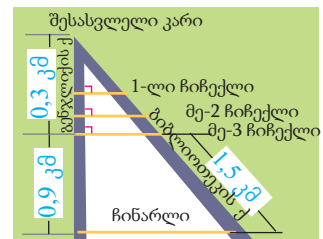
$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ ჩვენებით დამტკიცეთ, რომ $DE \parallel AC$



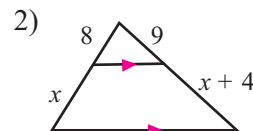
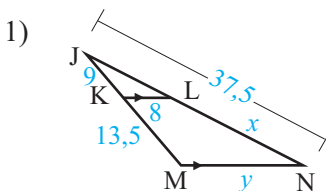
3) რომელი სამკუთხედის მიხედვით შეიძლება ითქვას, რომ $MN \parallel PK$?



4) სურათზე უნივერსიტეტის ტერიტორიის ერთი ნაწილის გეგმა მოცემულია. 1-ლი, მე-2 და მე-3 ჩიჩქელის ქუჩების ერთმანეთის პარალელურობა და ამასთან ჩინერლის ქუჩის პარალელურობაც არიან. ჩინერლის ქუჩიდან გენჯლიქის ქუჩის გაყოლებით შესასვლელ კარამდე მანძილი 1,2 კმ-ია. რამდენი კილომეტრი იქნება მანძილი ჩინარლის ქუჩიდან ბიბლიოთეკის ქუჩაზე გავლით?



5) მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობი.

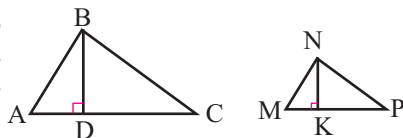


სამკუთხედების მსგავსების გამოყენება

მსგავსი სამკუთხედები, მედიანები და ბისექტრისები

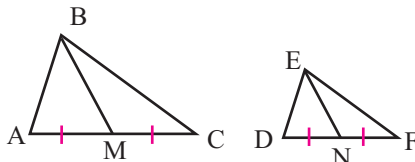
თეორემა 1. თუ ორი სამკუთხედი მსგავსია, მაშინ ამ სამკუთხედების შესაბამისი სიმაღლეების შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია.

$$\frac{BD}{NK} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$



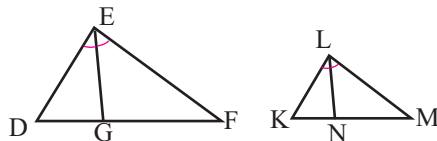
თეორემა 2. თუ ორი სამკუთხედი მსგავსია, ამ სამკუთხედების შესაბამისი მედიანების შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია.

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$



თეორემა 3. თუ ორი სამკუთხედი მსგავსია, ამ სამკუთხედების შესაბამისი ბისექტრისების შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია.

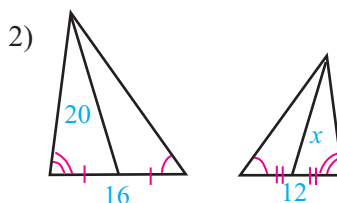
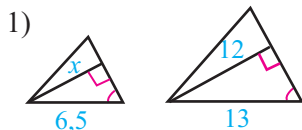
$$\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$$



6» თეორემა 3-ის დამტკიცება დაასრულეთ. დაწერეთ თეორემა 1-ისა და თეორემა 2-ის დამტკიცება.

პირობა	საფუძველი
1. $\angle D \cong \angle K$	1. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
2. $\angle DEG \cong \angle GEF$ $\angle KLN \cong \angle NLM$	2. ბისექტრისის თვისება
3. $\angle DEF \cong ?$	3. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
4. $\angle DEG \cong \angle KLN$	4. ტოლობის თვისება
5. $\triangle DEG \sim \triangle KLN$	5. კვ ნიშანი
6. $\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL}$	6. $\triangle DEG \sim \triangle KLN$
7. $\frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$	7. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
8. $\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$	8. ____

7» სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x .

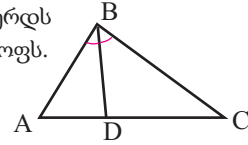


სამკუთხედების მსგავსების გამოყენება

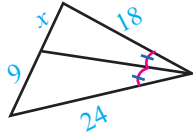
სამკუთხედის ბისექტრის თვისება

თეორემა. სამკუთხედის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს დანარჩენი ორი გვერდის პროპორციულ ნაწილებად ყოფს.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

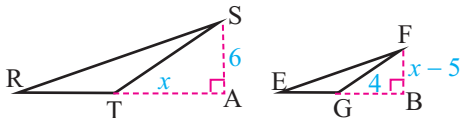


- 8» სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x .

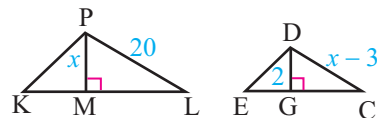


- 9» სამკუთხედის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს 4 სმ და 6 სმ სიგრძის ნაწილებად ყოფს. იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძე თუ სამკუთხედის პერიმეტრი 50 სმ-ია.

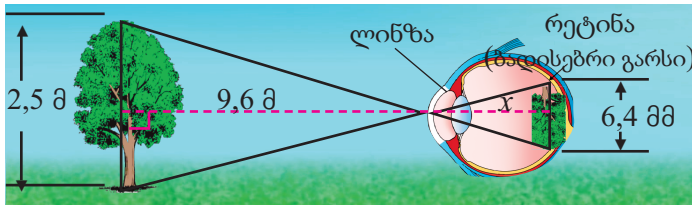
- 10» მოცემულია: $\Delta RST \sim \Delta EFG$
SA და FB ამ სამკუთხედების სიმაღლეებია.
იპოვეთ: FB



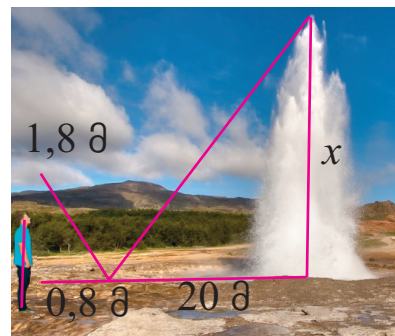
- 11» მოცემულია: $\Delta KPL \sim \Delta EDC$
PM და DG ამ სამკუთხედების სიმაღლეებია.
იპოვეთ: PM და DC.



- 12» თვალის ლინზის საშუალებით ობიექტიდან მოსული სინათლის სხივების მიღება და წარმოსახვის შემცირებით რეტინაზე (თვალის ბადისებრ გარსზე) გადაცემით ხდება დანახვა. ამ დროს სურათზე ნაჩვენებების მსგავსი სამკუთხედები იქმნება. სურათის მიხედვით იპოვეთ მანძილი ლინზასა და რეტინას შორის.



- 13» მიწისქვეშა თერმული წყლები სითხისა და ორთქლის სახით ვულკანივით გარეთ ამოიფრქვევა. ამ ამოფრქვევებს გეიზერები ეწოდება. ჩრდილოეთის ცივი ქვეყნის ისლანდიის დედაქალაქ რეიკიავიკში არსებული ორთქლიანი გეიზერი ყოველთვის იქცევს ტურისტების ყურადღებას. გეიზერში ყოველ 10 წუთში წყალი 3-ჯერ 40-60 მეტრის სიმაღლეზე იფრქვევა. ტურისტმა გეიზერიდან განსაზღვრულ მანძილზე დადგმულ სარკით გეიზერის წვეროდან დაცემული სინათლის სხივის არეკვლით ადამიანის თვალში მოხვედრით ისარგებლა, მსგავსი სამკუთხედები ააგო და გეიზერის იმ მომენტის სიმაღლე გამოთვალა. მისი შედეგწილი სურათის მიხედვით თქვენც გამოთვალეთ გეიზერის სიმაღლე.



სამკუთხედების მსგავსების გამოყენება

14 ელდარმა დროშის დაკიდების სიმაღლის მოძებნის მიზნით დროშის ზომიდან 6მ-ის მოშორებით მიწაზე სარკე მოათავსა. ელდარი თვითონ 0,9 მეტრის მოშორებით დადგა. ელდარის თვალიდან სარკემდე მანძილი 1,5 მ-ია. დროშის ზომის სიმაღლის პოვნისათვის ელდარის მოფიქრებული ხერხი განმარტეთ და ეს სიმაღლე თქვენც იპოვეთ.

15 მონაცემების მიხედვით იპოვეთ სამკუთხედების პერიმეტრები.

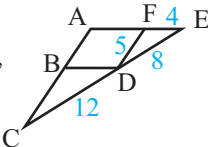
1) მოცემულია:

$$\triangle ABCD \sim \triangle FDE,$$

$$CD = 12, FD = 5,$$

$$FE = 4, DE = 8$$

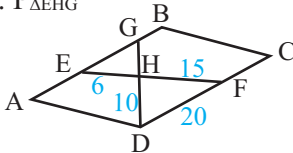
$$\text{ვიპოვოთ: } P_{\triangle ABCD}$$



3) მოცემულია: ABCD პარალელოგრამია,

$$EH = 6, HF = 15, HD = 10$$

$$\text{ვიპოვოთ: } P_{\triangle EHG}$$



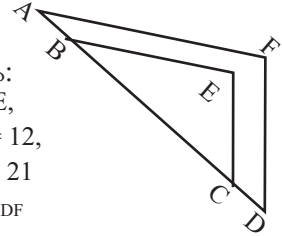
2) მოცემულია:

$$\triangle ADF \sim \triangle BCE,$$

$$BC = 24, EB = 12,$$

$$CE = 18, DF = 21$$

$$\text{ვიპოვოთ: } P_{\triangle ADF}$$

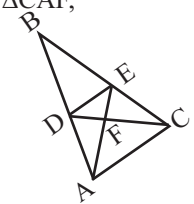


4) მოცემულია: $\triangle DEF \sim \triangle CAF$,

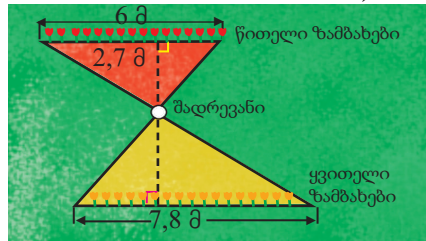
$$P(\triangle CAF) = 28, DF = 6,$$

$$FC = 8$$

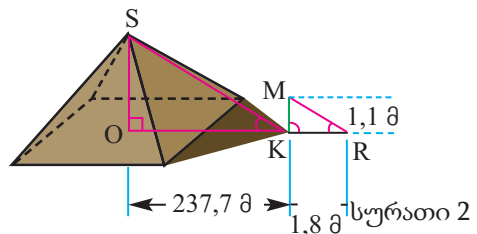
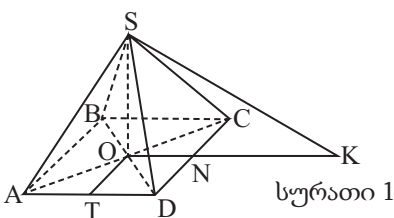
$$\text{ვიპოვოთ: } P_{\triangle DEF}$$



16 სურათზე პარკის ერთი ნაწილის გეგმა მოცემული. რა მანძილია ყვითელი ზამბახებიდან შადრევანამდე?

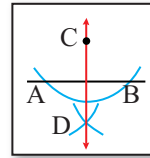
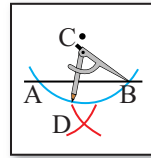
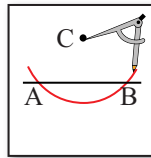
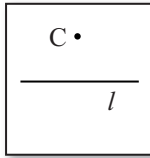


17 ლევანდის თანახმად ძველი ბერძენი მეცნიერი თალესი ეგვიპტეში მოგზაურობისას ხეოფსის პირამიდებმა გააოცეს და წინასწარმეტყველებს ჰკითხა თუ რა სიმაღლისაა პირამიდა. მათ კი პასუხად “ეს მხოლოდ მზის ღმერთმა იცის, ადამიანებმა არა”- მიუგეს. თალესმა მათ უთხრა: “მე ახლა გამოვთვლი მის სიმაღლეს”. თალესმა თავისი ჩრდილი გაზომა და ეს მის სიმაღლეზე 2-ჯერ მეტი აღმოჩნდა. მან გაითვალისწინა, რომ ამ დროს ყველა არსების ჩრდილი მის სიმაღლეზე 2-ჯერ მეტია და შედეგად ხეოფსის პირამიდის ჩრდილი გაზომა. ჩრდილის სიგრძე სურათი 2-ზე OK-ს ტოლია. $TD = ON$, $OK = TD + NK$. ეს თალესმა ადვილად გამოთვალა და თქვა, რომ პირამიდის სიმაღლე 145 მ-ია, წინასწარმეტყველები ამან ძალიან განარისხა და მას სასწრაფოდ ეგვიპტის დატოვება უბრძანეს. სურათის მიხედვით ჩატარებული გამოთვლებით მტკიცდება, რომ ხეოფსის პირამიდის სიმაღლე 145 მ-ია. თქვენც შესაბამისი გამოთვლებით ეს შეამოწმეთ.



აგების ამოცანები

აგება 1. მოცემული წერტილიდან მოცემული წრფის პართობული წრფის აგება



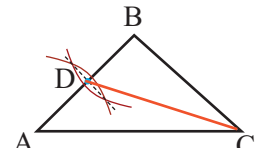
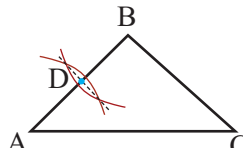
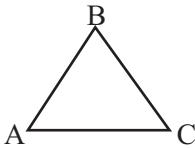
1. გავავლოთ l წრფე და აღვნიშნოთ მის გარეთ მდებარე C წერტილი.
2. მოვათავსოთ ფარგალი C წერტილში და გავავლოთ წრფის ორ წერტილში გადაკვეთი რკალი. გადაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ A და B -თი.
3. ფარგალი AB მონაკვეთის სიგრძის ნახევარზე ცოტა მეტად გავშალოთ. მოვათავსოთ ფარგალი A წერტილში, AB წრფის ქვემოთ რკალი დავხაზოთ. ფარგლის მდგომარეობის შეუცვლელად B წერტილში მოვათავსოთ და დახაზული რკალის გადაკვეთი სხვა რკალი დავხაზოთ.
4. ამ რკალების გადაკვეთის წერტილი D ასოთი აღვნიშნოთ, C და D წერტილებზე გამავალი წრფე გავავლოთ $CD \perp AB$.

აგება 2. მონაკვეთის შუაწერტილის აგებით სამკუთხედის მედიანის აგება.

1. დავხაზოთ $\triangle ABC$.

2. ავაგოთ AB გვერდის შუაწერტილი და D -თი აღვნიშნოთ.

3. C და D წერტილები შევეერთოთ. CD მონაკვეთი $\triangle ABC$ -ს მედიანაა.



1» წრფეზე მოცემული წერტილიდან ამ წრფის მიმართ პერპენდიკულარის აგება იხილეთ <http://www.mathopenref.com/constperplinepoint.html> ინტერნეტმისამართზე და რვეულში შეასრულეთ.

2» დახაზეთ მახვილკუთხა სამკუთხედი და ააგეთ მისი სიმაღლეები.

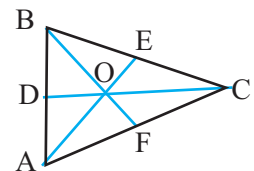
3» დახაზეთ მართკუთხა სამკუთხედი. დახაზეთ მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული მედიანა. მედიანისა და ჰიპოტენუზის სიგრძეები გაზომეთ და შეადარეთ.

თეორემა. სამკუთხედების მედიანების თვისება

სამკუთხედის მედიანები ერთ წერტილში იკვეთებიან და გადაკვეთის წერტილი თითოეულ მედიანას წვეროდან დაწყებით $2 : 1$ შეფარდებით ყოფს.

$$CO : OD = 2 : 1 \quad AO : OE = 2 : 1 \quad BO : OF = 2 : 1$$

$$CO = \frac{2}{3} CD \quad AO = \frac{2}{3} AE \quad BO = \frac{2}{3} OF$$



მედიანების გადაკვეთის წერტილს სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

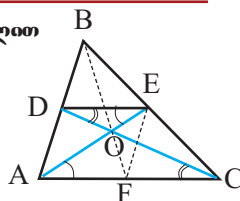
მედიანების თვისება

წარმოვადგინოთ თეორემის დამტკიცება ორსვეტიანი ცხრილით

მოცემულია: $\triangle ABC$, CD და AE ამ სამკუთხედის მედიანებია

დაამტკიცეთ: $AO:OE = CO:OD = BO:OF = 2:1$

დამტკიცება: D და E წერტილები შევავროთ.



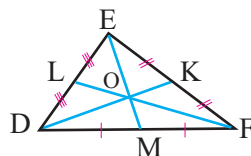
პირობა	საფუძველი
$AD = DB$ ან $BE = EC$ - DE სამკუთხედის შუახაზია. $DE \parallel AC$, $DE = \frac{AC}{2}$, $\frac{AC}{DE} = \frac{2}{1}$ $\angle DEA \cong \angle EAC$, $\angle EDC \cong \angle ACD$ $\triangle AOC \sim \triangle EOD$ $\frac{AO}{OE} = \frac{CO}{OD} = \frac{AC}{DE} = \frac{2}{1}$ $AO : OE = CO : OD = 2 : 1$ $AO : OE = BO : OF = 2 : 1$ $AO : OE = CO : OD = BO : OF = 2 : 1$ თეორემა დამტკიცებულია.	- მედიანას განსაზღვრების თანახმად. - შუახაზის განსაზღვრება. - შუახაზის თვისება. - შიგა ჯვარედინი კუთხეები. - სამკუთხედების მსგავსების კი ნიშანი. - მსგავსი სამკუთხედების შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია. - მსგავსი წესით BF მედიანისა და AE მედიანის გადაკვეთის წერტილის შეერთება შეიძლება და $\triangle AOB \sim \triangle FOE$ - ტოლობის ნიშნის თანახმად.

1) O წერტილი DEF სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილია. DE = 10 სმ, FL = 15 სმ, EM = 9 სმ და DE = 12 სმ. იპოვეთ სამკუთხედების პერიმეტრები.

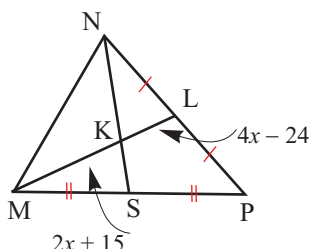
1) $\triangle EOD$

2) $\triangle DLO$

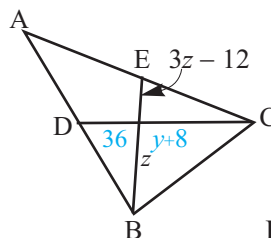
3) $\triangle LOE$



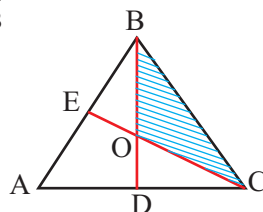
2) ML და NS სამკუთხედების მედიანებია. სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ MK.



3) BE და CD სამკუთხედების მედიანებია. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადები.



4) $\triangle ABC$ -ს ფართობი 24-სმ^2 -ია. ამ სამკუთხედის BD და CE მედიანები O წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ $\triangle OBC$ -ს ფართობი.



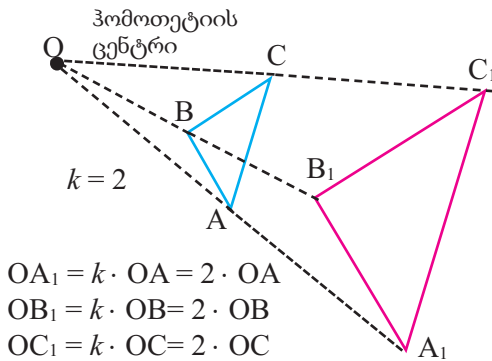
მსგავსების გარდაქმნა. ჰომოთეტია

ჰომოთეტია

თვით სიბრტყეზე გარდაქმნას, რომლის დროსაც ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი ერთი და იმავე რიცხვჯერ იცვლება მსგავსების გარდაქმნა ეწოდება. მსგავსების გარდაქმნისას ერთი ფიგურიდან მიიღება სხვა ფიგურა. ამ ფიგურებს მსგავსი ფიგურები ეწოდება. მსგავსების გარდაქმნით სიბრტყის A და B წერტილების შესაბამისად A_1 და B_1 წერტილებად თუ გარდაიქმნება, მაშინ $A_1B_1 = k \cdot AB$. $k > 0$ რიცხვი მსგავსების კოეფიციენტი. მოძრაობა $k = 1$ კოეფიციენტის დროსაც მსგავსების გარდაქმნაა.

დავუშვათ, რომ O მოცემული წერტილია $k > 0$ მოცემული რიცხვია. თვით სიბრტყეზე გარდაქმნაში ნებისმიერი A წერტილისა და მისი გარდაქმნილი A_1 წერტილისათვის თუ იქნება, ასეთ გარდაქმნას ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, A_1 წერტილს კი A -ს ჰომოთეტური წერტილი ეწოდება. ჰომოთეტია მსგავსების გარდაქმნაა.

ნამუში 1.



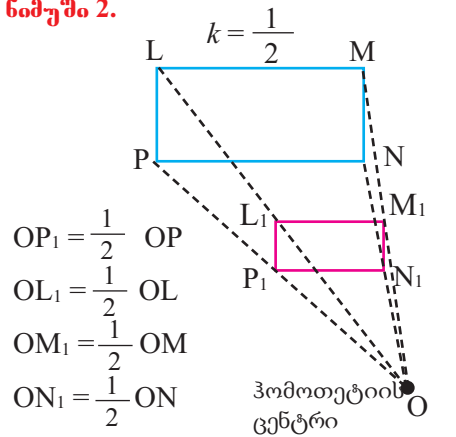
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ აქედან
 $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$,
 $A_1C_1 = 2AC$

თუ $k > 1$, მაშინ ფიგურა საწყის ფიგურაზე დიდია.

თუ $0 < k < 1$, მაშინ ფიგურა საწყის ფიგურაზე პატარაა.

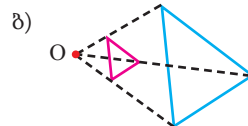
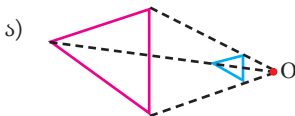
თუ $k = 1$, მაშინ ფიგურა საწყისი ფიგურის კონგრუენტულია.

ნამუში 2.

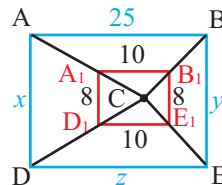
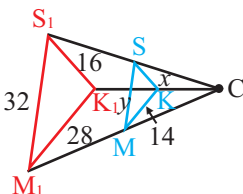


$PLMN \sim P_1L_1M_1N_1$ ამიტომ ფიგურების შესაბამისი გვერდების შეფარდება $\frac{1}{2}$ - ის ტოლია.

- 1 სურათზე ცისფერი ფიგურის წითელი ფერის ფიგურაში მოცემული ცენტრის მიხედვით k კოეფიციენტის ჰომოთეტიაა ნაჩვენები. უჩვენეთ რა შემთხვევაშია $k > 1$, რა შემთხვევაშია $k < 1$.

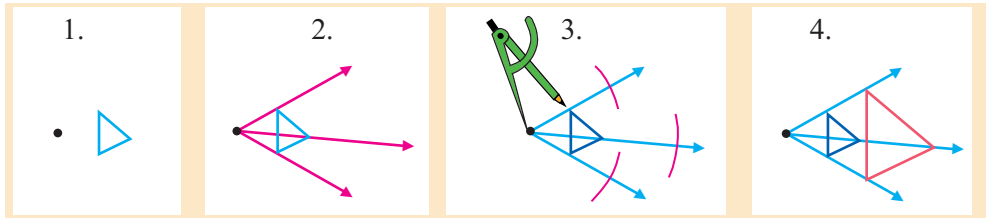


- 2 სურათის მიხედვით იპოვეთ k ჰომოთეტიის კოეფიციენტი და უცნობები.

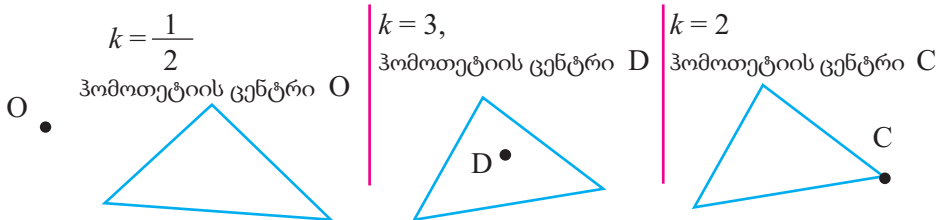


მსგავსების გარდაქმნა

- 3» ჰომოთეტიის კოეფიციენტი $k = 2$ პირობით მოცემული ცენტრის მიხედვით ჰომოთეტიური ფიგურის აგების ნაბიჯები რვეულებში შეასრულეთ.



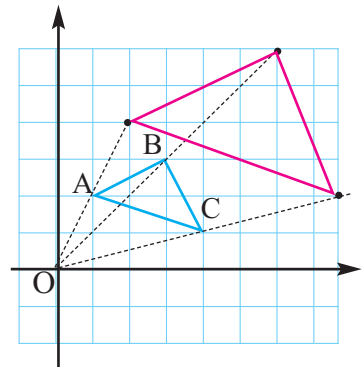
- 4» მოცემული ცენტრისა და k კოეფიციენტის მიხედვით შეასრულეთ სამკუთხედების ჰომოთეტიური გარდაქმნა სახაზავისა და ფარგლის გამოყენებით.



- 5» 1) კოორდინატა სათავის მიმართ $k = 3$ კოეფიციენტთან ჰომოთეტიკაში ა) $A(2; 0)$; ბ) $B(0; 3)$; გ) $C(2; 3)$ წერტილი რომელ წერტილად გარდაიქმნება? 2) უჩვენეთ, რომ კოორდინატა სათავის მიმართ k კოეფიციენტთან ჰომოთეტიკაში $A(x; y)$ წერტილი $A_1(kx; ky)$ წერტილად გარდაიქმნება. მითითება: გამოიყენეთ სამკუთხედების მსგავსება.

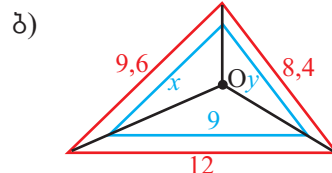
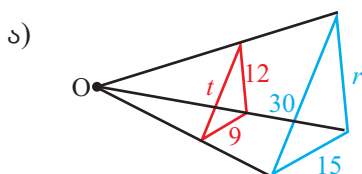
- 6» 1) მოცემულია სამკუთხედი, რომლის წვეროებია $A(1; 2)$, $B(3; 3)$ და $C(3; 1)$ ცენტრი კოორდინატა სათავეში, კოეფიციენტი $k = 2$ არსებული ჰომოთეტიკაში $\triangle ABC$ -ს გარდაქმნილი ფიგურა თქვენც შეასრულეთ.

$$\begin{aligned} A(1; 2) &\longrightarrow A_1(2; 4) \\ B(3; 3) &\longrightarrow B_1(6; 6) \\ C(4; 1) &\longrightarrow A_1(8; 2) \end{aligned}$$



შეასრულეთ წვეროს წერტილების კოორდინატები $A(2; 2)$, $B(6; 2)$, $C(6; 4)$ და $D(2; 4)$ მქონე მართკუთხედის $O(0; 0)$ ცენტრის, $k = \frac{1}{2}$ კოეფიციენტთან ჰომოთეტიის გარდაქმნა.

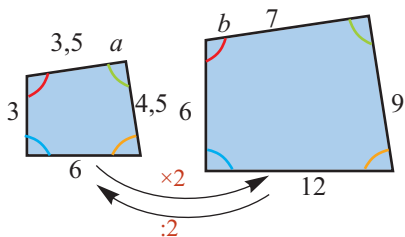
- 7» სურათზე წითელი ფერის ფიგურა ცისფერი ფიგურის ჰომოთეტიურია. იპოვეთ გვერდები, რომლებიც არაა მოცემული და მსგავსების კოეფიციენტი.



მსგავსი ფიგურების ფართობები

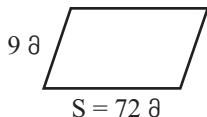
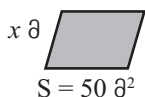
მსგავსი ფიგურების ფართობები

თეორემა. მსგავსი ფიგურების ფართობების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია. მაგალითად, თუ მსგავსი ოთხკუთხედების შესაბამისი გვერდების შეფარდებაა $a : b$, მაშინ ოთხკუთხედების ფართობების შეფარდება $a^2 : b^2$ იქნება.

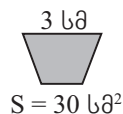
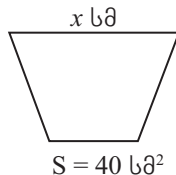


1 იპოვეთ ორი ფიგურის მსგავსებისა და ფართობების გამოყენებით ფერადი ფიგურის გაუფერადებელი ფიგურის მიმართ მასშტაბი - მსგავსების კოეფიციენტი და x .

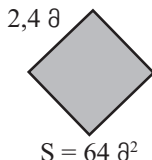
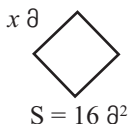
1)



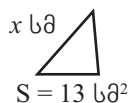
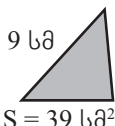
2)



3)

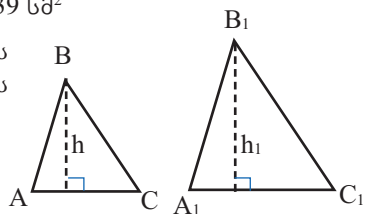


4)



2 **თეორემა.** ორი მსგავსი სამკუთხედის ფართობების შეფარდება შესაბამისი გვერდების კვადრატების შეფარდების ტოლია.

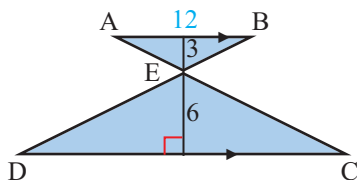
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AC}{A_1C_1} \right)^2 = k^2$$



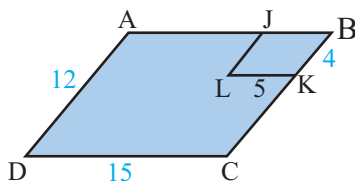
თეორემის დამტკიცების გეგმა. მსგავსი სამკუთხედების სიმაღლეების შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია.

3

1) დაამტკიცეთ DEC და BEA სამკუთხედების მსგავსება და იპოვეთ ფართობები.



2) დაამტკიცეთ ABCD და JBLK პარალელოგრამების მსგავსება. იპოვეთ ABCD პარალელოგრამის ფართობი, თუ $S_{JBLK} = 18 \text{ სმ}^2$ -ია.



4

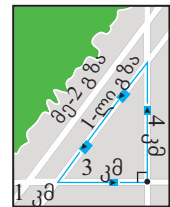
ABC მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 8 სმ-ია, ფართობი კი 12 სმ^2 -ია. ამ სამკუთხედის მსგავსი DFE სამკუთხედის პერიმეტრი 20 სმ-ია. რამდენი კვადრატული სანტიმეტრია DFE სამკუთხედის ფართობი?

მსგავსი ფიგურების ფართობები

- 5» ერთი გვერდის სიგრძე 2,5 მ-იანი მართკუთხედის ფორმის სარკის ფასი 125 მანეთია. ფორმით ამ სარკის მსგავსი სარკის შესაბამისი გვერდის სიგრძე 3 მ-ია. სარკეები კვადრატული მეტრის ფასის მიხედვით იყიდება. რამდენი მანეთი ღირს დიდი სარკე?
- 6» ორი მსგავსი სამკუთხედის ფართობი შესაბამისად 45 სმ^2 და 80 სმ^2 -ია. სამკუთხედების პერიმეტრების ჯამი 35 სმ-ია. იპოვეთ თითოეული სამკუთხედის პერიმეტრი.
- 7» ორი მსგავსი პარალელოგრამის გვერდების თანაფარდობაა 2 : 3 დიდი პარალელოგრამის ფართობია 54 მ^2 . იპოვეთ პატარა პარალელოგრამის ფართობი?

- 8» ორი მსგავსი მართკუთხა ფორმის ეზოებიდან ერთის ფართობი 540 მ^2 -ია, მეორის ფართობი კი 135 მ^2 -ია. იპოვეთ ამ ეზოების პერიმეტრების შეფარდება.

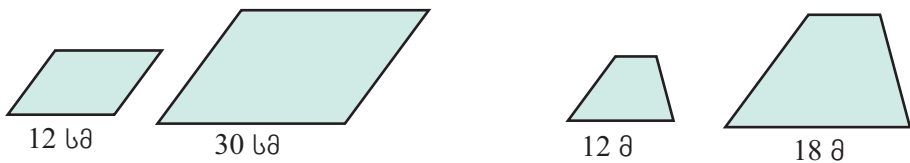
- 9» პარკში სურათზე ნაჩვენებების მსგავსად საველოსიპედე ბილიკებია შექმნილი. ეს გზები მსგავს მართკუთხა სამკუთხედებს ქმნიან. ჰუსეინი ჯერ ცისფრად დახაზული მართკუთხა სახაზავის გასწვრივ მოძრაობს. რამდენ კილომეტრ მანძილს გაივლის ჰუსეინი, თუ იგი მეორე გზაზე გადავა?



- 10» სურათზე მოცემული ორი ფიგურა მსგავსია. მოცემული ფიგურის მიხედვით იპოვეთ მეორე ფიგურის ფართობი.

1) პატარა პარალელოგრამის ფართობი 60 სმ^2 -ია.

2) დიდი ტრაპეციის ფართობი 108 მ^2 -ია.



- 11» ქვემოთ მოცემული პირობების მიხედვით “ $\triangle DEF$ -ის პერიმეტრი $\triangle GHK$ -ს პერიმეტრზე მეტია” მოსაზრების ჭეშმარიტების შესახებ **ყოველთვის**, **ზოგჯერ**, **არასოდეს** სიტყვებიდან რომლის შერჩევა შეიძლება?

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$
მსგავსების კოეფიციენტი $\frac{3}{2}$ -ია

$\triangle DEF \sim \triangle GHK$
მსგავსების კოეფიციენტი $\frac{4}{3}$ -ია

განმაზოგადებელი დავალებები

1 რომელ შემთხვევაში შეიძლება ორი სამკუთხედის მსგავსების შესახებ *ყოველთვის*, *ზოგჯერ*, *არასოდეს* მოსაზრების გამოთქმა:

ა) ორი ტოლფერდა სამკუთხედი; ბ) ორი ტოლგვერდა სამკუთხედი; გ) მახვილკუთხა და ბლაგვკუთხა სამკუთხედებია.

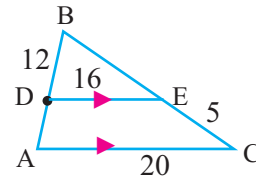
2 თითოეული შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომელი ორის უარყოფა უნდა მოხდეს.

- ა) 1) $\triangle ABC$ ტოლფერდა სამკუთხედი
2) $\triangle ABC$ ბლაგვკუთხა სამკუთხედი
3) $\triangle ABC$ სამივე კუთხის გრადუსული ზომა განსხვავებულია.

- ბ) 1) $\angle 1 \cong \angle 2$
2) $\angle 1$ მართი კუთხეა, $\angle 2$ მახვილი კუთხეა.
3) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

3 სურათის მიხედვით იპოვეთ:

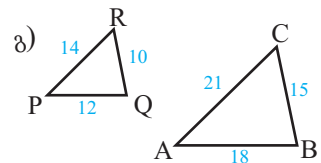
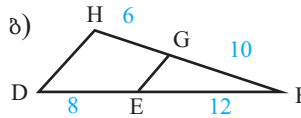
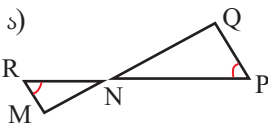
- 1) $\triangle ABC$ და $\triangle DBE$ -ს პერიმეტრები
2) მსგავსების კოეფიციენტი
3) $ADEC$ ტრაპეციის პერიმეტრი.



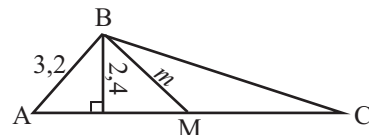
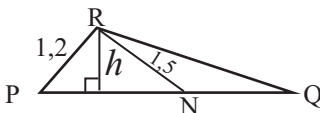
4 ორი მსგავსი სამკუთხედიდან ერთის პერიმეტრი მეორის $\frac{2}{3}$ -ის ტოლია. ორი შესაბამისი გვერდის სხვაობა კი 5 სმ-ია. რამდენი სანტიმეტრია ამ გვერდების სიგრძე?

5 მზის სხივის ხის ჩრდილის სიგრძე 2,8 მ-ია. ამავე დროს 1,8 მ სიმაღლის მქონე ადამიანის ჩრდილი 1,2 მ-ია. სამკუთხედების მსგავსების გამოყენებით იპოვეთ ხის სიმაღლე.

6 რომელი სამკუთხედებია მსგავსი? დაწერეთ რომელი ნიშნის მიხედვით არიან მსგავსი?

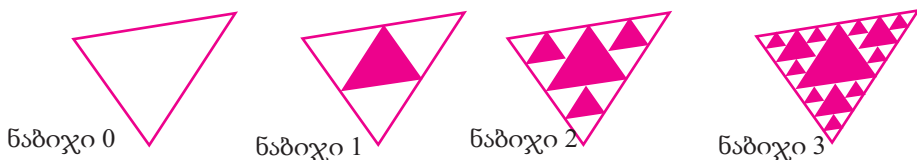


7 $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$. M და N წერტილები შესაბამისად PQ და AC-ს შუაწერტილებია. იპოვეთ h და m .

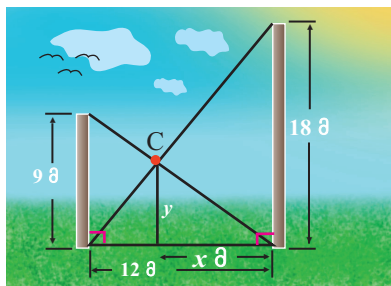


8 $k = 2$ კოეფიციენტს ჰომოთეტიით $\triangle DEF$ -ს $\triangle D_1E_1F_1$ -ად გარდაქმნის. $\triangle DEF$ -ის პერიმეტრი 60 სმ-ია. იპოვეთ $\triangle D_1E_1F_1$ -ის პერიმეტრი.

- 9 სურათზე მოცემული სამკუთხედების შუახაზის გამოყენებით მოხატულობები შეიქმნა. პირველი სამკუთხედის პერიმეტრი ჩათვალეთ ერთეულის ტოლად. იპოვეთ 1-ლი, მე-2, მე-3 ნაბიჯით შექმნილი ფერადი სამკუთხედების პერიმეტრები.



- 10 სურათზე მოცემულ კონსტრუქციაზე ორი ბოძი ზემოდან და ქვემოდან სურათზე ნაჩვენები წესით C წერტილში ქუროთი დაამაგრეს. მიწაში მართობულად ჩაყენებული ბოძების სიმაღლე 9 მ და 18 მ-ია, მათ შორის მანძილი კი 12 მ-ია.



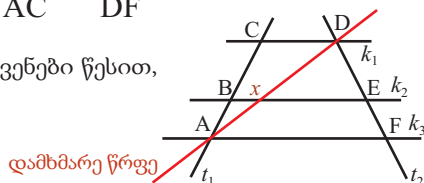
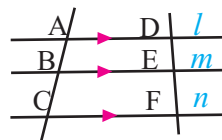
- 1) იპოვეთ მანძილი ქუროდან მაღალ ბოძამდე.
- 2) რამდენ მეტრ სიმაღლეზეა ქურო დედამიწიდან?
- 3) იპოვეთ მანძილი ქუროდან დაბალი ბოძის უმაღლეს წერტილამდე.
- 4) იპოვეთ მანძილი ქუროდან მაღალი ბოძის ქვედა წერტილამდე.

- 11 ორი და უფრო მეტი წრფის გადამკვეთი პარალელური წრფეები, მათზე პროპორციულ მონაკვეთებს ჩამოკვეთს.

თუ $l \parallel m \parallel n$, მაშინ:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

დაამტკიცეთ ეს მოთხოვნა სურათზე ნაჩვენები წესით, დამხმარე წრფის გამოყენებით.



- 12 $\triangle A_1B_1C_1 \triangle ABC$ -საგან მსგავსების გარდაქმნითაა მიღებული. თუ $AB = 6$, $BC = 9$ და $AC = 12$, $\triangle A_1B_1C_1$ -ში კი $A_1B_1 = 2$, მაშინ იპოვეთ B_1C_1 , A_1C_1 და მსგავსების კოეფიციენტი.

- 13 <http://www.mathopenref.com> ინტერნეტმისამართის საშუალებით შეასრულეთ სხვადასხვა გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნები და აგების დავალებები.

5.1. უტოლობები

5.2. ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

5.3. ინფორმაციის შეგროვება და წარდგენა

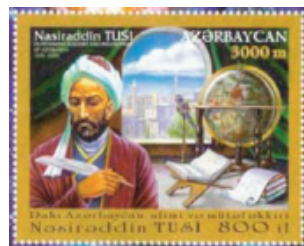
5.4. ალბათობის გაანგარიშება

თქვენ ამ განყოფილებაში შეისწავლით:

- უტოლობების ამოხსნას;
- უტოლობების შესახებ რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციის შესაბამისი ამოცანების ამოხსნას;
- ტრიგონომეტრიულ თანაფარდობებს;
- ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით ამოცანების ამოხსნას;
- ინფორმაციის სისტემატიზაციასა და სხვადასხვა ფორმებში წარდგენას;
- ცენტრისკენული საზომების გამოყენებით ინფორმაციის შეფასებასა და პროგნოზირებას;
- გამოკვლევისათვის სრული ერთობლიობისა (პოპულაციის) და შერჩევის განსაზღვრას;
- დამოკიდებულ და დამოუკიდებელ მოვლენებსა და მათი ალბათობის გამოთვლას.

ეს საინტერესოა!

გენიალურმა აზერბაიჯანელმა მოაზროვნემ, მათემატიკოსმა, ასტრონომმა და ფილოსოფოსმა ნესრედდინ თუსიმ კაცობრიობის მეცნიერების ისტორიაში დიდი წვლილის შემტანი ნაწარმოებები დაწერა. წერილობით წყაროებში თუსი “ტრიგონომეტრიის მამად” არის მოხსენიებული. მან ნაწარმოებში “წრის გაზომვები” პირველად დაამტკიცა სინუსების თეორემა და იგი გამოიყენა ასტრონომიულ გამოთვლებში.





გამოკვლევა

გამოიკვლიეთ ქვემოთ მოცემული შემოთავაზებები. თითოეული შემოთავაზების მსგავსი ერთი შემოთავაზებაც თქვენ გამოთქვით. თითოეულ შემთხვევაში გამოთქვით მოსაზრებები ცვლადის შესაძლო მისაღები მნიშვნელობების შესახებ.

- 1) საფოსტო გზავნილის მასა 8 კგ-ზე მეტი არ უნდა იყოს.
- 2) ტელევიზორის ფასი 200 მანეთზე მეტია.
- 3) სეიმურმა გასაუბრების პირველ ტურში სულ მცირე 50 ქულა უნდა მოაგროვოს, რომ მეორე ტურში გადავიდეს.
- 4) ტანვარჯიშის ჯგუფში 13 წელზე ნაკლები ასაკის ბავშვები მეცადინეობენ.

უტოლობები

უტოლობები $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ ნიშნების გამოყენებით იწერება. უტოლობები შეიძლება გამოისახოს სიტყვით, მათემატიკური სიმბოლოებითა და რიცხვით ღერძზე ასახვით.

-2-ზე მეტი ყველა ნამდვილი რიცხვი	$x > -2$	
-3-ზე მეტი ან მისი ტოლი ყველა ნამდვილი რიცხვი	$x \geq 3$	
-1-ზე ნაკლები ყველა ნამდვილი რიცხვი	$x < -1$	
0-ზე ნაკლები ან მისი ტოლი ყველა ნამდვილი რიცხვი	$x \leq 0$	

- თუ წერტილი გაფერადებულია, ამ წერტილის კოორდინატი უტოლობას აკმაყოფილებს.
- თუ წერტილი გაუფერადებელია, ამ წერტილის კოორდინატი უტოლობას არ აკმაყოფილებს.

რიცხვებისა და გამოსახულებების შედარებისათვის სხვადასხვა ხერხის გამოყენება შეიძლება. ამ ხერხებიდან ერთ-ერთი მათი სხვაობის შეფასებაა.

- თუ $a - b$ სხვაობა დადებითია, მაშინ a რიცხვი b რიცხვზე მეტია; $a - b > 0$; $a > b$.
- თუ $a - b$ სხვაობა უარყოფითია, მაშინ a რიცხვი b რიცხვზე ნაკლებია; $a - b < 0$; $a < b$.
- თუ $a - b$ სხვაობა ნულის ტოლია, მაშინ a და b რიცხვები ტოლია; $a - b = 0$; $a = b$.
- თუ $a - b$ სხვაობა არაუარყოფითია, მაშინ a რიცხვი b რიცხვზე ნაკლები არაა; $a - b \geq 0$; $a \geq b$.
- თუ $a - b$ სხვაობა არაა დადებითი, მაშინ a რიცხვი b რიცხვზე მეტი არაა; $a - b \leq 0$; $a \leq b$.

საკოორდინატო წრფეზე მეტი რიცხვი მარჯვნივ მდებარე წერტილით, ხოლო ნაკლები რიცხვი კი მარცხნივ მდებარე წერტილით გამოისახება.

მაშასადამე, თუ $a > b$, მაშინ a წერტილის კოორდინატი b წერტილის მარჯვნივ, ხოლო თუ $a < b$ მაშინ კი მარცხნივ მდებარეობს.

ამოცანა. შევადაროთ $a^2 + 1$ და $2a$ გამოსახულებები. განვიხილოთ ამ გამოსახულებების სხვაობა:

$a^2 + 1 - 2a = (a - 1)^2 \geq 0$. მაშასადამე, ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $a^2 + 1$ გამოსახულების მნიშვნელობა $2a$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე ნაკლები არაა (მეტია ან ტოლია).

სასწავლო დაფალებები

- 1) სამირი საშინაო დავალებებს ორ საათზე ნაკლებ დროს უთმობს. ელჩინმა და ულქერმა ეს მოსაზრება მათემატიკურად ქვემოთ მოცემულივით გამოსახეს. რომელი ჩანაწერია სწორი?

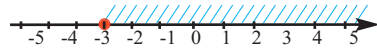
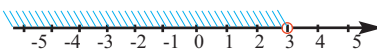
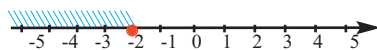
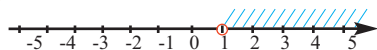
ელჩინ  $t \geq 2$

ულქარ  $t < 2$

- 2) ქვემოთ მოცემული მოსაზრებები გამოსახეთ უტოლობით.

- 1) ცხენით სიარული მედიცინის მოთხოვნების თანახმად ზღვის დონიდან 1500 მ სიმაღლეზე ზევით არაა რეკომენდირებული.
- 2) მაღაზიის პირობების თანახმად 10%-იანი ფასდაკლების ბარათის მისაღებად ერთ ჯერზე სულ მცირე 1000 მანეთის უნდა ივაჭრო.
- 3) თითოეულ პიროვნებას 10 000 მანათი თანხის ყოველგვარ გადასახადის გადახდის გარეშე ქვეყნის გარეთ გატანა შეუძლია.
- 4) კინოთეატრში 7 წელზე ნაკლები ასაკის ბავშვები მშობლების გარეშე არ დაიშვებიან.

- 3) რიცხვით ღერძზე გამოსახულება გამოსახეთ უტოლობითა და სიტყვებით.



უტოლობების თვისებები

- 1) თუ $a > b$, მაშინ $b < a$
- 2) თუ $a < b$, მაშინ $b > a$
- 3) თუ $a > b$ და $b > c$, მაშინ $a > c$
- 4) თუ $a < b$ და $b < c$, მაშინ $a < c$

მე-3 თვისების დამტკიცება: რადგან $a > b$ ამიტომ $a - b > 0$, რადგან $b > c$ ამიტომ $b - c > 0$, მაშინ $a - c = (a - b) + (b - c) > 0$, მაშასადამე $a > c$

ორივე შესაგრები დადებითია, ჯამიც დადებითია

- 4) ამოხსენით უტოლობები ცვლადის მარცხენა ნაწილში შენარჩუნებით.

- ა) $19 > x$ ბ) $-10 < a$ გ) $-10 > b$ დ) $0 < t$

- 5) დაწერეთ უტოლობების შესაბამისი რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციები.

- ა) $x \geq 15$ ბ) $x < 11$ გ) $x \geq 0$ დ) $x > 100$

- 6) უჩვენეთ უტოლობები რიცხვით ღერძზე.

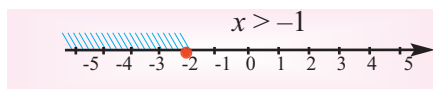
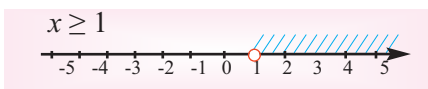
- 1) $a > 4$
- 2) $x > 6$
- 3) $n < 11$
- 4) $x < 5$
- 5) $t \geq 9$
- 6) $b \geq 8$
- 7) $d \leq 5$
- 8) $z \leq 8$
- 9) $x > -4$
- 10) $n \geq -3$
- 11) $x \leq -5$
- 12) $x < -2$

- 7) ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისათვის შეამოწმეთ უტოლობების სისწორე. ცვლადს კიდეც ორი მნიშვნელობა მიეცით და შეამოწმეთ.

- 1) $18 - x > 4, x = 12$
- 2) $14 + n < 23, n = 8$
- 3) $5k > 35, k = 8$
- 4) $16 \leq 3c, c = 8$
- 5) $\frac{x}{3} \geq 2, x = 9$
- 6) $\frac{14}{c} \leq 7, c = 2$

- 8» შეადარეთ c და d რიცხვები, თუ $c - d$ სხვაობა ტოლია: $-3, 0, 4$ -ის.
- 9» შეადარეთ m და n რიცხვები, როცა ა) $m - n = 0,1$; ბ) $m - n = -1,2$; გ) $m - n = 0$.
- 10» ცნობილია, $a > b$. შეიძლება $a - b$ სხვაობა $-4,3; 0; 5,2$ რიცხვებით გამოისახოს?
- 11» როცა $x > 2$, ქვემოთ მოცემულებიდან რომელია სწორი?
 ა) $x - 2$ სხვაობა დადებითი რიცხვია; ბ) $x - 4$ სხვაობა დადებითი რიცხვია.
 გ) $x - 1$ სხვაობა დადებითი რიცხვია; დ) $2 - x$ სხვაობა დადებითი რიცხვია.

- 12» რა შეცდომა არის დაშვებული გამოსახულებებზე?



- 13» x რიცხვისათვის რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ რამდენიმე ისეთი წერტილი, რომ:
 ა) $x > 2$; ბ) $x < 5$; გ) $x > -1$; დ) $x < 0$ უტოლობა სწორი იყოს.

გამოყენებითი დაგალებები

- 14» იპოვეთ მოცემული უტოლობის დამაკმაყოფილებელი ცვლადის უმცირესი მთელი მნიშვნელობა.
 ა) $x > 10$ ბ) $x \geq 7$ გ) $x > -8$ დ) $x \geq -3$
- 15» იპოვეთ მოცემული უტოლობის დამაკმაყოფილებელი ცვლადის უდიდესი მთელი მნიშვნელობა.
 ა) $x < 9$ ბ) $x \leq 8,2$ გ) $x < -4,1$ დ) $x \leq -3$
- 16» მოცემულია გამოსახულებები $b(b + 1)$ და $(b + 2) \cdot (b - 3)$. შეადარეთ ამ გამოსახულებების მნიშვნელობები, როცა $b = -4$; $b = -3$; $b = 2$. შეიძლება გადაწყვეტით ითქვას, რომ b -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის პირველი გამოსახულების მნიშვნელობა მეტია მეორე გამოსახულების მნიშვნელობაზე?
- 17» დაამტკიცეთ, რომ ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის:
 ა) $a^2 - 4a$ გამოსახულების მნიშვნელობა $2a - 10$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე მეტია;
 ბ) $(2a + 3)(2a + 1)$ გამოსახულების მნიშვნელობა $4a(a + 2)$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე მეტია;
 გ) $7c - 1$ გამოსახულების მნიშვნელობა $c(c + 7)$ გამოსახულების მნიშვნელობაზე ნაკლებია.
- 18» დაამტკიცეთ უტოლობა.
 ა) $c^2 + 1 \geq 2c$ ბ) $a(a + 3) \geq 3a$
 გ) $d^2 - cd + c^2 \geq cd$ დ) $a(a - b) \geq b(a - b)$



გამოკვლევა

გამოიკვლიეთ უტოლობა $x + 3 < 10$.

x	-1,75	0	6,99	7	7,01	7,1
$x + 3$	1,25	3	9,99	10	10,01	10,1
$x + 3 < 10$	$1,25 < 10$	$3 < 10$	$9,99 < 10$	$10 < 10$	$10,01 < 10$	$10,1 < 10$
ამონახსენია?	დიახ	დიახ	დიახ	არა	არა	არა

როცა ცვლადის მნიშვნელობა 7-ზე ნაკლებია, $x + 3$ ჯამი 10-ზე ნაკლებია.

როცა ცვლადის მნიშვნელობა არის 7, $x + 3$ ჯამი 10-ის ტოლია.

როცა ცვლადის მნიშვნელობა 7-ზე მეტია, $x + 3$ ჯამი 10-ზე მეტი ხდება.

$x + 3 < 10$ უტოლობა 7-ზე ნაკლები რიცხვებისათვის არის სწორი.

უტოლობების თვისებები

თეორემა. თუ სწორი უტოლობის ორივე მხარეს მივუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, ისევ სწორ უტოლობას მივიღებთ.

თუ $a > b$ და c ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $a + c > b + c$ და $a - c > b - c$

თუ $a < b$ და c ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $a + c < b + c$ და $a - c < b - c$

სასწავლო დაფალებები

1» x ცვლადის: ა) 6; ბ) -3; გ) 1,5 დ) 0; ე) -7 რომელი მნიშვნელობები აკმაყოფილებს $x + 7 > 1$ უტოლობას?

2» ა) y -ისა და 13-ის ჯამი 25-ზე ნაკლებია. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს y ცვლადმა?

ბ) ორი რიცხვის ჯამი 18-ზე მეტია. თუ ამ რიცხვებიდან ერთი 7-ია, რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს მეორემ?

3» $a > b$ პირობის გათვალისწინებით შეადარეთ.

ა) $a - 6$ და $b - 6$

ბ) $a + 12$ და $b + 12$

გ) $a + m$ და $b + m$

დ) $a - k$ და $b - k$

4» უტოლობის თვისების გამოყენებით განსაზღვრეთ ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები.

ნიმუში. $5 + x \leq 18$ უტოლობის ორივე მხარეს მივუმატოთ -5.

$5 + x + (-5) \leq 18 + (-5)$, $x \leq 13$, მაშასადამე, ცვლადმა შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობები არაუმეტეს 13-ისა.

$$5 + x \leq 18$$

$$3 < y + 8$$

$$-2 < b - 6$$

$$-10 \geq x + 6$$

$$2 + m \geq 3,5$$

$$p - 4,8 > -6$$

$$10 + n \geq -2$$

$$c + 10 < 9$$

$$s - 12 \leq -5$$

$$a - 3 \leq 5$$

$$q + 0,8 \leq -0,5$$

$$d - \frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}$$

$$-4 < k + 6$$

$$g - 4 \geq 13$$

$$t - 3 < -9$$

$$-11 > g - 4$$

$$v - 6 > 2,7$$

$$5 > f + \frac{2}{3}$$

უტოლობების თვისებები

გამოყენებითი დავალებები

ნიმუში

ზღვის დათვის მასა ყველაზე მეტი 650 კგ-ია. ზღვის დათვის ახლანდელი მასა 398 კგ-ია. რომელი უტოლობით შეიძლება გამოისახოს შესაძლო მოსამატებელი წონა?



ზღვის დათვის
ახალი წონა პლუსი შესაძლო
მასის მატება ნაკლებია ან 650 კგ
ტოლია

$$398 + m \leq 650$$

$$398 + m \leq 650 \quad \text{დაწერეთ უტოლობა}$$

$$398 - 398 + m \leq 650 - 398 \quad \text{ორივე მხარეს გამოვაკლოთ 398}$$

$$m \leq 252$$

5 რეზიდენტი MP3 მუსიკის ცენტრში კიდევ 21 სიმღერა რომ ჩააწერინოს, მათი რაოდენობა იქნება არაუმეტეს 90-ისა. უტოლობით ჩაწერეთ, რამდენი სიმღერა იყო მანამდე MP3-ზე?

6 ემინი არანაკლებ 90 კგ სიმძიმის აწევაზე მეცადინეობს. ახლა, მას 50 კგ-იანი ქვების აწევა შეუძლია. უტოლობის დაწერით შეაფასეთ, კიდევ რამდენი კილოგრამი უნდა მოუმატოს ემინმა დასახული მიზნის მისაღწევად?

7 რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღონ ცვლადებმა? გამოსახეთ რიცხვით ღერძზე.

ა) $y - (-1,8) > -6,2$ ბ) $-8 > n - \frac{2}{3}$ გ) $a + \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

8 დაწერეთ შესაბამისი უტოლობები.

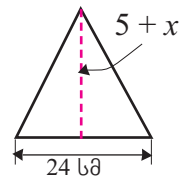
ა) -8-ს გარკვეული რიცხვი რომ მივუმატოთ ჯამი ან 30-ზე ნაკლები ან კიდევ 30-ის ტოლი იქნება;

ბ) რომელ რიცხვს უნდა გამოვაკლოთ 8, რომ სხვაობა 25-ზე მეტი იყოს?

9 შეაფასეთ ქვემოთ მოცემული უტოლობები, თუ ცნობილი, რომ $d + 5 \geq 18$.

ა) $d \geq ?$ ბ) $d + ? \geq 19$ გ) $d - 2 \geq ?$

10 სამკუთხედის ფუძე სიმაღლეზე ნაკლებია. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს x ცვლადმა?

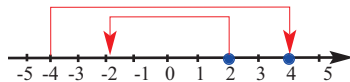
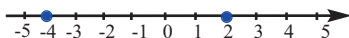


11 შეადგინეთ მოცემული უტოლობების შესაბამისი ამოცანები.

ა) $x + 15 > 100$ ბ) $m - 40 \leq 2000$ გ) $d + 3 \geq 12$

უტოლობების თვისებები

გამოკვლევა. მოცემული რიცხვები აღნიშნეთ რიცხვით ღერძზე. დაწერეთ შედარებები. შემდეგ ორივე რიცხვის ერთი და იმავე რიცხვზე გამრავლებით შეადარეთ. მაგალითად, ორივე რიცხვი გაამრავლოთ -1 -ზე და ახალი მდგომარეობები რიცხვითი ღერძის სურათზე ნაჩვენებებით წარმოადგინეთ. მოსაზრებები განაზოგადეთ და გამოსახეთ.



უტოლობების თვისებები

✓ თუ სწორი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე დადებით რიცხვზე, მივიღებთ სწორ უტოლობას.

თუ a და b ნებისმიერი რიცხვებია და $c > 0$, მაშინ:

1. თუ $a > b$, მაშინ $ac > bc$ და $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ **ნიმუში. 1.** $3 < 4$; $3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$; $6 < 8$

2. თუ $a < b$, მაშინ $ac < bc$ და $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ **ნიმუში. 2.** $6 > -9$; $\frac{6}{3} > \frac{-9}{3}$; $2 > -3$

✓ თუ სწორი უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ და ან გავყოფთ ერთსა და იმავე უარყოფით რიცხვზე და უტოლობის ნიშანს შევცვლით მოპირდაპირე ნიშნით, მივიღებთ სწორ უტოლობას.

თუ a და b ნებისმიერი რიცხვებია და $c < 0$, მაშინ:

1. თუ $a > b$, მაშინ $ac < bc$ და $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ **ნიმუში. 3.** $5 > 1$; $5 \cdot (-2) < 1 \cdot (-2)$.

2. თუ $a < b$, მაშინ $ac > bc$ და $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ **ნიმუში. 4.** $-8 < -6$; $\frac{-8}{-2} > \frac{-6}{-2}$; $4 > 3$

სასწავლო დაგეგმვები

1 ცნობილია, რომ $a > b$. ქვემოთ მოცემული პირობების მიხედვით დაწერეთ სწორი უტოლობები.

ა) ორივე მხარე გავამრავლოთ 4-ზე; ბ) ორივე მხარე გავამრავლოთ -5 -ზე;

გ) ორივე მხარე გავყოთ $\frac{1}{2}$ -ზე; დ) ორივე მხარე გავყოთ -2 -ზე.

2 დაწერეთ უტოლობის ორივე მხარის ერთსა და იმავე რიცხვზე გამრავლებით ან გაყოფით მიღებული სწორი უტოლობები.

ნიმუში 1. $\frac{3}{4}y \geq -6$ უტოლობის ორივე მხარე $\frac{4}{3}$ -ზე გავამრავლოთ:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}y \geq -6 \cdot \frac{4}{3}; \quad y \geq -8$$

ნიმუში 2. $-4x < 12$ უტოლობის ორივე მხარე გავყოთ -4 -ზე და უტოლობის ნიშანი მოპირდაპირეთი შევცვალოთ:

$$\frac{-4x}{-4} > \frac{12}{-4}; \quad x > -3$$

1) $4x < 4$

2) $7y > 63$

3) $13a \geq -26$

4) $-15 \leq 5b$

5) $7 \geq \frac{h}{14}$

6) $15 \geq 3t$

7) $\frac{p}{6} > 5$

8) $144 < 12d$

9) $-3m > -33$

10) $\frac{t}{9} < -12$

11) $30 > \frac{1}{2}n$

12) $-\frac{3}{4}r \leq -6$

3 ქვემოთ მოცემულ უტოლობებში განსაზღვრეთ a რიცხვის ნიშანი.

ა) $3a > 2a$

ბ) $4a < 3a$

გ) $-2a < 2a$

დ) $a > -a$

12» გამოკვლევა. ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი 10-ია. რა უდიდესი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს მათმა ნამრავლმა?

✓ თუ ორი დადებითი რიცხვის ჯამი მუდმივია, რიცხვების ტოლობის შემთხვევაში მათი ნამრავლი იქნის უდიდეს მნიშვნელობას (ამას მუდმივის ჯამის შესახებ თეორემა ეწოდება).

$m + n = 10$	$m \cdot n$
$1 + 9 = 10$	$1 \cdot 9 = 9$
$2 + 8 = 10$	$2 \cdot 8 = 16$
$3 + 7 = 10$	$3 \cdot 7 = 21$
$4 + 6 = 10$	$4 \cdot 6 = 24$
$5 + 5 = 10$	$5 \cdot 5 = 25$

გამოკვლევის შედეგებზე დაყრდნობით იპოვეთ ქვემოთ მოცემულები:

ა) ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი 16-ია. იპოვეთ მათი ნამრავლის უდიდესი მნიშვნელობა.

ბ) პერიმეტრი 40 სმ-ის მქონე მართკუთხედებს შორის უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი.

13» გამოკვლევა. არაუარყოფითი ორი რიცხვის არითმეტიკული საშუალო მათ გეომეტრიულ საშუალოზე ნაკლები არაა.

ვაჩვენოთ, რომ არაუარყოფითი a და b რიცხვებისათვის $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ უტოლობა

სამართლიანია. აქ ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $a = b$.

განვიხილოთ მარცხენა და მარჯვენა მხარეების სხვაობა საერთო მნიშვნელის მოძებნითა და გამარტივებით.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

სხვაობის კვადრატია არ შეიძლება იყოს უარყოფითი რიცხვი, ამიტომ ეს სწორი უტოლობაა.

გამოკვლევაზე დაყრდნობით იპოვეთ შემდეგი:

ა) 36 სმ^2 ფართობიან მართკუთხედებს შორის უმცირეს პერიმეტრიანი;

ბ) $x > 0$ და $xy = 16$ პირობებში $x + y$ ჯამის უმცირესი მნიშვნელობა.

14» 1) ელშანის ოჯახში გეგმავენ, რომ 3×4 მ-იანი სამზარეულოს იატაკზე დააგონ მეტლაზი, რომლის თითოეულის ფართობი $\frac{3}{10} \text{ მ}^2$ -ია. სულ მცირე რამდენი მეტლაზი უნდა შეიძინონ მათ?

2) ელმარი ელექტრონული საქონლის მაღაზიაში მუშაობს მენეჯერად. იგი იღებს 500 მანეთ მუდმივ ხელფასს და თითოეული კომპიუტერის გაყიდვისთვის 30 მანეთის პრემიას. ელმარი დარწმუნებულია, რომ ამ თვეში სულ მცირე 800 მანეთი ექნება. სულ მცირე რამდენი კომპიუტერი გაუყიდა ელმარს ამ თვეში?

3) თქვენც შეადგინეთ ერთი ისეთი ამოცანა, რომ $\frac{3}{4}x > 9$ უტოლობით ამოიხსნას.

15» ა) შეაფასეთ a გვერდიანი კვადრატის პერიმეტრი, თუ $0,2 < a < 0,3$

ბ) კვადრატის პერიმეტრი P -სმ-ია. შეაფასეთ კვადრატის გვერდის სიგრძე, თუ $12,4 < P < 12,8$

უტოლობების შეკრება და გამრავლება

გამოკვლევა: 1) ანარი ვუსაღზე, თურალი კი ორხანზე უმცროსია. ანარისა და თურალის ასაკების ჯამი ვუსალისა და ორხანის ასაკების ჯამზე ნაკლებია თუ მეტი?

$$2) \begin{array}{r} 3 < 8 \\ + 4 < 6 \\ \hline 7 ? 14 \end{array} \quad \text{უტოლობები წევრ-წევრ შეკრებით და შედეგი განმარტეთ.}$$

რიცხვითი უტოლობების შეკრება

თეორემა. თუ $a > b$ და $c > d$, მაშინ $a + c > b + d$

$a > b$ უტოლობის ორივე მხარეს თუ c -ს მივუმატებთ, $a + c > b + c$.

$c > d$ უტოლობის ორივე მხარეს თუ b -ს მივუმატებთ, $b + c > b + d$.

$a + c > b + c$ და $b + c > b + d$ უტოლობებიდან $a + c > b + d$ მიიღება.

თეორემა ძალაშია ორზე მეტი უტოლობის შეკრების დროსაც.

✓ ერთი და იგივე ნიშნიანი სწორი უტოლობების
შეკრებით ისევ სწორი უტოლობა მიიღება.

$$\begin{array}{r} a > b \\ + c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

რიცხვითი უტოლობების გამრავლება

თეორემა. მარცხენა და მარჯვენა მხარეებში დადებით რიცხვებიანი ერთი და იგივე ნიშნიანი სწორი უტოლობების წევრ-წევრ გამრავლებით სწორი უტოლობა მიიღება.

თუ a, b, c, d დადებითი რიცხვებია და $a > b$ და $c < d$, მაშინ $ac > bd$

თუ $a > b$ უტოლობის ორივე მხარეს c -ზე, ხოლო $c > d$ უტოლობის ორივე მხარეს b -ზე გავამრავლებთ, შესაბამისად მივიღებთ, რომ $ac > bc$ და $bc > bd$ აქედან მიიღება რომ $ac > bd$

შედეგი. თუ a და b დადებითი რიცხვებია და $a > b$, მაშინ $a^n > b^n$ (n ნატურალური რიცხვია).

სასწავლო დაფალებები

1>> უტოლობები წევრ-წევრ შეკრებით.
ა) $8 > 5$ და $6 > 4$

ბ) $-2 < 10$ და $6 < 7$

2>> უტოლობები წევრ-წევრ შეკრებით.
ა) $6 > 3$ და $4 > 2$

ბ) $6 < 8$ და $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

3>> ცნობილია, რომ $4 < a < 6$ და $5 < b < 7$. შეაფასეთ გამოსახულებები.
ა) $a + b$ ბ) ab გ) $2a + 3b$

4 ნიმუშები გამოიკვლიეთ, შეასრულეთ სავარჯიშოები მსგავსი წესით.

1) ცნობილია, რომ $3 < x < 4$ და $6 < y < 8$; შეაფასეთ გამოსახულებები:

ა) $x - y$ ბ) $2x - y$ გ) $x - 3y$ დ) $3x - 2y$

2) ცნობილია, რომ $15 < x < 20$ და $2 < y < 3$ შეაფასეთ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებები:

ა) $\frac{x}{y}$ ბ) $\frac{2x}{y}$ გ) $1 + \frac{3x}{2y}$

ნიმუში 1. ცნობილია, რომ $5 < a < 10$ და $2 < b < 4$ შევაფასოთ $a - b$ სხვაობა, წარმოადგინეთ $a - b = a + (-b)$ სახით.

რადგან $2 < b < 4$ ამიტომ $-2 > -b > -4$ ე.ი. $-4 < -b < -2$.

ახლა შეგვიძლია უტოლობების წევრ-წევრ შეკრების გამოყენება.

$$\begin{array}{r} + 5 < a < 10 \\ -4 < -b < -2 \\ \hline 1 < a - b < 8 \end{array}$$

ნიმუში 2. ცნობილია, რომ $10 < x < 16$ და $4 < y < 5$. შევაფასოთ $\frac{x}{y}$ მნიშვნელობა.

წარმოვადგინოთ $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ სახით. ჯერ, შევაფასოთ $\frac{1}{y}$ გამოსახულება.

რადგან $4 < y < 5$, ამიტომ $\frac{1}{4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$ ანუ $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r} 10 < x < 16 \\ \times \frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4} \\ \hline 2 < \frac{x}{y} < 4 \end{array}$$

უტოლობის წევრ-წევრ გამრავლების თეორემის თანახმად

გამოყენებითი დაფალებები

5 $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ და $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ ამის გამოყენებით შეაფასეთ რიცხვები:

ა) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ბ) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ გ) $\sqrt{6}$

6 ტოლფერდა სამკუთხედის a ფუძისა და b ფერდის სიგრძეების სანტიმეტრობით გამოსახული საზღვრები ცნობილია

$$16 \leq a \leq 18 \text{ და } 24 \leq b \leq 26$$

შეაფასეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი.

7 მართკუთხედის a სიგრძე და b სიგანე (სმ-ობით) გაიზომა, $4,5 < a < 4,6$ და $3,4 < b < 3,5$ იქნა განსაზღვრული. შეაფასეთ:

ა) მართკუთხედის პერიმეტრი;

ბ) მართკუთხედის ფართობი.

8 სამკუთხედის α და β კუთხეების შესახებ ცნობილია $58^\circ \leq \alpha \leq 59^\circ$ და $82^\circ \leq \beta \leq 83^\circ$ შეაფასეთ მესამე კუთხე.

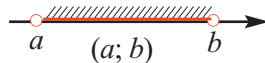
2) ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე 30° -ზე მეტი 32° -ზე ნაკლებია. შეაფასეთ სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხე.

გამოკვლევა. საკოორდინატო წრფეზე აღნიშნეთ წერტილები, რომლის კოორდინატებია -2 და 3 . აიღეთ მათ შორის მდებარე ნებისმიერი წერტილი. აღებული წერტილის შესაბამისი რიცხვი შეადარეთ -2 -სა და 3 -თან. ამ წერტილებს შორის მდებარე ნებისმიერი წერტილის შესაბამისი რიცხვისათვის, შეამოწმეთ $-2 < x < 3$ პირობის დამაკმაყოფილებლობა.

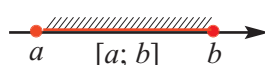
$-2 < x < 3$ წერტილთა სიმრავლეს -2 დან 3 -მდე შუალედი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $(-2; 3)$.

რიცხვითი შუალედები

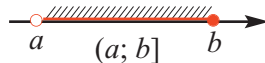
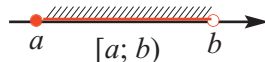
როცა $a < b$ მაშინ $a < x < b$ პირობის დამაკმაყოფილებელ ყველა x ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს $(a; b)$ ინტერვალი ეწოდება.



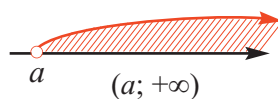
თუ ინტერვალის წერტილთა სიმრავლეს a და b რიცხვებსაც დავუმატებთ, მიღებული შუალედი $[a; b]$ სახით იწერება და მას $[a; b]$ მონაკვეთი ეწოდება.



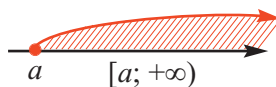
$a \leq x < b$ და $a < x \leq b$ ორმაგი უტოლობის დამაკმაყოფილებელ x რიცხვთა სიმრავლე შესაბამისად. $[a; b)$ და $(a; b]$ სახით აღინიშნება.



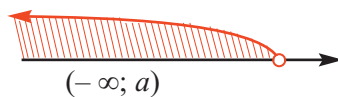
$x > a$ პირობის დამაკმაყოფილებელი ყველა რიცხვთა სიმრავლე a კოორდინატის წერტილის მარჯვნივ მდებარეობს, $(a; +\infty)$ სახით იწერება და ასე იკითხება: შუალედი a -დან პლუს უსასრულობამდე.



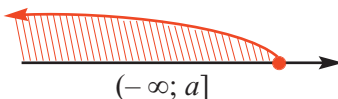
$x \geq a$ პირობის დამაკმაყოფილებელ რიცხვთა სიმრავლეს a კოორდინატის წერტილიც ეკუთვნის. $[a; +\infty)$ სახით იწერება, გრაფიკული გამოსახვა:



$x < a$ პირობის დამაკმაყოფილებელ წერტილთა სიმრავლე $(-\infty; a)$ სახით იწერება და ასე იკითხება: შუალედი მინუს უსასრულობიდან a -მდე. გრაფიკული გამოსახვა:

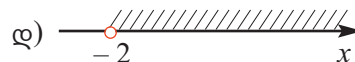
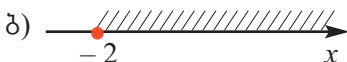
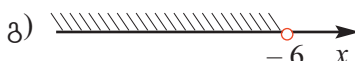
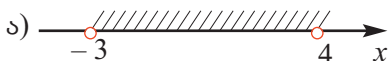


$x \leq a$ პირობის დამაკმაყოფილებელ რიცხვთა სიმრავლეს a კოორდინატის წერტილიც ეკუთვნის. ეს სიმრავლე $(-\infty; a]$ სახით იწერება. გრაფიკული გამოსახვა:



სასწავლო დაჯალებები

1 დაწერეთ სურათზე გამოსახული შუალედები.



- 2» საკოორდინატო წრფეზე გამოსახეთ ქვემოთ მოცემული შუალედები:
 ა) $(-1; 3)$ ბ) $[0; 5)$ გ) $(2; \infty)$ დ) $[3; +\infty)$
 ე) $(-5; +\infty)$ ვ) $(-\infty; -4)$ ზ) $(-\infty; 6]$ თ) $(-2; +\infty)$

- 3» საკოორდინატო წრფეზე გამოსახეთ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი რიცხვითი სიმრავლეები.
 ა) $x \geq -6$ ბ) $x \leq 3$ გ) $x < -6$ დ) $x > 4$

- 4» საკოორდინატო წრფეზე გამოსახეთ ორმაგი უტოლობის დამაკმაყოფილებელი რიცხვითი სიმრავლეები.
 ა) $-2,5 \leq x \leq 3$ ბ) $-5 < x \leq 1\frac{1}{2}$
 გ) $-3 < x < 1,5$ დ) $3 \leq x < 7$

- 5» ა) $-2; 4; -1,2; 4,5; 5$ რიცხვებიდან რომელი ეკუთვნის $(-3; 4,5)$ შუალედს?
 ბ) $-7; -6; -4,5; 0; 1,2; 4$ რიცხვი ეკუთვნის $(-7; 4,1)$ შუალედს?

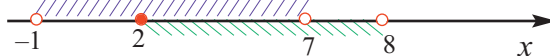
- 6» დაწერეთ მთელი რიცხვები, რომლებიც ეკუთვნის მოცემულ შუალედებს.
 ა) $(-5; 3)$ ბ) $[-2,5; 4)$ გ) $(-\sqrt{11}; \sqrt{30}]$

- 7» უჩვენეთ შუალედის უდიდესი და უმცირესი მთელი რიცხვები.
 ა) $(-12; 8)$ ბ) $(-4; 5,2)$ გ) $[-\sqrt{17}; \sqrt{8}]$

- 8» გამოიკვლიეთ ნიმუში. იპოვეთ მოცემული შუალედების თანაკვეთები.
 ა) $(-2; 5)$ და $(-1; 6)$ გ) $(-3; 9)$ და $(4; +\infty)$
 ბ) $(5; +\infty)$ და $(-\infty; 7)$ დ) $[1; +\infty)$ და $(3; +\infty)$

ნიმუში. ვიპოვოთ $(-1; 7)$ და $[2; 8)$ შუალედების თანაკვეთა (საერთო ნაწილი).

გრაფიკული
გამოსახვა:



მათემატიკური
ჩანაწერი:

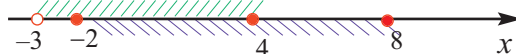
$$(-1; 7) \cap [2; 8) = [2; 7)$$

- 9» რიცხვით ღერძზე უჩვენეთ ქვემოთ მოცემული შუალედების გაერთიანება

- ა) $(-5; 1)$ და $[-2; 5)$ გ) $(-\infty; 2]$ და $[-1; +\infty)$
 ბ) $[-6; 2)$ და $(1; 3)$ დ) $(2; +\infty)$ და $[6; +\infty)$

ნიმუში. ვიპოვოთ $(-3; 4]$ და $[-2; 8]$ შუალედების გაერთიანება.

გრაფიკული
გამოსახვა:



მათემატიკური
ჩანაწერი:

$$(-3; 4] \cup [-2; 8] = [-2; 8]$$

- 10» იპოვეთ ქვემოთ მოცემულები, თუ $A = [-2; 1)$, $B = (0; 3)$, $C = (-1; 2)$
 ა) $A \cup B$ ბ) $A \cap B$ გ) $A \cup C$
 დ) $A \cap C$ ე) $A \setminus B$ ვ) $B \setminus C$
 ზ) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$ თ) $A \setminus (B \cup C)$

ერთცვლადიანი წრფივი უტოლობების ამოხსნა

გამოკვლევა. დახაზეთ მართკუთხედი, რომლის სიგანე 4 სმ-ია.

1) იპოვეთ პერიმეტრი, თუ მართკუთხედის სიგრძე 6 სმ-ია.

2) შეაფასეთ პერიმეტრი, თუ მართკუთხედის სიგრძე 6 სმ-ზე მეტი იქნება.

3) რამდენი სანტიმეტრი უნდა იყოს მართკუთხედის სიგრძე იმისათვის, რომ პერიმეტრი იყოს 24 სმ-ზე ნაკლები?

თუ მართკუთხედის სიგრძეს აღვნიშნავთ x -ით, მისი პერიმეტრისათვის $2x + 8 < 24$ უტოლობის დაწერა შეიძლება. შეამოწმეთ $P < 24$ პირობის დაკმაყოფილება, თუ სიგრძე 6 სმ, 7 სმ, 8 სმ, 9 სმ-ია.

ცვლადის რომელი მნიშვნელობებისათვის $2x + 8 < 24$ უტოლობაა სწორი, რომელი მნიშვნელობებისათვისაა არასწორი?

ერთცვლადიანი წრფივი უტოლობების ამოხსნა

განსაზღვრება. ერთცვლადიანი უტოლობის ამონახსენი ეწოდება ცვლადის ყველა მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომელიც ამ უტოლობას სწორ ტოლობად აქცევს.

უტოლობის ამოხსნა ნიშნავს მისი ყველა ამონახსენის პოვნას ან იმის დამტკიცებას, რომ მას ამონახსენი არა აქვს. უტოლობებს, რომლებსაც ერთი და იგივე ამონახსენთა სიმრავლე გააჩნიათ ტოლფასი უტოლობები ეწოდება.

ამონახსენთა არმქონე უტოლობებიც ტოლფას უტოლობებად ითვლებიან.

უტოლობების ამოხსნისას რიცხვითი უტოლობების თვისებების გამოყენება ხდება.

✓ 1) თუ უტოლობის ერთი ნაწილიდან მეორე ნაწილში შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნით გადავიტანთ, მივიღებთ ტოლფას უტოლობას.

✓ 2) თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთი და იმავე დადებით რიცხვზე, მის ტოლფას უტოლობას მივიღებთ.

მაგალითად, $6x - 2 > 10$ უტოლობა $6x > 12$ უტოლობის, $6x > 12$ უტოლობა კი $x > 2$ უტოლობის ტოლფასია.

✓ 3) თუ უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე უარყოფით რიცხვზე და უტოლობის ნიშანს მოპირდაპირე ნიშნით შევცვლით, მის ტოლფას უტოლობას მივიღებთ.

$ax > b$ და $ax < b$ (სადაც a და b რაიმე რიცხვებია) სახის უტოლობებს ერთცვლადიანი წრფივი უტოლობები ეწოდება.

$ax > b$ უტოლობის ამოხსნა

1) როცა $a > 0$, მაშინ $x > \frac{b}{a}$

2) როცა $a < 0$ მაშინ $x < \frac{b}{a}$

$ax < b$ უტოლობის ამოხსნა

1) როცა $a > 0$ მაშინ $x < \frac{b}{a}$

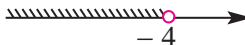
2) როცა $a < 0$ მაშინ $x > \frac{b}{a}$

ნიმუში: $-3x + 6 > 18$

$$-3x > 18 - 6$$

$$-3x > 12 \quad \text{ორივე მხარე გავყოფთ } -3\text{-ზე,}$$

$$x < -4 \quad (-\infty; -4) \text{ შუალედი უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა.}$$

ამონახსენთა გრაფიკული გამოსახვა. 

სასწავლო დაგეგმვები

- 1» ამოხსენით უტოლობები და ამონახსენთა სიმრავლე აღნიშნეთ რიცხვით ღერძზე.
ა) $x - 7 > 0$ ბ) $x + 6 < 0$ გ) $x + 1,5 \geq 0$ დ) $x - 0,6 \leq 0$

- 2» ამოხსენით უტოლობები.
ა) $2x > 11$ ბ) $6x < 18$ გ) $\frac{1}{2}y > -3$
დ) $-2y \leq 15$ ე) $5x \geq 0$ ვ) $-4\frac{1}{2}x \leq -3$

- 3» ამოხსენით უტოლობები.
ა) $6x - 3,2 > 0,4$ ბ) $15 - x < 12 - 4x$ გ) $3 - 4y > 7$
დ) $29 + 5x \leq 17 - 7x$ ე) $3 - 4a \leq 1$ ვ) $3 + 5y \geq 15 + 8y$

- 4» ა) x -ის რა მნიშვნელობისათვის იღებს $2x - 7$ ორწევრი დადებით მნიშვნელობებს?
ბ) y -ის რა მნიშვნელობისათვის იღებს $15 - 3y$ ორწევრი უარყოფით მნიშვნელობებს?
გ) x -ის რა მნიშვნელობისათვის იღებს $3x + 1$ ორწევრი 25-ზე ნაკლებ მნიშვნელობებს?

- 5» ამოხსენით უტოლობები.
ა) $5(x - 2) + 12 > 7 - 3(x + 4)$ გ) $4(x - 1,5) + 1 \geq 6x + 1,2$
ბ) $3(a + 8) - 5(a - 1) < 7$ დ) $4x - (x + 6) - 3(2 - x) \leq 4$

- 6» ამოხსენით უტოლობები.
ა) $0,3(x - 2) - 0,8x > -4,4$ ბ) $\frac{2x - 1}{3} < 5$ გ) $\frac{2}{7}(x - 4) > 3$
დ) $\frac{15 - 3x}{12} \geq 5$ ე) $3 > \frac{6 - x}{4}$ ვ) $\frac{7 - 2x}{2} \geq \frac{3x - 7}{4}$

- 7» ამოხსენით უტოლობები.
ა) $x(x - 3) > x^2 - 6x + 1,2$ გ) $6x(x - 1) - 3x(2x - 2) > 6$
ბ) $3y^2 - y(3y - 4) \leq 16$ დ) $(3y - 1)^2 > (y + 3)(9y - 1)$

- 8» ლეილამ სკანერის დახმარებით 56 სურათი კომპიუტერის მეხსიერებაში უნდა მოათავსოს. მას წუთში 4 სურათი გადააქვს. რამდენი წუთის მუშაობის შემდეგ დარჩება ლეილას 10 სურათზე ნაკლები?

- 9» ნარიმანმა სათაშოვბის მაღაზიაში 50 მანეთიანი სასაჩუქრე ბარათიდან 15 მანეთი დახარჯა. ნარიმანს სურს სასაჩუქრე ბარათზე დარჩენილი თანხით შეიძინოს სახალისო სათვალეები, რომელთაგან თითოეულის ფასი 2, 55 მანეთია. რამდენი სათვალის შეძენა შეუძლია მას?

გამოყენებითი დაგალებები

- 10»** ცვლადის რომელი მნიშვნელობებისათვის: ა) $\frac{5-7y}{3}$ წილადის მნიშვნელობები მეტია $\frac{2-3y}{6}$ წილადის შესაბამის მნიშვნელობებზე?
ბ) $3x-1$ ორწევრის მნიშვნელობა ნაკლებია $\frac{2x+1}{2}$ წილადის შესაბამის მნიშვნელობაზე?
- 11»** ამოხსენით უტოლობები.
ა) $(3-\pi) \cdot (3-2x) > 0$ ბ) $(\sqrt{2}-3) \cdot (5-x) < 0$
გ) $\frac{x-4}{\pi-2} \geq 0$ დ) $\frac{x+1}{\sqrt{3}-2} \leq 0$
- 12»** ა) y -ის რა მნიშვნელობებისათვისაა $\frac{2y-1}{3}$ და $\frac{y+1}{3}$ წილადების ჯამი დადებითი?
ბ) x -ის რა მნიშვნელობებისათვისაა $\frac{2x-1}{2}$ და $\frac{1+x}{3}$ წილადების სხვაობა უარყოფითი?
- 13»** ა) იპოვეთ $3 - (5 - 2x) < 6$ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი უდიდესი მთელი რიცხვი.
ბ) იპოვეთ $4(3-y) < 14,6 - 2y$ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი უმცირესი მთელი რიცხვი.
- 14»** n -ის რა მნიშვნელობებისთვისაა:
ა) $(3-2n) - (5n-26)$ სხვაობა დადებითი?
ბ) $(-18,3+3n) + (7,3+2n)$ ჯამი უარყოფითი?
- 15»** მიმდევრობით აღებული სამი კენტი რიცხვის ჯამი 105-ზე მეტია. იპოვეთ ამ რიცხვებიდან უმცირესი.
- 16»** მართკუთხედის სიგრძე 8 სმ-ია. რამდენი სანტიმეტრი უნდა იყოს მისი სიგანე, რომ პერიმეტრი 7 სმ-იანი გვერდის მქონე კვადრატის პერიმეტრზე ნაკლები იყოს?
- 17»** ტურისტებმა მოტორიანი ნავით მდინარის დინების მიმართულებით იმოდრავეს. ისინი არაუგვიანეს 3 საათისა ბანაკში უნდა დაბრუნებულიყვნენ. მდინარის დინების სიჩქარე 2 კმ/სთ, ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში კი 18 კმ/სთ თუ იქნებოდა, რა მანძილზე შეიძლება დაშორებულიყვნენ ტურისტები ბანაკიდან?
- 18»** ერთმანეთისაგან 45 კმ-ით დაშორებული ორი პუნქტიდან ერთდროულად, ერთ-მანეთის შემხვედრი მიმართულებით ორმა ველოსიპედისტმა დაიწყო მოძრაობა. პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე 12 კმ/სთ იყო. რა სიჩქარით უნდა ემოძრავა მეორე ველოსიპედისტს, რომ ისინი ორ საათზე ნაკლებ დროში შეხვედროდნენ ერთმანეთს?

19 გამოკვლევები უჩვენებს, რომ ბარგის ტარებისათვის ყველაზე მეტად გამოყენებული ჩანთის სახე არის ზურგჩანთა. თუმცა ამ სახის ჩანთის სისტემატურ გამომყენებლებს რეკომენდაცია ეძლევათ, რომ მიაქციონ ყურადღება მის სიმძიმეს. სავსე ჩანთის მასა, მისი მატარებელი ადამიანის წონაზე სულ მცირე 3-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს. წარმოიდგინეთ, თქვენი წონა 54 კგ-ია, ცარიელი ჩანთის წონა 4 კგ-ია. ყველაზე მეტი, რამდენი კილოგრამი ტვირთი შეიძლება ჩააწყოთ ჩანთაში?

20 ილიამ სამუშაოზე სადილისათვის საკრედიტო ბარათზე ამ თვეში 80 მანეთი ჩარიცხა. რამდენი დღის შემდეგ დარჩება ილიას საკრედიტო ბარათზე 20 მანეთზე ნაკლები თანხა, თუ სადილის ფასი 4 მანეთი და 50 კაპიკია? დაწერეთ უტოლობა და ამოხსენით.

21 n -კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი $180^\circ(n - 2)$ ფორმულით გაიანგარიშება. სულ მცირე რამდენი გვერდი უნდა ჰქონდეს მრავალკუთედს, რომ მისი შიგა კუთხეების ჯამი 900° -ზე მეტი იყოს?

22 ტურისტმა 4 კმ/სთ სიჩქარით დაიწყო მოძრაობა და ბანაკიდან 24 კმ მანძილზე მეორე ქალაქისაკენ გაემართა. 2 სთ-ის შემდეგ იმავე გზით მეორე ტურისტი გავიდა, რა სიჩქარით უნდა იმოძრაოს მეორე ტურისტმა, რომ ქალაქში პირველ ტურისტზე ადრე ჩავიდეს?

23 16 მოსწავლის დაჯილდოვებისათვის სურათებიანი წიგნები და ხატვის რვეული შეიძინეს. სურათებიანი წიგნი 1 მანეთი და 50 კაპიკი, სახატავი რვეული კი 80 კაპიკია. რამდენი სურათებიანი წიგნის შეძენაა საჭირო, რომ შეძენილი საჩუქრების ფასი 17 მანეთზე მეტი არ აღმოჩნდეს?

24 რეზადმა მობილური ტელეფონით საუბრის მომსახურებისათვის ყოველთვე 10 მანეთი და დამატებით ყოველი წუთისათვის 0.02 მანეთი უნდა გადაიხადოს. იგი ეცდება, ამ თვეში მომსახურების ხარჯმა 25 მანეთს არ გადააჭარბოს. ამისათვის, არაუმეტეს რამდენი წუთი უნდა ისაუბროს რეზადმა?

25 მოცემული უტოლობის შესაბამისად შეადგინეთ ამოცანა.

ა) $3(x + 6) \leq 30$

ბ) $3x + 6 \geq 350$

26 $y = -\frac{1}{3}x$ ფუნქციაა მოცემული. x -ის რა მნიშვნელობებისათვის ხდება:

ა) $y = 0$; ბ) $y > 0$; გ) $y < 0$?

27 x -ის რა მნიშვნელობებისათვის იღებს $y = 3x - 15$ ფორმულით მოცემული ფუნქცია ა) დადებით მნიშვნელობებს; ბ) უარყოფით მნიშვნელობებს?

28 ცვლადის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს გამოსახულებას აზრი?

ა) $\sqrt{2x - 7}$

ბ) $\sqrt{6 - 2x}$

გ) $\sqrt{\frac{2}{3}x + 1}$

ორმაგი უტოლობები		
სიტყვიერი ჩანაწერი 2-ზე მეტი და 5-ზე ნაკლები ყველა ნამდვილი რიცხვი	მათემატიკური ჩანაწერი $x > 2 \text{ და } x < 5$ $2 < x < 5$	გრაფიკული გამოსახვა
2-ზე არანაკლები და არაუმეტეს 5-ის ყველა ნამდვილი რიცხვი	$x \geq 2 \text{ და } x \leq 5$ $2 \leq x \leq 5$	
2-ზე ნაკლები ან 6-ზე მეტი ყველა ნამდვილი რიცხვი	$x < 2 \text{ ან } x > 6$	
არაუმეტეს 2-ისა ან არანაკლებ 6-ისა ყველა ნამდვილი რიცხვი	$x \leq 2 \text{ ან } x \geq 6$	

ნამუში 1. $-2 < x + 4 < 1$ უტოლობა დავეწყოთ ორი უტოლობის სახით

$$-2 < x + 4 \leq x + 4 < 1$$

ზუნდა მოვძებნოთ x -ის ისეთი მნიშვნელობები, რომ $-2 < x + 4$ და $x + 4 < 1$ უტოლობები სწორდებათ.

სწორი აღმოჩნდება.

–2 სწორი პასუხები 4. < 1

-4 -4 -4 -4

$$-6 < x \text{ and } x < -3$$

$$x > -6 \text{ and } x < -3$$

$$-6 < x < -3$$

Ֆակտոր: $(-6; -3)$

$x > -6$ 

$x < -3$



$(-6; -3)$ 

မာမာနာမာ 2. $-3 + x > 0$ နှင့် $-3 + x < -4$

უნდა ამოვხსნათ ორივე უტოლობა და ვიპოვოთ ამონახსენთა სიმრავლეების გაერთიანება.

$$-3 + x > 0 \text{ and } -3 + x < -4$$

+3 +3 +3 +3

$$x > 3 \text{ and } x < -1$$

პასუხი:

$$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$$

ამოხსნის გრაფიკული გამოსახვა:

$x > 3$



A number line with tick marks from -5 to 5. A red circle is placed at 3, and a red arrow points to the right from this circle, indicating the solution set $x > 3$.

A number line with tick marks from -5 to 5. A red line segment is drawn on the number line from -5 to -1, with a red circle at -1. A blue dashed vertical line is drawn at -1. The region to the left of -1 is shaded with blue diagonal lines.

$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

ᐅᐃᓂᓂ 3. $-7 < 2x + 1 \leq 17$

$$\underset{-1}{-7} < \underset{-1}{2x} + \underset{-1}{1} \leq 17 \quad \text{I გამოგებლობა}$$

$$-8 < 2x \leq 16 \quad \text{2-ზე გაყვით.}$$

$-4 < x \leq 8$ **Ֆակտոր:** $(-4 : 8]$

ამოცხსნათ ორმაგი უტოლობები
უტოლობის თვისებების გამოყენებით.

სასწავლო დაფალებები

1 უტოლობები გამოსახეთ გრაფიკულად.

1) $x > 5$ და $x \leq 9$

2) $s < -7$ და $s \leq 0$

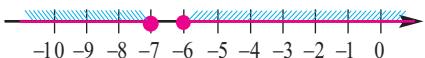
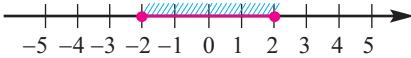
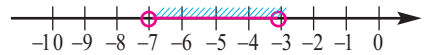
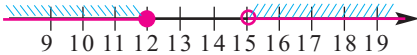
3) $r < 5$ ან $r > 9$

4) $m \leq -4$ ან $m > 6$

5) $7 < d < 11$

6) $-1 \leq g < 3$

2 გრაფიკული გამოსახვის შესაბამისად დაწერეთ უტოლობები.



3 ამოხსენით უტოლობები და გრაფიკულად გამოსახეთ.

1) $k - 4 > 3$ ან $k - 4 \leq 1$

2) $d - 10 < -2$ ან $d + 3 > 12$

3) $3 < 2x - 3 < 15$

4) $4 < 2y - 2 < 10$

5) $3t - 7 \geq 5$ და $2t + 6 \leq 12$

6) $8 > 5 - 3n$ და $5 - 3n > -13$

7) $1 + y \leq 3$ ან $1 - y \leq -4$

8) $3t + 1 \leq 13$ ან $3 - 3t \leq -12$

4 დაწერეთ პირობის შესაბამისი უტოლობები.

1) მოცემული რიცხვისა და 5-ის სხვაობა 14-ზე ნაკლებია და 5-ზე მეტია.

2) რიცხვის ორმაგისა და 3-ის ჯამი 8-ისა და 12-ს შორისაა.

3) რიცხვითი სიდიდის 5-მაგი ან 30-ზე მეტია ან კიდევ 10-ზე ნაკლები.

გამოყენებითი დაფალებები

5 დაწერეთ სიტუაციის შესაბამისი უტოლობები.

ა) აზერბაიჯანის ზოგიერთ რეგიონებში წლიურად მოსული ნალექი არის 300 მილიმეტრი ან უფრო ნაკლები, ზოგიერთ ადგილებში კი 700 მილიმეტრზე მეტია.

ბ) 9000 მ სიმაღლეზე მფრინავი თვითმფრინავის მეთაურმა მართვის ცენტრს მიაწოდა ინფორმაცია, რომ ღრუბლიანობის გამო უნდა იფრინონ ან 10000 მეტრს ზევით ან კიდევ 7000 მ-ის ქვევით.

6 წყალი ატმოსფეროში გვხვდება კრისტალურ, თხევად და ორთქლისებურ მდგომარეობაში. როცა ტემპერატურა 0°C -ზე დაბალია წყალი იყინება, 100°C -ზე ან იმის ზევით წყალი ორთქლად იქცევა, გაზის მდგომარეობაშია. უტოლობის სახით დაწერეთ წყლის თხევად მდგომარეობაში ყოფნის ტემპერატურა.

7 დაწერეთ $x < 5$ და $x > 3$ უტოლობისა და $x < 5$ და $x > 3$ უტოლობებს შორის განსხვავებები.

8» ფერმანს საბანკო ანგარიშზე 100 მანეთი ფული აქვს და ბანკი ყოველთვიურად მის ანგარიშზე 15 მანეთს ამატებს. გულნაზს ანგარიშზე 155 მანეთი აქვს და ბანკი ამ ანგარიშზე თვეში 12 მანეთს ამატებს. რამდენი თვის შემდეგ იქნება ფერმანის ანგარიშზე უფრო მეტი ფული, ვიდრე გულნაზის ანგარიშზე?

9» ამოხსენით უტოლობები.

ა) $-2 \leq x + 3 < 9$

ბ) $-3 \geq x - 1$ და $x - 5 > 2$

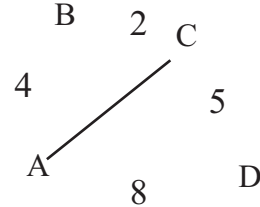
გ) $-2x > -8$ და $x + 7 \geq 6$

დ) $m + 2 < -1$ ან $m - 2 > 6$

ე) $-2 > r + 2$ ან $r + 4 < 5$

ვ) $5 > y + 9$ ან $y - 4 > 2$

10» ABCD ოთხკუთხედში მოცემული გვერდების მიხედვით, რა მთელი მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს AC დიაგონალმა?



11» ამოხსენით ორმაგი უტოლობა და უჩვენეთ სამი რიცხვი ამ ამოხსნიდან.

ა) $-7,5 \leq \frac{7x+6}{2} \leq 20,5$

ბ) $-2 \leq \frac{3x+1}{7} \leq 0$

გ) $-1 < \frac{3-x}{3} < 5$

დ) $-3,5 \leq \frac{1-3x}{2} \leq 2,5$

12» მეჭმედი ფიქრობს, რომ ორ ტესტში საშუალოდ სულ მცირე 93 ქულას მიიღებს. მან პირველ ტესტში 90 ქულა მიიღო. მაქსიმუმ 100 ქულიან მეორე ტესტში რამდენი ქულა უნდა მიიღოს, რომ მიზანს მიაღწიოს?

13» ასლანმა ორ ტესტში 81 ქულა და 90 ქულა მოაგროვა. იმისათვის, რომ მისი საშუალო ქულა იყოს 85-სა და 95-ს შორის, დაწერეთ მესამე ტესტში მოსაპოვებელი ქულის უტოლობა და ამოხსენით (მაქსიმალური ქულა 100-ია).

შემაჯავებელი გამოცემა

14» ძაღლების ყნოსვის უნარი ადამიანების ყნოსვის უნარზე 1000-ჯერ ძლიერია, თუმცა დანახვის უნარი ადამიანთან შედარებით ძალიან დაბალია. ძაღლისა და ადამიანის მოსმენის უნარის შესახებ ცხრილში ინფორმაცია მოცემული. ხმის ტალღები მისი სისწრაფით ფასდება და საზომი ერთეული ჰერცი.



1) დაწერეთ ძაღლისა და ადამიანის მოსმენის სისწრაფის ინტერვალის გამომსახველი ორმაგი უტოლობები.

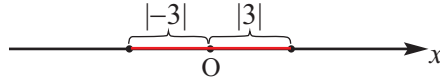
2) რომელ ინტერვალში ემთხვევა ერთმანეთს ძაღლისა და ადამიანის მოსმენის სისწრაფე.

3) ჩაწერეთ ხმის სისწრაფის ისეთი ინტერვალი, რომ ამ ინტერვალში ძაღლს ესმოდეს, ადამიანს არა.

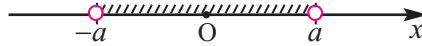
	მოსმენის სისწრაფე (ჰერცი)
ადამიანი	20-20000
ძაღლი	15-50000

ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი მარტივი უტოლობები

გეომეტრიულად, $|x| < 3$ უტოლობა 0 წერტილიდან 3 ერთეულზე ნაკლებ მანძილზე არსებულ ყველა წერტილს უჩვენებს. ეს -3-სა და 3-ს შორის არსებული ყველა ნამდვილი რიცხვია და $-3 < x < 3$ სახით იწერება.



როცა $a > 0$ $|x| < a$ უტოლობა გეომეტრიულად 0 წერტილიდან ისეთ x წერტილამდე მანძილს გამოსახავს, რომ ეს მანძილი a -ზე ნაკლები იყოს. ეს კი $(-a; a)$ ინტერვალში არსებული წერტილებისაგან შედგება.

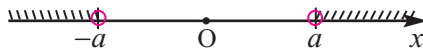


მაშასადამე, $|x| < a$ უტოლობა $-a < x < a$ ორმაგი უტოლობის ტოლფასია.

ამის მსგავსად, $|x| \leq a$ უტოლობა $-a \leq x \leq a$ ორმაგი უტოლობის ტოლფასია.

როცა $a > 0$ $|x| > a$ უტოლობა კი ათვლის სათავიდან a მანძილზე მეტად დაშორებული ყველა x წერტილის სიმრავლეა.

მაშასადამე, $|x| > a$ უტოლობა $x < -a$ და $x > a$ უტოლობების დამაკმაყოფილებელი ყველა წერტილის სიმრავლის გაერთიანებით მიღებული $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$ სიმრავლეა.



სასწავლო დავალებები

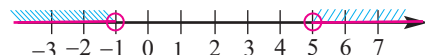
- 1) $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$ რიცხვებიდან რომლები აკმაყოფილებენ :
- ა) $|x| < 2$ ბ) $|x| > 1$ გ) $|x| \leq 3$ დ) $|x| > 4$
- უტოლობას?

- 2) ამოხსენით უტოლობები.
- ა) $|x| < 4$ ბ) $|x| \leq 2$ გ) $|x| < -1$ დ) $|x| < 5$
- ე) $|x| > 4$ ვ) $|x| > 2$ ზ) $|x| > -1$ თ) $|x| > 0$

- 3) ამოხსენით ნიმუშის მსგავსი ხერხით.
- ა) $|x - 2| > 2$ ბ) $|x - 1| > 3$ გ) $|2x - 5| \geq 3$
- დ) $|2x + 1| > 5$ ე) $|7x - 2| \geq 5$ ვ) $|3x - 1| > 8$

ნიმუში. ამოვხსნათ $|x - 2| > 3$ უტოლობა. $|x - 2| > 3$ მაშინაა სწორი, როცა $x - 2 < -3$ ან $x - 2 > 3$ უტოლობაა სწორი. პირველი უტოლობიდან $x < -1$, მეორედან კი $x > 5$

პასუხი: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$



4 ამოხსენით ნიმუშის შესაბამისად.

ა) $|x - 5| < 1$

ბ) $|x + 1| < 3$

გ) $|2x - 1| \leq 7$

დ) $|3x + 2| < 8$

ე) $|7x - 2| \leq 5$

ვ) $|3x - 1| < 8$

ნიმუში : ამოხსენით უტოლობა $|2x - 3| < 7$.

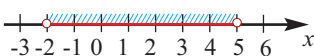
$$-7 < 2x - 3 < 7 \quad \text{მიუმატოთ 3}$$

$$-4 < 2x < 10 \quad \text{გაყვით 2-ზე}$$

$$-2 < x < 5$$

პასუხი : $(-2 ; 5)$

ამოხსნის გრაფიკული გამოსახვა:



5 სტანდარტის თანახმად ყუთებში 450 გრ ბრინჯია. ყუთებზე აღნიშნულია 450 გრ ± 14 გრ ინფორმაცია: ამ ინფორმაციის თანახმად ერთ ყუთში ბრინჯის ნამდვილი მასა რომელ ინტერვალში იცვლება?

ამოხსნის ნიმუში.

სიტყვით ჩაწერა:

სტანდარტი 450 გრ

სინამდვილეში x

აბსოლუტური ცდომილება. ± 14

$| \text{სტანდარტულ მასას} - \text{ნამდვილი მასა} | \leq | \text{აბსოლუტური ცდომილება} |$

მათემატიკური ჩაწერა:

$$|x - 450| \leq 14$$

$$-14 \leq x - 450 \leq 14$$

$$436 \leq x \leq 464$$

6 საცურაო აუზში წყლის 7,5 pH დონეზე შენარჩუნებაა რეკომენდირებული. დასაშვებია 0,3 pH გადახრა. დაწერეთ შესაბამისი უტოლობა.

7 ჯანმრთელობის ცენტრში საწევრო გადასახადი 25 მანეთია. თუმცა ზოგიერთი საქმიანობის დამატებით ან გამოკლებით ეს ფასი 5 მანეთამდე შეიძლება შემცირდეს და შეიძლება გაიზარდოს. უტოლობით დაწერეთ ფასის ცვლილების მოდული.

8 ამოხსენით უტოლობები.

1) $\left| \frac{2p - 8}{4} \right| \geq 9$

2) $\left| \frac{7c + 3}{2} \right| \leq -5$

3) $\left| \frac{2g + 3}{2} \right| > -7$

4) $|-6r - 4| < 8$

5) $|-3p - 7| > 5$

6) $|-h + 1,5| < 3$

9 a -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე? ა) $|x + 1| \geq a - 2$ ბ) $|x - 3| > a + 1$

10 დაწერეთ უტოლობები ორმაგი უტოლობის სახით და ამოხსენით.

ა) $|x + 8| < 5$

ბ) $|9 - x| > 21$

გ) $|10 - 3x| \geq 17$

დ) $|11 - 2x| \geq 13$

ე) $|x + 5| \leq 9$

ვ) $|14x + 10| < 18$

11 სიჩქარის მაკონტროლებელი მოწყობილობა საათში 55 კმ სიჩქარით მოძრავი ავტომობილის სიჩქარის ცვლილებას 3 კმ/სთ-ის ფარგლებში არეგულირებს. დაწერეთ შესაბამისი უტოლობა.

12 უტოლობებიდან რომელს არა აქვს ამონახსენი, რომელს აქვს ამონახსენი? ამოხსნა გამოსახეთ რიცხვით ღერძზე.

ა) $|m + 4| < -2$

ბ) $|-2c - 3| > -4$

გ) $|-h + 1,5| < 3$

- 1 ავტომობილების გამქირავებელი A კომპანიის ქირა ყოველდღიურად 4 მანეთი და ყოველ კილომეტრზე 0,25 მანეთია. B კომპანია კი ყოველდღიურად 25 მანეთსა და თითოეულ კილომეტრისათვის 0,15 მანეთს ითხოვს. დღეში რამდენი კილომეტრი მანძილის გამგელები კლიენტისთვის არის A კომპანიის შემოთავაზება უფრო ხელსაყრელი, ვიდრე B კომპანიის შემოთავაზება?

A კომპანია:

B კომპანია:

დღიური ქირა + 1 კმ-ის ფასი x გავლილი მანძილი კმ-ობით.

$$4 + 0,25x < 25 + 0,15x$$

$$0,25x - 0,15x < 25 - 4$$

$$0,1x < 21$$

$$\frac{0,1x}{0,1} < \frac{21}{0,1}$$

$$x < 210$$

< დღიური ქურა + 1 კმ-ის ფასი x გავლილი მანძილი კმ-ობით.

დღეში 210 კმ-მდე მანძილის გამგელები-სათვის A კომპანიის შემოთავაზება არის უფრო ხელსაყრელი. შევამოწმოთ:

მაგალითად, თუ $x = 200$ კმ-ს

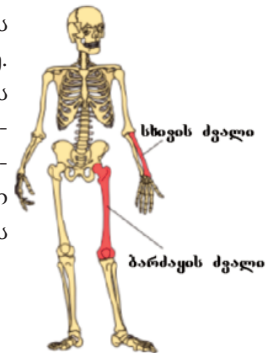
A კომპანია: $4 + 0,25 \cdot 200 = 54$,

B კომპანია: $25 + 0,15 \cdot 200 = 55$

$$54 < 55$$

- 2 კომპანია გეგმავს ახალი პრინტერის შეძენას. A პრინტერის ფასი 85 მანეთია, ყოველი ფურცლის ამობეჭდვის ხარჯი 0,05 მანეთია. B პრინტერის ფასი კი 215 მანეთია და ყოველი ფურცლის ამობეჭდვის ფასი 0,01 მანეთია. რომელი პირობების ფარგლებში იქნება B პრინტერის შეძენა უფრო ხელსაყრელი?

- 3 სამედიცინო ექსპერტიზის სპეციალისტებს ადამიანის ძვლების გაზომვით შეუძლიათ ივარაუდონ მისი სიმაღლე. ახალგაზრდა გოგონას სიმაღლე ბარძაყის ძვლის სიგრძის მიხედვით $|h - (2,47f + 54,10)| \leq 3,72$ უტოლობიდან, ახალგაზრდა ბიჭის სიმაღლე კი სხივის ძვლის სიგრძის მიხედვით $|h - (3,32r + 85,43)| \leq 4,57$ უტოლობის გამოყენებით სავარაუდოდ განისაზღვრა შეიძლება, სადაც, f -ბარძაყის ძვალია, r -სხივის ძვლის სიგრძეა, h -სიმაღლეს გვიჩვენებს.



- ა) რომელ ინტერვალში შეიძლება იყოს ქალის სიმაღლე, თუ მისი ბარძაყის ძვლის სიგრძე 30,25 სმ-ია?
 ბ) რომელ ინტერვალში შეიძლება ვივარაუდოთ ახალგაზრდის სიმაღლე თუ მისი სხივის ძვლის სიგრძე 25,45 სმ-ია?

- 4 ტემპერატურის ფარენგეიტის ზომის ერთეულსა და ცელსიუსის ერთეულს შორის კავშირი $F = \frac{9}{5}C + 32$ სახისაა. ტემპერატურა დღის განმავლობაში 65° -დან 115° ფარენგეიტამდე შეიცვალა. გამოსახეთ ტემპერატურის ცვლილება ცელსიუსებში.

5» ამოხსენით უტოლობები.

ა) $|x - 3| < 2$

ბ) $|x + 1| < 5$

გ) $|y - 5| \leq 1$

დ) $|2x - 3| \leq 7$

ე) $|7x + 5| < 16$

ვ) $|4x + 1| < 5$

6» a -ს რა მნიშვნელობისათვის არა აქვს ამონახსენი უტოლობას? უჩვენეთ a -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ უტოლობას ჰქონდეს ამონახსენი და ამოხსენით.

ა) $|x - 2| < a - 1$

ბ) $|x + 3| \leq a + 1$

7» $|3 - 2x| < 5$ იპოვეთ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი უდიდესი მთელი რიცხვისა და უმცირესი მთელი რიცხვის ნამრავლი.

8» ერთმანეთის მომდევნო სამი მთელი რიცხვის ჯამი 63-სა და 81-ს შორისაა. დაწერეთ ამ პირობის დამაკმაყოფილებელი რიცხვთა სიმრავლე.

9» მართკუთხედის ფორმის ქაღალდის სიგრძე სიგანეზე 2-ჯერ მეტია. ფურცლის ყოველი მხრიდან 1 სმ-ის ჩამოჭრის შემდეგ ფურცლის პერიმეტრი არაუმეტეს 1 მ-ია. იპოვეთ ამოჭრილი მართკუთხედის უდიდესი ზომები.

10» რიცხვით ღერძზე ასახეთ იმ უტოლობების ამონახსნები, რომელთა ამონახსნებიც ცარიელ რიცხვთა სიმრავლე არაა.

$2x + 3 > 1$

$2t + 7 \geq 13$

$-5 < 1 - 2k < 3$

$5x - 9 \geq 6$

$5t - 4 < 6$

$-6 \leq 5 - 3m \leq 7$

$|12 - x| \leq 9$

$|16 - x| \geq 10$

$-3 < 2 - \frac{d}{3} \leq -1$

11» მეტროს ხაზის სიგრძე 9 კმ-ია. მატარებელი პირველ და ბოლო სადგურებს შორის 6 სადგურში ჩერდება. მატარებელი გაჩერებებთან ერთად ამ მანძილს არაუმეტეს 20 წუთში გადის. მაქსიმუმ რამდენ წუთს გაჩერდება მატარებელი თითოეულ სადგურში, თუ მატარებლის მოძრაობის სიჩქარე საათში 36 კმ-ია?

12» გამოსახეთ რიცხვით ღერძზე. შესაბამისი უტოლობები დაწერეთ ორმაგი უტოლობის ან ორი ცალ-ცალკე უტოლობის სახით:

1) -5 -ზე ნაკლები ან 8 -ზე მეტი ყველა ნამდვილი რიცხვი;

2) 3 -ზე მეტი და 8 -ზე ნაკლები რიცხვები.

13» ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის აქვს გამოსახულებას აზრი?

ა) $\sqrt{12 - 3x}$

ბ) $\sqrt{2x + 15}$

გ) $\sqrt{(1 - \sqrt{6})(x - 6)}$

დ) $\sqrt{(3 - \sqrt{8})(8 - x)}$

ე) $\sqrt{|x - 1| - 2}$

ვ) $\sqrt{3 - |x - 1|}$

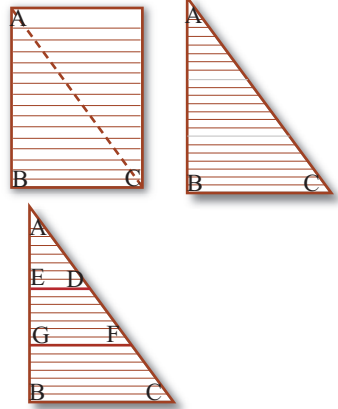
მართკუთხა სამკუთხედი და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

პრაქტიკული მეცადინეობა. 1. ერთი ქაღალდის ფურცელი დიაგონალზე გადაკეცეთ და გაჭერით. მიღებულ მართკუთხა სამკუთხედს $\triangle ABC$ დაარქვით.

2. ქაღალდი 2-ჯერ ისე გადაკეცეთ, რომ AB გვერდზე მართობული მონაკვეთების ნიშნები დარჩეს. ეს ნიშნები ფანქრით გაავლეთ.

3. D, E, F და G წერტილები აღნიშნეთ. $AC, AB, BC, AF, AG, FG, AD, AE$ და DE მონაკვეთების სიგრძეები სახაზავით მმ-ის სიზუსტით გაზომეთ.

4. ჩატარებული გაზომვების საფუძველზე შეფარდებები დაწერეთ. შედეგი მეათიათასედებამდე სიზუსტით დაამრგვალეთ და ცხრილი შეავსეთ.



$\triangle ABC$	$\triangle AED$	$\triangle AGF$
$\frac{BC}{AC} \approx$ 	$\frac{ED}{AD} \approx$ 	$\frac{GF}{AF} \approx$
$\frac{AB}{AC} \approx$ 	$\frac{AE}{AD} \approx$ 	$\frac{AG}{AF} \approx$
$\frac{BC}{AB} \approx$ 	$\frac{ED}{AE} \approx$ 	$\frac{GF}{AG} \approx$

5. შეფარდებების შესახებ მოსაზრებები განაზოგადეთ.

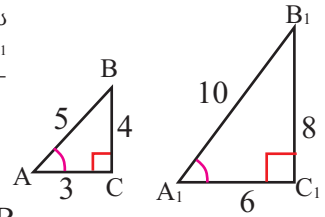
6. ამ სამკუთხედებში $\angle A$ -ს შესახებ რომელი მოსაზრებების გამოთქმა შეიძლება?

ტრიგონომეტრია ძველი ბერძნული სიტყვაა. **ტრიგონონ**-სამკუთხედს, **მეტრონ**-გაზომვას ნიშნავს. ზემოთ აღნიშნულ შეფარდებებს-მართკუთხა სამკუთხედში ორი გვერდის შეფარდებას ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები ეწოდება და ამ თანაფარდობებიდან (ამ შემთხვევაში A კუთხის მიმართ) თითოეულს სპეციალური სახელი და მოკლე ჩაწერის ფორმა აქვს: *სინუსი* - $\sin$, *კოსინუსი* - $\cos$, *ტანგენსი* - tg .

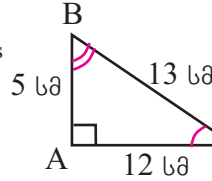
ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები		
მახვილი კუთხის სინუსი ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტის ჰიპოტენუსასთან შეფარდების ტოლია.	$\sin \angle A = \frac{\text{მოპირდაპირე კათეტი}}{\text{ჰიპოტენუსა}}$	$\sin \angle A = \frac{BC}{AB}$
მახვილი კუთხის კოსინუსი ამ კუთხის მიმდებარე კათეტის ჰიპოტენუსასთან შეფარდების ტოლია.	$\cos \angle A = \frac{\text{მიმდებარე კათეტი}}{\text{ჰიპოტენუსა}}$	$\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$
მახვილი კუთხის ტანგენსი ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტის მიმდებარე კათეტთან შეფარდების ტოლია.	$\operatorname{tg} \angle A = \frac{\text{მოპირდაპირე კათეტი}}{\text{მიმდებარე კათეტი}}$	$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}$

მართკუთხა სამკუთხედი და ტრიგონომეტრიული თანადარობები

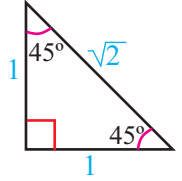
- 1** სურათზე მოცემული $\triangle ABC$ და $\triangle A_1B_1C_1$ (გგვ ნიშნის თანახმად) მსგავსი სამკუთხედებია. იპოვეთ A და A_1 კუთხეების სინუსი კოსინუსი და ტანგენსი. მოსაზრებები განაზოგადეთ.



- 2** სურათის მიხედვით გამოთვალეთ: ა) $\sin \angle C$, $\cos \angle C$, $\tan \angle C$; ბ) $\sin \angle B$, $\cos \angle B$, $\tan \angle B$.

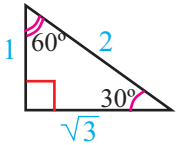


- 3** 45° ; 45° ; 90° კუთხეებიანი სამკუთხედის გვერდების სიგრძეების გამოყენებით იპოვეთ 45° -იანი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

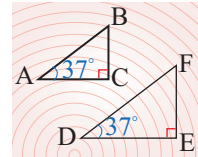


- 4** 30° , 60° , 90° -ის ტოლი კუთხეებიანი სამკუთხედის გზომების გამოყენებით იპოვეთ: ა) 30° -ის; ბ) 60° -ის ტოლი კუთხეების სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი.

- 5** ამ ორი დავალების შედეგების მიხედვით შეადგინეთ 30° , 45° , 60° კუთხეების $\sin$, $\cos$, $\tan$ -ის მაჩვენებელი ცხრილი.



- 6** სვინე ამბობს, რომ $\triangle DEF$ -ში $\angle D$ -ს სინუსი $\triangle ABC$ -ში $\angle A$ -ს სინუსზე მეტია. რადგან $\triangle DEF$ არის $\triangle ABC$ სამკუთხედზე მეტი. საბინეს მოსაზრების მიმართ დამოკიდებულება ზეპირად და წერილობით გადმოეცით.



- 7** მახვილი კუთხის სინუსი ან კოსინუსი ერთზე მეტი შეიძლება იყოს? მახვილი კუთხის ტანგენსი ერთზე მეტი ან ნაკლები, ან კიდევ ერთის ტოლი შეიძლება იყოს?

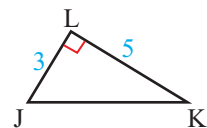
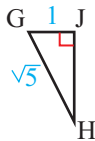
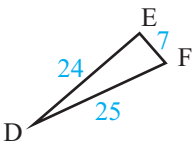
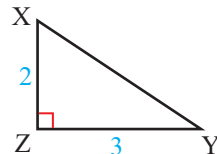
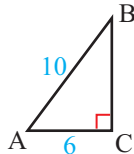
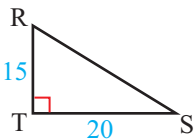
- 8** ქვემოთ მოცემულების მიხედვით ააგეთ კუთხეები.

1) $\tan \angle A = \frac{4}{3}$

2) $\sin \angle A = \frac{3}{5}$

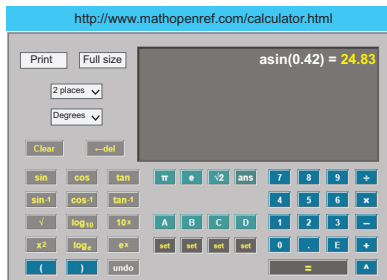
3) $\cos \angle A = \frac{3}{5}$

- 9** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი. შედეგი საჭიროების შემთხვევაში მათედებამდე დაამრგვალოთ.



მართკუთხა სამკუთხედი და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

მოცემული კუთხეების სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის გაანგარიშება, ამასთან მოცემული ტრიგონომეტრიული შეფარდების მიხედვით კუთხის გრადუსული ზომის მოძებნისათვის <http://www.mathopenref.com/calculator.html> სახის სპეციალური კალკულატორი გამოიყენება.



1) სურათზე 74° -იანი კუთხის სინუსის მოძებნის წესია მოცემული. ანალოგიური წესით მისი კოსინუსი და ტანგენსი კალკულატორით გამოითვლება.

2) $\sin \angle A = 0,42$ მონაცემის მიხედვით $\angle A$ -გრადუსული ზომის მოძებნისათვის $\sin^{-1}(\cos^{-1}, \tan^{-1})$ კლავიშის გამოყენება არის საჭირო. ამ შემთხვევაში გამოთვლა მეასედის სიზუსტის მიხედვით ხდება. მენიუში მძიმის შემდეგ ციფრების რაოდენობის მიხედვით გამოთვლის სიზუსტის შერჩევა შეიძლება.

ნიმუში	კლავიატურის დილაკები	კალკულატორის ჩვენება
$\sin 74^\circ$		0,97
$\sin \angle A = 0,42$		24,83

10 ა) კალკულატორის დახმარებით გამოთვალეთ მეასედების სიზუსტით.

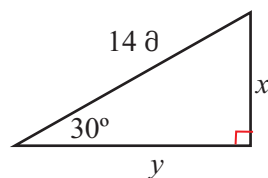
- | | | | |
|--------------------|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| 1) $\cos 70^\circ$ | 3) $\operatorname{tg} 2^\circ$ | 5) $\sin 78^\circ$ | 7) $\cos 36^\circ$ |
| 2) $\cos 23^\circ$ | 4) $\cos 63^\circ$ | 6) $\sin 56^\circ$ | 8) $\operatorname{tg} 66^\circ$ |

ბ) კალკულატორით იპოვეთ კუთხეების გრადუსული ზომები მებათედების სიზუსტით.

- | | | |
|--|--|----------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} \angle A = 0,5095$ | 3) $\operatorname{tg} \angle B = 1,4653$ | 5) $\cos \angle A = 0,25$ |
| 2) $\sin \angle A = 0,35$ | 4) $\cos \angle A = 0,135$ | 6) $\sin \angle A = 0,135$ |

11 ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეების, გვერდების სიგრძის პოვნა შეიძლება.

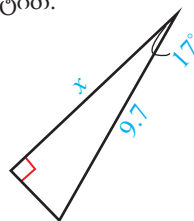
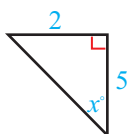
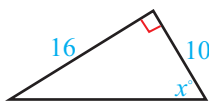
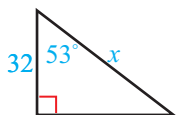
მაგალითად, ვიპოვოთ სურათზე მოცემული მართკუთხა სამკუთხედის უცნობი გვერდი და კუთხე.



$$\sin 30^\circ = \frac{x}{14} \quad x = 14 \cdot \sin 30^\circ = 14 \cdot 0,5 = 7 \text{ (მ)}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{14} \quad y = 14 \cdot \cos 30^\circ \approx 14 \cdot 0,866 = 12,124 \text{ მ} \approx 12 \text{ (მ)}$$

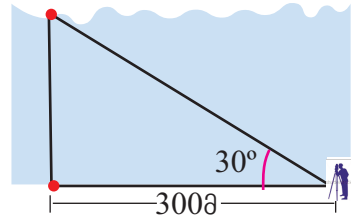
იპოვეთ x -ით აღნიშნული გვერდი ან კუთხე მებათედების სიზუსტით.



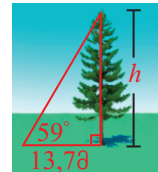
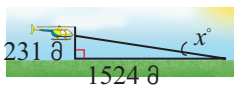
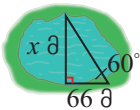
თეოდოლიტი კუთხეების გაზომვებისათვის გამოყენებული სპეციალური მოწყობილობაა. სპეციალისტებს კუთხეების გაზომვების შემდეგ ტრიგონომეტრიის დახმარებით საჭირო სიგრძეების, სიმაღლეების გამოთვლები შეუძლიათ.



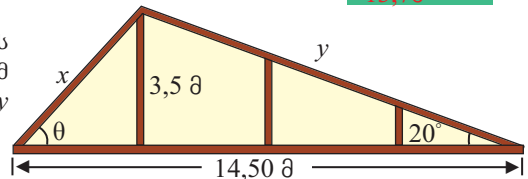
- 1» მდინარეზე ახალი ხიდის აგებაზე მომუშავე ინჟინერი თეოდოლიტით გაზომვებს აწარმოებს. ინჟინერმა, რომელ მხარესაც არის მდინარის გასწვრივ 300 მეტრამდე მანძილი გაზომა და სანიშნეები დადგა. მან ამ სანიშნის გასწვრივ მეორე მხარეს არსებული წერტილიდან 30° -იანი კუთხის ქვეშ ხედვა თეოდოლიტით გაზომა. ამ მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მდინარის სიგანე მეტრის სიზუსტით.



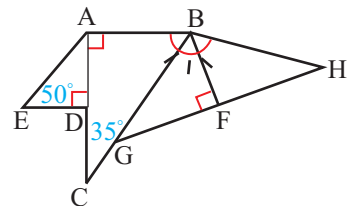
- 2» სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობი გვერდის სიგრძე და უცნობი კუთხის გრადუსული ზომა.



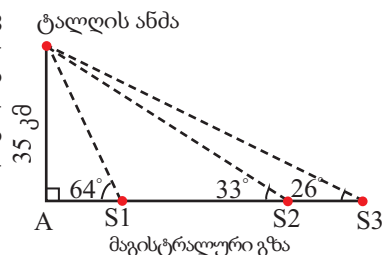
- 3» სურათზე სახლის სახურავის ხედის ერთი ნაწილია მოცემული. იპოვეთ ამ კონსტრუქციაში აღნიშნული x და y გვერდების სიგრძეები.



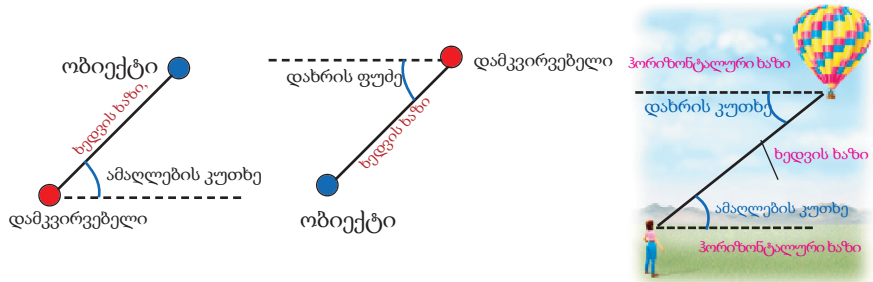
- 4» $AD = GF$, $AC = 25$ მ და D წერტილის AC მონაკვეთის შუაწერტილობის პირობით იპოვეთ სურათზე მოცემული ფიგურის პერიმეტრი.



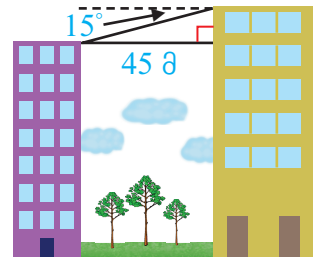
- 5» კოსმოსური რადიოტალღების გადამცემი ანტენა სიგნალებს მაგისტრალური გზის გასწვრივ მდებარე S_1 , S_2 , S_3 სადგურებზე აგზავნის. ძირითადი ანტიდან მაგისტრალურ გზამდე მანძილი 35 კმ-ია. თუ ანტენის მიმართ სადგურების მდებარეობა სურათზე მოცემულის მსგავსია, იპოვეთ მთავარი ანტიდან თითოეულ სადგურამდე მანძილი.



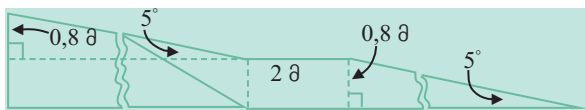
ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების დახმარებით რეალურ ცხოვრებაში ობიექტების სიმაღლის, მათ შორის მანძილის გამოთვლება შესაძლებელია. ამ ტიპის ზომების განსაზღვრისათვის ამაღლებისა და დახრის კუთხეები გამოიყენება. ამაღლებისა და დახრის კუთხეები დამკვირვებლიდან ობიექტზე გადატანილი ხედვის ხაზით ჰორიზონტალური ხაზის შემქმნელი კუთხეა.



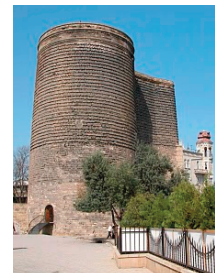
- 6 ორ მრავალსართულიან შენობას შორის მანძილი 45 მ-ია. უფრო მეტსართულიანი ბინის სიმაღლე 60 მ-ია. იპოვეთ მეორე ბინის სიმაღლე.



- 7 ჯანმრთელობის უნარშეზღუდული პირებისთვის დაგებულ გზაზე განსაზღვრული სტანდარტები გამოიყენება. ამ გზებზე სიმაღლე 80 სმ, დახრის კუთხე 5° -იანი დახრილი ნაწილების სიგრძით 2 მ-იანი სწორი მონაკვეთებით მონაცვლეობა ითვლება საუკეთესო ვარიანტად. ამოხსენით ამოცანები ამ მოთხოვნების ამსახველი გეგმის მიხედვით.
- 1) 65 მ სპეციალური გადასასვლელისათვის სულ მცირე რამდენი ასეთი ნაწილი სჭირდება?
 - 2) თუ ეს გზა, როგორც ჩვეულებრივი გზა იქნება გათვალისწინებული მაშინ რამდენი მეტრი იქნება მისი სიგრძე?



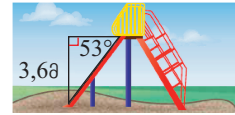
- 8 ელდარი ქალწულის კოშკიდან 8 მ მანძილზეა გაჩერებული. ელდარის გაჩერების წერტილიდან ამაღლების კუთხე 75° -ია. ამ ინფორმაციების მიხედვით დახაზეთ სურათი და გაზომეთ ქალწულის კოშკის სიმაღლე.



- 9 მახვილი კუთხის ტოლი სინუსისა და კოსინუსის მქონე მართკუთხა სამკუთხედის შესახებ, რომელი მოსაზრებების გამოთქმა შესაძლებელია?

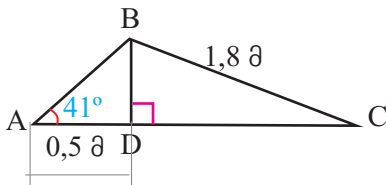
ამოცანების ამოხსნა ტრიგონომეტრიული თანადობების გამოყენებით

- 10** ბავშვების სრიალა მოწყობილობის დახრის კუთხე 53° -ია. მიწიდან სიმაღლე 3,6 მ-ია. იპოვეთ მისი სიგრძე.

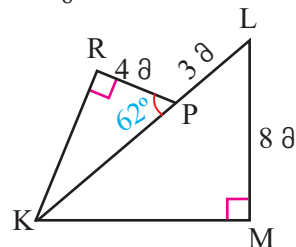


- 11** თქვენ 30 მ სიმაღლიდან ზღვაში მცურავ იალქნიან ნავს აკვირდებით:
- 1) დახატეთ ამოცანის შესაბამისი სურათი.
 - 2) დახრის ხაზის 30° ; 40° ; 50° ; 60° შემთხვევებისათვის იპოვეთ ხედვის ხაზის (პიკეტენუზის) სიგრძე, შედეგები ცხრილში მოათავსეთ.

- 12** იპოვეთ $\triangle ABD$ და $\triangle BDC$ -ს გვერდების სიგრძეები და კუთხეების გრადუსული ზომები.

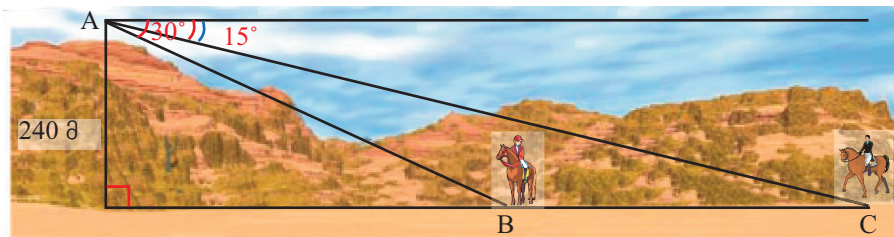


- 13** იპოვეთ $\triangle KRP$ -სა და $\triangle KLM$ -ის გვერდების სიგრძეები და კუთხეების გრადუსული ზომები.

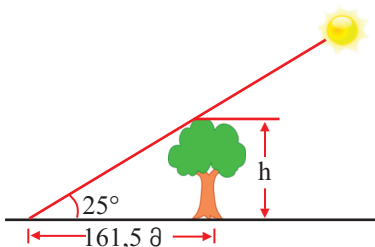


- 14** წარმოიდგინეთ, რომ ხართ 240 მ სიმაღლის მთის მწვერვალზე. აქედან მთისკენ მომავალ სწორ გზაზე ორ ცხენოსანს ხედავთ, B ცხენოსანთან თქვენი დახრის კუთხე არის 30° , C ცხენოსანთან კი 15° -ია იმ მომენტისთვის:

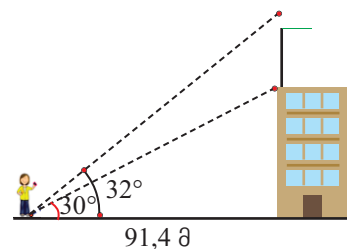
- 1) თქვენი დგომის წერტილიდან რამდენი მეტრია თითოეულ ცხენოსანამდე?
- 2) რა მანძილია ორ ცხენოსანს შორის?



- 15** იპოვეთ ხის სიმაღლე სურათზე მონაცემების მიხედვით.



- 16** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ შენობისა და დროშის სიმაღლე.



დახაზეთ ამოცანების შესაბამისი სურათები

17 სავაჭრო ცენტრის ესკალატორის ვერტიკალური სიმაღლე 4,3 მ-ია. ეს ესკალატორი ზემოთ ასვლისას ჰორიზონტალურად 15 მ მანძილს გაივლის.

- 1) იპოვეთ ესკალატორის სიგრძე, დახაზეთ ამოცანის შესაბამისი სურათი.
- 2) ამოცანის მონაცემები ისე შეცვალეთ, რომ ამოცანა ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით ამოიხსნას.

18 ქამილი სასტუმროს ფანჯრიდან გზიდან გამვლელი ავტობუსის მოძრაობას აკვირდება, ავტობუსი სანამ თვალს მოეფარება დახრის კუთხე 46° -დან 18° -მდე იცვლება. ქამილის ოთახის ფანჯარა გზიდან 20 მ-ის სიმაღლეზეა. განსაზღვრეთ შესაძლო დასაკვირვებელი გზის სიგრძე.

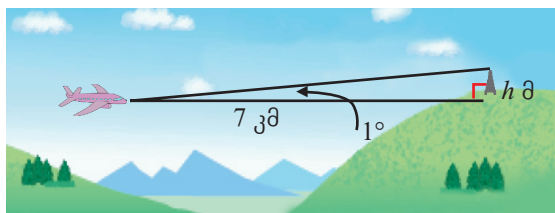
19 ეკმედს 34 სმ სიგრძის ჯოხის ყუთში მოთავსება სურს. ყუთის ზომები 12 სმ $\times$ 20 სმ $\times$ 24 სმ-ია. მოთავსდება ეს ჯოხი ყუთში?

20 **ფრინველების შემსწავლელი მეცნიერების სფეროს ორნიტოლოგია, ამ სფეროს სპეციალისტს კი ორნიტოლოგი ეწოდება.** ორი ორნიტოლოგი ერთი წრფის გასწვრივ ერთი და იგივე ფრინველის ბუდეს აკვირდებიან. მათსა და ფრინველის ბუდეს შორის ამაღლების კუთხე შესაბამისად 30° და 60° -ია. ორნიტოლოგთა შორის მანძილი კი 58 მ-ია. რა მანძილია თითოეულ ორნიტოლოგსა და ფრინველის ბუდეს შორის?

21 ავტომობილი აკრძალულ ადგილასაა გაჩერებული. ევაკუატორის ამწეს 2,8 მეტრი სიგრძის ავტომობილის წინა ნაწილის 0,75 მ მაღლა აწევით შეუძლია აიღოს მანქანა. რამდენი გრადუსი იქნება ამ მომენტში კუთხე ავტომობილსა და დედამიწას შორის?

22 A და B კუნძულები ერთმანეთისაგან 5 კმ-ითაა დაშორებული. C კუნძული B კუნძულიდან ჩრდილოეთით, A კუნძულიდან კი აღმოსავლეთითაა. B კუნძული A და C კუნძულებთან 35° კუთხით მდებარეობს. C კუნძული A კუნძულიდან და B კუნძულიდან რა მანძილზე მდებარეობს?

23 მაღალი სიჩქარით და ამაღლების კუთხით მფრინავ თვითმფრინავს სარადარო სისტემა შესაძლოა შეფერხების გამო ამაღლების კუთხის შესახებ ინფორმაციას აწვდის. განსაზღვრულ სიმაღლეზე 1° -იანი ამაღლების კუთხის მქონე თვითმფრინავმა მიიღო სიგნალი, რომ 7 კმ მანძილზე ანძაა, თვითმფრინავმა თითოეულ ობიექტს 300 მ-ის დაშორებით უნდა გადაუფრინოს. ამისათვის, როგორ უნდა შეიცვალოს ამაღლების კუთხე?



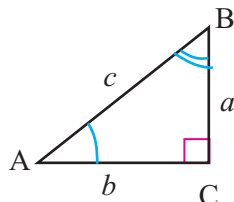
ტრიგონომეტრიული იგივეობები

ABC მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეებიდან ნებისმიერი ერთ-ერთის ტრიგონომეტრიული თანაფარდობებს შორის ქვემოთ მოცემული დამოკიდებულებები.

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin \angle A &= \cos(90^\circ - \angle A) = \cos \angle B \\ \sin \angle B &= \cos(90^\circ - \angle B) = \cos \angle A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \sin(90^\circ - \angle A) = \sin \angle B \\ \cos \angle B &= \sin(90^\circ - \angle B) = \sin \angle A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \angle A &= \frac{a}{c} & \cos \angle A &= \frac{b}{c} \\ \sin \angle B &= \frac{b}{c} & \cos \angle B &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$



რადგან $\sin \angle A = \cos \angle B$ და $\angle B = (90^\circ - \angle A)$.

$$\sin \angle A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos \angle B$$

მაგალიტი. $\sin 55^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ) = \cos 35^\circ$

55° -იანი კუთხის სინუსი 35° -იანი კუთხის კოსინუსის ტოლია.

$$2. \quad \operatorname{tg} \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$$

დამტკიცება: განსაზღვრების თანახმად $\sin \angle A = \frac{a}{c}$ $\cos \angle A = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}$

მეორეს მხრივ $\frac{\sin \angle A}{\cos \angle A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ აქედან, $\operatorname{tg} \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$

$$3. \quad \sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$$

დამტკიცება: $\sin \angle A = \frac{a}{c}$ $\sin^2 \angle A = \frac{a^2}{c^2}$ $\cos \angle A = \frac{b}{c}$ $\cos^2 \angle A = \frac{b^2}{c^2}$ მხარეებად თუ შევკრებთ.

$$\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \quad a^2 + b^2 = c^2 \text{ პითაგორას}$$

$$\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$$

1) ა) მოცემული გამოსახულებები გამოსახეთ კოსინუსით.

1) $\sin 37^\circ$

2) $\sin 81^\circ$

3) $\sin 29^\circ$

4) $\sin 64^\circ$

ბ) მოცემული გამოსახულებები გამოსახეთ სინუსით.

1) $\cos 59^\circ$

2) $\cos 42^\circ$

3) $\cos 73^\circ$

4) $\cos 18^\circ$

2) 1) გამოთვლებით უჩვენეთ, რომ $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

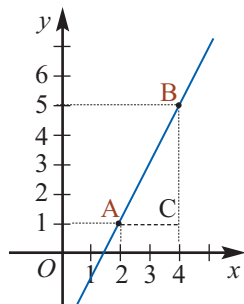
2) თუ ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{3}$, გამოთვალეთ A კუთხისა და B კუთხის სინუსი და კოსინუსი. ამოხსენით ამოცანა სხვადასხვა ხერხით.

3) $\triangle ABC$ ტოლგვერდა სამკუთხედი. $\triangle EFD$ მართკუთხა სამკუთხედი: $\angle E = 90^\circ$, $FD = 2$, $FE = 1$. დაამტკიცეთ, რომ $\sin \angle C = \cos \angle D$.

ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

გამოკვლევა 1) გაავლეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $A(2; 1)$ და $B(4; 5)$ წერტილებზე გამავალი წრფე. 2) A წერტილზე გაავლეთ აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე და აღნიშნეთ C წერტილი. 3) $\triangle ABC$ -ში $\frac{BC}{AC}$ შეფარდება აღნიშნეთ k -თი.

4) სურათის მიხედვით იპოვეთ AC და BC მონაკვეთების სიგრძე და გამოთვალეთ k .



წრფის განტოლება

დავუშვათ, რომ $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილები არც აბსცისა და არც ორდინატთა ღერძის პარალელურ წრფეზე არ მდებარეობენ. $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე აღვნიშნოთ ნებისმიერი $N(x; y)$ წერტილი.

$\triangle ABC$ -დან $k = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ k -ს კუთხური კოეფიციენტი ეწოდება.

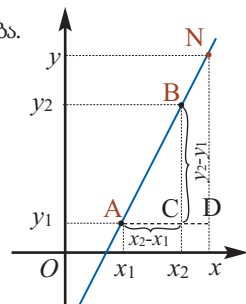
$\triangle ABC \sim \triangle AND$ ამიტომაც $k = \frac{BC}{AC} = \frac{ND}{AD}$

აქედან, $k = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ $y - y_1 = k(x - x_1)$.

$y - y_1 = k(x - x_1)$ განტოლება $A(x_1; y_1)$ წერტილზე გამავალი და k კუთხურ კოეფიციენტისაა წრფის განტოლებაა.

აქ $y_1 - kx_1 = b$ აღნიშვნით $y = kx + b$ სახით დაწერა შეიძლება.

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ფორმულით მოიძებნება.



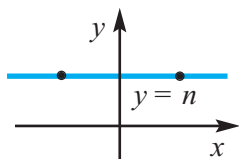
მაგალიტი 1. ვიპოვოთ $A(-1; 3)$ და $B(1; 7)$ წერტილებზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტი.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

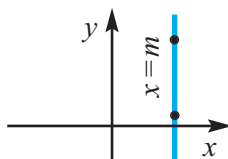
მაგალიტი 2. ვიპოვოთ $A(-1; 4)$ და $B(2; -5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტი და დავწეროთ განტოლება.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 4}{2 - (-1)} = -3 \quad \begin{aligned} y - y_1 &= k(x - x_1) \text{ განტოლებიდან} \\ y - 4 &= -3(x - (-1)) \\ y - 4 &= -3x - 3, \quad y = -3x + 1 \end{aligned}$$

შენიშვნა 1. თუ A და B წერტილებზე გამავალი წრფე x ღერძის პარალელური იქნება, ამ წრფის წერტილების ორდინატები მუდმივი რჩება და მისი განტოლება $y = n$ სახით იწერება.



შენიშვნა 2. თუ A და B წერტილებზე გამავალი წრფე ორდინატთა ღერძის პარალელური იქნება, ამ წრფის წერტილების აბსცისები მუდმივი რჩება და მისი განტოლება $x = m$ სახით იწერება.



ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება

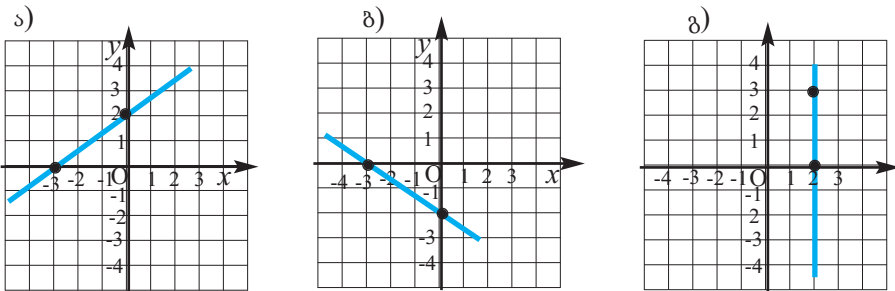
სასწავლო დაფალები

- 1» დაწერეთ ქვემოთ მოცემულ წერტილებზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტი.
- ა) $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$ ბ) $A(-1; 3)$, $B(1; 9)$
გ) $A(1; 1)$, $B(2; 4)$ დ) $A(2; -3)$, $B(4; 0)$

- 2» ა) k -ს რა მნიშვნელობისათვის გაივლის $y = kx + 3$ წრფე $A(2; 7)$ წერტილზე?
ბ) b -ს რა მნიშვნელობისათვის გაივლის $y = 0,5x + b$ წრფე $A(-2; 3)$ წერტილზე?

- 3» იპოვეთ b , თუ $y = 5x + b$ წრფე გაივლის $C(-1; 2)$ წერტილზე.

- 4» სურათების მიხედვით დაწერეთ მოცემული წრფეების განტოლებები.



- 5» k -სა და b -ს რა მნიშვნელობებისათვის $y = kx + b$ წრფე გაივლის $A(1; 8)$ და $B(-1; 2)$ წერტილებზე?

- 6» იპოვეთ $A(1; 2)$ და $B(2; 3)$ წერტილებზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტი. როგორ კუთხეს შექმნის ეს წრფე აბსცისთა ღერძთან?

- 7» დაწერეთ მოცემულ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

- 1) $A(2; 1)$ და $B(4; 5)$ 2) $A(1; 4)$ და $B(2; 1)$
3) $A(-1; 1)$ და $B(1; 5)$ 4) $A(2; -1)$ და $B(0; 3)$

- 8» 1) $A(m; 1)$ და $B(m; 3)$ წერტილებზე გაავლეთ წრფე.
კოორდინატა რომელი ღერძის პარალელურია ეს წრფე?
რისი ტოლია ამ წრფეზე მდებარე წერტილების აბსცისები?
2) $C(1; n)$ და $D(4; n)$ წერტილებზე გაავლეთ წრფე.
კოორდინატა რომელი ღერძის პარალელურია ეს წრფე?
ამ წრფეზე მდებარე წერტილების ორდინატები იცვლება?

- 9» გაავლეთ მოცემულ წერტილებზე გამავალი წრფე და დაწერეთ განტოლება.

- ა) $C(1; 3)$, $D(1; -1)$ ბ) $C(-1; 2)$, $D(-1; 1)$
გ) $A(3; 5)$, $B(-1; 5)$ დ) $A(2; -2)$, $B(5; -2)$

კუთხური კოეფიციენტის მნიშვნელობის მიხედვით შეიძლება საუბარი წრფის პარალელურობაზე ან პერპენდიკულარულობაზე.

1. თუ ორი წრფის განტოლებაში კუთხური კოეფიციენტები ტოლია, ეს წრფეები პარალელურია.

მაგალითად, $y = 2x - 5$ და $y = 2x + 7$ განტოლებებით მოცემული წრფეები პარალელურია.

2. თუ კუთხური კოეფიციენტები $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ დამოკიდებულებაშია, მაშინ წრფეები ურთიერთმართობულია.

მაგალითად, $y = 3x - 1$ და $y = -\frac{1}{3}x + 6$ და წრფეები პერპენდიკულარულია.

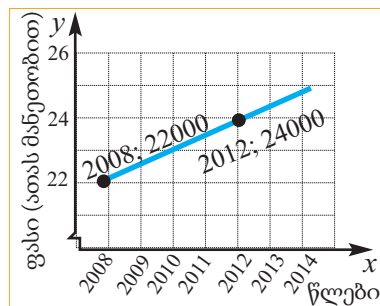
10 ა) დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $y = -3x + 5$ წრფის პარალელურია და ორდინატთა ღერძს კვეთს 4 წერტილში.

ბ) დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $y = -\frac{1}{3}x - 2$ წრფის მართობულია და აბსცისთა ღერძს -9 წერტილში კვეთს.

11 l წრფე ორდინატთა სათავეზე გადის და $(-2; 3)$, $(4; 5)$ წერტილებზე გამავალი წრფის პარალელურია. იპოვეთ l წრფის კუთხური კოეფიციენტი.

12 დაამტკიცეთ $A(-6; 1)$, $B(-2; -1)$, $C(0; 3)$, $D(4; 1)$ რომ ABCD ოთკუთხედი არის პარალელოგრამი, თუ მისი წვეროს წერტილებია.

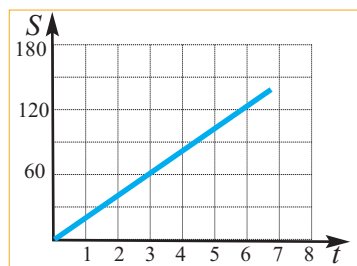
13 ქარხანამ D მარკის ავტომობილის გაყიდვის ფასი 2008 წლისთვის 22000 მანეთი, 2012 წლისათვის 24000 მანეთი დაადგინა. გაარკვეით სურათზე მოცემული გრაფიკი, განსაზღვრეთ კუთხის კოეფიციენტი და მოახდინეთ 2025 წლისათვის ამ ავტომობილის ფასის პროგნოზირება.



14 სამკუთხედის წვეროები $A(5; 0)$, $B(0; 5)$ და $C(3; 6)$ წერტილებშია. შეამოწმეთ ეს სამკუთხედი არის თუ არა მართკუთხა სამკუთხედი.

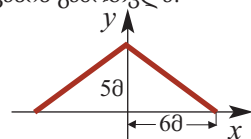
15 დაწერეთ $C(1; 4)$ და $D(-1; 12)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება. იპოვეთ ამ წრფით საკოორდინატო ღერძების გადაკვეთით მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

16 ველისიპედისტის გავლილი მანძილის (S) დროზე (t) დამოკიდებულება სურათზეა მოცემული. რომელი სიდიდის განსაზღვრა შეიძლება წრფის კუთხური კოეფიციენტის მოძებნით?



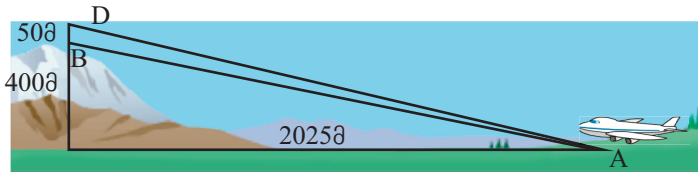
17 ელშანის ხელფასი კვირეული 20 მანეთითა და ყოველი საათისათვის 3,5 მანეთით იანგარიშება. რომელი ფორმულით შეიძლება ელშანის ხელფასის გამოთვლა?

18 სურათზე სახლის სიმეტრიული ფორმის სახურავის წინხედია მოცემული. დაწერეთ ხედის ფერადი ნაწილის შესაბამისი წრფეების განტოლებები.



განმაზოგადებელი დავალებები

- 1) რამდენი გრადუსი უნდა იყოს ამადლების კუთხე, რომ თვითმფრინავმა მთის წვეროს 50 მ-ის სიმაღლეზე გადაუფრინოს?

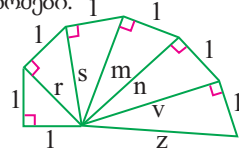


- 2) 45 სმ დიამეტრის მქონე მორი სურათზე ნაჩვენები სახით წინ და უკან კვადრატით მართკუთხა პრიზმის ფორმაში უნდა იქნეს მოყვანილი. ამ ფიგურებიდან ყველაზე მეტის სიგანე რამდენი სანტიმეტრით იქნება?



- 3) სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი ზომები.

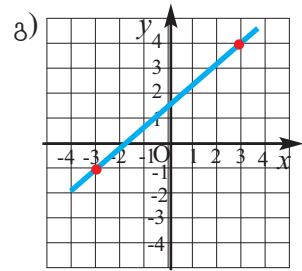
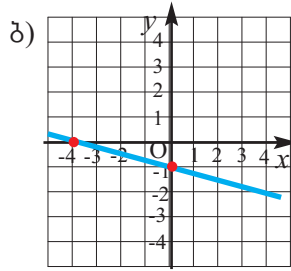
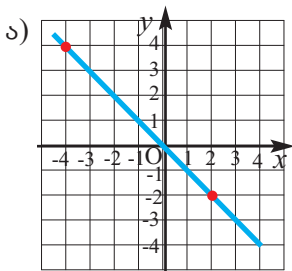
- ა) r ბ) s
 ბ) m დ) n
 ე) v ვ) z



- 4) 1) დახაზეთ სამკუთხედი, რომლის კუთხეებია 45° ; 45° ; 90° დახაზვის ხერხი ნაბიჯ-ნაბიჯ ზეპირად და წერილობით წარმოადგინეთ.

2) დახაზეთ სამკუთხედი, რომლის კუთხეებია 30° ; 60° ; 90° დახაზვის ხერხი ნაბიჯ-ნაბიჯ ზეპირად და წერილობით წარმოადგინეთ.

- 5) გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ წრფეების კუთხური კოეფიციენტები და დაწერეთ შესაბამისი განტოლებები.



- 6) იპოვეთ მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტები და განსაზღვრეთ რომელი წრფეებია პარალელური, და რომელი - პერპენდიკულარული.

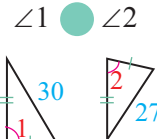
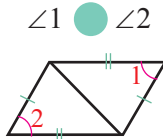
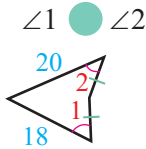
- ა) $A(-3, 3)$ და $B(3, -1)$ ბ) $M(-2, -3)$ და $N(2, 3)$
 $C(-3, 1)$ და $D(3, 4)$ $E(-4, -3)$ და $F(4, 1)$

- 7) წარმოიდგინეთ, რომ კვირის ბოლოს ექსკურსიაზე მიდიხართ. მათემატიკის მასწავლებელს სურს აქ შეამოწმოს, რამდენად სწორად გეხმობს კუთხური კოეფიციენტი და ასეთ დავალებას გაძლევთ: თქვენ ახლა (3; 2) წერტილში ხართ, 2 ერთეულით მარჯვნივ, 4 ერთეულით ქვემოთ, 3 ერთეულით მარცხნივ, 6 ერთეულით ზემოთ, 7 ერთეულით მარჯვნივ რომ იაროთ საბაგირო გზის საღაროსთან იქნებით.

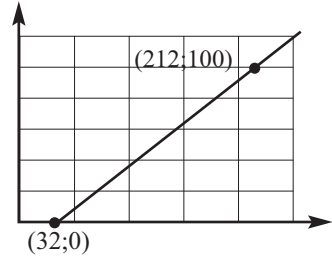
- ა) რომელი კოორდინატების შესაბამის წერტილშია საღარო?
 ბ) თქვენი ახლანდელი მდებარეობის წერტილი საღაროს კუთხური კოეფიციენტის რომელი მნიშვნელობის მქონე წრფეზე მდებარეობს?

განმაზოგადებელი დავალებები

- 8 სურათზე მონაცემების მიხედვით ფერადი უჯრების ადგილას ჩაწერეთ $<$, $>$, $=$ ნიშნებიდან შესაბამისები. მოსაზრებები დაასაბუთეთ.



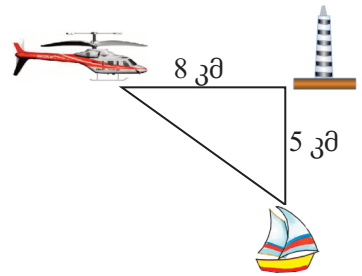
- 9 წყალი 32° F ანუ 0° C -ზე იყინება, 212° F ანუ 100° C -ზე დუღს. ამ ინფორმაციების მიხედვით დაწერეთ ტემპერატურის ფარენგეიტითა და ცელსიუსით გაზომვებს შორის კავშირის მაჩვენებელი წრფივი განტოლება. **მითითება:** გამოიყენეთ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



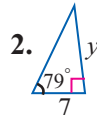
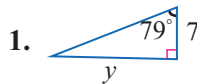
და $y - y_1 = k(x - x_1)$ ფორმულები.

- 10 პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე მართია მართკუთხედი ეწოდება. შეამოწმეთ: პარალელოგრამი, რომლის წვეროები $(-4; 4)$, $(-1; -2)$, $(0; 6)$, $(3; 0)$ წერტილებშია, არის თუ არა მართკუთხედი.

- 11 ზღვის შუქურამ ანძიდან 5 კმ-ით სამხრეთით მყოფი გემის დახმარების საჭიროებაზე ანძაზე SOS სიგნალები გააგზავნა. სიგნალი ანძიდან 8 კმ-ით დასავლეთით მყოფ ვერტმფრენს გადაეგზავნა. რამდენ გრადუსიანი კუთხის ქვეშ უნდა შეიცვალოს ვერტმფრენმა მოძრაობა გემთან მისაღწევად?



- 12 მეორე სურათზე მოცემული სამკუთხედი 1-ლი სურათის სამკუთხედისგან რომელი მოძრაობებითაა მიღებული?



- 13 სამკუთხედის გვერდები 18 სმ, 22 სმ და 29 სმ-ია, რა სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს მისი უმცირესი კუთხიდან გამოსული ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს?

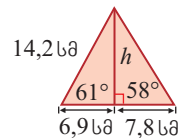
- 14 რომელი ტოლობა შეიძლება გამოვიყენოთ სურათზე მოცემული სამკუთხედის სიმაღლის პოვნისათვის?

ა) $\cos 58^\circ = \frac{h}{7,8}$

ბ) $\tan 61^\circ = \frac{h}{14,2}$

ბ) $\tan 58^\circ = \frac{h}{7,8}$

დ) $\tan 61^\circ = \frac{h}{6,9}$



- 15 დახაზეთ ქვემოთ მოცემული ინფორმაციის შესაბამისი სურათი, კიბის ფუძე კედლიდან 2,5 მ-ის მოშორებით 55° -იანი კუთხითაა კედელზე მიყრდნობილი. კიბის უმაღლესი წერტილი სახლის ფანჯრის დონეზეა. მიწიდან რა სიმაღლეზეა ფანჯარა? რამდენი მეტრია კიბის სიგრძე?

მოქმედებები სიმრავლეებზე

პრაქტიკული მეცადინეობა. სურათზე მოცემული ვენის დიაგრამის ელემენტები ქაღალდისაგან ამოჭერით და დაამზადეთ. შეასრულეთ დავალებები სიმრავლეთა თანაკვეთისა და გაერთიანების შესახებ.

ა) $(A \cup B) \cap C$

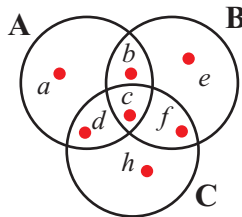
$(A \cup C) \cap B$

$(B \cup C) \cap A$

ბ) $(A \cap B) \cup C$

$(A \cap C) \cup B$

$(B \cap C) \cup A$



სიმრავლის გაერთიანება და თანაკვეთა. ელემენტების რაოდენობა

როცა $A \cap B \neq \emptyset$, ამ სიმრავლეთა გაერთიანებაში შემავალი ელემენტების რაოდენობა, მათი ცალკე-ცალკე ელემენტების რაოდენობის ჯამისა და საერთო ელემენტების რაოდენობის სხვაობის ტოლია.

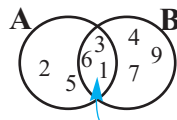
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

ამ წესს ჯამის წესი ეწოდება.

ნიმუში. მოცემულია: $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. A სიმრავლის

ელემენტების რაოდენობაა $n(A)$, B სიმრავლის ელემენტების რაოდენობაა $n(B)$, მაშინ რადგან $n(A) = 5$, $n(B) = 6$ და $n(A \cap B) = 3$, ამიტომ

$$n(A \cup B) = 5 + 6 - 3 = 8$$



- 1) მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობა.

$n(A) = 8$, $n(B) = 13$

$n(A \cup B) = 18$,

$n(A \cap B) = ?$

$n(A) = 8$, $n(A \cup B) = 17$

$n(A \cap B) = 4$, $n(B) = ?$

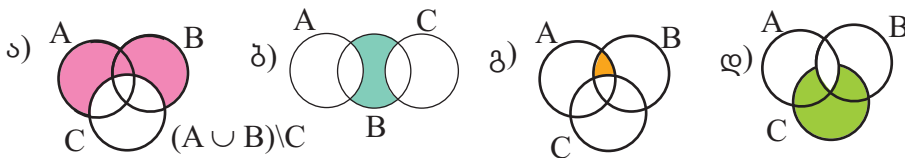
$n(A) = 10$, $n(A \cup B) = 15$

$A \cap B = \emptyset$, $n(B) = ?$

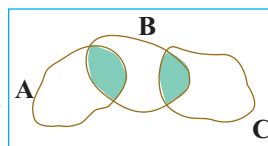
- 2) $n(A) = 12$, $n(B) = 7$ პირობებში: ა) $n(A \cup B)$ სულ მცირე რამდენი შეიძლება იყოს?
ბ) $n(A \cup B)$ ყველაზე მეტი რამდენი შეიძლება იყოს?

- 3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 4, 5\}$ მონაცემების მიხედვით განსაზღვრეთ $(B \cap C) \cup (A \cap C)$ სიმრავლის ელემენტები.

- 4) ფერადი ნაწილები სიმრავლეებზე რომელი მოქმედების შესრულებას უჩვენებენ? ნიმუშად პირველი პუნქტის ამოხსნა ნაჩვენებია.



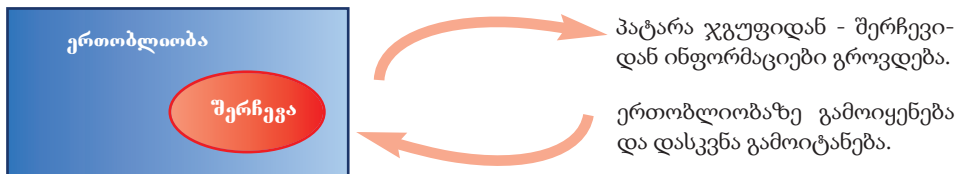
- 5) სურათზე მოცემული A , B და C საცხოვრებელი პუნქტების ფართობები შესაბამისად 12 კმ², 17 კმ² და 24 კმ² -ია. მეზობელი ტერიტორიებიდან თითოეულისათვის საერთო ტბების ფართობების ჯამი 9 კმ² -ია. რისი ტოლია სამი პუნქტის საერთო ფართობი?



- 6) სამეცნიერო კონფერენციის მონაწილე სტუმრებმა გერმანული, ინგლისური და ფრანგული ენები იცოდნენ. გერმანულ ენაზე 12, ინგლისურ ენაზე 21, ფრანგულ ენაზე კი 8 პირი საუბრობს. გერმანული და ინგლისური ენების მცოდნე 6, გერმანული და ფრანგული ენების მცოდნე 4, ინგლისური და ფრანგული ენების მცოდნე 3 პირი, სამივე ენაზე მოსაუბრე კი 5 პირია. რამდენი სტუმარი მონაწილეობდა სამეცნიერო კონფერენციაში?

ერთობლიობა, შერჩევა

როცა გამოსაკვლევ ობიექტისათვის ვრცელი დიაპაზონის ცვლადი ინფორმაციაა დამახასიათებელი, ამ ობიექტზე გამოკვლევა პატარა ჯგუფზე ტარდება. ჩვენ ვრცელ დიაპაზონში ცვალებად ინფორმაციას ერთობლიობას (ან პოპულაციას), ერთობლიობიდან შერჩეულ პატარა ჯგუფს კი - შერჩევას ვუწოდებთ. შერჩევის ნიმუშებზე ჩატარებული გამოკვლევის შედეგები ერთობლიობაზე (პოპულაციაზე) გამოიყენება, დასკვნები გაკეთდება და პროგნოზირება მოხდება.



1) ფაბრიკაში წარმოებული მეხსიერების ჩიპების ხარისხის შემოწმებისათვის ყოველი 100 ჩიპიდან ერთი შერჩეულ იქნა.

ერთობლიობა: ფაბრიკაში წარმოებული ყველა ჩიპი. **შერჩევა:** ყოველი 100 ჩიპიდან ერთი შერჩევა. შერჩევა ერთობლიობას წარმოადგენს.

2) მასწავლებელმა საშინაო დავალების შესრულების დონის შემოწმებისათვის პირველ მერხთან მსხდომი 3 მოსწავლის რვეული შეამოწმა.

ერთობლიობა: კლასის ყველა მოსწავლე. **შერჩევა:** პირველ მერხთან მსხდომი 3 მოსწავლე. ამ შემთხვევაში შერჩევა ერთობლიობას წარმოადგენს.

შერჩევები **შემთხვევითი შერჩევა** ან **სისტემური შერჩევა** შეიძლება იყოს.

შერჩევის ნიმუშების ერთობლიობის სწორად წარმოდგენა ჩატარებული გამოკვლევის ხარისხს განსაზღვრავს. მაგალითად, ქვემოთ მოცემული შემთხვევებიდან გავარკვიოთ რომელში არჩეული ნიმუშები ნამდვილად წარმოადგენს ერთობლიობას.

1) ახალი ეთერის შესახებ მოსაზრებების შეგროვებისათვის მაღაზიის თანამშრომლებმა კლიენტებს პატარა ჭურჭლით ეთერზეთი დაურიგეს და მოსაზრებები ჰკითხეს (შემთხვევითი შერჩევა).

2) სადილის დროს სასადილოში შესული ყოველი 5 პირიდან ერთს თხოვენ, რომ მომსახურების ხარისხის შემოწმებისათვის შედგენილი გამოკითხვის ფურცელი შეავსოს (სისტემური შერჩევა).

1 რომელი შერჩევა გამოსაკვლევ ობიექტის შესახებ უფრო ზუსტი პროგნოზის მოცემის საშუალებას იძლევა? რომელია შემთხვევითი და რომელია სისტემური შერჩევა?

1) სასადილომ, რომლის კლიენტებიც ძირითადად სტუდენტები იყვნენ. ყოველი 15 სტუდენტიდან ერთი საყვარელი 4 სახის ბოსტნულის სურათის რიგის მიხედვით კედელზე ჩამოკიდება მოითხოვა.

2) კლიენტების სადილის დროს მათი სასადილოში ყოფნის ხანგრძლივობის შემოწმებისათვის ყოველი 10 კლიენტიდან ერთი შეკვეთის ქვითარზე ნიშანი დაისვა.

3) ასაშენებელი ახალი ფეხბურთის მოედნის ადგილის განსაზღვრისათვის, ერთი გუნდის ფეხბურთელების აზრი გამოიკითხეს.

4) ქალაქის ბელადიას, ძაღლების გასასეირნებლად პარკებში გამოყვანის შესახებ მოსახლეობის აზრის გაგება სურს. ამისათვის სახლში ძაღლების მყოფი 50 პირის მოსაზრების გამოკითხვა მოხდა.

2» გამოკვლევის შედეგების მიხედვით ამოხსენით ამოცანები.

ინსტიტუტის ყველა სტუდენტის მოსაზრება გამოიკითხა. შეიძლება ვივარაუდოთ რამდენმა გასცა “დიახ” პასუხი? ამოხსენით ამოცანა პროპორციის აგებით.

ერთობლიობა: 2000 სტუდენტი
 შემთხვევითი შერჩევა: 40 სტუდენტი
 შეკითხვა: ინსტიტუტში ფიზიკური აღზრდის გაკვეთილი აუცილებელია?
 შედეგები: 12 დიახ; 28 არა.
 გადაწყვეტილება: სტუდენტების უმრავლესობას მიაჩნია, რომ ფიზიკური აღზრდის გაკვეთილი აუცილებლობას არ წარმოადგენს.

3» ქალაქში 10000 ხმის მიცემის უფლების მქონე პიროვნებაა. არჩევნების წინ შემთხვევითი შერჩევის წესით განსაზღვრულ 500 პირს შორის ჩატარდა გამოკითხვა. მათ შორის 180-მა გასცა “არა” პასუხი. ამ გამოკითხვის შედეგების მიხედვით შეიძლება ვივარაუდოთ ყველა ამომრჩევლის რამდენი პროცენტი უჭერს მხარს ამჟამინდელი მერის ხელახალ არჩევას?

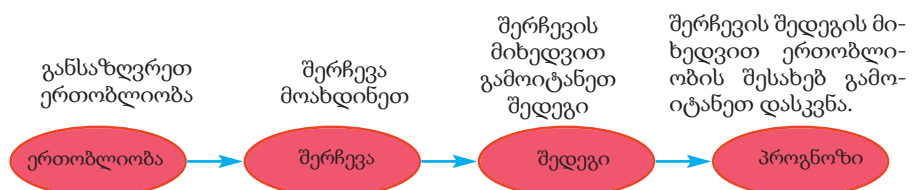
4» ქვემოთ მოცემულ ამოცანებში უჩვენეთ ერთობლიობა და შერჩევა. ერთობლიობის შესახებ სწორი დასკვნის გაკეთებისათვის რომელი არჩევანი იყო სწორად გაკეთებული?

1) ლიცეუმის 5000 მოსწავლეს შორის ჩატარებული გამოკითხვის შედეგების თანახმად, 75%-მა შეკითხვაზე: “თქვენი პირადი ოთახი გაქვთ?” უპასუხეს “დიახ”. “ყველა მოსწავლის 75% აქვს პირადი ოთახი” მოსაზრება სწორია?

2) რესპუბლიკის თითოეული რაიონიდან და თითოეული რაიონის თითოეული სოფლიდან შერჩეულ 5000 პირს შორის ჩატარებული გამოკითხვის შედეგების თანახმად ყოველი 10 ოჯახიდან 2-ში ორი ტელევიზორი აქვთ.

3) სატელეფონო წიგნაკიდან შერჩევის მეთოდით განსაზღვრულ 100 პირს კავშირგაბმულობის ქსელის ინტერნეტ მომსახურების ხარისხის შესახებ მოსაზრებას ეკითხებოდნენ. ყოველი 4 პირიდან 3 ამ მომსახურებით კმაყოფილი იყო. მომხმარებელთა რამდენი პროცენტი არის მომსახურებით უკმაყოფილო? თუ ამ კავშირგაბმულობის ქსელს 155000 სააბონენტო მომხმარებელი ჰყავს, შეიძლება მოვიფიქროთ მათ შორის რამდენი იქნება უკმაყოფილო?

5» მოიფიქრეთ ერთი გამოსაკვლევი თემა. განსაზღვრეთ ერთობლიობა და შერჩევა. დაწერეთ თან შემთხვევითი, თანაც სისტემური შერჩევის ნიმუში. დაასაბუთეთ, რომ თქვენს მიერ შერჩეული ერთობლიობა ასახავს რეალობას.



ინფორმაციის შეგროვება და წარდგენა

- 1 ტყის სხვადასხვა ნაწილებში შემთხვევითი შერჩევის გზით ხეების ტანის წრეწირის სიგრძე გაიზომა. შედეგები ქვემოთ ცხრილშია მოცემული. ცხრილის მიხედვით ააგეთ ჰისტოგრამა და შეასრულეთ დავალებები.

“ჯეირანგაუვალი” ტყიდან შერჩევის ნიმუშები		
ტანის წრეწირის სიგრძე (სმ)	ხაზი	რაოდენობა
21 - 30		8
31 - 40		28
41 - 50		35
51 - 60		16
61 - 70		8
71 - 80		5

- შემთხვევითი შერჩევის გზით განსაზღვრული ხეების რამდენი პროცენტის წრეწირის სიგრძე 41-50 სმ შორისაა?
- თუ ტყის საერთო ფართობი 550 ჰა იქნება და დაახლოებით ყოველ 10 მ²-ზე 3 ხეა, მაშინ ტყეში რამდენი 71-80 სმ წრეწირის სიგრძის მქონე ხის არსებობაზე ვარაუდი იქნებოდა გამართლებული?
- თუ ამ ტიპის გამოკვლევა გეგნებათ ჩასატარებელი, როგორ შეაგროვებთ და აღნიშნავთ ინფორმაციას? როგორ ფიქრობთ, რატომ არის აღნიშვნისათვის ხაზები გამოყენებული?

- 2 ერთი ოჯახის ყოველთვიური დანახარჯები ცხრილშია ნაჩვენები. ცხრილის მიხედვით, მოცემული წესით ააგეთ წრიული დიაგრამა.

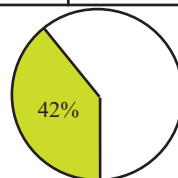
- განსაზღვრეთ თითოეული ინფორმაციის შესაბამისი წრის ნაწილი.

მაგალითად, 360° -ის 42% შეადგენს 0,42 ნაწილს.

$$0,42 \cdot 360^{\circ} = 151,2^{\circ} \approx 151^{\circ}$$

ხარჯის დასახელება	ბიუჯეტის %
საჭმელი	42%
ჩასაცმელი	13%
ტრანსპორტი	6%
მომსახურება	17%
დანარჩენი	22%

- დახაზეთ წრე და მისი რადიუსი. ტრანსპორტით ააგეთ შესაბამისი კუთხეები.
- აღნიშნეთ ნაწილების შესაბამისი სიტყვიერი და რიცხვითი ინფორმაციები.



- ოჯახის ბიუჯეტი თვეში 850 მანეთია. რომელი ორი დანახარჯი შეადგენს საერთო ბიუჯეტის დაახლოებით $\frac{2}{3}$ ნაწილს? რამდენ მანეთს შეესაბამება ეს?

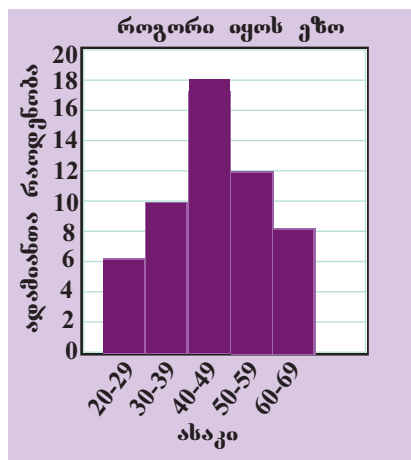
- ოჯახმა ამ თვეში საჭმელზე დაგეგმილზე 15%-ით მეტი ფული დახარჯა. ამ ფულის 10% სხვა ხარჯების, 5% კი ჩასაცმელების ეკონომიით იქნა მიღებული. მოცემულ ცხრილს მანეთებში თანხის გამომსახველი სვეტი დაამატეთ და რვეულში ჩაიხაზეთ.

3 კორპუსის ეზოში ავტოსადგომის გაუქმების შესახებ გადაწყვეტილების მისაღებად მისი მაცხოვრებლები განსახილველად შეიკრიბნენ. ინფორმაცია მაცხოვრებელთა ასაკის და რაოდენობის შესახებ ჰისტოგრამითაა მოცემული. ჰისტოგრამის მიხედვით ქვემოთ მოცემული ნაბიჯებით ააგეთ წრიული დიაგრამა.

1. იპოვეთ განხილვაში მონაწილეთა საერთო რაოდენობა $6 + 10 + 18 + 12 + 8 = 54$

2. იპოვებთ თანაფარდობა თითოეული ასაკ-
ობრივი ჯგუფისა მონაწილეთა მთლიან
რაოდენობასთან. 20-29 წლისანი: $6 : 54 \approx 0,11$

3. ამ შეფარდების შესაბამისი წრის ნაწილის პოვნისათვის გამოიყენეთ:
 $0,11 \cdot 360^\circ = 39,6^\circ \approx 40^\circ$



4. ინფორმაცია წარმოადგენთ წრიული დიაგრამით. აღნიშნეთ ნაწილები შესაბამისი სიტყვიერი და რიცხვითი ინფორმაციები.

5. განხილვის შედეგები ცხრილშია მოცემული. ცხრილში მოცემული ინფორმაციების რომელი გრაფიკული ფორმით წარმოდგენაა ხელსაყრელი? ინფორმაცია გრაფიკულად წარმოადგინეთ იმ ხერხით, რომელიც თქვენ ხელსაყრელად მიგაჩნიათ.

ასაკი	დარჩეს	გაუქმდეს
20-29	35%	65%
30-39	55%	45%
40-49	60%	40%
50-59	52%	48%
60-69	50%	50%

4 ნაზიმს ბიბლიოთეკაში 250 მხატვრული, 125 მასობრივ-მეცნიერული ლიტერატურა, 25 ენციკლოპედია და ლექსიკონი აქვს.

1) ააგეთ ამ ინფორმაციის შესაბამისი წრიული დიაგრამა.

2) დაწერეთ ცხოვრებისეული სიტუაციის შესაბამისი ერთი ამოცანა და წერილი დიარამით წარმოადგინეთ.

5 » შეარჩიეთ პასუხი, რომელიც სწორედ მიგაჩნიათ. მოსაზრება დაასაბუთეთ.

1) სკოლის სასადილოს გამგე გეგმავს გამოიკვლიოს რომელი საჭმელი უყვართ მოსწავლეებს ყველაზე მეტად. რომელი ჯგუფიდან შერჩევის შემთხვევაში, გამოკითხვის შედეგების მიხედვით სწორი გადაწყვეტილების მიღება შეიძლება:

ა) მასწავლებლების; ბ) სასადილოში მოსადილე მოსწავლეების;
გ) საკმლის სახლიდან მომტანი მოსწავლეების; დ) სკოლის ხელმძღვანელობის.

2) პროფესიული კავშირების ორგანიზაცია ბავშვებზე ზრუნვის ახალი პროექტის დამუშავებისათვის გეგმავს მომუშავე მშობლების მოსაზრებების გამოკვლევას. რომელ ასაკობრივ ჯგუფში გამოკვლევა იქნება უფრო ეფექტიანი?

ა) 20-40 ასაკი ბ) 40-60 ასაკი გ) საპენსიო ასაკი

ინფორმაციის ანალიზი ორი პარამეტრის მიხედვით

ხშირად ერთი ობიექტის შესახებ ორი ინფორმაციის გამოკვლევა მოითხოვება. ამ შემთხვევაში ინფორმაციის ცხრილის სახით წარმოდგენაა ხელსაყრელი.

ორი ცვლადი ინფორმაციის მიხედვით ცხრილის აგების წესი ქვემოთ მოცემულ ნიმუშზეა ნაჩვენები:

ნიმუში 1. მომკვლევთა ჯგუფმა ჩაატარა გამოკითხვა 100 ადამიანს შორის იმის შესახებ, თუ ზაფხულის რომელ თვეში და სად ისვენებდა. შედეგები ქვემოთ მოცემულის მაგვარი ორპარამეტრიანი ცხრილით იქნა წარმოდგენილი.

1. პარამეტრები: ქვეყანა და თვეები
2. პარამეტრებიდან ერთი - თვეები სტრიქონების გასწვრივ, მეორე - ქვეყნების სახელები კი სვეტებში იწერება.
3. შესაბამისი სტრიქონისა და სვეტის გადაკვეთის უჯრაში ორივე პარამეტრის მიხედვით რიცხვითი ინფორმაცია განთავსდება. მაგალითად, ცხრილში რიცხვი 18 ივნისის თვეში თურქეთში შვებულებაში მყოფ პირთა რაოდენობას უჩვენებს.
4. თითოეული თვისა და თითოეული ქვეყნის შესახებ საერთო ინფორმაცია - რიცხვითი ინფორმაციების შეკრებით შესაბამისი “ჯამის” უჯრაში იწერება.

		ქვეყნები			თვეების მიხედვით დამსვენებელთა რაოდენობა:
		თურქეთი	ევროპის ქვეყნები	რუსეთი	
თვე	ივნისი	18	6	5	29
	ივლისი	10	2	19	31
	აგვისტო	15	15	10	40
	ჯამი	43	23	34	100

3 თვეში დამსვენებელთა რაოდენობა ქვეყნების მიხედვით:

თურქეთი ევროპის ქვეყნები რუსეთი

- 1) გამოკითხულთა რამდენი პროცენტი იღებს შვებულებას ივნისის თვეში?
- 2) გამოკითხულთა რამდენი პროცენტი ატარებს შვებულებას თურქეთში?
- 3) ამ გამოკითხვის მიხედვით 1250 კაციდან რამდენი გაატარებს თავის შვებულებას ევროპის ქვეყნებში?

1 1. მართვის უფლების მიღებისათვის გამოცდის ჩასაბარებლად ქალებს და მამაკაცებს შორის ჩატარდა გამოკითხვა იმის შესახებ, პირველ გამოცდაზე მოპოვებული ქულები არის თუ არა საკმარისი მოწმობის მისაღებად. გამოკითხვა ჩატარდა 50 პირს შორის. გამოკითხვაში 22 ქალი მონაწილეობდა და მათგან 16-მა პირველ გამოცდაზე მართვის უფლება ვერ მოიპოვა. მამაკაცებიდან კი 18-მა პირველივე ცდაზე გამოცდა წარმატებით ჩააბარა. ამ ინფორმაციების მიხედვით ააგეთ ორპარამეტრიანი ცხრილი. პარამეტრები:

1. გენდერული - მამაკაცები, ქალები.
2. პირველი გამოცდა - მიიღეს მოწმობა, ვერ მიიღეს მოწმობა.

ინფორმაციის შეგროვება და წარდგენა

ორი პარამეტრის მიხედვით ინფორმაციის წარდგენისათვის ნაწილებად დაყოფილი ბარგრაფიც გამოიყენება.

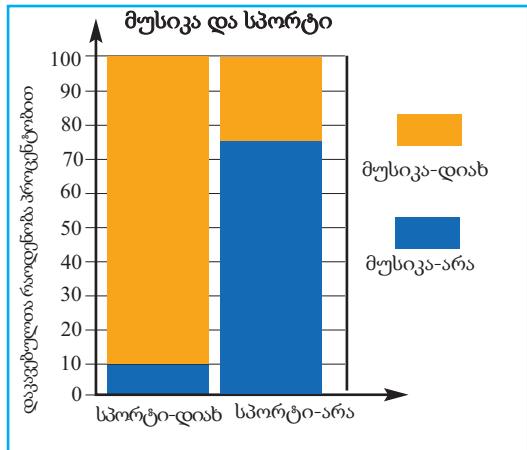
ნიმუში 2. 54 მოსწავლეს შორის ჩატარდა გამოკითხვა იმის შესახებ, მუსიკით არის დაკავებული თუ სპორტით. გამოკვლევის შედეგები ცხრილითაა წარმოდგენილი.

მოსწავლეების მუსიკითა და სპორტით დაკავება				
		მუსიკა		
სპორტი		კი	არა	ჯამი
	კი	27	3	30
	არა	6	18	24
	კი	33	21	54

1) გამოკითხულთა რამდენი პროცენტია დაკავებული თან სპორტით და თანაც მუსიკით?

2) მოსწავლეთა რამდენი პროცენტია დაკავებული მხოლოდ მუსიკით და არა სპორტით?

3) შესაბამისი ინფორმაციის ბარგრაფით (პროცენტობით) სურათზე მოცემულივით წარმოდგენა შეიძლება. ბარგრაფით მოცემული ინფორმაციისა და ცხრილით მოცემული ინფორმაციის იგივეობა წარმოადგინეთ ბარგრაფის ფერადი ნაწილების მიხედვით.



1 დაწყებით კლასებში ჩატარდა გამოკითხვა იმის შესახებ, თუ მოსწავლეები საშინაო დავალებების შესრულებაში ვისგან იღებენ დახმარებას - მშობლებისაგან თუ კერძო მასწავლებლებისაგან.

	მშობელი - დიახ	მშობელი - არა	ჯამი
კერძო მასწავლებელი - დიახ	24	16	
კერძო მასწავლებელი - არა	48	12	
ჯამი			100

1) საშინაო დავალებების მასწავლებელთან შემსრულებელი მოსწავლეებიდან რამდენი პროცენტის მშობლები შვილების გაკვეთილებით არ არიან დაკავებული?

2) მოსწავლეთა რამდენი პროცენტი ასრულებს საშინაო დავალებებს მშობლების დახმარებით, კერძო მასწავლებლების დახმარების გარეშე?

3) შეავსეთ ცხრილი და ნიმუში 2-ის მსგავსად ააგეთ ნაწილებიანი ბარგრაფი.

გაბნევის დიაგრამა

გაბნევის დიაგრამა ინფორმაციის ორ ჯგუფს შორის დამოკიდებულებას უჩვენებს.

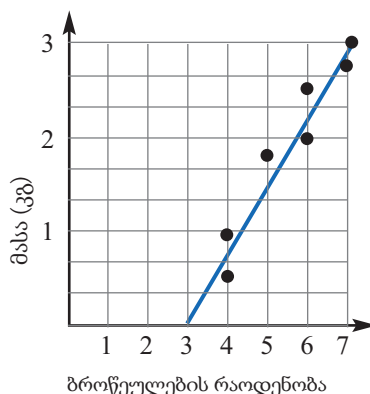
გაბნევის დიაგრამით სარგებლობენ იმისათვის რომ წარმოადგინონ ორი სიდიდე ერთმანეთზე როგორაა დამოკიდებული. ამ დამოკიდებულებას კორელაცია ეწოდება. კორელაციის 3 სახე არსებობს: 1. დადებითი კორელაცია; 2. უარყოფითი კორელაცია; 3. კორელაციის არ მქონე.

ნიმუში 1

გაბნევის დიაგრამაში მოცემულია შეკვრის წონისა და მასში ბროწეულების რაოდენობის დამოკიდებულება.

დადებითი კორელაცია

ბროწეულის რაოდენობა	მასა (კგ)
4	0,5
4	1
5	1,8
5	2
6	2
6	2,5
7	2,8
7	3



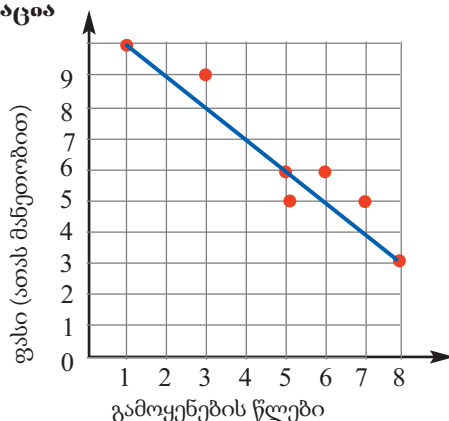
აბსცისთა ღერძზე ბროწეულის რაოდენობისა და ორდინატთა ღერძზე შეკვრის წონების აღნიშვნით ცხრილის მიხედვით გაბნევის დიაგრამაა აგებული. დიაგრამიდან ჩანს, რომ ერთი და იგივე რაოდენობის ბროწეულს შეიძლება სხვადასხვა წონა ჰქონდეს, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ამ ცვლადებს შორის ერთმნიშვნელოვანი დამოკიდებულება არ არის. თუმცა დიაგრამიდან ჩანს, რომ ბროწეულების რაოდენობის ზრდასთან ერთად მისი შეკვრის წონაც იზრდება.

ნიმუში 2

ცხრილში და დიაგრამაზე ავტომობილების გამოყენების ვადებსა და ფასს შორის დამოკიდებულებაა ნაჩვენები.

უარყოფითი კორელაცია

გამოყენების ვადა	ფასი (ათას მანეთობით)
1	10
3	9
5	6
6	6
6	5
7	5
7	4
8	3



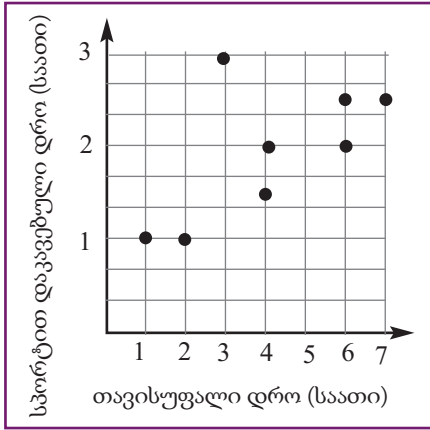
ავტომობილების გამოყენების დროის ზრდის კვალობაზე მათი ფასები მცირდება. ამ ორ ცვლადს შორის დამოკიდებულება (კორელაცია) უარყოფითი კორელაციაა.

ინფორმაციის შეგროვება და წარდგენა

ნიმუში 3

ცხრილი და გაბნევის დიაგრამა ნასიბის თავისუფალ დროსა და სპორტით დაკავებულობის დროს უჩვენებს.

კავშირის არმქონე (კორელაციის არმქონე)



თავისუფალი დრო	სპორტით დაკავებული დრო
1	1
2	1
3	3
4	2
4	1,5
6	2
6	2,5
7	2,5

ნიმუში 1, 2 და 3-ში ცხრილებში მოცემული ინფორმაციები შეცვალეთ და შესაბამისი გაბნევის დიაგრამები თქვენც ააგეთ.

1

გაბნევის დიაგრამაში გოგონების ასაკი და ვარჯიშის დროს გაცურვის მანძილებია მოცემული. დიაგრამის მიხედვით გაეცით კითხვებზე პასუხი.

1) 300 მეტრზე მცურავთა შორის ვინ არის ყველაზე პატარა?

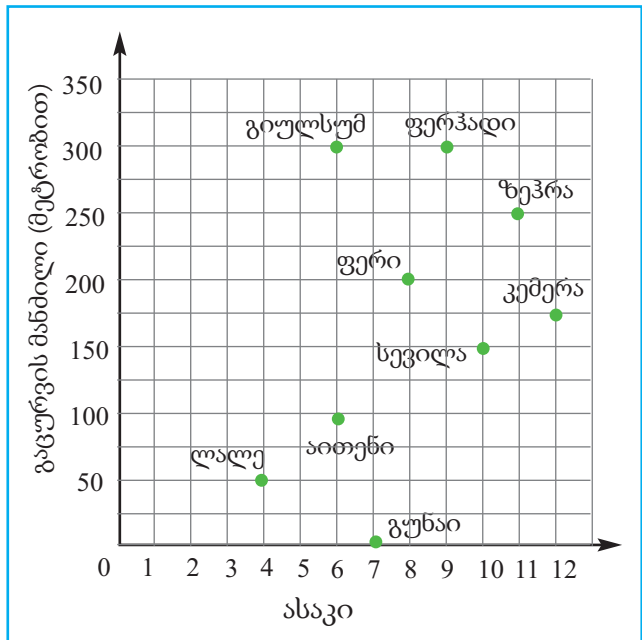
2) ვის არ შეუძლია ცურვა?

3) გოგონებიდან ასაკით ყველაზე უმცროსი ვინაა?

4) ექვსწლიანებს შორის ვინ უფრო კარგად ცურავს?

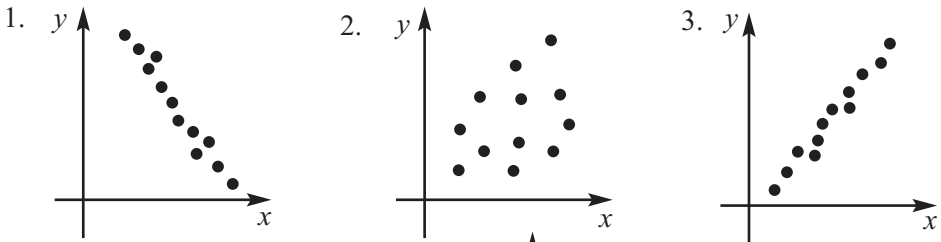
5) ვინ უფრო შორს გაცურა: ზეკრამ, ლალემ თუ ფერიმ?

6) არის კავშირი გოგონების ასაკებსა და გაცურვის მანძილს შორის?

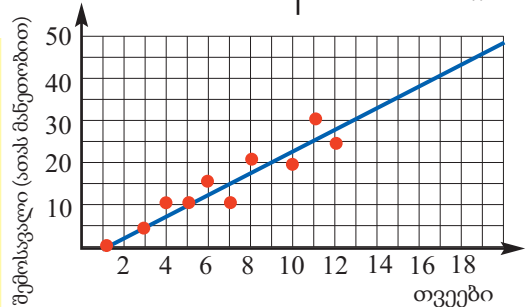


განმარტოებადი დავალებები

- 1) თითოეული გაზნევის დიაგრამაში უჩვენეთ კორელაციის სახე. შეადგინეთ შესაბამისი ამოცანა.



- 2) გაზნევის დიაგრამა ახლადშექმნილი კომპანიის პირველი წლის შემოსავალს ასახავს. ამ დიაგრამის მიხედვით კომპანიის შემოსავალს მე-16 თვისთვის რამდენი მანეთი შეიძლება ვივარაუდოთ?



- 3) სეზონის შეცვლასთან დაკავშირებით მაღაზიაში დარჩენილი საქონლის შესახებ ინფორმაცია ცხრილშია მოცემული. შეავსეთ ცხრილი და შეასრულეთ დავალებები.

1) რამდენი მწვანე ფერის სპორტული მაისურია დარჩენილი მაღაზიაში?

2) მორიგი სეზონისათვის რომელი ზომის მაისურების უფრო მეტი შეკვეთის მიცემა იქნებოდა სწორი?

3) მაისურები ერთმანეთზე არეულად ეყვო. ერთ მაისურს თუ ამოვიღებთ, რას უდრის ალბათობა იმის, რომ ის იქნება L ზომისა და ცისფერი?

		ზომა					
ფერი		S	M	L	XL	XXL	ჯამი
	თეთრი	3	1	2	1	3	
	ლურჯი	2	0	2	1	2	
	მწვანე	3	1	3	0	2	
	შავი	1	0	1	0	1	
	ჯამი						

- 4) მე-8 კლასის მოსწავლეებმა პროცენტისა და შეფარდების თემის შესახებ 2-ჯერ შეასრულეს ტესტური დავალებები. 10 მოსწავლის მოპოვებული ქულები ქვემოთ მოცემულ ცხრილშია ნაჩვენები

1) მეორე ტესტურ დავალებაში, 1-ელ ტესტურ დავალებასთან შედარებით რამდენმა მოსწავლემ მიაღწია სულ მცირე 5%-ით უკეთეს შედეგებს?

2) შესაძლო უმაღლესი ქულის რამდენი პროცენტი მოაგროვა ყველაზე მეტი ქულის მიღება მოსწავლემ?

3) ეს შედეგები მთლიანობაში კარგია თუ ცუდი არითმეტიკული საშუალოს, მოდისა და მედიანის გამოყენებით წარმოადგინეთ.

სახელი	შესაძლო უმაღლესი ქულა: 50	
	1-ლი ტესტი	მე-2 ტესტი
ალი	38	35
ლალე	34	38
აითენი	42	46
აიან	26	30
ისა	30	28
სამირ	18	19
ნაილა	21	24
ქერიმ	45	40
თაჰირ	48	44
გუნელ	38	36

ცენტრისკენული ტენდენციის საზომები და უდიდესი სხვაობა

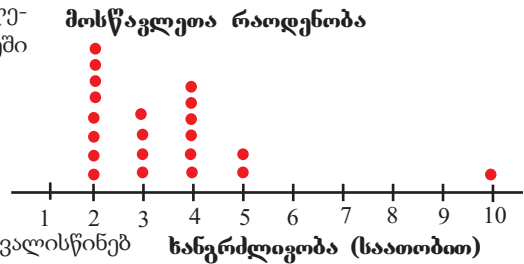
გამოკვლევა. დიაგრამა ასახავს მოსწავლე-ების გამოკითხვის შედეგებს, იმაზე თუ დღეში რამდენ საათს უყურებენ ტელევიზორს.

1 • = 1= ერთი მოსწავლე

1) იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო, მოდა, მედიანა და უდიდესი სხვაობა.

2) 10 სთ-ის შესაბამისი ინფორმაციის გაუთვალისწინებლად იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო.

3) დიაგრამის მიხედვით განსაზღვრეთ ინფორმაციის მჭიდროდ თავმოყრის ინტერვალი, ინფორმაციის არ არსებული ინტერვალი, უკიდურესი ინფორმაცია.



ცენტრისკენული ტენდენციის საზომები და უდიდესი სხვაობა

სტატისტიკური ინფორმაციების გაანალიზებაში არითმეტიკული საშუალოს, მოდას, მედიანასა და უდიდესი სხვაობის საზომებს დიდი გამოყენება აქვთ. არითმეტიკული საშუალო, მოდა და მედიანა ცენტრისკენული ტენდენციის საზომებია. რომელი სტატისტიკური საზომით რომელ შემთხვევაში სარგებლობა არის უფრო ხელსაყრელი?

არითმეტიკული საშუალო: მკვეთრად განსხვავებულობის არარსებობისას

მედიანა: მკვეთრი განსხვავებულობის არსებობისას

მოდა: ერთი და იგივე ინფორმაციების რაოდენობის სიმრავლისას

უდიდესი სხვაობა: ინფორმაციის ცვლილების ინტერვალის განსაზღვრისას

1 დაასაბუთეთ შერჩეული სტატისტიკური მაჩვენებლის სისწორე.

1) ერთ ჯგუფში 6 ადამიანის ასაკი : 11, 14, 12, 12, 11, 32. **მედიანა**

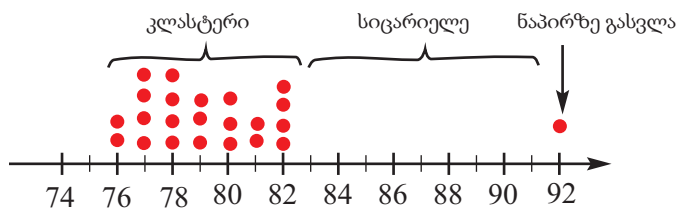
2) 6 თვის განმავლობაში თვიური შემოსავალი (მანეთობით): 325, 320, 300, 325, 325, 4000. **მოდა**

3) სამირის 5 დღის განმავლობაში დღიური სირბილი (კმ): 3, 5, 4, 5, 6. **არითმეტიკული საშუალო**

კლასტერი, სიცარიელე, ნაპირზე გასვლა

დზოგჯერ ინფორმაციები მცირე ინტერვალზე გროვდება, ამ ინტერვალს კლასტერი ეწოდება. ინფორმაციის არ არსებულ ინტერვალს სიცარიელეს ვუწოდებთ. რიცხვითი მნიშვნელობის მიხედვით არსებული ინფორმაციებისგან განსხვავებულ ძალიან დიდ ან ძალიან პატარა ინფორმაცია ნაპირზე გასვლად ითვლება.

მოსწავლეების მიღებული ქულები



მაგალითად, დიაგრამიდან ჩანს, რომ მოსწავლეების უმრავლესობის მიღებული ქულა 76-82 ინტერვალშია. ეს ინტერვალი კლასტერია, 92 ქულა კი ნაპირზე გასვლაა.

ცენტრისკენული ტენდენციის საზომები და უდიდესი სხვაობა

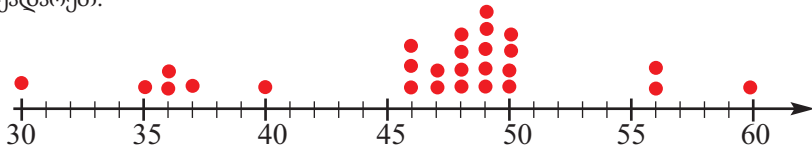
- 2» ქვემოთ ერთ კლასში მოსწავლეების წლის განმავლობაში გაკვეთილების გაცდენილი დღეების რაოდენობაა მოცემული.

4, 3, 2, 5, 4, 6, 3, 5, 7, 5, 18, 4, 3, 6, 3, 6, 2, 5

ინფორმაციების რიცხვით ღერძზე აღნიშვნით გამოკვლევის დავალებაში მოცემული დიაგრამის მსგავსი დიაგრამა ააგეთ. ინფორმაციების შესაბამისად იპოვეთ:

ა) არითმეტიკული საშუალო, მოდა და მედიანა. ბ) უჩვენეთ კლასტერი, სიცარიელის ინტერვალი და ნაპირზე გასვლა.

- 3» დიაგრამაზე კომპანიის თანამშრომელთა ასაკია მოცემული. ამ ინფორმაციების მიხედვით განსაზღვრეთ თანამშრომელთა საშუალო ასაკი. ყველაზე მეტი ინფორმაციის მქონე ინტერვალისათვის განსაზღვრეთ საშუალო ასაკი. შედეგები შეადარეთ.



- 4» ქვემოთ ნაჩვენებმა თითოეულმა მუშაკმა კვირის განმავლობაში რამდენი საათი იმუშავა.

25, 36, 18, 43, 40, 38, 39, 40, 16, 30, 24, 29, 30, 45, 42, 15, 20, 28

ა) შეადგინეთ ცხრილი 16-20, 21-25, 26-30, 31-35, 36-40, 41-45 ინფორმაციების ინტერვალებად დაყოფით ბ) რომელ ინტერვალშია მედიანა? გ) რომელ ინტერვალშია არითმეტიკული საშუალო?

- 5» 1) მედიანა 16-ია და ქვემოთ მოცემული რიცხვითი ინფორმაციების სიმრავლეს ემატება. წერითი გამოთვლების გარეშე განსაზღვრეთ თითოეული შემთხვევისათვის იცვლება თუ არა მედიანა?

ა) 15 და 17 ბ) 14 და 18 გ) 18 და 21 დ) 13 და 12

2) არითმეტიკული საშუალო 16-ია. ქვემოთ მოცემული ორი ინფორმაციის დამატებისას განსაზღვრეთ იცვლება თუ არა არითმეტიკული საშუალო.

ა) 15 და 17 ბ) 14 და 18
გ) 18 და 21 დ) 13 და 12

- 6» ცხრილში ზოგიერთი ფრინველის კვერცხიდან გამოჩეკის - ინკუბაციის პერიოდია მოცემული.

ა) ინკუბაციის პერიოდისათვის იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო, მოდა, მედიანა და უდიდესი სხვაობა.

ბ) განსაზღვრეთ არითმეტიკული საშუალოსა და თითოეული ფრინველის ინკუბაციის პერიოდის სხვაობა და ცხრილი რეულში შეაესეთ.

გ) სირაქლემასა და მტრედის გამოჩეკვის პერიოდების შედარებისათვის ისარგებლეთ უდიდესი სხვაობით.

ფრინველები	ინკუბაციის პერიოდი (დღე)	არითმეტიკული საშუალოსთან სხვაობა
ქათამი	21	
იხვი	28	
ბატი	28	
სირაქლემა	40	
თუთიყუში	24	
ხოხობი	24	
მტრედი	15	
მწყერი	19	
წერო	34	
ინდაური	28	

ალბათობის გაანგარიშება

გამოცდილებითი ალბათობა

გამოცდილებითი ალბათობის პოვნა განმეორებით ცდების საფუძველზე ხდება.

$$P(\text{მოვლენა}) = \frac{\text{ხელსაყრელი მოვლენის მოხდენის შემთხვევათა რიცხვი}}{\text{ცდების რაოდენობა}}$$

ნიმუში 1. ბარგრაფი ასახავს კამათელის 50-ჯერ გაგორებისას მიღებულ შედეგებს. რისი ტოლია კენტი რიცხვის მოსვლის გამოცდილებითი ალბათობა?

ბარგრაფიდან ჩანს, რომ ათჯერ 1, ხუთჯერ 3 და ცხრაჯერ 5 მოსულა.

ხელშეწყობ შემთხვევათა რიცხვი:

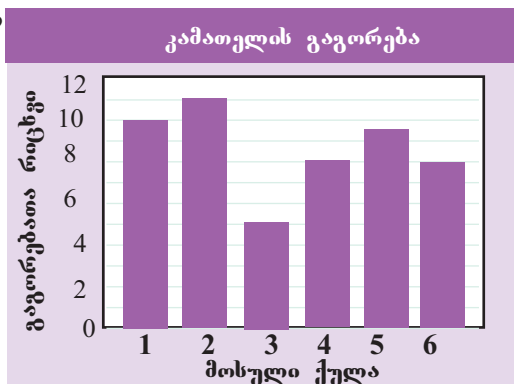
$10 + 5 + 9 = 24$ ჯერ კენტი რიცხვი მოსულა.

ცდათა რაოდენობა: 50

$$P(\text{კენტი რიცხვი}) = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

კენტი რიცხვის მოსვლის ცდითი ალბათობა:

$$\frac{12}{25}, \quad 0,48 \text{ ან } 48\% \text{-ია.}$$



ნიმუში 2. პროგნოზირებისას გამოცდილებითი ალბათობით შეიძლება ვისარგებლოთ.

მარტის თვეში ბოლო 10 დღიდან 2 დღე წვიმიანი იყო: ეს ტენდენცია თუ გაგრძელდება რისი ტოლია აპრილის თვეში წვიმიან დღეთა ალბათობა?

ჯერ ვიპოვოთ დაკვირვებით განსაზღვრული გამოცდილებითი ალბათობა.

$$P(\text{წვიმის}) = \frac{\text{მოვლენის მოხდენათა რიცხვი}}{\text{ცდების რაოდენობა}} = \frac{\text{წვიმიანი დღეები}}{\text{დაკვირვების დღეები}}$$

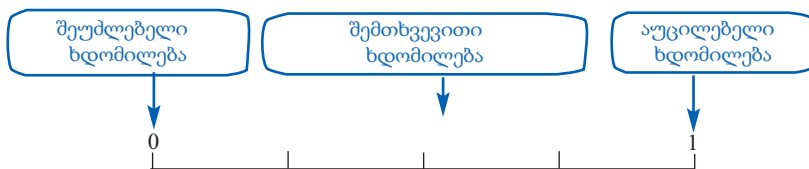
$$P(\text{წვიმის}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{აპრილის თვეში } 30 \cdot \frac{1}{5} = 6 \text{ დღეს შეიძლება გვქონდეს წვიმის მოლოდინი}$$

ვისარგებლოთ

$$P(\text{მოვლენა}) = \frac{\text{ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი}}{\text{შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი}}$$

შემთხვევითი მოვლენის მოხდენის ალბათობის რიცხვითი მნიშვნელობა 0-დან 1-მდე ინტერვალში იცვლება. ალბათობა ჩვეულებრივი წილადით, ათწილადითა და პროცენტით გამოისახება. მოვლენის მოხდენის ალბათობისა და მოუხდენლობის ალბათობის ჯამი 1-ის ტოლია.

$$P(\text{მოხდენისა}) + P(\text{არ მოხდენისა}) = 1$$



ალბათობის გაანგარიშება

თეორიული ალბათობის გამოყენება

ნიმუში 3. ილბლიანი ბორბლის დატრიალებისას 1000 მანეთი ფულის მოგების შანსი $\frac{1}{10}$ -ია. სულ რამდენი დანაყოფი აქვს ბორბალს, თუ სამ დანაყოფზე არის 1000 მანეთიანი მოგება?

ამოხსნა: დანაყოფების საერთო რიცხვი აღვნიშნოთ n -ით

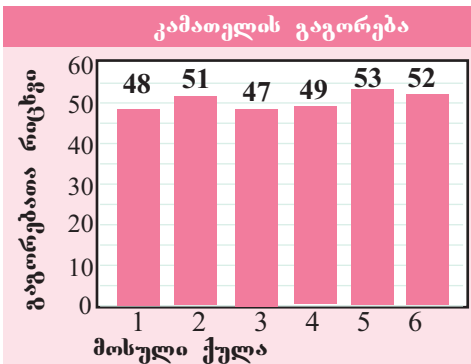
$$P(\text{პრიზ.}) = \frac{\text{მომგებიანი ნაწილების რიცხვი}}{\text{ყველა ნაწილის რიცხვი}} = \frac{1}{10} ; \frac{1}{10} = \frac{3}{n} ; n = 30$$

თეორიული და გამოცდილებითი ალბათობების შედარება

ნიმუში 4. ბარგრაფი ასახავს 300-ჯერ კამათელის გაგორების შედეგს. იპოვეთ კენტი რიცხვის მოსვლის ალბათობა.

$$P(\text{კენტი რიცხვი}) = \frac{148}{300} = \frac{37}{75} \approx 0,49$$

კენტი რიცხვების მოსვლის შემთხვევათა რაოდენობა
ცდათა რიცხვი



გამოცდილებით ნაპოვნი ალბათობა შევადაროთ თეორიულად პოვნი ალბათობასთან.

თეორიული ალბათობა: $P(\text{კენტი რიცხვისა}) = 50\%$

გამოცდილებითი ალბათობა $P(\text{კენტი რიცხვისა}) = 49\%$.

ეს გამოცდილებითი ალბათობა შევადაროთ ნიმუში 1-ში მოცემულ გამოცდილებით ალბათობასთან.

ცდათა რიცხვის ზრდასთან ერთად გამოცდილებითი ალბათობა თეორიულ ალბათობას უახლოვდება. ცდათა რიცხვის 50-დან 300-მდე გაზრდით გამოცდილებითი ალბათობა 48%-დან 49%-მდე გაიზარდა და 50%-იან თეორიულ ალბათობას კიდევ უფრო მეტად მიუახლოვდა.

- 1> ნიმუში 3-ში მოცემული ბარგრაფის მიხედვით გამოთვალეთ 4-ზე ნაკლები რიცხვის მოსვლის გამოცდილებითი ალბათობა. ეს შედეგი შეადარეთ თეორიულ ალბათობასთან.
- 2> ნოვრუხის დღესასწაულისათვის შეძენილი 50 ცალი ღია ბარათიდან ლალემ შემთხვევითი შერჩევით 4 აიღო. მათ შორის 2-ზე ყვავილია გამოსახული. 50 ღია ბარათიდან სავარაუდოდ რამდენზე იქნება ყვავილი გამოსახული?
- 3> წველების მწარმოებელმა კომპანიამ ჩატარებულ სარეკლამო შოუზე წვენის ყუთების ეტიკეტზე ფულის ან საჩუქრების მოგება მოათავსა. ფულის მოგების ალბათობა $\frac{3}{10}$ -ია. სულ რამდენი მომგებიანი წვენის ყუთია გამოტანილი შოუზე თუ მოგებაზე 9 ცალი ფულიანი წვენის ყუთია გამოტანილი?
- 4> ჩაატარეთ ორი მეტალის ფულის აგდების ცდა. რუკის ან საფასურის მოსვლის აღნიშვნით შედეგები ცხრილში ჩაწერეთ.

თეორიული ალბათობა	ცდათა რიცხვი	მოსალოდნელი შედეგი	ნამდვილი შედეგი	გამოცდილებითი ალბათობა
	20			

მოგლეჩის მოხდენის შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი

შესაძლო ხდომილებათა რიცხვი

თუ ხდომილობა ერთი ან რამდენიმე ელემენტარული ხდომილობის თანხლებით ხდება მას რთული ხდომილობა ეწოდება. მაგალითად, ორი მეტალის ფულის ერთდროული აგდება რთული ხდომილობაა. რთული ხდომილობების შესაძლო შემთხვევათა რიცხვის: ა) ხისებრი დიაგრამის; ბ) სიის შედგენის; გ) ცხრილის; დ) გამრავლების წესის გამოყენებით მოძებნა შეიძლება.

გამრავლების პრინციპი: თუ a ელემენტის n ხერხით შერჩევა და თითოეული ასეთი შერჩევის საპირისპიროდ b ელემენტის m ხერხით შერჩევა შესაძლებელია, მაშინ (a, b) წყვილის $n \times m$ ხერხით შერჩევა შეიძლება.

ნამუში 1. ცხრილის შევსებით.

ერთი კამათელისა და ერთი მეტალის ფულის ერთდროული აგდებისას შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი: 12 ხდომილობა

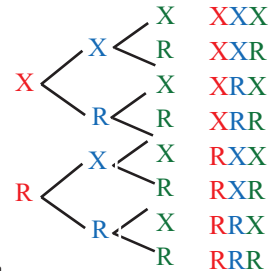
გამრავლების პრინციპის თანახმად: მეტალის ფულით 2 ხდომილობა ($m = 2$), შესაძლო ხდომილობათა რიცხვი: $2 \cdot 6 = 12$

4 5	1	2	3	4	5	6
	1R	2R	3R	4R	5R	6R
	1X	2X	3X	4X	5X	6X

ნამუში 2. ხისებრი დიაგრამის აგებით.

სამი მეტალის ფულის აგდებისას შესაძლო ხდომილებათა რიცხვი: 8 (X- რუკა, R- რიცხვი)

გამრავლების წესის მიხედვით: თითოეული მეტალის ფულით 2 ხდომილება. შესაძლო ხდომილებათა რიცხვი: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.



- 1) სურათზე მოცემული ბორბლებიდან თითოეულის ერთხელ დატრიალებით იპოვეთ შესაძლო ხდომილებათა რიცხვი.
- 2) გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ღერძებიდან ერთი ვარსკვლავის სურათზე, მეორე კი 5-ზე გაჩერდება.



- 2) გამრავლების პრინციპის გამოყენებით გამოთვალეთ მუსიკალური ცენტრის შესაძლო შერჩევათა რიცხვი.

MP3 მუსიკალური ცენტრი	
მეხსიერება	8 გბ, 12 გბ, 16 გბ, 24 გბ
ფერი	ვერცხლი, ოქრო, შავი, ყავისფერი

- 3) 0, 1, 2, 3, 4 ციფრების გამოყენებით, რამდენი ა) ოთხნიშნა რიცხვის; ბ) განსხვავებულნიშნებიანი ოთხნიშნა რიცხვის; გ) სულ მცირე ორი ერთნაირნიშნა ოთხნიშნა რიცხვის დაწერა შესაძლებელი?

- 4) კლასში 15 მოსწავლეა. კლასის ორგანიზატორისა და მისი მოადგილის შერჩევის რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?

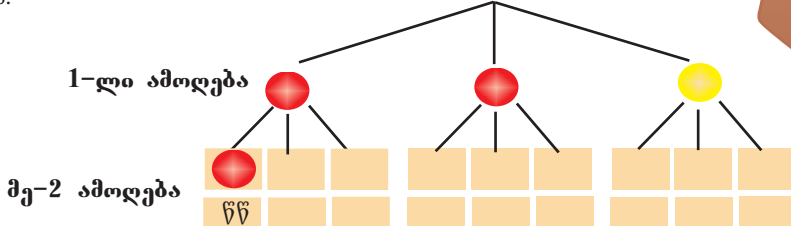
- 5) იპოვეთ კამათელის ერთხელ გაგორებისა და ილბლიანი ბორბლის დაფის ერთხელ დატრიალებისას, კამათელზე 5-ის მოსვლისა და ღერძის წითელ ფერზე გაჩერების ხდომილობის ალბათობა. იპოვეთ ამ მოვლენის არ მოხდენის ალბათობაც.



დამოუკიდებელი და დამოკიდებული ხდომილებები

ცდა 1.

ტომარაში 2 წითელი და 1 ყვითელი ბურთულაა. წარმოადგინეთ, რომ თქვენ ამ ტომრიდან ზედიზედ ორი ბურთულა უნდა ამოიღოთ. ყოველ ჯერზე ამოღებული ბურთულის ფერი აღნიშნეთ და ბურთულა კვლავ ტომარაში დააბრუნეთ. ფერების პირველი ასოებით აღნიშვნით შესაძლო ხდომილობათა რიცხვის მოძებნისათვის შეავსეთ ხისებრი დიაგრამა. იპოვეთ ზედიზედ წითელი ბურთულების ამოღების ალბათობა.



მეორე ამოღებისას ამოსული ბურთულის ფერი დამოკიდებულია პირველად ამოსული ბურთულის ფერზე?

დამოუკიდებელი ხდომილებები

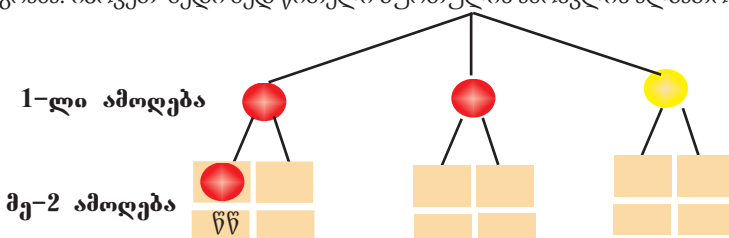
თუ ერთი ხდომილობის მოხდენა სხვა ხდომილების მოხდენის შესაძლებლობაზე არ ახდენს გავლენას, ასეთ ხდომილობებს დამოუკიდებელი ხდომილობები ეწოდება. მაგალითად, კამათელისა და მეტალის ფულის ერთდროულად გაგორებისას კამათელის ზედაპირზე მოსული ქულა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ მონეტა რომელ მხარეს დაეცა.

დამოუკიდებელი ორი ან მეტი ხდომილობის ალბათობა, ამ ხდომილობათა ალბათობის ნამრავლის ტოლია: $P(A \text{ და } B) = P(A) \cdot P(B)$ ფორმულა $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ სახითაც იწერება. მსგავსი წესით სამი დამოუკიდებელი ხდომილებისათვის:

$$P(A, B \text{ და } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

ცდა 2.

წარმოიდგინეთ, რომ ტომარაში კვლავ 2 წითელი და 1 ყვითელი ბურთულაა. თქვენ ყოველ ჯერზე 1 ბურთულას იღებთ ფერს აღნიშნავთ, თუმცა ბურთულას ტომარაში აღარ აბრუნებთ. ფერების პირველი ასოების აღნიშვნით შესაძლო ელემენტარული ხდომილობების რიცხვის პოვნისათვის შეავსეთ ხისებრი დიაგრამა. იპოვეთ ზედიზედ წითელი ბურთულის ამოსვლის ალბათობა.



მეორე ამოღებისას ამოღებული ბურთულის ფერი დამოკიდებულია პირველად ამოღებული ბურთულის ფერზე?

დამოკიდებული ხდომილებები

თუ ერთი ხდომილების მოხდენა გავლენას ახდენს სხვა ხდომილების მოხდენის შესაძლებლობაზე, ამ ხდომილებებს დამოკიდებული ხდომილებები ეწოდება. მაგალითად, თუ პარკში არსებული 100 ბარათიდან 10 ბარათი მომგებიანია, პირველ ცდაზე 1 პირის მიერ მომგებიანი ბარათის ამოღება, გავლენას ახდენს სხვა პირის მიერ მომგებიანი ბარათის ამოღების ხდომილებაზე.

ორი დამოკიდებული A და B ხდომილობების ალბათობა A ხდომილობის ალბათობისა და A ხდომილობის მოხდენის შემდეგ B ხდომილობის მოხდენის ალბათობის ნამრავლის ტოლია. $P(A \text{ და } B) = P(A) \cdot P(A \text{ ხდომილების შემდეგ } B\text{-ს მოხდენისა})$.

ნიმუში 1. დამოუკიდებელი ხდომილება. მეტალის ფული და კამათელი ერთდროულად გააგორეს. გამოთვალეთ მეტალის ფულის რუკის მხარეს და კამათელზე მარტივი რიცხვის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა. მეტალის ფულზე რუკის მოსვლის ხდომილობის ალბათობა



$$P(\text{რუკა}) = \frac{1}{2}; \text{ კამათელის გაგორებისას მარტივი (2, 3, 5) რიცხვის მოსვლის ალბათობა}$$

$$P(\text{მარტივი}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(\text{რუკა და მარტივი}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

რუკისა და მარტივი რიცხვის მოსვლის ალბათობა $\frac{1}{4}$, 0,25 ანუ 25%-ია.

ნიმუში 2. დამოკიდებული ხდომილება. ტელეშოუსათვის მოთამაშეები 100 მაყურებელს შორის შემთხვევით შეირჩევა. თემურის 5 ნათესავი და 9 თანაკლასელი გადაცემას სტუდიაში უყურებენ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველი არჩევისას თემურის ნათესავებიდან ერთ-ერთი, ხოლო მეორე არჩევის დროს კი მისი თანაკლასელებიდან ერთ-ერთი იქნება არჩეული?

$$\text{პირველი არჩევისას ნათესავის არჩევის ალბათობა } P(\text{ნათესავი}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

მეორე არჩევისას თანაკლასელის არჩევის ალბათობა:

$$P(\text{ნათესავის, შემდეგ მეგობარი}) = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

ორი დამოკიდებული ხდომილობის გამოთვლის ფორმულის გამოყენებით თემურის ნათესავისა და თანაკლასელის შერჩევის ზედიზედ ხდომილობის ალბათობის გამოთვლა შეგვიძლია.

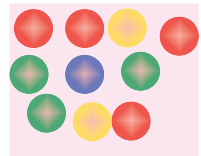
$$P(\text{ნათესავი ან მეგობარი}) = P(\text{ნათესავი}) \cdot P(\text{ნათესავის შემდეგ მეგობარი})$$

$$P(\text{ნათესავი ან მეგობარი}) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{220}$$

1 ქვემოთ მოცემული ხდომილობებიდან რომლებია დამოუკიდებელი და რომლებია დამოკიდებული?

- მეტალის ფულის ორჯერ ზედიზედ აგდებისას, ყოველ ჯერზე რუკის მოსვლა;
- ყუთში მყოფი ბარათებიდან უკან დაუბრუნებლობის პირობით მიმდევრობით ორი ბარათის ამოღებით ამ ბარათის ერთფეროვნება.

2 ტომარაში 4 წითელი, 3 მწვანე, 2 ყვითელი და 1 ცისფერი ბურთულაა. თქვენ ზედიზედ 2 ბურთულა ამოიღეთ. გამოთვალეთ ალბათობა ქვემოთ მოცემული პირობების მიხედვით. რომელ შემთხვევაშია ხდომელობა დამოკიდებული და რომელში დამოუკიდებელი?



- უკან დაუბრუნებლად P (წითელი და მწვანე)
- უკან დაბრუნებით P (ყვითელი, ყვითელი)
- უკან დაუბრუნებლად P (წითელი და ცისფერი)
- უკან დაბრუნებით P (მწვანე და წითელი)
- უკან დაუბრუნებლად P (ცისფერი და მწვანე)
- უკან დაბრუნებით P (წითელი, წითელი)

3 ორივე ბორბალი დატრიალდა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე მათგანზე მოვა ლუწი რიცხვი.



დამოუკიდებელი და დამოკიდებული ხდომილებები

- 4 პრიზის მოგებისათვის პირველი ცდა ფიდანმა გააკეთა. იპოვეთ მისი კინოში ბილეთის მოგების ალბათობა. შემდეგ ულქერმა სცადა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ფიდანიცა და ულქერიც კინოს ბილეთს მოიგებენ.

პრიზები	რაოდენობა
კინოს ბილეთი	4
სპორტული მასიური	8
მუსიკალური CD	5

- 5 ბარათები რომლებზეც სხვადასხვა რიცხვები აწერია მაგიდაზე ამოტრიალებული აწყვია. ბარათებიდან ჯერ ერთი, შემდეგ კი მეორე უნდა აიღოთ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე ბარათზე ლუწი რიცხვი იქნება; ბ) ბარათებიდან ერთზე 6-ზე მეტი, მეორეზე კი 6-ზე ნაკლები რიცხვი მოვა.



- 6 ზედაპირზე A, B, C, D, E ასოებიანი წარწერებით იღბლიანი ბორბლის 50-ჯერ დატრიალების შედეგები (ისარი თითოეულ ასოზე რამდენჯერ გაჩერდა) ცხრილშია ნაჩვენები.
 ა) თითოეული ხდომილებისათვის იპოვეთ გამოცდილებითი ალბათობა.
 1) P (E); 2) P (A ან B) 3) P (D-ზე არ გაჩერების); 4) P (მუდმივი); 5) P (A და C-ზე არ გაჩერების).
 ბ) რისი ტოლია ისრის E ასოზე გაჩერების თეორიული ალბათობა? შეადარეთ თეორიული და გამოცდილებითი ალბათობები.

ასოები	სიხშირე
A	8
B	12
C	10
D	9
E	11

- 7 ლეილა, გუნელი, ულქერი და გუნაი შეთანხმდნენ, რომ კამათელის გაგორებით გადაწყვიტონ მათ შორის ვინ მოიყვანს წესრიგში წიგნების თაროს. ვისაც ყველაზე მაღალი ქულა ამოუვა წიგნების თარო მან უნდა დააღაგოს. თუ ყველაზე მაღალი ქულა ერთნაირი იქნება, სამუშაო ერთდროულად უნდა შეასრულონ. გუნელმა, ულქერმა და გუნაიმ შესაბამისად 5, 3 და 4 ქულა მიიღეს. 1) რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ლეილა: ა) იქნება თაროს წესრიგში მომყვანი; ბ) არ იქნება თაროს წესრიგში მომყვანი. 2) რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ ლეილა და გუნელი ერთად შეასრულებენ ამ სამუშაოს?

- 8 მასწავლებელმა კლასი ორ ჯგუფად უნდა დაეყოს და შემთხვევით შერჩევით მოსწავლეებიდან თითოეული ჯგუფისათვის ლიდერი აირჩიოს. ლეილას ჯგუფის ლიდერად არჩევის შანსი $\frac{1}{15}$ -ია. ლეილასი და მისი უახლოესი მეგობრის არჩევის ალბათობა კი $\frac{1}{165}$ -ია.
 1. იპოვეთ ლეილას მეგობრის ლიდერად არჩევის ალბათობა.
 2. რამდენი მოსწავლეა ლეილას კლასში?

- 9 200 ავტომობილიდან 120-ის განათების სისტემაში, 150 ავტომობილიდან 80-ის ძრავაშია გაუმართაობა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ თუ შემთხვევით ორი ავტომობილი შეირჩევა, ერთის ძრავა და მეორის განათების სისტემა იქნება გაუმართავი.

- 10 ღია ტიპის შეკითხვა. ტომარაში 3 სხვადასხვა ფერის 9 ბურთულია. შემთხვევით უკან დაუბრუნებლობის პირობით 2 ბურთულის ამოღების ხდომილების შესახებ დაწერეთ ისეთი ამოცანა, რომ ამ ხდომილების ალბათობა იყოს $\frac{1}{6}$.

განმაზოგადებელი დაჯილდოებები

- 1** ცხრილის მიხედვით ერთი წვნიანი, ერთი ცხელი კერძი და ერთი დესერტისაგან შემდგარი სადილის შერჩევისათვის განსაზღვრეთ შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა.

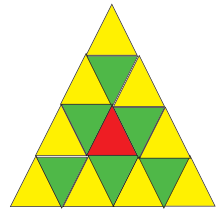
წვნიანები	კერძები	დესერტი
ქათმის წვნიანი ხორცის წვნიანი	კაბლეტი შემწვარი თევზი ტოლმა	ქადა ვახლავა

- 2** ცხრილში მოცემულია ინფორმაცია სკოლის ბიბლიოთეკაში არსებული წიგნების შესახებ. იპოვეთ ქვემოთ მოცემულ ხდომილებათა აღბათობა.

- 1) შემთხვევით შერჩეული წიგნი იყოს მაგარყდიანი, ფერადი, მოთხრობების წიგნი;
- 2) შემთხვევით შერჩეული წიგნი იყოს შავ-თეთრი, ლექსების წიგნი;
- 3) შემთხვევით შერჩეული წიგნი იყოს რბილყდიანი.

		ფერადი	შავ-თეთრი
მაგარყდიაწი	მოთხროზა	120	350
	ლექსი	90	230
რბილყდიაწი	მოთხროზა	450	500
	ლექსი	220	280

- 3** სამკუთხა სახის სამიზნე კონგრუენტულ სამკუთხედებადაა დაყოფილი. მსროლეულმა ორჯერ ზედიზედ ისროლა და ორივე მიზანში მორატყა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მსროლეულმა მორატყა; ა) ორივე სროლაში ყვითელა; ბ) ერთი ყვითელ, ერთი წითელ; გ) ერთი ყვითელ, ერთი მწვანე ფერის სამკუთხედს.



- 4** ანარმა ქვემოთ მოცემული ტესტის შეკითხვების პასუხები არ იცის და შემთხვევითი შერჩევით პასუხებიდან ერთ-ერთს აღნიშნავს. თითოეულ კითხვას პასუხის 4 ვარიანტი აქვს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ანარი: ა) სამივე კითხვაზე სწორ პასუხს გასცემს; ბ) სამივე შეკითხვაზე მცდარ პასუხს გასცემს; გ) ერთ შეკითხვაზე სწორ, დანარჩენ ორ შეკითხვაზე მცდარ პასუხს გასცემს; დ) ორ შეკითხვაზე სწორ, ერთ შეკითხვაზე კი არასწორ პასუხს გასცემს?
ამ შეკითხვებზე თქვენც გაეცით პასუხი.

- 1) აზერბაიჯანის რესპუბლიკამ რომელ წელს მოიპოვა პირველად დამოუკიდებლობა?

- с) 1928 д) 1905 ж) 1918 з) 1920

- 2) რომელი არ არის ფათალი ხან ხოისკის შესახებ?

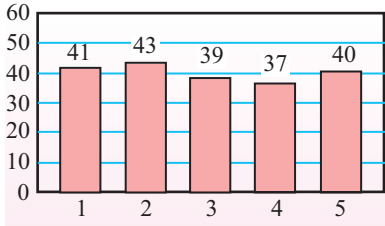
- ა) ზებერბაიჯანის დემოკრატიული რესპუბლიკის ფინანსთა მინისტრი;
ბ) ზებერბაიჯანის დემოკრატიული რესპუბლიკის საგარეო საქმეთა მინისტრი;
გ) ზებერბაიჯანის დემოკრატიული რესპუბლიკის შინაგან საქმეთა მინისტრი;
დ) რუსეთის სახელმწიფო დუმის დეპუტატი.

- 3) ვინ არის კომპოზიტორი რომანსისა “ჩემი ქვეყანა”?

- ა) ჯაჰანგირ ჯაჰანგიროვი; ბ) ასეფ ზეინალდი; გ) ნიაზი; დ) ფიქრეთ ემიროვი.

განმაზოგადებელი დაფალებები

- 5) 1) სურათზე მოცემული იღბლიანი ბორბლის 200-ჯერ დატრიალების შედეგები ბარგრაფშია მოცემული. ამ შედეგების მიხედვით შეადარეთ ქვემოთ მოცემული ხდომილებების თეორიული და გამოცდილებითი ალბათობები.



- ა) 5-ზე გაჩერების;
 2) 2-ზე გაჩერების;
 3) 3-ზე მეტ რიცხვზე გაჩერების.



გამოცდილებითი ან თეორიული ალბათობის გამოყენებით 20000-ჯერ ჩატარებული ცდისათვის 3-ზე გაჩერების რაოდენობის შესახებ შეგიძლიათ პროგნოზირება?

- 6) მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი სიმრავლეების ელემენტების რაოდენობა.

ა) თუ $n(A \setminus B) = 6$, $n(B \setminus A) = 7$, $n(A \cup B) = 17$, მაშინ $n(A \cap B) = ?$
 ბ) $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cup B) = 18$, $n(B \setminus A) = ?$

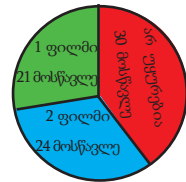
- 7) რიცხვების რომელი წყვილი არ ასახავს ერთი მოვლენის მოხდენისა და არმოხდენის ალბათობას?

1) $\frac{5}{8}$ და $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{4}{6}$ და $\frac{1}{3}$ 3) 0,875 და $\frac{1}{8}$ 4) 0,65 და 0,55

- 8) სკოლაში შემთხვევით შერჩეულ მოსწავლეთა შორის ჩატარდა გამოკვლევა შეკითხვით “რამდენ კინოფილმს უყურებ კვირაში”? შედეგები წრიულ დიაგრამის სახითაა მოცემული.

ა) თუ სკოლაში 1500 მოსწავლე სწავლობს, კვირის განმავლობაში 1 ფილმის მნახველი მოსწავლეების რაოდენობა რამდენი შეიძლება იყოს?

ბ) 75 მოსწავლიდან შემთხვევით შერჩეული 2 მოსწავლიდან რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთს ნანახი ექნება 1 ფილმი, ხოლო მეორეს ორი და უფრო მეტი?



- 9) ყუთში ჩაუხედავად ასლანმა ერთი კალამი ამოიღო. ასლანის შემდეგ ემინმაც ერთი კალამი აიღო. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე აიღებდა ლურჯ კალამს.

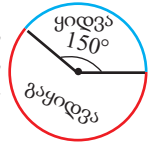


- 10) არითმეტიკული საშუალო 14-ის ტოლია. დაამატეთ ორი ისეთი რიცხვი, რომ არითმეტიკული საშუალო არ შეიცვალოს.

- 11) ერთ მაღაზიაში მომუშავეთა ხელფასები შემდეგია: 250 ლ; 200 ლ; 240 ლ; 2500 ლ. რას უდრის საშუალო თვიური ხელფასი? ეს მაჩვენებელი ყველა თანაშრომელის ხელფასის შესახებ იძლევა სწორ ინფორმაციას?

განყოფილებების მიხედვით განმარტებული დავალებები

- 1» წრიული დიაგრამა მაღაზიისათვის ჩანთების შეძენისა და გაყიდვის ფასებს შორის (დამოკიდებულება) სხვაობას უჩვენებს. დიაგრამის მიხედვით, რამდენ მანეთ მოგებას მიიღებდნენ 80 მანეთად შეძენილი ჩანთიდან?



- 2» ამოხსენით განტოლებები სრული კვადრატის გამოყოფით.

$$\begin{array}{ll} 1) x^2 + 17x - 200 = 13x - 60 & 5) 2x^2 - 12x + 14 = 0 \\ 2) x^2 + 1,8x - 0,4 = 0 & 6) -4x^2 + 21x = x + 11 \\ 3) x^2 + 1\frac{1}{3}x = 2x + 1\frac{7}{9} & 7) 0,4x^2 + 0,7x = 0,3x - 0,2 \\ 4) x^2 + 1,2x - 0,13 = 0 & 8) \frac{x^2}{24} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = 0 \end{array}$$

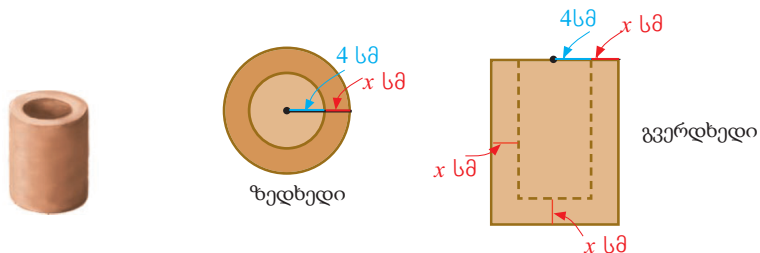
- 3» ჯერ დააკვირდით განტოლებებს. შერჩეული ამოხსნის ხერხის მიხედვით დაყავით ქვემოთ მოცემულ ჯგუფებად და ამოხსენით.

1) მამრავლებად დაშლით; 2) სრული კვადრატის გამოყოფით.

$$\begin{array}{lll} x^2 + 12x + 35 = 0 & 0,01x^2 - 0,22x + 0,9 = 0 & x^2 - 6x - 15 = 0 \\ 4x^2 - 36 = 0 & 4(x + 8)^2 = 144 & 3x^2 - 2x = 6 - x \\ 2x^2 + 9x + 7 = 0 & \frac{x^2}{4} - \frac{4x^2}{20} = 5 & 3x^2 + 10x + 3 = 0 \\ 9(x - 3)^2 = 225 & & 7x^2 - 10x - 55 = 100 + 2x^2 \end{array}$$

- 4» ტურისტებმა ბაზებიდან 8 კმ ჩრდილოეთით, 9 კმ აღმოსავლეთით, 4 კმ კვლავ ჩრდილოეთით მოძრაობის შემდეგ ახალი ბანაკი დადგეს. რამდენი კილომეტრი პირდაპირი მანძილი ტურისტულ ბაზასა და ახალ ბანაკს შორის?

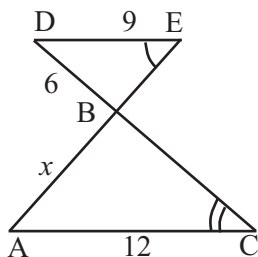
- 5» ტექნოლოგიის გაკვეთილზე საკალმის დამზადებისათვის თითოეულ მოსწავლეს 300 სმ³ მოცულობის თიხა მიეცა. მოსწავლეებმა ამ თიხის სრული გამოყენებით 10 სმ სიმაღლის, შიგა რადიუსი 4 სმ-ის მქონე ცილინდრის ფორმის საკალმის დამზადება რომ მოინდომონ, დაახლოებით რამდენი სანტიმეტრი იქნება მისი კედლების სისქე? მითითება: ჯერ, რვეულში სურათები ჩაიხაზეთ, განსაზღვრეთ თიხის მოცულობა რომელი ორი ცილინდრის მოცულობების ტოლი უნდა იყოს.



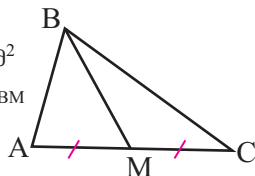
- 6» ფერმაში A ჯიშისა და B ჯიშის 180 ძროხაა. ფერმერმა ძროხების რძის ცხიმოვანობის შემოწმებისათვის 50 ძროხა უნდა შეარჩიოს. რამდენი ძროხა უნდა შეარჩიოს მან თითოეული ჯიშიდან, რომ უფრო სწორი შედეგი მიიღოს?

განმარტოგადებელი დავალებები

- 7** მოცემულია: $\angle C \cong \angle E$
 $AC = 12$
 $DE = 9, DB = 6$
 იპოვეთ: AB



- 8** მოცემულია: $\triangle ABC$
 BM მედიანა
 $S_{\triangle ABC} = 48 \text{ სმ}^2$
 იპოვეთ: $S_{\triangle ABM}$



- 9** იპოვეთ გამოსახულებების მნიშვნელობა.

ა) $\frac{4^2 \cdot 4^{-1} \cdot 5^{-2}}{4^3 \cdot 5^{-3} \cdot 5^0}$ ბ) $\frac{8^{-3} \cdot 9^{-2} \cdot 4^0}{3^{-4} \cdot 8^{-5} \cdot 4^{-1}}$ გ) $\frac{0,1^{-3} \cdot 0,01^{-2}}{0,1^{-6} \cdot 0,01^3}$ დ) $\frac{0,2^{-3} \cdot 0,3^{-2}}{0,04^{-1} \cdot 0,09^3}$

- 10** იპოვეთ $(x^y) \cdot (2x^y) \cdot (3y^x)$ გამოსახულების მნიშვნელობათუ $x = 2$ და $y = -2$.

- 11** 1) თუ $a = \sqrt{b} = 2$, იპოვეთ $\left(\frac{b\sqrt{b}}{a^4}\right)^{-a}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

- 2) თუ $a = \frac{2}{3}$ და $b = 9$, იპოვეთ $(a\sqrt{b})^{-ab}$ გამოსახულების მნიშვნელობა.

- 12** ტრაპეცია არის ოთხკუთხედი, რომელსაც მხოლოდ ორი გვერდი აქვს პარალელური. საკოორდინატო სისტემაზე ABCD ოთხკუთხედის წვეროები $A(1; -3)$ $B(2; 7)$, $C(3; 9)$, $D(5; 5)$ წერტილებშია. შეამოწმეთ არის თუ არა იგი ტრაპეცია.

- 13** მოცემულ წერტილებზე გამავალი ორი წრფიდან განსაზღვრეთ რომლებია პარალელური და რომლებია მართობული.

- ა) წრფე 1. $A(-1, 9)$ და $B(-6, -6)$
 წრფე 2. $C(-7, -23)$ და $D(0, -2)$

- ბ) წრფე 1. $A(4, -3)$ და $B(-8, 1)$
 წრფე 2. $C(5, 11)$ და $D(8, 20)$

- გ) წრფე 1. $A(3, -10)$ და $B(2, -10)$
 წრფე 2. $C(-6, 8)$ და $D(2, 12)$

- დ) წრფე 1. $A(0, 3)$ და $B(0, -7)$
 წრფე 2. $C(-6, -4)$ და $D(12, -4)$

- 14** მაღაზიაში ერთი და იგივე პროდუქტისათვის ქვემოთ მოცემული 4 სხვადასხვა შემოთავაზებაა. ამ შემოთავაზებებიდან რომელშია ფასი ყველაზე მაღალი?

1) ორი შეიძინე, ერთისა გადაიხადე

2) ერთი შეიძინე, მეორეში 25% ფასდაკლება მიიღე

3) ორი შეიძინე, მესამე უფასოდ მიიღე

4) ორის შემძენი, მესამეს 50% ფასდაკლებით გადაიხდის

- 15** რამდენჯერ მეტია $\sqrt{12}$ ერთეულის წიბოს მქონე კუბის მოცულობა, იმ კუბის მოცულობასთან შედარებით, რომლის წიბოც $\sqrt{3}$ ერთეულის ტოლია?

16» მოცემულია: $\triangle ABC$
 $EF \parallel AC$

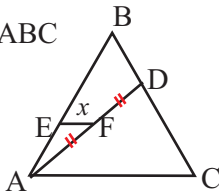
$$AF \cong FD$$

$$BD = \frac{2}{3} DC$$

$$AC = 10 \text{ სმ}$$

იპოვეთ: $EF = ?$

ამოხსნის გეგმა: სამკუთხედის შუახაზის გავლებით, სამკუთხედების მსგავსების გამოყენება შეიძლება.



17» მოცემულია: $\triangle ABC$

DEFH მართკუთხედი

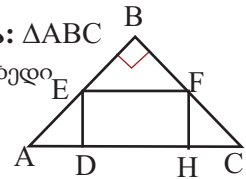
$$DH = 2 \cdot HF$$

$$AB = 3 \text{ სმ}$$

$$BC = 4 \text{ სმ}$$

იპოვეთ: $EF = ?$

ამოხსნის გეგმა: მართკუთხედის წვეროდან სიმაღლის გავლება, გეომეტრიული საშუალოსა და მსგავსების გამოყენება შეიძლება.



18» A წერტილი რიცხვით ღერძზე $\sqrt{205}$ -ზე ნაკლებ უდიდეს მთელ რიცხვს, B წერტილი კი $\sqrt{45}$ -ზე მეტ უმცირეს მთელ რიცხვს შეესაბამება. იპოვეთ მანძილი A და B რიცხვებს შორის.

19» ლალემ კლასში მყოფ 10 მოსწავლეს შორის ჩაატარა გამოკითხვა იმაზე, თუ ვის ჰყავს კატა და ვის ძაღლი. მონაწილეთა 40%-ს კატა, 30%-ს ძაღლი, 10%-ს კი ორივე ჰყავს. ამ ინფორმაციების მიხედვით შეავსეთ ცხრილი.

	ძაღლი ჰყავს,	ძაღლი არ ჰყავს	ჯამი
კატა ჰყავს	☐	☐	☐
კატა არ ჰყავს	☐	☐	☐
ჯამი	☐	☐	☐

20» უჩვენეთ უტოლობის სისწორე.

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

21» დეტალის ზომა 1:25 მასშტაბით გადაღებულ სურათზე 18 სმ-ია. იპოვეთ დეტალის ნამდვილი ზომა.

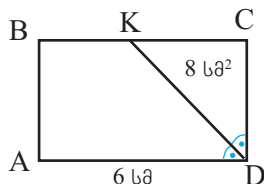
22» მოცემულია: ABCD მართკუთხედი.

DK ბისექტრისა ($\angle D$ -ისა)

$$AD = 6 \text{ სმ}$$

$$S_{\triangle DCK} = 8 \text{ სმ}^2$$

იპოვეთ: S_{ABCD}



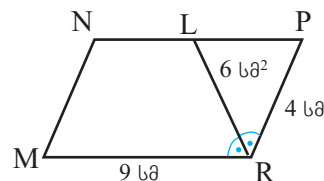
23» მოცემულია: MNPR პარალელოგრამი.

RL ბისექტრისა ($\angle R$ -ისა)

$$MR = 9 \text{ სმ}, RP = 4 \text{ სმ}$$

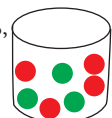
$$S_{\triangle LPR} = 6 \text{ სმ}^2$$

იპოვეთ: S_{MNPR}



24» 1) ყუთიდან შემთხვევით ერთი ბურთულა ამოიღეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის იქნება: ა) მწვანე ფერის; ბ) წითელი ფერის; გ) მწვანე ან წითელი ფერის.

2) ყუთიდან შემთხვევით 2 ბურთულა ამოიღეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე წითელი ფერისა; ბ) სხვადასხვა ფერისა.

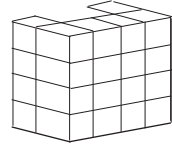


განმაზოგადებელი დაგალებები

25 ყუთში 18 ყვითელი და 8 წითელი ბურთულაა. ყუთიდან შემთხვევით ერთი ბურთულა ამოიღეს და ისევ უკან დააბრუნეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კვლავ ერთ ბურთულას თუ ამოიღებენ, ბურთულები ორივე ერთი ფერისა იქნება.

26 დახაზეთ სურათზე მოცემული ფიგურის ზედხედის შესაძლო ოთხი ვარიანტი, შესაძლო ერთი ვარიანტი ნიმუშისათვის მოცემულია. ფიგურის შემადგენელი თითოეული პატარა კუბის მოცულობა 1 კუბური ერთეულია.

ა) კუბურ ერთეულებში დაწერეთ ფიგურის უდიდესი და უმცირესი მოცულობა.
ბ) ფიგურის მთელი ზედაპირის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები გამოსახეთ კვადრატულ ერთეულებში.

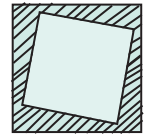


27 გულარემ ახალი წლის დღესასწაულში მონაწილე 80 ადამიანისათვის წლის სიმბოლური ცხოველის ფიგურა უნდა შეიძინოს. ფიგურები ყუთში იყიდება. თითოეული ყუთში 18 ცალია, გულარეს შესაძენი ყუთების რაოდენობა აღნიშნეთ n -ით და დაწერეთ შესაბამისი უტოლობა.

28 ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\frac{3}{x+5} = \frac{2x}{x^2-x}$ ბ) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 2\frac{1}{2}$ გ) $x^2+x+1 = \frac{5}{x^2+x+1}$

29 მცირე კვადრატის პერიმეტრი 72 სმ-ია. დაშტრიხული ნაწილის ფართობი კი 252 სმ²-ია. რამდენი სანტიმეტრია დიდი კვადრატის პერიმეტრი?

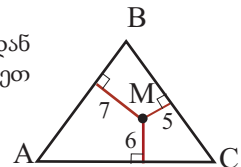


30 ქვემოთ მოცემული გამოსახულებებიდან რომელია მრავალწევრი?

$\frac{5}{x-1} - \frac{1}{x^2} - 3$ $\frac{\sqrt{x-1}}{5} - \frac{1}{x^2} - 3$ $\frac{x-1}{5} - x^2 - 3$ $\frac{x-1}{5} - \sqrt{x} - 3$

31 ინტერნეტ პროვაიდერის მოწვდილი ინფორმაციის თანახმად წლის განმავლობაში $1,2 \cdot 10^8$ ცალი e-mail იყო გაგზავნილი. ეს 5 წლის წინანდელ შესაბამის მაჩვენებელთან შედარებით 100-ჯერ მეტია. რამდენი e-mail იყო გადაგზავნილი 5 წლის წინათ? თუ ზრდა ამ ტემპით გაგრძელდება, რამდენ e-mail-ს გააგზავნის კომპანია 2 წლის შემდეგ?

32 ტოლგვერდა სამკუთხედის შიგნიდან აღებული წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე მანძილები 5 მ, 6 მ და 7 მ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.



33 იპოვეთ მოცემულ რიცხვებს შორის უმცირესი.

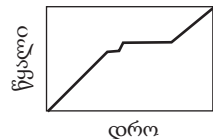
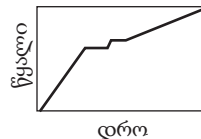
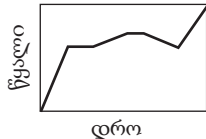
ა) $0,02 \cdot 10^4$ ბ) $0,2 \cdot 10^3$ გ) $2,0 \cdot 10^{-2}$ დ) $20,0 \cdot 10^2$ ე) $0,002 \cdot 10^5$

34 2000 მეტრი წრიული ფორმის სარბენ ბილიკზე ორი სპორტსმენი თუ ერთი მიმართულებით იმოდრავებენ, 20 წუთში ერთხელ, საპირისპირო მიმართულებით თუ იმოდრავებენ 6 წუთში ერთხელ შეხვდებიან. რამდენ მეტრს გადის თითოეული სპორტსმენი წუთში?

35 სარბენი ბილიკის გასწვრივ, ყოველ 20 მეტრში ბომბია დარჭობილი. სპორტსმენი რომელიც სირბილს იწყებს 1-ლი ბომბის სიახლოვიდან, თუ მე-4 ბომბამდე 9 წამში აღწევს, რამდენ წამში დაფარავს მე-6 ბომბამდე მანძილს?

36 ჯემილმა ეზოში ავზი წყლით გაავსო. მოცემული ინფორმაციების თანახმად, რომელი გრაფიკი სწორად ასახავს დამოკიდებულებას აუზში ჩასხმული წყლის მოცულობასა და აუზის ავსების დროს შორის?

- ჯერ დროის ერთეულში ერთი და იგივე რაოდენობით განსაზღვრულ ხანს წყალმა იდინა;
- მცირე ხნით ონკანი დაიკეტა;
- ონკანი გაიხსნა, თუმცა შედარებით ნაკლები წყალი მოდის.
- ონკანი კვლავ გარკვეული დროით დაიკეტა.
- ონკანი გაიხსნა და გარკვეულ დროში ონკანიდან, როგორც თავიდან ისე იდინა წყალმა.



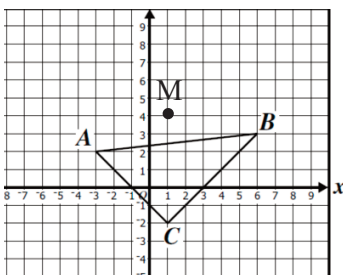
37 ა) ჟირაფის მასა დაახლოებით 10^3 კგ, ცისფერი ვეშაპის მასა კი $2 \cdot 10^5$ კგ-ია. რამდენჯერ მძიმეა ვეშაპი ჟირაფთან შედარებით?

ფუტკრის მასა დაახლოებით $3 \cdot 10^{-4}$ კგ-ია. სპილოს მასა კი $6,5 \cdot 10^3$ კგ-ია. რამდენჯერ მსუბუქია ფუტკარი სპილოსთან შედარებით?

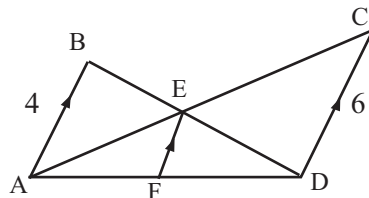
გ) ჭიანჭველის მასა დაახლოებით $3 \cdot 10^{-6}$ კგ-ია. ჭიანჭველას თავის წონასთან შედარებით 20-ჯერ მძიმე მასის ტარება შეუძლია. ამ მასის მაჩვენებელი რიცხვი ჩაწერეთ სტანდარტული სახით.



38 ააგეთ ABC სამკუთხედის M წერტილის მიმართ სიმეტრიული სამკუთხედი და დაწერეთ მისი წვეროს წერტილების კოორდინატები.



39 სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ EF მონაკვეთის სიგრძე.



1) $13 < a < 18$, $c = \frac{a+18}{a}$ და $d = \frac{a+13}{13}$ პირობებში რომელი მოსაზრება არის ჭეშმარიტი?

- ა) d -ს მნიშვნელობა c -ს მნიშვნელობაზე მეტია.
 ბ) c -ს მნიშვნელობა d -ს მნიშვნელობაზე მეტია.
 გ) c -სა და d -ს მნიშვნელობები ტოლია.
 დ) მოცემული ინფორმაციების მიხედვით მათი შედარება შეუძლებელია.

2) თუ $x = 3^2$ მაშინ რისი ტოლი ხდება x^x გამოსახულების მნიშვნელობა?

- ა) 3^2 ბ) 3^{18} გ) 3^8 დ) 3^9

3) 1. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ და 2. $\sqrt{x + 2\sqrt{xy} + y}$ გამოსახულებებში $x > 0$ და $y > 0$. ქვემოთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომელია ჭეშმარიტი?

- 1) 1-ლი მნიშვნელობა ნაკლებია 2) მე-2-ის მნიშვნელობა ნაკლებია
 3) მნიშვნელობები ტოლია 4) შედარება შეუძლებელია

4) რომელი გამოსახულება უჩვენებს l წრეწირის სიგრძის მქონე წრის ფართობს?

- ა) $\frac{l}{4\pi}$ ბ) $\frac{l^2}{4\pi}$ გ) $\frac{l^2}{2\pi}$ დ) $\frac{l}{2\pi}$

5) თუ $\frac{ab}{x} = \sqrt{a}$, მაშინ $\frac{x}{\sqrt{b}}$ შეფარდებას რომელი გამოსახულება შეესაბამება?

- ა) $\sqrt{2ab}$ ბ) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ გ) $\sqrt{b}$ დ) $\sqrt{ab}$

6) ფერეკი და ილკარი მართაონულ შეჯიბრში მანოწილობენ. ფერეკმა გასარბენი მანძილის $\frac{3}{4}$ ნაწილი 30 წუთში გაიარა, ილკარმა კი გასარბენი მანძილის $\frac{2}{3}$ ნაწილს დაუთმო ფერეკის გასარბენი მანძილის $\frac{5}{8}$ ნაწილის დათმობილი დროის $\frac{4}{5}$ ნაწილის ტოლი დრო. ამ ინფორმაციების მიხედვით, რომელი მოსაზრება არის ჭეშმარიტი?

- ა) ფერეკი უფრო სწრაფად დარბის; ბ) ილკარი უფრო სწრაფად დარბის;
 გ) მათი სიჩქარეები ტოლია; დ) შედარება შეუძლებელია.

7) ავტომობილმა 11 წუთში 15 კმ მანძილი გაიარა. რომელი უტოლობა გამოსახავს სწორად ავტომობილის სიჩქარეს (x კმ/სთ) 1 საათში?

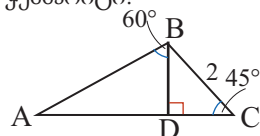
- ა) $50 \leq x < 60$ ბ) $60 \leq x < 70$ გ) $80 \leq x < 90$ დ) $90 \leq x < 100$

8) ერთნიშნა მარტივი რიცხვებიდან შემთხვევით ორი შეარჩიეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათი ჯამი მარტივი რიცხვი იქნება.

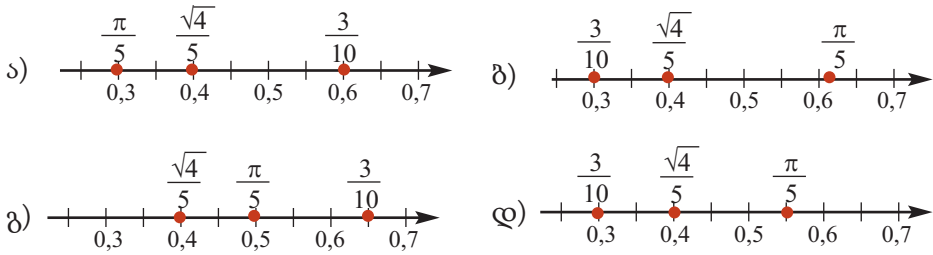
- ა) 0 ბ) $\frac{1}{3}$ გ) $\frac{5}{6}$ დ) 1

9) სურათის მონაცემების მიხედვით AC-ს სიგრძის შესაბამისი რიცხვისა და $\sqrt{10}$ -ის შედარების შესახებ გამოთქმული რომელი მოსაზრება არის ჭეშმარიტი?

- ა) AC-ს სიგრძის მნიშვნელობა $\sqrt{10}$ -ზე მეტია.
 ბ) AC-ს სიგრძის მნიშვნელობა $\sqrt{10}$ -ზე ნაკლებია.
 გ) AC-ს სიგრძის მნიშვნელობა $\sqrt{10}$ -ის ტოლია.
 დ) მოცემული ინფორმაციების მიხედვით შედარება შეუძლებელია.



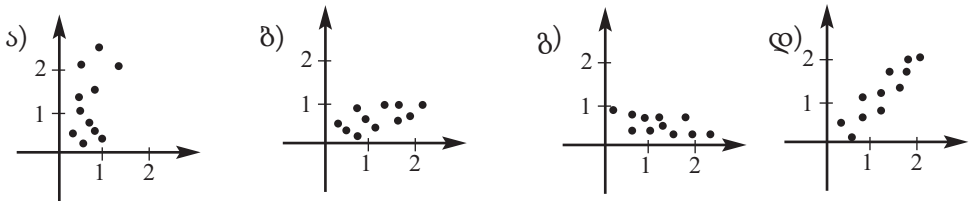
10 რომელ რიცხვით ღერძზეა რიცხვები სწორად დალაგებული?



11 $\sqrt{17}$ და $\sqrt{97}$ შორის მოთავსებული მთელი რიცხვების ჯამის შესახებ გამოთქმული რომელი მოსაზრება არ არის ჭეშმარიტი?

- ა) ორი მარტივი რიცხვის ნამრავლია.
 ბ) სრული კვადრატის მქონე რიცხვზე ერთი ერთეულით ნაკლებია.
 გ) მამრავლებიდან ერთის მნიშვნელობა $\sqrt{169}$ -ის ტოლია.
 დ) 8π -ზე მეტია.

12 რომელი გაბნეულობის დიაგრამაზე მოცემული ინფორმაციების $y = \frac{1}{2}x$ ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისად წარმოდგენა უფრო გამართლებული იქნება?



13 6, x , 10, 2, 7, 13, და 15 რიცხვების მედიანა 10-ია. ჭეშმთ მოცემული რიცხვებიდან რომელი არ შეიძლება იყოს x -ის მნიშვნელობა?

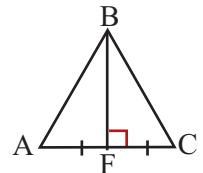
- ა) 9 ბ) 11 გ) 13 დ) 16

14 მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებიდან ერთი $\sqrt{8}$, მეორე $\sqrt{10}$ -ია. რისი ტოლი შეიძლება იყოს მესამე გვერდის უდიდესი მნიშვნელობა?

- ა) $3\sqrt{2}$ ბ) $2\sqrt{3}$ გ) $\sqrt{2}$ დ) $\sqrt{3}$

15 იპოვეთ $\cos \angle A$ -ს მნიშვნელობა, თუ $\operatorname{tg} \angle C = \frac{3}{4}$.

- ა) 0,8 ბ) 0,6 გ) 0,5 დ) 0,2



16 ტომარაში 1096 ბურთულაა. თუ ტომრიდან ერთ ბურთულას ამოიღებენ, ალბათობა იმისა, რომ წითელი იქნება $\frac{5}{8}$ -ია. რამდენი არაწითელი ბურთულაა ტომარაში?

- ა) 352 ბ) 411 გ) 685 დ) 524

I განყოფილება

33. 9. №4 ა) 0; ბ) 3; გ) 1; დ) -0,5. №5 ა) 2; ბ) 0; გ) 1; დ) -2. №7 ა) 0; გ) 1,5.

№10 $t = \frac{3v+6}{v-2}$ ა) 4 სთ; ბ) 4,5 სთ. №11 $\frac{12a+8b}{a+b}$. №12 $\frac{5}{n+5}; \frac{5}{n+9}$

33. 10-14. №1 გ) $14x$; დ) $4x-12$. №6 გ) $\frac{3a}{2b}$. №7 ა) $\frac{y-4}{3}$; გ) $\frac{x+5}{x-5}$; დ) $\frac{3x}{x+3y}$.

№8 დ) $\frac{5x}{6}$; ე) $-\frac{2}{3}$. №9 ა) 10; ბ) 1. №13 ა) $\frac{c+2}{4}$; ბ) $\frac{x+a}{a-c}$. №14 ბ) $x-2$.

№15 ბ) $\frac{5-x}{3}$; გ) $\frac{2}{1-x}$. №16. ა) $4x-12$; ბ) $9a+18$; გ) $\frac{x+1}{x-1}$. №17. გ) $-y^2$. №18. ა) $\frac{x-4}{4x}$;

ბ) $\frac{x+2}{2}$; გ) $\frac{x+1}{x+4}$; დ) $\frac{x+3}{2}$; ე) $\frac{4x-3}{x-4}$. №19 ა) $\frac{x-3}{x+1}$; გ) $\frac{x-y-3}{x}$. №20 ა) $\frac{x+2}{x-2}$ $x \neq \pm 2$; ბ) $\frac{x-2}{x-4}$

$x \neq \pm 4$. №22 გ) $\frac{8a^3}{12a^2b}$. №23 გ) $\frac{a^2+a}{a^2-1}$. №24 ა) $\frac{2}{x+10}$; ბ) $\frac{y-4}{y+5}$; გ) $\frac{x-2}{2x}$; დ) $\frac{3}{2x+5}$. №27 $4x+10$.

№28 ა) $\frac{4}{\pi}$, $x \neq 0$; ბ) 78,5%. №29 ა) $\frac{m}{3n+3m}$; გ) $\frac{2}{3}$. №31 ბ) $l = \frac{\pi(R^2-r^2)}{d}$.

33. 15-17. №1 გ) $\frac{2x}{3b}$. №2 ბ) $-\frac{5x}{14y}$. №3 ბ) $\frac{8}{7pn^2}$. №5 გ) $\frac{y^2}{4x^2}$. №6 გ) $-\frac{2}{9x^2}$. №7 გ) $\frac{12}{x+5y}$;

ფ) $\frac{x^2+5x+6}{6}$. №9 დ) $\frac{a+2}{a+3}$; ე) $\frac{3x+3}{2x-2}$. №10 ა) 10; ბ) -1,5. №11 ბ) $\frac{x-1}{x+1}$. №12 ა) $\frac{1}{3a+6}$; ბ) $\frac{2}{x-5}$

№14. $\frac{x+2}{x+1}$. №15 $\frac{2n-1}{n+2}$. №16. ა) $\frac{2x+4}{3x+3}$ $x \neq -1$; $x \neq 5$. №17 ა) უფრო ხელსაყრელია. №18. $\frac{4}{\pi}$

№19 1) $x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)$ 2) $\frac{390x^2}{(2x-1)(3x-2)}$. №20 1) $x+3$ 2) $\frac{a}{a+6}$.

33. 18-23. №1 გ) 2. №2 ა) $-\frac{a}{2}$; ბ) $\frac{7}{2}$. №3 ბ) $5-b$. გ) $a-3$. №4 ა) 100 ბ) -10. №5 ბ) $a-4$.

№7 ე) $\frac{(a+b)^2}{a}$; გ) $\frac{2ab}{a+b}$. №8 ბ) $\frac{2a^2}{a^2-1}$

№9 ბ) 96; ბ) 24. №11 ბ) $\frac{1}{6}$. №13 ე) $\frac{x}{6x+6}$; გ) $\frac{8x}{15(x-2)}$. №14 ა) $\frac{x}{5(x+5)}$; გ) $\frac{2-b}{2b+b^2}$ №15 ბ) 2;

გ) $\frac{8y}{y^2-4}$. №16 ა) $\frac{1}{xy}$; გ) $\frac{a+2}{a^2-2a}$. №17 ა) 0,5; ბ) 0,8. №18 ბ) $\frac{1}{a-2}$; გ) 1; დ) $\frac{1}{x}$ №19 ა) $\frac{1}{a-3}$.

№20 ე) $\frac{a+2}{2-a}$; გ) $\frac{2}{(x+1)^2}$ №24. 2) $\frac{40}{m(m+2)}$ №27 ა) $x+2$; ბ) $4x$.

№28 ა) 15 ბ) 1,5. №29. ა) 8; ბ) 5. №33 1) $\approx 5,18^3$; 2) 8 რეიზი.

33. 24-25. №1. ა) $b+c$; ბ) $\frac{3}{a+5}$; გ) $\frac{1}{y}$. №2. გ) $2p$; დ) $y+1$. №3 დ) $a+b$. №5 ბ) $\frac{n^2+9}{2n}$; გ) $\frac{4}{x-2}$.

№6 ბ) $\frac{x+1}{x-1}$. №7 გ) $\frac{3m}{m+3}$; დ) $\frac{x}{x-2}$. №9 ა) x ; ბ) $\frac{12x+5}{5x+2}$. №10 $y = \frac{2\pi r}{x}$. №11 ბ) ალი და რამიზი

33. 26-27. №4. გ) $-\frac{1}{9}$ ბ) 32; თ) $\frac{8}{27}$. №8 გ) $a(b-1)^3$. №9 გ) $\frac{7}{12}$; დ) 9. №10 ა) $-\frac{1}{ab}$;

ბ) $\frac{b+a}{a^2b^2(b-a)}$. №11 გ) 4. №13 გ) 2; დ) 3. №14 გ) 8. №15 გ) $\frac{12b^4}{a^2}$. №18 ა) $2\frac{1}{4}$; დ) $-\frac{125}{729}$.

№19 ე) $\frac{9y}{x^3}$

33. 28-29. №2. ბ) $2,87 \cdot 10^5$; გ) $6,3 \cdot 10^{-6}$. №6 გ) $6,12 \cdot 10^{-8}$. №7 780 კგ.

№8. 13 ციფრები. №12 ელექტრონი. №15. $4,94 \cdot 10^{13}$. №16. ბ) $1,35 \cdot 10^{12}$.

33. 31-32. №3. ა) 32; გ) $\frac{1}{4}$. №9 1,258. №10 ა) $y = \frac{200}{x}$. №11. 1) 2 კაცზე; 2) 12 საათში.

№12. 1) ა) 1000 მან. ბ) 500 მან; 2) ა) 25 ოჯახი. №13. ა) 12 დღე; ბ) არაა მართალი. №15. $b = \frac{2}{a}$

33. 33-34. №1. 1) $d \neq -1$, $d \neq 4$; გ) $a \neq b$, $a \neq -b$. №2 $t = \frac{S}{v+5} + \frac{S}{v-5}$. ა) 5 საათი; ბ) 7 საათი.

№5 $x+2$. №7 5. №8. 5, ამოცანაში $b = 0,5$ მონაცემი ზედმეტია. №9 ა) $\frac{x+2}{4(x-3)}$; ბ) $\frac{2(d-2)}{d+3}$; გ) $\frac{x-1}{x-5}$.

№10 ბ) $-\frac{5}{a+3}$. №11 ა) $\frac{4}{k}$; გ) $-\frac{2a}{a^2-4}$. №12 ა) $\frac{4(x+1)}{4-x^2}$; ბ) $\frac{3}{x-4}$. №13 $a=1$, $b=-1$. №15 გ) $\frac{a}{b}$.

№16 ბ) x^6 ; გ) $\frac{x}{x-2}$. №17 ა) $\frac{k+2}{k}$. №18. 3 ან 4. №19 ა) $k=2$, $b=-3$.

პპ. 35-37. №4. 100° , 95° , 75° , 90° ან 80° , 85° , 105° , 90° . №6. 75° , 125° , 55° , 105° და 105° , 55° , 125° , 75° . №9. 1) 120° ; 2) 99° . №10. 1) 103° ; 2) 100° ; 3) 76° .

პპ. 38-40. №9. 1) 7 სმ და 5 სმ. 2) 9; 24; 9; 24 (სმ). №11. 70° და 110° . №12. 70° და 110° . №15. 1) 8 2) 16 3) 15

პპ. 41. №1. 1) 6° და 14° . №2. 1) 25.

პპ. 43-44. №4. 1) 30° ; 4) 12.

პპ. 45. №2. 2) 60° , 120° , 120° , 60° .

პპ. 46. №1. 2 სმ, 3 სმ, 4 სმ. №2. 10 სმ, 15 სმ, 15 სმ. №3 ბ) 40.

პპ. 47-48. №2. 5. №3. 4 სმ და 6 სმ. №4 $R=6$ (სმ). №5 $x=7$; $y=10$. №6. 6 და 10. №7. 4 სმ. №11. 32 სმ.

პპ. 49. №2. ა) B(4;3). №4. O(3;2). №5 M(-1;2), D(-4;-2).

პპ. 50-51. №3. 6 სმ და 8 სმ. №6. გ) 15 სმ. №8 2) 40 სმ, 3) 64 სმ. №9. 7 სმ №12. ა) 7,5 სმ.

II განყოფილება

პპ. 55. №2. 8 სმ. №6 ა) 13; ბ) 17; გ) 4. №7 ბ) 6; გ) 0,8 დ) 0,4. №9 გ) $x=25$; დ) არცერთი მნიშვნელობისათვის. №10 ბ) 16; დ) 12. №13 გ) $x=\pm 4$; დ) $x=\pm\sqrt{5}$ №14 2) $x=\pm 7$; 4) $x=\pm\sqrt{8}$.

№15. $a=16$ სმ; $b=1,5$ კმ; $r=25$ მ. №16. 6 სმ.

პპ. 58. №9 $\approx 16,7$ სმ

პპ. 59. №6 ა) $A \cap B = \{1; 2; 3; 4\}$

პპ. 60. №1 ა) $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$; ბ) $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$. №8 ა) $1,4 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 1,8 < \sqrt{5}$.

პპ. 62. №2 ≈ 2 წამი. №5 $\approx 19,6$ მ/წამი. №7 ა) $\approx 178,5$ კმ.

პპ. 63-64. №1 ბ) 1,2; დ) 0,3. №2 გ) $2\frac{1}{4}$; დ) $2\frac{1}{3}$. №3 გ) $5\frac{5}{6}$. №4 დ) 0,4. №6 გ) 18; დ) 6

ე) 2,6. №7 ბ) 120. №8 გ) 21; დ) 42. №9 გ) 5; დ) 5. №11 გ) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{7}}$; დ) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$. №13 ბ) 210; დ) 0,07. №15 ბ) $\frac{7}{96}$; გ) $\frac{15}{29}$. №16 24 სმ². №17 24 კუბური ერთეული.

პპ. 65. №3 ბ) $-5x$; გ) $4c$; დ) $-a$. №4 ა) $7x^3$; ბ) $-6x^3$. №5 ა) 27; გ) 135. №6 გ) 3,75. №8 ა) 4; ბ) 3. №9 ბ) 2.

პპ. 66. №1 ე) $\sqrt{6}$; გ) $-6\sqrt{3}$. №2 ა) $5xy\sqrt{2x}$; ბ) $-3xy^2\sqrt{2}$. №3 ბ) $-\sqrt{48}$; გ) $-\sqrt{2}$.

№4 ბ) $-\sqrt{3c^2}$; გ) $\sqrt{2x}$; დ) $-\sqrt{-2x}$. №7 ა) დადებითი; გ) უარყოფითი.

პპ. 67-68. №1 გ) 0; გ) $-0,8\sqrt{13}$. №2 ბ) 3; დ) 11. №3 ა) $-\sqrt{3}$; დ) $12\sqrt{3}a$. №4 ა) $4\sqrt{2}x + 3\sqrt{y}$; ბ) $6\sqrt{3} + 6\sqrt{3}x$. №5 დ) 12; №6 დ) $20\sqrt{6}$; გ) $-5\sqrt{2}$. №8 ბ) $30\sqrt{2}$, 108. №9 გ) $60\sqrt{2}$; დ) $42\sqrt{2}$. №10 ა) 11; ბ) 8; გ) 6. №11 ა) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; დ) $(2-\sqrt{a})(2+\sqrt{a})$. №12 ა) $x-\sqrt{2}$; გ) $\sqrt{a}$.

პპ. 69. №1. 3) $3\sqrt{2}-1$; 5) $\frac{5\sqrt{2}-1}{7}$. №2. b და c -სი. №3 $a < b$. №4. 4. №7. $\frac{1}{3}$. №8 ა) $\frac{2}{a+\sqrt{b}}$

პპ. 70-71. №3 ა) 3. №8 $\frac{225\pi}{16}$ მ². №9. $\approx 8,9$ მ/წამი. №11 ა) -17; ბ) 4. №12 $\approx 30,6$ მ/წამი.

№13. $\sqrt{2} m$. №14 ა) 2,5. №15. $5ab$. №17 ა) 2; ბ) $2\sqrt{3}$. №18. 50 ჯერ. №19 ა) c ; ბ) $5c$.

№20 ა) -1; ბ) 5. №21. $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

პპ. 74. №3. $\sqrt{51}$ ან $\sqrt{149}$.

პპ. 75-79. №1. 2) $\sqrt{3}$. №2. 26 სმ². №3. 6,5. №4 2) არაა კვადრატული ფორმის. №5 ა) 17; გ) 17; დ) $2\sqrt{2}$. №6 გ) 20 მ. №7 შეიძლება. №8 6; 8; 10. №10 1) $18+6\sqrt{3}$ 2) $h=15$ სმ; $P=70$ სმ. №16 ა) $r=16$, $q=16\sqrt{2}$; დ) 6; გ) $p=8$ $m=10$. №17 1) $h=2\sqrt{5}$ 3) $\approx 4,3$ (სმ)

№19 2) მართკუთხა სამკუთხედი; 3) მახვილკუთხა სამკუთხედი. №21 1) 6; 3) 12; 4) 50. №22 $P=60$.

№25. $\approx 2,2$ მ. №27. 131, 25 წამი. №28 130 კმ. №29 ყოველ მომდევნო წამიდან ერთი წამი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტთან შედარებით $\sqrt{2}$ ჯერ მცირდება

პპ. 80. №2 1) $y=15$ $CE=5\sqrt{3}$. №3 2) $x=6\sqrt{2}$; 3) $y=12$, $x=12\sqrt{3}$. №4 $R=10$ სმ.

№6 $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. №7 16,9 სმ. №8. 88 მმ. №10. 40 სმ.

III განყოფილება

პპ. 82-84. №5. 3) ± 5 , 7) 0; $\frac{1}{6}$. №6 ა) $\pm \sqrt{2}$, ბ) ± 15 , გ) -2 ; 0. №8 2) 50მ; 3) $R = 4$ სმ

№9. ბ) $\pm \frac{1}{2}$ დ) ± 1 . №10. 6სმ. №13. 2) $a = R\sqrt{\pi}$

პპ. 85-89. №8. 2) -12 ; 3. №9 2) $(a+6)(b+6)$. №10. 3 სმ. №11. 1მ. №14 1) -1 ; $\frac{1}{6}$,

5) -1 ; $2\frac{3}{4}$, 8) $\frac{1}{2}$; -3 . №16. $400\text{მ} \times 900\text{მ}$. №17. 0,5მ. №18. 80 სმ. №20. 1სმ.

№21. $8\text{წ} \approx 2 \text{ მ}$ 40 სმ, $6\text{წ} \approx 1 \text{ მ}$ 80 სმ. №25. 2) $-\frac{1}{2}$, -2 ; 3) -1 , $-\frac{1}{3}$.

პპ. 90-91. №2. თ) 2; 18, კ) -3 ; 4. №4 ე) -2 ; 8, გ) 0,5; 1. №5. 5%.

პპ. 95-97. №2. დ) 1; 3,5. №3 ა) 3; 5, ბ) -4 ; -10 . №5. 5 და 6, გ) $\frac{1}{2}$ და 2. №8. 1) 7 და 12, 2) -1 ან 5. №9. 9სმ. №12. 6სმ $\times$ 7მ. №15. ა) $1\frac{2}{3}$; 3, გ) $\frac{1}{5}$; 3, ე) -4 ; $-6\frac{2}{3}$. №17 ა) -5 ; -1 ,

გ) 6; -2 . №19. 50 წიგნი. №23. 7-ზე. №24. ა) $6\text{სმ} \times 5\text{სმ} \times 4\text{სმ}$, ბ) 148სმ^2 . №25. $b=10\text{მ}$, $a=30\text{მ}$, $c=10\text{მ}$

პპ. 98-100. №3. 1) $x_2=-5$, $p=-2$; 3) $b=-12$, $x_2=2$; 4) $q=35$. №4 ა) $-0,6$; ბ) 19; გ) $-3,8$.

№8. 1) 52; 2) 2,5. №11. $m=3$. №12. $n=15$. №13. ა) $n=\pm 6$. №14. 1) ა) $n=2$; ბ) $n=\frac{1}{4}$, 2) $n=5,75$.

პპ. 101. №1. 1) -11 ; 4, 3) -2 ; -1 ; 2; 3. 6) ± 1 ; ± 2 . №2 ბ) 9. №3 ა) ± 1 ; ± 2 , ბ) ± 1 . №8. 72მ.

პპ. 102, 103. №1. 32 სმ. №3. 13სმ. №4. 10 კაცი. №5. 24 კმ/სთ და 32კმ/სთ. №6. 10მ.

№7. 15 კმ/სთ და 20 კმ/სთ. №8. $9\text{მ} \times 12\text{მ}$. №11. 20 %

პპ. 104, 105. №5. $\approx 30\text{სმ}^2$. №7. 26 როგი. №9. $m = 2\frac{1}{4}$. №11 $\approx 2,4\text{წამი}$. №12. $6\text{მ} \times 8\text{მ}$.

№14. $\approx 14,8 \text{ მ/წამი}$.

პპ. 106, 107. №3. 2) 144. №4. გვერდები 12 სმ და 8 სმ, პერიმეტრი 40 სმ-ია. №6. 288 სმ².

№10. $P = 6x + 10$. №12. 560. №14. ა) 6; 4.

პპ. 108-110. №2. $\approx 8,7\text{სმ}$. №5. $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle DEF} = 1:4$. №6. ა) $225\sqrt{3} \text{ მ}^2$, ბ) $25\sqrt{3} \text{ მ}^2$, გ) $100\sqrt{3} \text{ მ}^2$

№7. 180 სმ² 2) 30 სმ 3) 210 სმ². №8. ა) 336 სმ² ბ) 60 სმ². №9. 6 სმ, 9,6 სმ.

№10. $S = 48\text{სმ}^2$; $h_1 = 6\text{სმ}$; $h_2 = h_3 = 4,8 \text{ სმ}$. №11. 2) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. №12. ა) 28 მ². №16. 26.

პპ. 111-113. №3 $P = 24 + 8\sqrt{2}$, $S = 48$. №5. 100 სმ². №9. 2) 30 დღე, 3) $\approx 8,57\%$. №10.

1) 32 კვ. ერთეული. 2) 8 კვ. ერთეული. №12. ბ) 37,5 დმ². №13. 2) 16; 85. №14. 36 სმ².

პპ. 114-115. №2 1) 24 სმ^2 , 2) 468 სმ^2 . №3. 1) 336 სმ². №4) 168 №5 60 სმ². №7. 1) 30სმ^2 , 2) 384სმ^2

პპ. 116-117. №6 32 სმ². №7. 9,5. №8 1) 54 სმ² 2) 30სმ². №13. 2) 5 და 12 სმ .№14. $\sqrt{13}$ სმ

№15. 27 კვ. ერთეული.

IV განყოფილება

პპ. 120. №1. ბ) -8 ; 0, გ) 3, ე) 1. №2 ბ) -1 ; 4, დ) $\emptyset$. №4. ა) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{2}{5}$. №5. ბ) 5.

პპ. 121. №1. 28 თამაში. №2. 4თამაში. №3. 1. №4. 6 / ექსტრაქტი. №5. 5 კგ. №6. 1,5 l.

№7. 1) 16 სმ, 30 სმ; 2) 15 სმ; 3) 34 სმ. №8. 3,5 სმ. №9. $4\text{მ} \times 6\text{მ}$. №10. 26 სმ.

სახ 122. №2. 10 დღე, 15 დღე. №3. 6 საათი, 12 საათი. №7. 3 საათი, 6 საათი.

პპ. 123. №1. 25საათი. №2. 70 კმ/სთ. №3. 10 კმ/სთ, 12 კმ/სთ. №4. 3 კმ/სთ. №5 1) 16 კმ/სთ,

2) 6 საათი 24 წუთი.

პპ. 124, 125. №1. ა) 3, გ) ფესვი არ აქვს. №2. $\frac{10+0,5n}{n}$, 100 წუთი. №4. 6 საათი,

№9. $t = \frac{26}{3v}$. №10. 1) ფესვი არ აქვს, 2) ფესვი არ აქვს. №11. $\frac{nm}{n+m}$ საათი.

№12. 1) $\frac{3}{r}$; 2) $r=12$ სმ როცა. №13. $\frac{\pi}{4}$. №14. 2) $\frac{96}{(x+3)}$ 3) 6 სმ; 8 სმ; 10 სმ; 4,8 სმ.

პპ. 130-131. №3. 1) $\frac{x+3}{x-7}$, 2) $\frac{x-3}{x+6}$, 3) $\frac{x+1}{x-4}$, 4) $\frac{x-5}{x+6}$. №4. 4) -10 . №9. 40° . №10. 24 წუთი.

№11. 1) 12 კაცი, 2) 3; 4, 3) ა) მურადის 8 წიგნი აქვს. №12. 370 მანათი. №14. 275 კაცი.

პპ. 132. №6. 1) 139,2 კმ; 2) 15,64 მ.

პპ. 133-134. №1. 1) $x=6$; 2) $z=15$. №2. 1) $x=4$; $y=2$, 2) $x=1$; $y=1,5$.

№4. 1) 16 სმ, 14 სმ, 10 სმ. 2) 4 სმ, 3 სმ, 2,4 სმ. 3) ზღაგვეკუთხა სამკუთხედი.

პპ. 135-136. №2. ა) $x=15$; $y=3$, ბ) $x=1,5$; $y=4$. №3. 1) 0,8. №6. 1) 60 სმ, 2) 0,8 მ.

პპ. 137-140. №5. 1) $JK=8$, 2) $ST=5$, 3) $WZ=30$, $UZ=18$, 4) $HJ=15$, $HK=10$, 5) $DB=5$,

$CB=15$. №6. 2) 10 სმ. №7. $CE=1,5\text{სმ}$, $ED=4,5 \text{ სმ}$. №12. 9. №13. $BE=2$.

პპ. 141-143. №4. 1) 9, 2) 20, 3) 10. №5. 4 სმ. №6. 108 მ. №7. $h=6$, $b=10$. №9. 180მ.

№10. ა) $x=1,5$; ბ) $x=4$.

33. 144-147. №4. 2 კმ. №5. 1) $y = 20$, $x = 22,5$ სმ, 2) $x = 32$ №7. 1) $x = 6$, 2) $x = 15$.
 №8. $x = 6,75$. №9. 24 სმ, 16 სმ. №10. $FB = 3$. №11. $PM = 8$, $DC = 5$. №12. $\approx 24,6$ მმ. №13.
 45 მ. №15. 1) 25,5; 2) 63; 3) 18; 4) 21. №16. 3,51 მ.

33. 149. №1. 1) 24, 2) 18, №2. 36. №3. $z = 4,8$; $y = 64$. №4. 8 სმ².

33. 150-151. №2. ა) $k = 2$, $x = 8$; $y = 16$. №7. ბ) $k = \frac{3}{5}$; $t = 18$; $r = 20$, ბ) $k = \frac{4}{3}$; $x = 7,2$; $y = 6,3$.

33. 152-153. №1. 1) $k = \frac{5}{6}$, $x = 7,5$; 3) $k = 2$; $x = 1,2$. №3. 2) 162 სმ². №4. 75 სმ².

№5. 180 მამ. №6. $P_1 = 15$ სმ, $P_2 = 20$ სმ. №7. 24 მ². №8. 2:1. №9. 16 კმ.

№10 1) 375 სმ²; 2) 48 მ².

33. 154-155. №3. 3) 44, №4. 10 სმ, 15 სმ. №5. 4,2 მ. №7. $h = 0,9$; $m = 4$.

№9. ა) $P_1 = \frac{1}{2}$, ბ) $P_2 = \frac{1}{4}$, გ) $P_3 = \frac{1}{8}$. №10. 1) 8 მ; 2) 6 მ; 3) 5 მ 4) 10 მ. №12. $B_1C_1 = 3$,
 $A_1C_1 = 4$, $k = \frac{1}{3}$.

V განყოფილება

33. 159. №9. ა) $m > n$, ბ) $m < n$, გ) $m = n$. №11 ა) ჭეშმარიტია; დ) არაა ჭეშმარიტი. №14. ა) 11; დ) -3; №15. ბ) 8, გ) -5.

33. 162-164. №3. ა) დადებითი, ბ) უარყოფითი, დ) დადებითი. №5 არანაკლებ 50 საათისა.

№8. სულ მცირე 30 წუთი. №13. ა) 64, ბ) 100 სმ². №13. ა) 24 სმ, ბ) 8. №14.

2) სულ მცირე 10 კომპიუტერი. №15. ა) $0,8 < P < 1,2$

33. 165-166. №3. გ) $23 < 2a + 3b < 33$. №4. 1) ა) $-5 < x - y < -2$; 2) ა) $5 < \frac{x}{y} < 10$.

№5. ბ) $0,2 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,4$. №6. $64 \leq P \leq 70$. №8. $38^\circ \leq \gamma \leq 40^\circ$.

33. 168. №7. ა) -11 და 7; ბ) -3 და 5, გ) -4 და 2. №8 ა) (-1; 5), ბ) (5; 7), დ) (3; +∞).

№9. ბ) [-6; 3], დ) (2; +∞). №10. ა) [-2; 3), ბ) (0; 1), გ) [-2; 2), ე) [-2; 0], ვ) [2; 3).

33. 170-172. №4. ა) $x > 3,5$; ბ) $y > 5$. №5 ა) $(-\frac{7}{8}; +\infty)$, დ) $(-\infty; 2\frac{2}{3}]$. №6. ბ) $(-\infty; -15]$,

ვ) $(-\infty; 3]$. №7 ბ) $(-\infty; 4]$, დ) $(-\infty; \frac{1}{8})$. №8. 11,5 წუთზე მეტი. №9. 13 სათვალე. №10 ა) $y < \frac{8}{11}$

№11. ა) (1,5; +∞). №12. ბ) $x < 1,25$. №13 ა) 3; ბ) -1. №15. 35. №16. 6 სმ-ზე ნაკლები.

№17. არაუმეტეს 26 $\frac{2}{3}$ კმ-ის. №18. 10,5 კმ/სთ-ზე მეტი სიჩქარით. №19. 14 კგ-ზე ნაკლები.

№21. სულ მცირე 8 გვერდი. №22. საათში 6-კმ-ზე მეტი სიჩქარით. №23. არაუმეტეს 6-ისა.

№27 ა) x -ის 5-ზე მეტი მნიშვნელობისათვის, ბ) x -ის 5-ზე ნაკლები მნიშვნელობისათვის.

33. 174-175. №6. $t < 0$ ან $t \geq 100$. №8 19 თვის შემდეგ. №9 ა) [-5; 6), დ) $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$.

№10 ბ) 4 და 5. №11 გ) (-12; 6). №12 სულ მცირე 96 ქულა. №14. 3) (15; 20) ან (20000; 50000)

33. 176-177. №2. ა) (-4; 4), გ) ამონახსენი არა აქვს, ე) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$, ფ) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$,

ზ) $(-\infty; +\infty)$, თ) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. №3 ა) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. №4. გ) [-3; 4]

№7. $|x - 25| \leq 5$. №8. 2) ამონახსენი არა აქვს, 6) (-1,5; 4,5). №9 ა) როცა $a \leq 2$. №11 $|x - 55| \leq 3$.

33. 178. №2. როცა ეგზემპლარების რაოდენობა 3250-ზე მეტია. №3. ბ) დაახლოებით 165,5 სმ-ზე

მაღალი, 174,5 სმ-ზე დაბალი. **33. 179.** №7. 0 №11. $\frac{5}{6}$ წუთი = 50 წამი. №13. ვ) [-2; 4].

33. 181. №2 ა) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$ ბ) $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{5}$ №3. $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$. №4. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **33. 183.** №1 ≈ 173 მ. №3 $x \approx 5,6$ მ $\theta \approx 38^\circ$ $y \approx 10,2$ მ. №5 $DS_1 \approx 38$ მ

$DS_2 \approx 64$ მ $DS_3 \approx 80$ მ. №7 1) 6 საფეხური საკმარისია. 2) $\approx 65,16$ მ. №8 ≈ 29 მ. №14 $AB = 480$ მ,

$AC \approx 927$ მ. №15 $h \approx 75,3$ მ. №16 $\approx 52,8$ მ, $\approx 4,3$ მ. **33. 189.** №1 ა) $k = 1$ დ) $k = 1,5$.

№2 ა) $k = 2$ №3 $b = 7$. №4 ა) $y = \frac{2}{3}x + 2$ გ) $x = 2$ №6. $k = 1$; 45° . №9. გ) $x = 1$, დ) $y = -2$.

№10. ა) $y = -3x + 4$, ბ) $y = 3x - 9$. №15. 8.

33. 191. №1. $\approx 12^\circ 32'$. №2. $\approx 31,8$ სმ, №3. $r = \sqrt{2}$, $S = \sqrt{3}$, $m = 2$, $n = \sqrt{5}$, $v = \sqrt{6}$, $z = \sqrt{7}$.

33. 207. №3. ა) 500, ბ) 96, გ) 404. №4 210. **33. 209.** №2. 1) $\frac{2}{15}$, 4) $\frac{3}{25}$. **33. 210.** №4. $\frac{3}{68}$

№8. 1) $\frac{1}{11}$ 2) 26 კაცი. **33. 211.** №3. ა) $\frac{81}{256}$ ბ) $\frac{9}{256}$ გ) $\frac{27}{128}$. **33. 212.** №7 ა) ≈ 420 კაცი, ბ) $\frac{84}{925}$

33. 213. №5. ≈ 1 სმ. №7. 8 სმ. №15. 8 ჯერ. №16. 2 სმ. №23. 27 სმ².

№32. $108\sqrt{3}$ სმ². №39. 2,4 სმ.

RİYAZİYYAT 8

Ümumtəhsil məktəblərinin 8-ci sinfi üçün
«Riyaziyyat» fənni üzrə dərslik
(Gürcü dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:

Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov

Elmi Məsləhətçi:

Çingiz Qacar

Tərcüməçi:

Çalabi Abdurahmanov

Korrektor:

Qafur Zamanov

Bədii tərtibat:

Leyla Bəşirova

Kompüter tərtibatı:

Fuad Qəhrəmanov

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi – 2017

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Kağız formatı: 70×100 ¹/₁₆. Fiziki ç.v. 14,0.

Ofset kağızı. Ofset çapı. Times New Roman şrifti.

Səhifə sayı 224.Tiraj: 200. Pulsuz.

Bakı 2017

“Radius nəşriyyatı”

Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ

