

მათემატიკა

9

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (n - k)d$$

$$l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$$

ნაიმა კეჰრემახოვა
მეჰემედ ქერიმოვი
ილჰამ ჰუსეინოვი

მათემატიკა 9

ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლების
მე-9 კლასისათვის «მათემატიკის» საგნის
სახელმძღვანელო

დამტკიცებულია აზერბაიჯანის რესპუბლიკის
განათლების სამინისტროს 03.06.2016 წლის
№ 369-ე ბრძანებით.

© აზერბაიჯანის რესპუბლიკის განათლების სამინისტრო - 2017

საავტორო უფლებები დაცულია. სპეციალური ნებართვის გარეშე
ამ გამოცემის ან მისი რომელიმე ნაწილის ხელახალი გამოცემა,
ასლის გადაღება, ელექტრონული საინფორმაციო საშუალებებით
გავრცელება კანონით აკრძალულია.

გამომცემლობა «Radius»

გთხოვთ სახელმძღვანელოსთან დაკავშირებული თქვენი
გამონმარება, შენიშვნები და წინადადებები გამოაგზავნოთ
radius_n@hotmail.com და derslik@edu.gov.az ელექტრონულ
მისამართებზე. წინასწარ მადლობას მოგახსენებთ ჩვენთან
თანამშრომლობისათვის!



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

**Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadیرiz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



ჰეიდარ ალიევი

აზერბაიჯანელი ხალხის საერთო ეროვნული ლიდერი

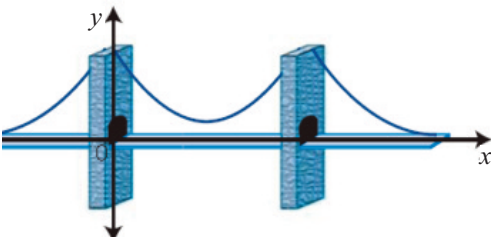
სარჩევი

I განყოფილება

ნამდვილი რიცხვები.....	8
კუბური ფესვი რიცხვიდან.....	12
n -ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები.....	16
რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები.....	22
განმაზოგადებელი დავალებები.....	27
წრეწირი, ცენტრული კუთხე და რკალი..	28
წრეწირი, ქორდა.....	31
წრეწირში ჩახაზული კუთხე.....	35
წრეწირის მხები.....	37
მკვეთითა და მხებით შედგენილი კუთხეები.....	40
წრეწირის მკვეთი მონაკვეთები.....	43
განმაზოგადებელი დავალებები.....	45

II განყოფილება

კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი.....	48
კვადრატული ფუნქციის ნულები.....	56
კვადრატული ფუნქციის ზოგადი სახე...	58
ამოცანების ამოხსნა კვადრატული ფუნქციის გამოყენებით.....	62
$y = x $ ფუნქცია და მისი გრაფიკი.....	66
განმაზოგადებელი დავალებები.....	68
მანძილი ორ წერტილს შორის.....	70
წრეწირის განტოლება.....	74
სექტორი და სეგმენტი.....	82
განმაზოგადებელი დავალებები.....	84

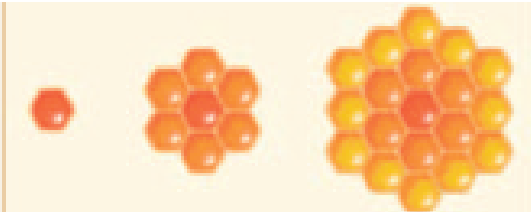


III განყოფილება

მაღალმაჩვენებლიანი განტოლებების ამოხსნა.....	86
რაციონალური განტოლებები და ამოცანების ამოხსნა.....	89
ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლებები.....	91
განტოლებათა სისტემა.....	95
ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა სისტემის შედგენით.....	102
განმაზოგადებელი დავალებები.....	104
მრავალკუთხედები.....	106
მრავალკუთხედების შიგა და გარე კუთხეები.....	107
წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები.....	110
წესიერი მრავალკუთხედების ფართობი....	118
განმაზოგადებელი დავალებები.....	123

IV განყოფილება

უტოლობების სისტემა და უტოლობათა ერთობლიობა.....	125
ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი უტოლობები.....	128
ორცვლადიანი წრფივი უტოლობები.....	130
ორცვლადიანი წრფივი უტოლობების სისტემა.....	133
კვადრატული უტოლობები.....	137
უტოლობების ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით.....	145
განმაზოგადებელი დავალებები.....	149
ვექტორები.....	151
ვექტორები საკოორდინატო სიბრტყეზე...	153
ვექტორების მიმართულება.....	156
ვექტორების შეკრება და გამოკლება.....	158
ვექტორების კომპონენტები და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.....	165
ამოცანების ამოხსნა ვექტორების გამოყენებით.....	167
ვექტორის რიცხვზე გამრავლება.....	168
განმაზოგადებელი დავალებები.....	171



V განყოფილება

რიცხვითი მიმდევრობები..... 173

არიტმეტიკული პროგრესია.....176

არიტმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა..... 177

არიტმეტიკული პროგრესია წევრების თვისებები..... 181

არიტმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა... 183

გეომეტრიული პროგრესია..... 187

გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა..... 189

გეომეტრიული პროგრესიის წევრების თვისებები..... 192

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა..... 193

უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, როცა $|q| < 1$ 196

გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა..... 200

განმაზოგადებელი დავალებები.....206

VI განყოფილება

ინფორმაციის დაჯგუფება და წარდგენა.....208

ინფორმაციის წარდგენა. ინფორმაციის დანაწილების გრაფიკები.....211

ინფორმაციის ანალიზი.....215

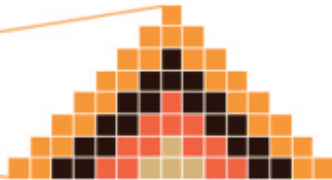
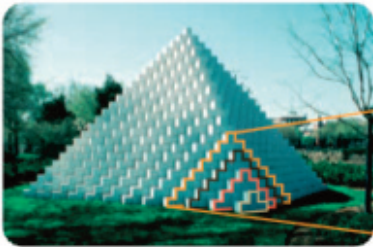
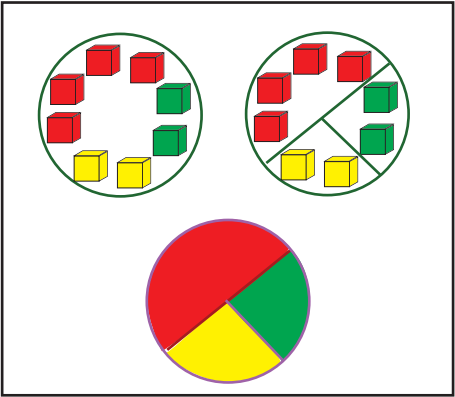
განმაზოგადებელი დავალებები..... 217

პერმუტაცია.....218

კომბინეზონი. პერმუტაცია..... 222

ამოცანების ამოხსნა ალბათობების გაანგარიშებებზე..... 224

განმაზოგადებელი დავალებები..... 229



1. n -ური ხარისხის ფესვი და რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი 2. წრეწირი

ნამდვილი რიცხვები
კუბური ფესვი რიცხვიდან.
 n -ური ხარისხის ფესვი და
მისი თვისებები
რაციონალურმაჩვენებლიანი
ხარისხი და მისი თვისებები.

წრეწირი. ცენტრული კუთხე. რკალი

- ცენტრული კუთხე. რკალის გრადუსული ზომა;

- კონგრუენტული რკალები;

- რკალის სიგრძე.

წრეწირი. ქორდა

- თეორემა კონგრუენტული ქორდების შესახებ;

- თეორემა ქორდის შუამართობის შესახებ;

- თეორემა ცენტრიდან თანატოლ მანძილზე დაშორებული ქორდების შესახებ.

წრეწირში ჩახაზული კუთხე

- წრეწირში ჩახაზული კონგრუენტული კუთხეები.

წრეწირის მხები

- მხები;

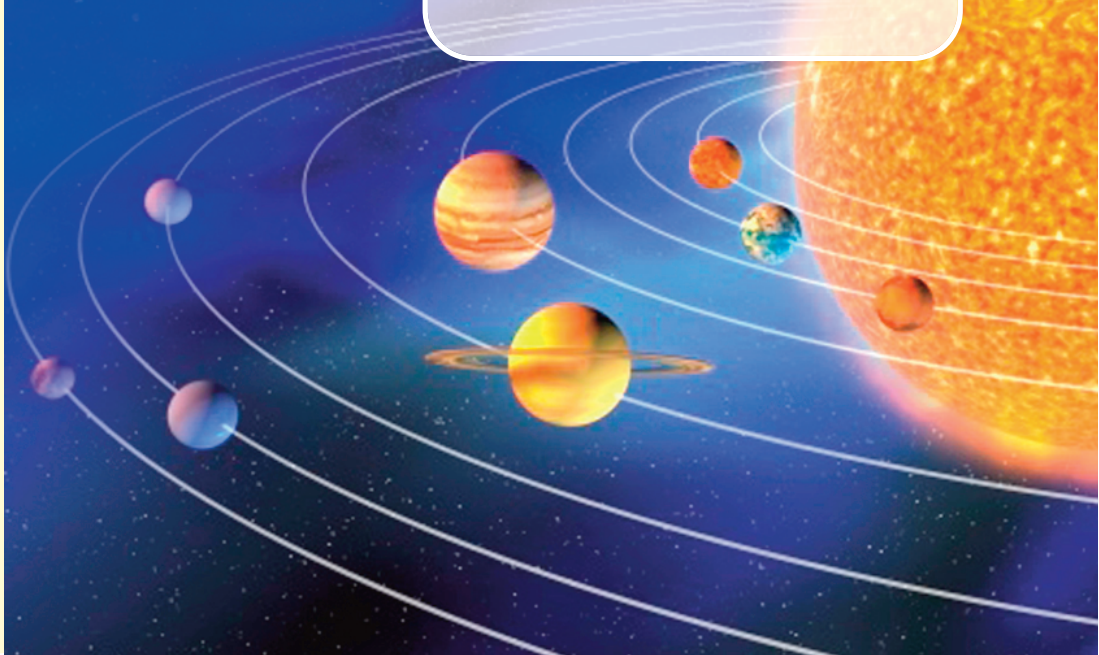
- ერთი და იგივე წერტილიდან წრეწირი-სადმი გავლებული მხებების თვისება.

კუთხეები წრეწირის მხებებსა და მკვეთებს შორის

- კუთხეები ორ მკვეთს შორის;

- კუთხეები მხებსა და მკვეთს შორის;

- წრეწირის მკვეთი მონაკვეთები.



ნამდვილი რიცხვები

პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტაში, მათემატიკური მეთოდების გამოყენება ეფუძნება დათვლასა (გამოთვლა) და გაზომვას. დათვლისას ნატურალური რიცხვები გამოიყენება. როდესაც მთელი ნაწილებად იყოფა, მაშინ ნატურალური რიცხვები საკმარისი აღარაა. ამიტომაც წილადი რიცხვები შემოიტანება. მონაკვეთის სიგრძე ნებისმიერი სიზუსტით რაციონალური რიცხვით შეიძლება გამოვსახოთ. შეხედვით გაანგარიშებებში კი შეიძლება იყოს ისეთი შემთხვევებიც, რომ სიგრძის ასეთი რიცხვებით გამოსახვა შეუძლებელია მონაკვეთების განხილვა დაგვჭირდეს. ამ მიზეზით შემოიტანება ირაციონალური რიცხვის ცნება. უარყოფითი რიცხვები, რაოდენობის მნიშვნელობის საპირისპირო მიმართულებით შეცვლის საჩვენებლად ძალიან ხელსაყრელია.

ნამდვილი რიცხვები

რაციონალური რიცხვები და ირაციონალური რიცხვები ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ქმნიან. ნამდვილი რიცხვი შეიძლება გამოისახოს უსასრულო ათწილადის სახითაც. ნებისმიერი a ნამდვილი რიცხვისათვის $a + 0 = a$ და $a \cdot 1 = a$ ტოლობები ჭეშმარიტია.

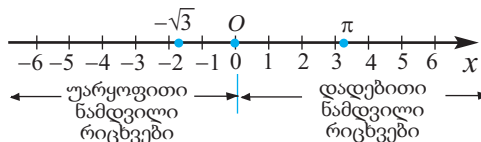
მხოლოდ ნიშნით განსხვავებულ ნამდვილ რიცხვებს მოპირდაპირე რიცხვები ეწოდება. a და $-a$ ურთიერთ-მოპირდაპირე რიცხვებია. მოპირდაპირე რიცხვების ჯამი ნულის ტოლია: $a + (-a) = 0$.

როცა $a \neq 0$, a და $\frac{1}{a}$ ურთიერთშებრუნებული რიცხვებია. ურთიერთშებრუნებული რიცხვების ნამრავლი 1-ის ტოლია:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და განაყოფი (მნიშვნელის ნულისაგან განსხვავებულობის პირობებში) ნამდვილი რიცხვია.

რიცხვითი ღერძის თითოეულ წერტილს განსაზღვრული ნამდვილი რიცხვი შეესაბამება და პირიქით, შესაძლებელია ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვის რიცხვით ღერძზე ჩვენება.



a და b ნამდვილი რიცხვებისათვის $a > b$, $a = b$ და $a < b$ დამოკიდებულებებიდან ერთ-ერთი ჭეშმარიტია. რიცხვით ღერძზე მარჯვნივ მდებარე წერტილის შესაბამისი რიცხვი მარცხნივ მდებარე წერტილის შესაბამის რიცხვზე მეტია.

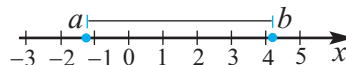
ორ ნამდვილ რიცხვს შორის უსასრულო რაოდენობის ნამდვილი რიცხვია. იმ უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც მოცემულ რიცხვს არ აღემატება, მოცემული რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება.

ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა რიცხვით ღერძზე უჩვენებს მანძილს ამ წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{თუ } a > 0 \\ -a, & \text{თუ } a < 0 \\ 0, & \text{თუ } a = 0. \end{cases}$$

რიცხვით ღერძზე a და b წერტილებს შორის მანძილი $|a - b|$ სახით იწერება.

მიაქციეთ ყურადღება: $|a - b| = |b - a|$.



ნამდვილი რიცხვები

- 1 > მოცემული ნამდვილი რიცხვებიდან რომელია: ნატურალური, მთელი, რაციონალური და ირაციონალური რიცხვები?
 ა) $\sqrt{16}$ ბ) $-\frac{9}{11}$ გ) 1,(7) დ) $\sqrt{8}$ ე) $-\sqrt{9}$
- 2 > $x^2 = a$ განტოლებაში a -ს ადგილას ჩაწერეთ ისეთი რიცხვი, რომ განტოლებას ჰქონდეს: ა) ორი რაციონალური; ბ) ორი ირაციონალური ფესვი; გ) არ ჰქონდეს ნამდვილი ფესვი.
- 3 > n -ის 2; 3; 4; 5 მნიშვნელობებიდან რომელია $\sqrt{n}$ რაციონალური რიცხვი?
- 4 > განსაზღვრეთ გამოსახულების მნიშვნელობა რაციონალური რიცხვია თუ ირაციონალური?
 ა) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3)$ ბ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$ გ) $(2 - \sqrt{2})^2$
- 5 > დაწერეთ ორი ისეთი ირაციონალური რიცხვი, რომ: ა) ჯამი რაციონალური; ბ) ნამრავლი რაციონალური იყოს.
- 6 > უჩვენეთ მოცემული რიცხვები რიცხვით ღერძზე ორ მომდევნო მთელ რიცხვს შორის.
 $-\frac{9}{4}$ 1,6 $\sqrt{5}$ -0,(8) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{\pi}{4}$
- 7 > შეადარეთ რიცხვები:
 ა) $-2\sqrt{3}$ და $-\sqrt{9}$ ბ) $-\frac{7}{12}$ და $-\frac{7}{\sqrt{12}}$ გ) $\sqrt{14}$ და 3 დ) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ და π
- 8 > ა) 0,63-ზე მეტი ნამდვილი რიცხვებიდან უმცირესი არსებობს?
 ბ) დაწერეთ 0,9-ზე ნაკლები უდიდესი ნამდვილი რიცხვი, რომლის ათწილადურ ჩანაწერში ციფრი 9 არ ურევია.
- 9 > ნემეთი ამბობს, რომ $-2 + \sqrt{3}$ და $-1 + \sqrt{2}$ რიცხვებიდან ორივე რიცხვით ღერძზე უარყოფითი რიცხვების მხარეს მდებარეობს. თქვენ როგორ ფიქრობთ?
- 10 > მოცემული რიცხვების შესახებ გამოთქმული რომელი მოსაზრებაა სწორი?
 1) $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $-\sqrt{2}$. 2) $\sqrt{\frac{36}{5}}$, $\sqrt{\frac{49}{8}}$, $\sqrt{\frac{81}{11}}$.
 ა) -1-ზე მეტია ა) 1-სა და 2-ს შორის მდებარეობენ
 ბ) -2-სა და -1 შორისაა ბ) 2-სა და 3-ს შორის მდებარეობენ
- 11 > დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.
 1) $-\sqrt{49}$; $-\sqrt{7}$; 0; $-\sqrt{51}$; -6,8 2) $-\sqrt{8}$; -3,1; $\sqrt{15}$; $(-2)^2$; $-\sqrt{11}$
- 12 > დაწერეთ $\frac{1}{3}$ და $\frac{1}{2}$ შორის მდებარე რამდენიმე:
 ა) რაციონალური; ბ) ირაციონალური რიცხვი.
- 13 > დაწერეთ რიცხვების მთელი და წილადი ნაწილები.
 ა) 2,3 ბ) -6,2 გ) 2,(3) დ) -2,(3) ე) 2,1(6) ვ) $\sqrt{3}$ ზ) $\sqrt{5} - 1$
მიითითება: წილადი ნაწილი ეს არის სხვაობა რიცხვსა და მის მთელ ნაწილს შორის.
- 14 > გაამარტივეთ.
 ა) $|\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 1|$ ბ) $|\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} + 1|$ გ) $|\pi - 3| - |3 - \pi|$

ნამდვილი რიცხვები

რიცხვითი სიმრავლეები და წარდგენის ფორმები

სიმრავლეს, რომლის ყველა ელემენტი ნამდვილი რიცხვია, რიცხვითი სიმრავლე ეწოდება. რიცხვითი სიმრავლეები როგორც წესი უტოლობებით ან რიცხვითი შუალედებით მოიცემა. $(-\infty; +\infty)$ ჩანაწერი გამოსახავს ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს.

შუალედი	უტოლობით ჩაწერა	რიცხვით ღერძზე
(a, b)	$a < x < b$	
$[a, b)$	$a \leq x < b$	
$(a, b]$	$a < x \leq b$	
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$(a, +\infty)$	$a < x$	
$[a, +\infty)$	$a \leq x$	
$(-\infty, b)$	$x < b$	
$(-\infty, b]$	$x \leq b$	
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$ (ყველა ნამდვილი რიცხვი)	

ნამუშაუ: რიცხვით ღერძზე გამოსახეთ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი რიცხვითი სიმრავლე.

- ა) $-1 < x < 2$ ბ) $-2 \leq x \leq 6$ გ) $x > 0$ დ) $(-1, 1)$ ე) $[-1, +\infty)$
-
- $(-1, 2)$ $[-2, 6]$ $(0, +\infty)$ $-1 < x < 1$ $-1 \leq x < +\infty$

15 > დაწერეთ შემოთავაზებული უტოლობები.

- ა) n რიცხვი -1 -ზე მეტია და 12 -ზე ნაკლებია;
 ბ) k რიცხვი 3 -ზე მეტი არაა;
 გ) m რიცხვი არაა უარყოფითი;
 დ) a რიცხვი სულ მცირე -10 და ყველაზე მეტი 22 შეიძლება იყოს;
 ე) b რიცხვი 5 -ზე ნაკლებია, თუმცა -3 -ზე ნაკლები არაა.

16 > დაწერეთ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლე რიცხვითი შუალედების სახით.

- ა) $x \leq 2$ ბ) $-2 < x \leq 5$ გ) $-2 \leq x \leq -1,5$ დ) $x \geq 10$

17 > დაწერეთ რიცხვით ღერძზე ასახული შუალედები.

- ა) ბ) გ) დ)
- ბ) დ)

ნამდვილი რიცხვები

რიცხვითი სიმრავლეების გაერთიანებისა და თანაკვეთის თვისებები

სიმრავლეების გაერთიანებისა და თანაკვეთის ზოგიერთი თვისება. რიცხვის შეკრებისა და გამოკლების მოქმედებების გადანაცვლების, ჯუფდებადობის და განრიგებადობის თვისებების მსგავსია.

$$1) A \cup B = B \cup A$$

$$2) A \cap B = B \cap A$$

$$3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$4) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$5) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

სიმრავლეებისათვის მართებული $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ თვისებების შესაბამისი უტოლობები კი რიცხვებისათვის შეიძლება მართებული არ აღმოჩნდეს.

18 > დაწერეთ შუალედების გაერთიანება და თანაკვეთა.

ნამუშა: $(-2; 4] \cup [0; 9] = (-2; 9]; \quad (-2; 4] \cap [0; 9] = [0; 4]$

ა) $(-2; 4] \cap [0; 9]$ ბ) $(-2; 4] \cup [0; 9]$ გ) $(-\infty; \infty) \cap [-\pi; 21]$

დ) $(-\infty; 4] \cap (-1; \infty)$ ე) $[3; 4] \cup [4; 9]$ ვ) $(-\infty; 4] \cap (0; \infty)$

19 > შეასრულეთ მოქმედებები.

ა) $Q \cap Z$ ბ) $N \cup R$ გ) $N \cup Z \cap Q$ დ) $(-4, 8; -3, 5) \cap Z$

20 > მოცემული შუალედი ასახეთ რიცხვით ღერძზე და უჩვენეთ ამ შუალედში შემავალი რაციონალური და ირაციონალური რიცხვი ($\in$ ნიშანი გამოიყენეთ).

ა) $[1; 5]$ ბ) $(-3; 0)$ გ) $[-2; \infty)$

21 > R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეებია $A = [-2; 1]$, $B = [0; 3]$ და $C = [-1; 2]$. რიცხვით ღერძზე ასახვით შეამოწმეთ ქვემოთ მოცემული უტოლობების სისწორე.

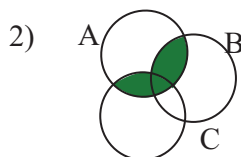
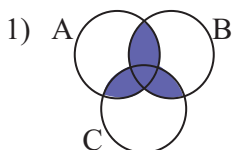
1) $A \cup B = B \cup A$; 2) $A \cap B = B \cap A$; 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

22 > $A = \{0; -1; -2; \frac{5}{9}; \sqrt{6}; 2\pi\}$, $B = \{-1; \sqrt{3}; 0, (5); \sqrt{2}; -2; \pi\}$ და

$C = \{0; 5; \sqrt{3}; \sqrt{2}; 2; \pi\}$ სიმრავლეებიდან შეარჩიეთ ორი ისეთი, რომ მათ თანაკვეთაში მყოფი რიცხვები იყოს. ა) ირაციონალური; ბ) რაციონალური.

23 > დაწერეთ ფერადი ნაწილის შესაბამისი სიმრავლე.

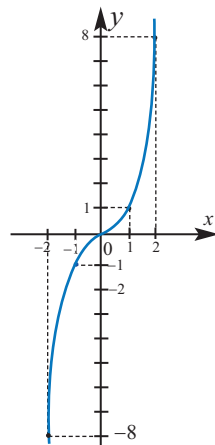


რიცხვის კუბური ფესვი

პრაქტიკული მეცადინეობა

- 1) $3^3 = 27$, $4^3 = 64$ ტოლობების გამოყენებით გამოთვალეთ 12^3 . მსგავსი ხერხით იპოვეთ 18^3 .
- 2) როგორ შეიცვლება რიცხვის კუბი, თუ რიცხვს 10-ჯერ გავზრდით ან შევამცირებთ? ცხრილის მონაცემებზე დაყრდნობით იპოვეთ $0,5^3$ და 50^3 .
- 3) შეავსეთ ცხრილი რვეულში

x	-2		-0,5	0	0,5		
$y = x^3$		-1	-0,125	0		1	8



4) საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ წერტილები, რომელთა აბცისები x -ის ცხრილში მოცემული მნიშვნელობებია, ორდინატები კი y ის შესაბამისი მნიშვნელობებია და ეს წერტილები სურათზე ნაჩვენები წესით, გლუვი მრუდით შეაერთეთ.

5) x -ის კიდევ რამდენიმე მნიშვნელობისათვის, მაგალითად 1,5; -1,5 და სხვა იპოვეთ y -ის შესაბამისი მნიშვნელობები და მათი საკოორდინატო სიბრტყეზე აღნიშვნით დარწმუნდით, რომ ისინიც ამ მრუდზე მდებარეობენ.

ცხრილის პირველ სტრიქონზე x არგუმენტის, მეორე სტრიქონზე კი $y = x^3$ ფუნქციის ზოგიერთი მნიშვნელობაა ნაჩვენები. ამ ფუნქციას x -ის ნებისმიერ მნიშვნელობისათვის აქვს აზრი. x -ის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის უარყოფითი, დადებითი მნიშვნელობისათვის დადებითი მნიშვნელობას იძენს, ხოლო როცა $x = 0$, მაშინ $y = 0$ ანუ $y = x^3$ ფუნქციის როგორც განსაზღვრის არე, ასევე მნიშვნელობათა სიმრავლეც ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

$y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკს კუბური პარაბოლა ეწოდება.

როცა $x > 0$, მაშინ $y > 0$ (დადებითი რიცხვის კუბი დადებითი რიცხვია), როცა $x < 0$, მაშინ $y < 0$ (უარყოფითი რიცხვის კუბი უარყოფითი რიცხვია), როცა $x = 0$, მაშინ $y = 0$. ამიტომაც, გრაფიკი კოორდინატთა სათავეზე გავლით I და III მეოთხედებში განთავსდება. თუ არგუმენტის x მნიშვნელობას, მისი მოპირდაპირე $-x$ მნიშვნელობით შევცვლით, მაშინ ფუნქციაც მოპირდაპირე მნიშვნელობებს მიიღებს. $y = x^3$ -სათვის $(-x)^3 = -x^3 = -y$ მიიღება. მაშასადამე, გრაფიკის თითოეულ $(x; y)$ წერტილს, იმავე გრაფიკზე კოორდინატთა სათავეს მიმართ სიმეტრიული $(-x; -y)$ წერტილი შეესაბამება.

ამრიგად, $y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავეს მიმართ. გრაფიკიდან ჩანს, რომ x არის ერთადერთი რიცხვი, რომლის კუბი მოცემული y რიცხვის ტოლია.

რიცხვის კუბური ფესვი

განსაზღვრება. რიცხვს, რომლის კუბი a -ს ტოლია, a რიცხვის კუბური ფესვი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $\sqrt[3]{a}$.

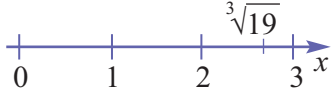
ნიმუშები: $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{-27} = -3$.

განსაზღვრების თანახმად $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

შენიშვნა: $a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$. მაგალითად, $7 > 5 > -2$ და $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{-2}$ ტოლფასია.

რიცხვის კუბური ფესვი

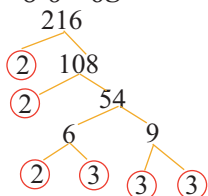
სასწავლო დაგეგმვა

- 1 > მოცემულია ფუნქცია $y = x^3$.
 ა) $A(-2; 8)$, $B(2; 8)$, $C(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8})$, $D(-3; -27)$ წერტილებიდან რომელი მდებარეობენ იმ კუბურ პარაბოლაზე, რომელიც ამ ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს?
 ბ) m -ის რა მნიშვნელობისათვის გადის კუბური პარაბოლა $N(m; -8)$ წერტილზე?
 გ) რამდენი წერტილი არსებობს კუბურ პარაბოლაზე, რომლის ორდინატიცაა: 8; -1?
- 2 > $y = x^3$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით იპოვეთ:
 ა) y -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, როცა $x = 1,2$; $x = -1,2$.
 ბ) x -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა, როცა $y = 4$; $y = -4$.
- 3 > გამოთვალეთ კუბის მოცულობა, რომლის წიბო 4 სმ-ია.
 ა) როგორ შეიცვლება ამ კუბის მოცულობა, თუ წიბოების სიგრძეს გავზრდით 2-ჯერ?
 ბ) რამდენით შეიცვლება მოცულობა, თუ მოცემული კუბის წიბოს 1 სმ-ით გავზრდით?
- 4 > იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:
 ა) $5 \cdot \sqrt[3]{-8}$ ბ) $\sqrt[3]{8 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 13,5}}$ გ) $\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8}}$
 დ) $(4 - \sqrt[3]{-64}) : \sqrt[3]{0,125}$ ე) $\sqrt[3]{31 - \sqrt[3]{64}}$ ვ) $\sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{16}}$ ზ) $\sqrt[3]{130 - \sqrt[3]{125}}$
- 5 > უჩვენეთ n -ის რამდენიმე ისეთი ნატურალური მნიშვნელობა, რომ $\sqrt[3]{n}$ გამოსახულების მნიშვნელობა იყოს: ა) რაციონალური რიცხვი; ბ) ირაციონალური რიცხვი.
- 6 > ამ რიცხვებიდან რომელია რაციონალური? რომელია ირაციონალური?
 ა) $\sqrt{11}$ ბ) $\sqrt{16}$ გ) $\sqrt[3]{-64}$ დ) $\sqrt[3]{4}$ ე) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ ვ) $\sqrt[3]{0,027}$
- 7 > რიცხვით ღერძზე განსაზღვრეთ მოცემული რიცხვების სავარაუდო ადგილი.
 ა) $\sqrt[3]{19}$ ბ) $\sqrt[3]{-20}$ გ) $\sqrt[3]{30}$ დ) $\sqrt[3]{36}$ ე) $\sqrt[3]{\frac{63}{8}}$
ნიმუში: $8 < 19 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{27}$, აქედან კი მიიღება $2 < \sqrt[3]{19} < 3$.
 ე.ი $\sqrt[3]{19}$ მდებარეობს 2 და 3 შორის.
 
- 8 > ფერადი უჯრების ადგილას დაწერეთ $>$, $<$ ნიშნები.
 ა) $\sqrt[3]{7}$ ■ $\sqrt[3]{9}$ ბ) $\sqrt[3]{9}$ ■ 2 გ) $\sqrt[3]{25}$ ■ 3 დ) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ■ $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ ე) 0,01 ■ $\sqrt[3]{0,001}$
- 9 > განსაზღვრეთ სხვაობის ნიშანი.
 ა) $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7}$ ბ) $\sqrt[3]{10} - 2$ გ) $\sqrt[3]{24} - 3$
- 10 > დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.
 ა) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{7}$, 2, $\sqrt[3]{1,2}$
 ბ) $\sqrt[3]{5}$, -2, $\sqrt[3]{4}$, -3
- 11 > ამოხსენით განტოლებები.
 ა) $2x^3 - 1 = 15$ ბ) $\frac{1}{2}x^3 - 1 = 31$ გ) $(x - 1)^3 + 1 = 9$
ნიმუში: $(x - 2)^3 - 1 = 7$; $(x - 2)^3 = 8$; $x - 2 = \sqrt[3]{8}$; $x - 2 = 2$; $x = 4$

რიცხვის კუბური ფესვი

გამოყენებითი დაგალებები

- 12> ა) რიცხვების მარტივი მამრავლები დაყავით ჯგუფებად და დაწერეთ რაიმე რიცხვის კუბის სახით.



$$216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^3$$

1) 216 2) 512 3) 1000 4) 2744

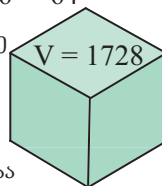
- ბ) რიცხვების მარტივი მამრავლები დაყავით ორ ერთნაირ ჯგუფად და დაწერეთ რაიმე რიცხვის კვადრატის სახით.

1) 144 2) 225 3) 484 4) 256

- 13> რიცხვი 64 სრული კვადრატია, თანაც სრული კუბია $64 = 8^2$, $64 = 4^3$ თქვენც მოიფიქრეთ ასეთი რიცხვები. როგორ შეიძლება დაგეხმაროთ ქვემოთ მოცემული მიმდევრობა ასეთ რიცხვების პოვნაში?

$$0 = 0^3 = 0^2; \quad 1 = 1^3 = 1^2; \quad 64 = 4^3 = 8^2; \quad 729 = 9^3 = 27^2; \quad 4096 = 16^3 = 64^2$$

- 14> 1) მარტივ მამრავლებად დაშლის გამოყენებით იპოვეთ სურათზე ნაჩვენები კუბის წიზოს სიგრძე.
2) იპოვეთ 640^3 მოცულობის მქონე კუბის სრული ზედაპირის ფართობი.



- 15> $(1 \pm a)^3 = 1 \pm 3a + 3a^2 \pm a^3$ ტოლობაში, როცა a ნულთან ახლოსაა a^2 და a^3 წევრების უკუდგებით $(1 \pm a)^3 \approx 1 \pm 3a$ ტოლობის დახმარებით შეიძლება ერთეულთან ახლოს მდგომი რიცხვების კუბების მიახლოებითი გამოთვლა.

ნიმუში: $1,02^3 \approx 1 + 3 \cdot 0,02 = 1,06$ კალკულატორზე $1,02^3 = 1,061208$
 $0,97^3 \approx 1 - 3 \cdot 0,03 = 0,91$ გამოთვლა $0,97^3 = 0,912673$

გამოთვალეთ ნიმუშის შესაბამისად.

ა) $1,01^3$ ბ) $1,03^3$ გ) $0,99^3$ დ) $0,98^3$

- 16> მაღაზიაში სტუდენტური საცხოვრებლისათვის შესაძენი სამი მაცივარია. მაცივრები კუბის ფორმისაა. მაცივრებიდან ერთის ზომები 40 სმ, ფასი 96 მანეთია, მეორეს ზომები 60 სმ, ფასი 192 მანეთი, მესამის ზომები 50 სმ, ფასი 150 მანეთია. 1 კუბური მეტრი ტევადობის ფასის მიხედვით რომელი მაცივრის შეძენა უფრო ხელსაყრელი? ამოხსენით ამოცანა შესაბამისი სურათების განსაზღვრული მასშტაბით დახაზვით.



- 17> მატარებელი კონტეინერის მოცულობა 1000 მ^3 -ია. ამ კონტეინერში საგნების განთავსების მცირე ზომის ყუთებია ჩაწყობილი. კონტეინერის სიგანე 5 მცირე ზომის ყუთის ტოლია, სიგრძე 5 მცირე ზომის ყუთის სიგრძისაა, სიღრმე კი 5 პატარა ყუთის სიმაღლის ტოლია.

- 1) იპოვეთ პატარა ყუთების მოცულობა. 2) რამდენი პატარა ყუთი ეტევა კონტეინერში?

- 18> $A = \{ \sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{8}; \sqrt{2}; -4 \}$, $B = \{ \sqrt[3]{8}; -4; \sqrt[3]{5}; \sqrt{0,4} \}$ და

$C = \{ 0,2; \sqrt[3]{\frac{4}{9}}; \sqrt[3]{7}; -4; \sqrt[3]{8} \}$ სიმრავლეებიდან შეარჩიეთ ორი ისეთი, რომ იყოს:

- ა) სხვაობა ირაციონალური რიცხვი; ბ) თანაკვეთა შედგებოდეს რაციონალური რიცხვებისაგან. ამოხსენით ეილერ-ვენის დიაგრამის აგებით.

რიცხვის კუბური ფესვი

- 19> გამოიკვლიეთ და გამოიყენეთ მრავალნიშნა რიცხვებში კუბური ამოფესვისათვის მოცემული წესი.

$$2^3 = 8 \quad 3^3 = 27 \quad 4^3 = 64 \quad 5^3 = 125 \quad 6^3 = 216 \quad 7^3 = 343 \quad 8^3 = 512 \quad 9^3 = 729$$

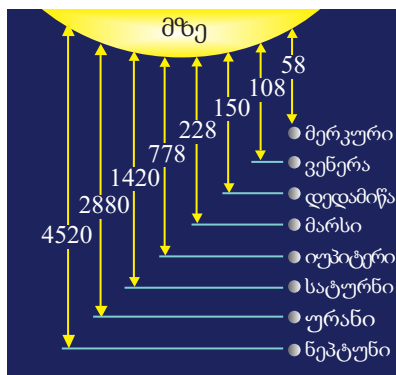
ა) $\sqrt[3]{32768} = ?$ ბ) $\sqrt[3]{103823} = ?$ გ) $\sqrt[3]{12167} = ?$ დ) $\sqrt[3]{74088} = ?$

ა) მარჯვნიდან დაწყებული რიცხვის ციფრები სამ-სამად გამოვყოთ.

32 768-ის ბოლო ციფრია 8, ე.ი. კუბური ფესვის ბოლო ციფრია 2. რიცხვი 32 არის $3^3 = 27$ და $4^3 = 64$ შორის. რადგან $30^3 < 32768 < 40^3$ ამიტომ კუბური ფესვი 32768-დან 30-სა და 40 შორისაა. კალკულატორით შეამოწმეთ, არის თუ არა ეს რიცხვი 32.

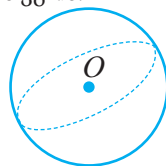
ბ) 103 823 რიცხვის ბოლო ციფრი 3-ია. მაშასადამე, ამ რიცხვის კუბური ფესვი 7-ით მთავრდება. რიცხვი 103 არის $4^3 = 64$ და $5^3 = 125$ შორის. 103823-ის კუბური ფესვი 40-სა და 50-ს შორისაა. კალკულატორით შეამოწმეთ, რომ ეს რიცხვი 47-ია.

- 20> **ასტრონომია.** 1500 წელს კეპლერმა პლანეტების მზის გარშემო სრული მობრუნების დროის (პერიოდის) გამოთვლისათვის აღმოაჩინა $T = 0,2\sqrt{R^3}$ ფორმულა, სადაც R არის პლანეტიდან მზემდე მანძილი მილიონ კილომეტრებით, T კი გამოსახავს დროს დღეობით (დედამიწაზე). სურათზე მოცემულია მანძილები მზიდან პლანეტებამდე. შეადარეთ დედამიწისა და მარსის პლანეტების პერიოდები. რომელი მეტია? შედეგი გამოთვლებით დაადასტურეთ.



- 21> **ბიოლოგია.** ხის სიმაღლის $h \approx 35 \sqrt[3]{d^2}$ ფორმულით მიახლოებით განსაზღვრა შეიძლება, სადაც d ხის ტანის დიამეტრი, h კი სიმაღლეა. დაახლოებით რამდენი მეტრი იქნება იმ ხის სიმაღლე, რომლის ტანის დიამეტრი 1,1 მ-ია? პარკში, ბაღში შესაბამისი გაზომვების ჩატარებით შეამოწმეთ ფორმულის სისწორე.
- 22> **ბიოლოგია.** ბიოლოგები $b \approx 0,01 \sqrt[3]{m^2}$ ფორმულით ძუძუმწოვარი ცხოველების ტვინის მასის გამოთვლისათვის სარგებლობენ, სადაც m ცხოველების მასას, b კი ტვინის მასას გვიჩვენებს. გამოთვალეთ ტვინის მასა:
- ა) ძაღლისა, რომლის მასაც 27 კგ-ია; ბ) დათვისა, რომლის მასაც 200 კგ-ია.

- 23> **გეომეტრია.** ბირთვის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:
- $$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$
- მეასედებამდე სიზუსტით გამოთვალეთ ბირთვის რადიუსი, რომლის მოცულობა 528 მ^3 -ია.



- 24> ორი რკინის კუბი, რომელთა წიბოები იყო 3 სმ და 4 სმ გადაადნეს ერთ კუბად. იპოვეთ ამ კუბის წიბოს სიგრძის მიახლოებითი მნიშვნელობა. შედეგი მეათედებამდე დაამრგვალოთ.

***n*-ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები**

გამოკვლევა: 1) ფერად უჯრებში ჩაწერეთ ისეთი რიცხვები, რომ სწორი ტოლობა მიიღოთ.

ა) $(\blacksquare)^4 = 16$ ბ) $(\blacksquare)^5 = 343$ გ) $(\blacksquare)^8 = 0$ დ) $(\blacksquare)^5 = -32$

2) შესაძლებელია, ისეთი რიცხვის მოძებნა, რომელიც ფერად უჯრაში ჩასმისას $(\blacksquare)^6 = -64$ ტოლობას სწორ ტოლობად აქცევს?

3) $(\blacksquare)^4 = 9$ ტოლობის ჭეშმარიტებისათვის, რისი თქმა შეიძლება ფერად უჯრაში ჩასაწერი რიცხვის შესახებ?

***n*-ური ხარისხის ფესვი**

● *n*-ური ხარისხის ფესვი *a* რიცხვიდან ეწოდება ისეთ რიცხვს, რომლის *n*-ური ხარისხი ($n \geq 2, n \in N$) *a*-ს ტოლია.

მაგალითად, 32-დან მე-5 ხარისხის ფესვი 2-ია, რადგან $2^5 = 32$.

81-დან მე-4 ხარისხის ფესვი 3 და -3-ია, რადგან $3^4 = 81$ და $(-3)^4 = 81$.

თუ *n* კენტი რიცხვია, ნებისმიერი *a* რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი, რომლის *n*-ური ხარისხი *a*-ს ტოლია.

თუ *n* ლუწი რიცხვია, როცა $a > 0$ არსებობს ორი ნამდვილი რიცხვი, რომელთა *n*-ური ხარისხი *a*-ს ტოლია. ეს რიცხვები ურთიერთმოპირდაპირე რიცხვებია. როცა $a < 0$, მაშინ ასეთი რიცხვები არ არსებობს.

● თუ *n* კენტი რიცხვია, ნებისმიერი რიცხვიდან *n*-ური ხარისხის მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვია.

● თუ *n* ლუწია, მაშინ დადებითი *a*-სათვის *n*-ური ხარისხის ორი ნამდვილი ფესვია და ეს ფესვები ურთიერთმოპირდაპირე რიცხვებია.

● თუ $a < 0$ და *n* ლუწი რიცხვია, მაშინ *n*-ური ხარისხის ნამდვილი ფესვი *a*-დან არ არსებობს.

● არაუარყოფითი რიცხვიდან *n*-ური ხარისხის არაუარყოფით ფესვს არითმეტიკული ფესვი ეწოდება, $\sqrt[n]{a}$ -თი აღინიშნება და ასე იკითხება: “*a*-დან *n*-ური ხარისხის ფესვი”. *n* გვიჩვენებს ფესვის ხარისხს და ფესვის მაჩვენებელი ეწოდება, *a*-ს კი ფესვქვეშა გამოსახულება ეწოდება. როცა *n* ლუწია, *a*-ს ($a > 0$) უარყოფითი ფესვი კი ასე იწერება: $-\sqrt[n]{a}$

● უარყოფითი რიცხვიდან კენტი ხარისხის ფესვი შეიძლება გამოვსახოთ იმავე ხარისხის არითმეტიკული ფესვის საშუალებით. მაგალითად, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

● თუ $a = 0$, მაშინ $\sqrt[n]{0} = 0$

თუ *n* კენტი რიცხვია, $\sqrt[n]{a}$ გამოსახულებას ნებისმიერი *n*-ისათვის აქვს აზრი, თუ *n* ლუწია, $\sqrt[n]{a}$ გამოსახულებას აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $a \geq 0$.

● $\sqrt[n]{a}$ გამოსახულების აზრის მქონე ყველა მნიშვნელობისათვის $(\sqrt[n]{a})^n = a$

● თუ *n* კენტია, მაშინ $\sqrt[n]{a^n} = a$, თუ *n* ლუწია, მაშინ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ნიმუში 1: $\sqrt[3]{x^3} = x$ $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ $\sqrt[5]{x^5} = x$ $\sqrt[6]{x^6} = |x|$

● $a > b > 0$, მაშინ $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

ნიმუში 2: $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8} > \sqrt[4]{5}$

სასწავლო დავალებები

1 > გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{121}$

ბ) $\sqrt[3]{125}$

გ) $\sqrt[4]{256}$

დ) $\sqrt[3]{0}$

ე) $\sqrt[4]{1}$

ვ) $\sqrt{0,64}$

ზ) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

თ) $\sqrt[5]{-32}$

ი) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$

კ) $\sqrt[3]{0,064}$

n-ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები

- 2** > მოცემული გამოსახულებებიდან რომელს აქვს აზრი და რომელს არა აქვს აზრი?
ა) $\sqrt[5]{-27}$ ბ) $-\sqrt[8]{-19}$ გ) $\sqrt[4]{(-2)^4}$ დ) $\sqrt[4]{-12}$ ე) $\sqrt[6]{(-3)(-7)}$
- 3** > რომელ ორ მომდევნო მთელ რიცხვს შორის მდებარეობს მოცემული რიცხვი?
ა) $\sqrt{5}$ ბ) $\sqrt[3]{25}$ გ) $\sqrt[5]{28}$ დ) $\sqrt[4]{0,7}$ ე) $\sqrt[4]{15}$
- 4** > იპოვეთ რიცხვის მთელი ნაწილი.
ა) $\sqrt{3}$ ბ) $\sqrt[3]{20}$ გ) $\sqrt[5]{38}$ დ) $\sqrt[4]{17}$ ე) $-\sqrt[4]{17}$ ვ) $\sqrt[4]{17} - 1$
- 5** > წილადი ნაწილის პოვნისათვის მოცემულ რიცხვს უნდა გამოაკლდეს მისი მთელი ნაწილი. ჯერ იპოვეთ რიცხვის მთელი ნაწილი, შემდეგ უჩვენეთ მისი წილადი ნაწილი.
ა) $\sqrt{2}$ ბ) $\sqrt[3]{9}$ გ) $\sqrt[4]{12}$ დ) $\sqrt[5]{33}$ ე) $\sqrt[3]{28} - 2$
- 6** > გამოთვალეთ. ა) $\sqrt{\sqrt{16}}$ ბ) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ გ) $\sqrt{7+\sqrt[3]{7+\sqrt[4]{1}}}$ დ) $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{256}}$
- 7** > გამოთვალეთ. ა) $(4\sqrt{3})^2$ ბ) $(5\sqrt[3]{2})^3$ გ) $(-2\sqrt[4]{3})^4$ დ) $(-2\sqrt[5]{4})^5$
ე) $3\sqrt[4]{(-2)^4}$ ვ) $\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[3]{(-3)^3}$ თ) $\sqrt[6]{(-8)^2}$ ი) $2\sqrt[3]{(-4)^3}$ კ) $\sqrt{(-7)^2}$
- 8** > კალკულატორით გამოთვალეთ გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.
ა) $\sqrt[3]{5^2}$ ბ) $\sqrt[4]{6^3}$ გ) $\sqrt{10^3}$ დ) $\sqrt[3]{16}$
- 9** > გაამარტივეთ: ა) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ ($x > 0$) ბ) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ ($x < 0$)
- 10** > გაამარტივეთ. ა) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^4}$ ბ) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-3)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-3)^4}$
- 11** > გაამარტივეთ $\sqrt[3]{(x-1)^3} + \sqrt{x^2-4x+4}$, როცა: $1 < x < 2$.
- 12** > დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით: ა) $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[4]{15}$, 2; ბ) $\sqrt[5]{9}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[5]{3}$
- 13** > ცვლადის რომელი მნიშვნელობისთვისაა ტოლობა სწორი?
ა) $\sqrt[3]{x+1} = 3$ ბ) $\sqrt[4]{x-1} = 2$ გ) $\sqrt[6]{x-7} = -1$ დ) $\sqrt[5]{x-3} = -2$
- 14** > ამოხსენით განტოლებები.
ა) $x^3 = 64$ ბ) $x^6 = -16$ გ) $x^4 = 81$ დ) $\frac{1}{8}x^4 - 2 = 0$ ე) $\frac{1}{2}x^5 + 16 = 0$

ნიმუში: 1) $x^3 = 27$ კენტხარისხიან განტოლებას ერთი ნამდვილი ფესვი აქვს: $x = \sqrt[3]{27} = 3$

2) $x^4 = -81$ ლუწ ხარისხში არ შეიძლება უარყოფითი რიცხვი იყოს. ნამდვილი ფესვი არა აქვს.

3) $x^4 = 16$ ორი ნამდვილი ფესვი აქვს: $x = \pm\sqrt[4]{16}$ $x = \pm 2$

n-ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები

გამოკვლევა: 1) შეადარეთ გამოსახულებების მნიშვნელობები $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ და $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$

2) ფერადი უჯრის ადგილას ჩაწერეთ შესაბამისი შედარების ნიშანი. $\sqrt[3]{64} \blacksquare \sqrt[6]{64}$

განიხილეთ ამ ორი დავალების ამოხსნა და განაზოგადეთ მოსაზრება.

n-ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები

თვისება 1. თუ $a \geq 0$ და $b \geq 0$, მაშინ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
 არაუარყოფითი მამრავლების ნამრავლიდან n -ური ხარისხის ფესვი, ამ მამრავლებიდან n -ური ხარისხის ფესვების ნამრავლის ტოლია.

ნიმუში: $\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

თვისება 2. თუ $a \geq 0$ და $b > 0$, მაშინ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

n -ური ხარისხის ფესვი წილადიდან, რომლის მრიცხველიც არაუარყოფითი, ხოლო მნიშვნელი დადებითი რიცხვია, მრიცხველიდან და მნიშვნელიდან n -ური ხარისხის ფესვების შეფარდებით ტოლია.

ნიმუში: $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$

თვისება 3. თუ $a \geq 0$ და n, k - ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

ნიმუში: $(\sqrt[5]{2})^4 = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

თვისება 4. თუ $a \geq 0$ და n, k - ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

მართლაც, როცა $a \geq 0$, მაშინ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ და $\sqrt[nk]{a}$ გამოსახულებებს აზრი აქვს და მათი მნიშვნელობა არაუარყოფითია.

$$(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a \quad \text{ამიტომ} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

ნიმუში: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$

თვისება 5. თუ $a \geq 0$, და n, k, m - ნატურალური რიცხვებია: $\sqrt[n]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}^k$

თუ ფესვის მაჩვენებელსა და ფესქვეშა გამოსახულების ხარისხის მაჩვენებელს გავამრავლებთ ან გავყოფთ ერთსა და იმავე ნატურალურ რიცხვზე, ფესვის მნიშვნელობა არ შეიცვლება. მართლაც, მე-4 თვისების თანახმად

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{(\sqrt[k]{a^m})^k} = \sqrt[n]{a^m}$$

ნიმუში: $\sqrt[3]{\sqrt{x^4}} = \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$

სასწავლო დავალებები

15> თუ $a \geq 0$ და $b \geq 0$, შეავსეთ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ტოლობის ქვემოთ მოცემული დამტკიცება.

პირობა	საფუძველი
1. $a \geq 0, b \geq 0$	1. მოცემულია
2. $\sqrt[n]{a} \geq 0, \sqrt[n]{b} \geq 0$	2.
3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$	3.
4. $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n$	4. ნამრავლის ხარისხი ხარისხების ნამრავლის
5. $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$	5.
6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	6.

n-ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები

16> გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{25 \cdot 64}$ ბ) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ გ) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$ დ) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ ე) $\sqrt[5]{\frac{1}{32} \cdot 243}$

17> თვისება 1 და თვისება 2-ში მოცემული იგივეობების მარჯვნიდან მარცხნივ წაკითხვისას ტოლმარჯვენებიანი ფესვების გამრავლებისა და გაყოფის წესები მიიღება. შეავსეთ ამ წესებში გამოტოვებული სიტყვები.

- 1) მარჯვენებიანი ფესვების ერთმანეთზე გამრავლებისათვის საკმარისია ფესქვემა გამოსახულებების, ფესვის მარჯვენებელი კი ისევ ისე უნდა
- 2)მარჯვენებიანი ფესვების ერთმანეთზე გაყოფისათვის, უნდა გავყოთ, ხოლო ფესვის მარჯვენებელი

18> გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ნამუშა: $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{54 \cdot 32} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot 32} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

ა) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200}$ ბ) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ გ) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ დ) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$
 ე) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5}$ ვ) $\sqrt[4]{80} \cdot \sqrt[4]{125}$ ზ) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{162}$ თ) $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{96}$

19> გამოთვალეთ. ა) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ ბ) $\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$ გ) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$ დ) $\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{0,1}}$ ე) $\frac{\sqrt[3]{81}}{3\sqrt[3]{3}}$

20> გამოთვალეთ. ა) $\sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27}$ ბ) $\sqrt[4]{8 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 27}$ გ) $\sqrt[5]{16 \cdot 9} \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 27}$

21> გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $(\sqrt{8} - \sqrt{4,5}) \cdot \sqrt{2}$ ბ) $(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4}$ გ) $\frac{\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ დ) $\frac{\sqrt[5]{486} - \sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$
 ე) $(\sqrt[4]{8} - 2 \cdot \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$ ვ) $(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{16}) : \sqrt[3]{2}$ თ) $(\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{121,5}) \cdot \sqrt[5]{2}$

22> გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}$ ბ) $\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}}$ გ) $\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}}$

23> შეადარეთ მოცემული გამოსახულების მნიშვნელობა:

ა) $\sqrt{\sqrt{81}}$ და $\sqrt[4]{81}$ ბ) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ და $\sqrt[6]{64}$ გ) $\sqrt{\sqrt[4]{2^8}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[4]{2^8}}$ და $\sqrt[8]{2^8}$

24> გაამარტივეთ, თუ ცნობილია, რომ ცვლადები დადებით მნიშვნელობას იძენენ.

ა) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ ბ) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ გ) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6}}$ დ) $\sqrt[9]{x^6}$ ე) $\sqrt[2n]{a^{4n}}$
 ვ) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}$ ზ) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{c^5}}$ თ) $\sqrt[5]{\sqrt{n}}$ ი) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^{12}}}$ კ) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{y^6}}$ ლ) $\sqrt[5]{\sqrt{n^5}}$

25> გაამარტივეთ, თუ ცნობილია, რომ ცვლადები დადებით მნიშვნელობას იძენენ.

ა) $(\sqrt[6]{x^2})^3$ ბ) $(\sqrt[4]{a^2})^2$ გ) $(\sqrt{ab})^3 \cdot \sqrt{a^3b^3}$ დ) $\sqrt[4]{z^2} \cdot \sqrt[4]{81z^6}$
 ე) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ ვ) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ ზ) $\sqrt[n]{a^n} \cdot (\sqrt[n]{a})^n$ თ) $\frac{(\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})^3}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}}$

n-ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები

- 26>** იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი, რომლის სიგრძე $\sqrt[4]{8}$ მ-ია, სიგანე კი $\sqrt[4]{2}$ მ.
- 27>** როცა n კენტი 1-ლი და მე-2 თვისებები მართებულია უარყოფითი a და b რიცხვებისთვისაც. უჩვენეთ ეს ნიმუშებზე.
- 28>** $\sqrt[3]{\frac{5}{64}}$ რიცხვი $\sqrt[3]{\frac{5}{256}}$ რიცხვზე რამდენჯერაა მეტი?
- 29>** შეასრულეთ მოქმედებები.
- ა) $(\sqrt[6]{8})^2$ ბ) $(\sqrt[4]{4})^2$ გ) $-3 \cdot (\sqrt[4]{9})^2$ დ) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{8})^2$
- 30>** გაამარტივეთ.
- ა) $\frac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{x^5y^3}}$ ბ) $\frac{\sqrt[4]{a^5b^{10}}}{\sqrt[4]{ab^2}}$ გ) $\frac{\sqrt[3]{n^4m}}{\sqrt[3]{nm^4}}$ დ) $\frac{\sqrt[4]{x^6z^3}}{\sqrt[4]{x^2z^3}}$
- 31>** გაათავისუფლეთ ფესვის ნიშნისაგან. დაწერეთ მრავალწევრის სახით.
- ა) $\sqrt[3]{(a+2)^6}$ ბ) $\sqrt[4]{(x-3)^8}$ გ) $\sqrt[3]{(x^2-1)^3}$ დ) $\sqrt[4]{(x^2+2)^4}$

მამრავლის გამოტანა ფესვის ნიშნის გარეთ

ნიმუშები:

$$\begin{aligned} \text{ა) } \sqrt[3]{54} &= \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} \\ \text{ბ) } \sqrt[3]{a^5b^6} &= \sqrt[3]{a^3b^6a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{a^2} = ab^2\sqrt[3]{a^2} \\ \text{გ) } \sqrt[4]{48a^6} &= \sqrt[4]{16 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot a^2} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{3a^2} = 2|a|\sqrt[4]{3a^2} \end{aligned}$$

- 32>** გამოიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის გარეთ.
- ა) $\sqrt{32}$ ბ) $\sqrt[3]{24}$ გ) $\sqrt[4]{32}$ დ) $\sqrt[5]{128}$ ე) $\sqrt[3]{\frac{108}{250}}$
- 33>** ცვლადის მნიშვნელობა ჩათვალეთ დადებითად და გაამარტივეთ.
- ა) $\sqrt{16x^3}$ ბ) $\sqrt[3]{27a^5}$ გ) $\sqrt[6]{64a^7}$ დ) $\sqrt[3]{54a^5b^7}$ ე) $\sqrt{\frac{81a^2b^4}{3b}}$
- 34>** გაამარტივეთ. უჩვენეთ ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობები (3ფმ).
- ა) $\sqrt{36x^3}$ ბ) $\sqrt[4]{36x^5y^8}$ გ) $\sqrt[5]{8xy^7} \cdot \sqrt[5]{16x^6}$ დ) $\sqrt[3]{4y^3z} \cdot \sqrt[3]{2y^2z^4}$
- ე) $\sqrt[3]{\frac{x^6y^8}{x^3y^4}}$ ვ) $\frac{\sqrt[5]{x^9y}}{\sqrt[5]{x^3y^8}}$ ზ) $\sqrt{\frac{9x^3}{32y^4}}$ თ) $\sqrt[4]{x^3y} \cdot \frac{\sqrt[4]{16x^4y}}{\sqrt[4]{y}}$
- 35>** გაამარტივეთ საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანით.
- ა) $2\sqrt[5]{y} + 7\sqrt[5]{y}$ ბ) $\sqrt[5]{64x^8} - x\sqrt[5]{2x^3}$ გ) $-\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x}$ დ) $\sqrt[3]{16y^4} - 3y\sqrt[3]{2y}$

მამრავლის შეტანა ფესვის ნიშნის ქვეშ

თუ n კენტი, $a = \sqrt[n]{a^n}$ თუ n ლუწია და $a \geq 0$, $a = \sqrt[n]{a^n}$
 $a < 0$, $a = -\sqrt[n]{a^n}$

ნიმუში:

$$\begin{aligned} \text{ა) } 2\sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40} \\ \text{ბ) } \frac{3x}{\sqrt[4]{x}} &= \sqrt[4]{\frac{(3x)^4}{x}} = \sqrt[4]{81x^3} \quad \text{გ) } c \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{c^3}} = -\sqrt[4]{c^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{c^3}} = -\sqrt[4]{-3c} \end{aligned}$$

n-ური ხარისხის ფესვი და მისი თვისებები

36> შეიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის ქვეშ.

ა) $3\sqrt[3]{2}$ ბ) $2\sqrt[4]{2}$ გ) $3\sqrt[4]{5}$ დ) $-2\sqrt[4]{3}$ ე) $-2\sqrt[5]{2}$ ვ) $x\sqrt[3]{3}$ ზ) $a\sqrt[5]{2}$

37> შეიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის ქვეშ. უზვენეთ **ცდმ**.

ა) $x \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x}}$ ბ) $x \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{x}}$ გ) $2c \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4c}}$ დ) $\frac{2}{x} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^5}{8}}$ ე) $c \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{c}}$

38> განსაზღვრეთ სხვაობის ნიშანი. ა) $\sqrt[6]{2} - \sqrt[3]{10}$ ბ) $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$ გ) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[6]{7}$

39> შეადარეთ რიცხვები: ა) $\sqrt[3]{4}$ და $\sqrt[4]{3}$ ბ) $2\sqrt[3]{3}$ და $3\sqrt[3]{2}$ გ) $2\sqrt[4]{3}$ და $3\sqrt[4]{2}$

40> გამოსახეთ ტოლმარეკნებიანი ფესვებით და შეასრულეთ მოქმედება.

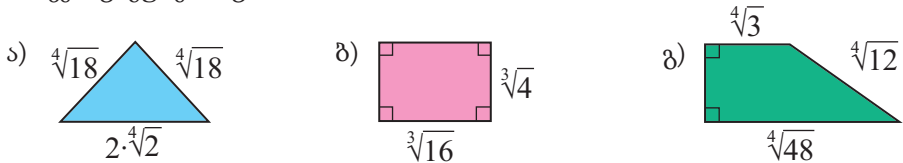
ა) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ ბ) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$ გ) $\sqrt[6]{4} : \sqrt[4]{2}$ დ) $\sqrt[3]{x} : \sqrt[5]{x}$

41> გამოთვალეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}}$ ბ) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$

42> გაამარტივეთ. ა) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$ ბ) $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a + b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$

43> იპოვეთ ფიგურების ფართობი.



44> გაამარტივეთ ფესვის თვისებების გამოყენებით.

ა) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6 b^3}}$ ბ) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} \ (a \geq 0)$ გ) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ დ) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} \ (a \geq 0)$

45> რომელი ტოლობაა სწორი, როცა $a < 0$?

ა) $\sqrt[5]{a^5} = a$ ბ) $\sqrt[5]{a^5} = -a$ გ) $\sqrt[4]{a^4} = -a$ დ) $\sqrt[6]{a^6} = |a|$

46> დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.

ა) $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[3]{3}$; ბ) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$.

47> გაათავისუფლეთ მნიშვნელი ირაციონალურობისაგან: ა) $\frac{9}{\sqrt[4]{27}}$; ბ) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$; გ) $\frac{4}{\sqrt[5]{8}}$

48> შეასრულეთ მოქმედებები.

ა) $\frac{\sqrt[4]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ ბ) $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5} - 4} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{5} - 4}}{\sqrt[3]{0,5}}$

49> ამოხსენით განტოლებები და უტოლობები.

ა) $\sqrt[3]{x} = 4$; $\sqrt[3]{x} > 4$; $\sqrt[3]{x} < 4$ ბ) $\sqrt[4]{x} = 2$; $\sqrt[4]{x} > 2$; $\sqrt[4]{x} < 2$

გ) $\sqrt[5]{x - 3} = 2$ დ) $\sqrt[3]{x + 5} = -1$ ე) $\sqrt[4]{x + 1} = 3$ ვ) $\sqrt[6]{x + 2} = -5$

რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები

გამოკვლევა:

- 1) იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $\sqrt[3]{2^6}$.
- 2) $\frac{6}{3} = 2$, გაითვალისწინეთ ეს და იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა $2^{\frac{6}{3}}$.
- 3) შეადარეთ 1-ლი და მე-2 ნაბიჯების შედეგები.
- 4) თუ m რიცხვი n -ზე იყოფა, მაშინ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ტოლობა სწორია? წარმოადგინეთ ერთი ნიმუში.
- 5) როგორ შეიძლება გამოვიანგარიშოთ $a^{\frac{m}{n}}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, თუ m რიცხვი n რიცხვზე სრულად არ იყოფა?

რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი

დავუშვათ, რომ ტოლობა $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (სადაც $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) მართებულია მაშინაც, როცა $\frac{m}{n}$ წილადი რიცხვია, მაშინ მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის ყველა თვისება სრულდება დადებითი ფუძიან წილადმაჩვენებლიან ხარისხებზეც.

განსაზღვრება: თუ a დადებითი რიცხვია, ხოლო $\frac{m}{n}$ წილადი რიცხვი (სადაც m მთელი რიცხვია, n - ნატურალური, $n \geq 2$), მაშინ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

ნიმუში: $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$; $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$

როცა $m > 0$, ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) რადგან $\sqrt[n]{0^m} = 0$, როცა $\frac{m}{n} > 0$, მაშინ $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

უარყოფითი რიცხვები წილადი ხარისხით არ განიხილება.

მაგალითად, $(-4)^{\frac{1}{2}}$ გამოსახულებას აზრი არა აქვს.

სასწავლო დავალებები

- 1> რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხები შეცვალეთ ფესვებით.
ა) $5^{\frac{2}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $8^{-\frac{3}{4}}$; $9^{0,25}$ ბ) $x^{\frac{2}{3}}$; $y^{1,5}$; $8^{-0,5}$; $c^{-2,5}$ გ) $3x^{\frac{1}{2}}$; $(8y)^{\frac{1}{3}}$; $(4c)^{-0,5}$
- 2> არითმეტიკული ფესვი შეცვალეთ რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხით (ცვლადების მნიშვნელობები დადებითია).
ა) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[5]{7^3}$ ბ) $\sqrt[5]{a^3}$; $\sqrt[6]{b^5}$; $\sqrt[3]{2x}$; $\sqrt[8]{2x^3}$
- 3> გამოთვალეთ.
ა) $100^{\frac{1}{2}}$ ბ) $9^{-\frac{1}{2}}$ გ) $8^{\frac{1}{3}}$ დ) $27^{\frac{1}{3}}$ ე) $81^{\frac{3}{4}}$ ვ) $2 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$
ფ) $25^{\frac{1}{2}} \cdot 0,001^{\frac{1}{3}}$ თ) $8^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{1}{3}}$ ი) $16^{\frac{1}{4}} + 32^{\frac{1}{5}}$
- 4> ლატიფმა და სევილმა $(-8)^{\frac{1}{3}}$ გამოსახულების მნიშვნელობა ასე გამოთვალეს.
ლატიფი: $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ სევილა: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$
ამ შედეგების მიხედვით განმარტეთ მოსაზრება: “უარყოფითი რიცხვებისათვის წილადმაჩვენებლიანი ხარისხი არ განიხილება”.

რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები

- 5 > გამოთვალეთ: ა) $(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{4}}$ ბ) $(8^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{3}{2}} + 125^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$
- 6 > ლალემ და ენვერმა კალკულატორზე $2,4^{3,5} \approx 21,4160487111885324$ გამოთვალეს და შემდეგ ეს გამოთვლები ასე განმარტეს.
 ლალეს განმარტება: 2,4 რომ გავამრავლოთ 3,5-ჯერ თავისთავზე, მიახლოებით 21,42 მიიღება. ენვერის განმარტება: $2,4^{3,5} = 2,4^{\frac{7}{2}}$. ეს კი ნიშნავს მე-2 ხარისხის ფესვს 7 მამრავლის ნამრავლიდან, რომელთაგან თითოეული 2,4-ის ტოლია.
 ვისი განმარტებაა სწორი?
- 7 > შეადარეთ რიცხვები.
 ა) $5^{\frac{1}{2}}$ და $3^{\frac{1}{2}}$ ბ) $0,1^{\frac{1}{2}}$ და $0,2^{\frac{1}{2}}$ გ) $3^{\frac{1}{2}}$ და $3^{\frac{1}{3}}$ დ) $4^{\frac{1}{3}}$ და $4^{\frac{1}{4}}$
- 8 > ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის აქვს გამოსახულებას აზრი?
 ა) $x^{\frac{1}{3}}$ ბ) $\sqrt[3]{x}$ გ) $(x-1)^{-\frac{1}{4}}$ დ) $(x+1)^{\frac{2}{3}}$

რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებები

მთელმაჩვენებლიანი ხარისხის ჩვენთვის ცნობილი თვისებები დადებითი ნამდვილი რიცხვების ფუძის მქონე ნებისმიერი რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხისათვის არის სწორი.

სახელი	ჩანაწერი	ნიმუში
ხარისხების ნამრავლი	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 5^2 = 25$
ხარისხების ხარისხი	$(a^p)^q = a^{pq}$	$(3^{\frac{5}{2}})^2 = 3^{\frac{5}{2} \cdot 2} = 3^5 = 243$
ნამრავლის ხარისხი	$(ab)^p = a^p b^p$	$(16 \cdot 9)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 3 = 12$
უარყოფითმაჩვენებლიანი ხარისხი	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$36^{-0,5} = \frac{1}{36^{0,5}} = \frac{1}{(6^2)^{0,5}} = \frac{1}{6}$
ნულმაჩვენებლიანი ხარისხი	$a^0 = 1$	$213^0 = 1$
ხარისხების შეფარდება	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\frac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}} = 4^2 = 16$
შეფარდების ხარისხი	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4}$

აქ a და b დადებითი რიცხვებია, p და q ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია.

$p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (n და l ნატურალური რიცხვებია, m და k მთელი რიცხვებია)

პირობებში დავამტკიცოთ, რომ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ იქნება.

$$\begin{aligned}
 a^p \cdot a^q &= a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{nk}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml+nk}} = a^{\frac{ml+nk}{nl}} = \\
 &= a^{\frac{ml}{nl} + \frac{nk}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} = a^{p+q}
 \end{aligned}$$

დანარჩენი თვისებებიც მსგავსი წესით მტკიცდება.

რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები

სახსრავლო დაგვარებები

9 > წარმოადგინეთ რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით.

ა) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$ ბ) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ გ) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$ დ) $a^{0,8} \cdot a^{-5,1} \cdot a^{7,3}$

10 > გაამარტივეთ.

ა) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}}$ ბ) $y : y^{\frac{2}{3}}$ გ) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{2}{3}}$ დ) $c^{1,2} : c^{-0,8}$

11 > გაამარტივეთ რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის თვისებების გამოყენებით.

ა) $(a^{\frac{5}{7}})^{1,4}$ ბ) $(m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$ გ) $(b^{0,8})^{0,5}$
 დ) $(c^{0,7})^{0,5} \cdot c^{0,15}$ ე) $y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}} : y^{-0,5}$ ვ) $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{5}{9}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$

12 > გამოთვალეთ.

ა) $2 \cdot 4^{0,4} \cdot 4^{\sqrt[5]{2}}$ ბ) $4^{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[6]{2}$ გ) $25^{0,7} \cdot 5^{0,4}$ დ) $3^{0,2} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$

13 > იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$ ბ) $(\frac{1}{8} \cdot 27^{-1})^{\frac{1}{3}}$ გ) $(0,01 \cdot \frac{1}{49})^{-\frac{1}{2}}$ დ) $(\frac{49}{144})^{\frac{1}{2}}$

14 > გაამარტივეთ. ა) $(125 x^6)^{-\frac{2}{3}}$ ბ) $(27 x^3)^{\frac{1}{3}}$ გ) $(64 c^6)^{\frac{1}{3}}$ დ) $(\frac{1}{81} x^8)^{-\frac{1}{4}}$

15 > წარმოადგინეთ განსაზღვრული გამოსახულების კვადრატის სახით ($x > 0$):

$x; x^8; x^{\frac{1}{4}}; x^{-\frac{1}{3}}$

16 > წარმოადგინეთ განსაზღვრული გამოსახულების კუბის სახით ($a > 0$):

$a; a^6; a^{\frac{1}{4}}; a^{-\frac{1}{3}}; \sqrt{a}$

17 > ქვემოთ მოცემული გამოსახულებები წარმოადგინეთ a -ს სახით, თუ ცნობილია,

რომ $234^{\frac{1}{2}} = a$

ა) $2,34^{\frac{1}{2}}$ ბ) $0,0234^{\frac{1}{2}}$ გ) $23400^{\frac{1}{2}}$

18 > ცნობილია, რომ $x > 0$ და $a > 0$, გამოსახეთ x ცვლადი a -ს საშუალებით.

ა) $a = x^{\frac{1}{2}}$ ბ) $a = x^{\frac{1}{3}}$ გ) $a = x^{\frac{2}{3}}$

19 > ამოხსენით განტოლებები. ა) $x^{\frac{1}{2}} = 3$ ბ) $x^{\frac{1}{3}} = 2$ გ) $x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{1,4} = 9$

ნიშუა: $x^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 8$

20 > წარმოადგინეთ გამოსახულება რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის სახით.

ა) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$ ბ) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ გ) $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}}$

რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები

21 > გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \quad \text{ბ) } \frac{c^{0,4} \cdot \sqrt[5]{c}}{\sqrt{c}} \quad \text{გ) } \frac{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{5}}} \quad \text{დ) } \frac{\sqrt[4]{x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{8}}}$$

22 > გაამარტივეთ.

$$\text{ა) } (x^{\frac{1}{2}} - 3) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ბ) } (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \cdot (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) \quad \text{გ) } (y^{\frac{1}{3}} - 1) \cdot (y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1)$$

23 > წარმოადგინეთ ჯამის სახით.

$$\begin{aligned} \text{ა) } & (c^{\frac{3}{4}} + 2c^{\frac{1}{4}})^2 - 4c \\ \text{ბ) } & \sqrt{x} + \sqrt{y} - (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^2 \\ \text{გ) } & (c^{\frac{2}{9}} - 1)(c^{\frac{4}{9}} + c^{\frac{2}{9}} + 1) \cdot (c^{\frac{2}{3}} + 1) \end{aligned}$$

ნიმუში:

$$\begin{aligned} & (1 - a^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot a^{0,5} = \\ & = 1^2 - \cancel{2 \cdot 1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} + (a^{\frac{1}{2}})^2 + \cancel{2 \cdot a^{0,5}} = \\ & = 1 + a. \end{aligned}$$

24 > დაშალეთ მამრავლებად.

$$\begin{aligned} \text{ა) } & b + b^{\frac{1}{2}} \quad \text{ბ) } (ab)^{\frac{1}{3}} - (ac)^{\frac{1}{3}} \quad \text{გ) } c^2 - 3 \quad \text{დ) } a - b, (a > 0, b > 0) \\ \text{ე) } & x^{\frac{1}{2}} - 4 \quad \text{ვ) } x^{\frac{1}{3}} + 8 \quad \text{ზ) } x^{\frac{2}{3}} - 9 \quad \text{თ) } y - 27 \quad (y > 0) \end{aligned}$$

25 > შეკვეცეთ წილადი.

$$\begin{aligned} \text{ა) } & \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ბ) } \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3}{x - 9} \quad \text{გ) } \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a - b} \quad \text{დ) } \frac{b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{6}}} \end{aligned}$$

26 > იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მოცემული მნიშვნელობისათვის.

$$\begin{aligned} \text{ა) } & \frac{a - 4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} - 2a^{\frac{1}{2}}}, a = 81 \quad \text{ბ) } \frac{c^{\frac{1}{2}} - 4c^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{3}} - 2c^{\frac{1}{6}}}, c = 64 \end{aligned}$$

27 > დაამტკიცეთ, რომ გამოსახულების მნიშვნელობა ცვლადის მნიშვნელობაზე არ არის დამოკიდებული.

$$\begin{aligned} \text{ა) } & \frac{(9^n - 5 \cdot 9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1} - 19 \cdot 27^{n-2})^{\frac{1}{3}}} \quad \text{ბ) } \frac{(8^{n-2} - 7 \cdot 8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}{(5 \cdot 16^{n-1} + 16^{n-2})^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

გამოყენებითი დაფალებები

28 > ჩაის, ყავისა და შოკოლადის შემადგენლობაში არის კოფეინი. $100 \cdot (0,5)^{\frac{n}{5}}$ გამოსახულებით შეიძლება გამოვთვალოთ ადამიანის ორგანიზმში გამოყენებიდან n საათის შემდეგ დარჩენილი კოფეინის ოდენობა (%-ობით). ჩაისა და ყავის მიღებიდან

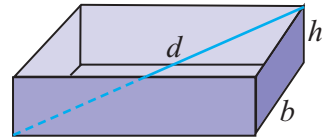
1) ა) $\frac{1}{2}$ საათი; ბ) 1,5 საათის შემდეგ რამდენი პროცენტი კოფეინი დარჩება ორგანიზმში?

2) რამდენი საათის შემდეგ იქნება ორგანიზმში დარჩენილი კოფეინის 50%?

რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი და მისი თვისებები

29 > დამზადებული იქნა 2187 მ^3 მოცულობიანი კუბის ფორმის ნავთობის ავზი. 1 ყუთი საღებავი 20 მ^2 ფართობის შეღებვას ჰყოფნის. რამდენი ყუთი საღებავია საჭირო ამ ავზის სრული ზედაპირის შეღებვისათვის?

30 > მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ყუთის სურათზე ნაჩვენებია დიაგონალის სიგრძე $d = (a^2 + b^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$ ფორმულით შეიძლება მოვებზნოთ.



ა) იპოვეთ ნაჩვენები დიაგონალის სიგრძე, თუ ყუთის სიგრძე $a = 20$ სმ, სიგანე $b = 12$ სმ, ხოლო სიმაღლე $h = 6$ სმ.

ბ) იპოვეთ ყუთის h სიმაღლე, თუ სიგრძე $a = 4$ სმ, სიგანე $b = 3$ სმ, ხოლო დიაგონალი $d = 13$ სმ.

31 > იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი განზომილებებია: $2\frac{1}{3}$ სმ, $4\frac{1}{3}$ სმ და $8\frac{1}{3}$ სმ. ამ პარალელეპიპედის მოცულობა შეადარეთ იმ კუბის მოცულობასთან, რომლის წიბოც $5\frac{1}{4}$ სმ-ია.

32 > **ბიოლოგია.** ბიოლოგები ცოცხალ არსებებზე სხვადასხვა მიმართულებით შედარებით გამოკვლევებს აწარმოებენ. მაგალითად, ძუძუმწოვართა კლასის არსებების “ზედაპირის ფართობს” (სმ^2) მიახლოებით $S \approx k \cdot m^{\frac{2}{3}}$ ფორმულით ანგარიშობენ. სადაც m არის არსების მასა (გრამობით), k კი თითოეული არსებისათვის მიღებული მუდმივი კოეფიციენტი. ცხრილში მოცემულია k კოეფიციენტი ძუძუმწოვართა კლასის ზოგიერთი ცოცხალი არსებისათვის.

სახელი	თაგვი	კატა	ძაღლი	ძროხა	კურდღელი	ადამიანი
k კოეფიციენტი	9,0	10,0	11,2	9,0	9,75	11,0

რამდენი კვადრატული სანტიმეტრი იქნება ტყავის ზედაპირი: ა) 2 კგ მასის მქონე კატის?; ბ) 12 კგ მასის მქონე ძაღლის; გ) 6 კგ მასის მქონე კურდღლის?

33 > 1) დახაზეთ ერთი კვადრატი. ფართობად მიიღეთ ისეთი რიცხვი, რომ მისი პერიმეტრი იყოს:

ა) რაციონალური რიცხვი;

ბ) ირაციონალური რიცხვი.

2) დახაზეთ ერთი კუბი და მოცულობად მიიღეთ ისეთი რიცხვი, რომ მთელი ზედაპირის ფართობი იყოს:

ა) რაციონალური რიცხვი;

ბ) ირაციონალური რიცხვი.

34 > მოცემული ფორმულების მიხედვით მოთხოვნილი სიდიდე გამოსახეთ დანარჩენებით.

ა) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$ -დან m ;

ბ) $R = \sqrt{d^2 + k^2}$ -დან k ;

გ) $K = \sqrt{1 - \frac{x^3}{u^3}}$ -დან u ;

დ) $A = \sqrt{1 + \frac{a^3}{b^3}}$ -დან b ;

განმაზოგადებელი დაგვარებები

1 > იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა.

ა) $(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}) : \sqrt[3]{4}$

ბ) $(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$

ბ) $\frac{4 - 3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2}$

დ) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$

ე) $\frac{\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}}{\sqrt{3} - \sqrt{8}}$

2 > დაალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით.

ა) $\sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[15]{30}$

ბ) $\sqrt[5]{4}, \sqrt[10]{25}, \sqrt[6]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}$

გ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

3 > გაათავისუფლეთ წილადის მნიშვნელი ირაციონალურობისაგან.

ა) $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}$

ბ) $\frac{6}{\sqrt[5]{8}}$

გ) $\frac{6}{\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{2}}$

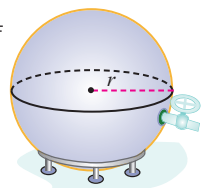
დ) $\frac{9}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3}}$

4 > r რადიუსიანი ბირთვის მოცულობა $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ფორმულით გამოითვლება.

ა) გამოთვალეთ ბირთვის ფორმის ავზის მოცულობა, რომლის რადიუსი 1,5 მ-ია.

ბ) იპოვეთ ბირთვის ფორმის ავზის რადიუსი, რომლის მოცულობა $\frac{28\pi}{3}$ მ³-ია.

შედეგი დაამრგვალეთ მეათედებამდე.



5 > გამოთვალეთ. ა) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2 + \sqrt{3}}}$

ბ) $\frac{\sqrt[6]{4 - \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}}$

6 > შეიტანეთ მამრავლი ფესვის ნიშნის ქვეშ.

ა) $2\sqrt[4]{3}$

ბ) $-3\sqrt[4]{2}$

გ) $a\sqrt[4]{3}, a > 0$

დ) $a\sqrt[4]{3}, a < 0$

ე) $c\sqrt[4]{\frac{2}{c}}$

ვ) $c\sqrt[4]{-\frac{2}{c}}$

7 > გაამარტივეთ:

ა) $\sqrt[3]{a^3 \sqrt[3]{a}}$

ბ) $\frac{\sqrt[5]{b^3 \sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b \sqrt{b}}}$

გ) $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b}}$

8 > გაამარტივეთ:

ა) $\frac{a^{\frac{1}{6}} + 5}{25 - a^{\frac{1}{3}}}$

ბ) $\frac{b - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}}{a - 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$

9 > ტოლობებისათვის განსაზღვრეთ შესაბამისობები.

1. $\sqrt[4]{a^4} = a$

2. $\sqrt[3]{a^3} = -a$

3. $\sqrt[6]{a^6} = |a|$

ა) a -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის მართებულია.

ბ) მართებულია, როცა $a \geq 0$.

გ) მართებულია, როცა $a = 0$.

10 > ამოხსენით განტოლებები:

ა) $0,5x^4 + 1 = 9$

ბ) $\sqrt[3]{2x - 4} = 1$

გ) $\sqrt[4]{3x + 4} = 1$

11 > თუ $a < 0$, გაამარტივეთ: $a^2 \cdot \sqrt{a^2} + \sqrt[3]{a^9} - 2\sqrt[4]{a^{12}}$

12 > თუ $\sqrt[8]{3} = a + 1$, მაშინ a -თი გამოსახეთ ნამრავლი $(\sqrt[8]{3} + 1) \cdot (\sqrt[4]{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$.

13 > ცვლადის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს გამოსახულებას აზრი?

ა) $\sqrt[8]{x - 3}$

ბ) $\sqrt[5]{x - 1}$

გ) $\sqrt[4]{2 - x}$

დ) $\sqrt[6]{-x}$

წრეწირი. ცენტრული კუთხე. წრეწირის რკალი

ცენტრული კუთხე. რკალის გრადუსული ზომა

წრეწირის რკალი. წრეწირზე აღებული ნებისმიერი ორი წერტილი მას ორ რკალად ყოფს: თუ ეს წერტილები დიამეტრის ბოლოები არაა, მაშინ დიდი რკალი (მაჟორული რკალი) და მცირე რკალი (მინორული რკალი). თუ წრეწირზე აღებული ორი წერტილი დიამეტრის წვეროს წერტილებია, მაშინ ორივე რკალი ნახევარწრეწირია.

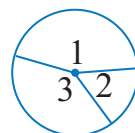
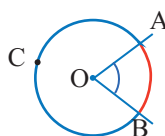
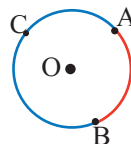
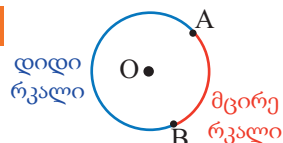
თუ C წერტილი AB რკალის რაიმე წერტილია,
 $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC + \sphericalangle CB$.

სურათზე O ცენტრიან წრეწირზე $\sphericalangle AB$ მცირე რკალი, $\sphericalangle ACB$ კი დიდი რკალია.

ცენტრული კუთხე. კუთხეს, რომლის წვეროც წრეწირის ცენტრში მდებარეობს ცენტრული კუთხე ეწოდება. წრეწირის რკალის მახასიათებელი სიდიდეებიდან ერთ-ერთი რკალის გრადუსული ზომაა.

რკალის გრადუსული ზომა შესაბამისი ცენტრული კუთხის გრადუსული ზომის ტოლია: $\sphericalangle AB = \angle AOB$

წრეწირის საერთო შიგა წერტილის არ მქონე ყველა ცენტრული კუთხის ჯამი 360° -ია. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$.

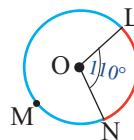


წრეწირის რკალები და მათი ზომები

რკალები	ზომები	
მინორული რკალი, მცირე რკალი	მინორული რკალის გრადუსული ზომა 180° -ზე ნაკლებია და შესაბამისი ცენტრული კუთხის გრადუსული ზომის ტოლია. $\sphericalangle AB = \angle AOB$	
მაჟორული რკალი, დიდი რკალი	მაჟორული რკალის გრადუსული ზომა 180° -ზე მეტია და მისი მნიშვნელობა 360° -ისა და შესაბამისი მინორული რკალის სხვაობის ტოლია. $\sphericalangle ADB = 360^\circ - \sphericalangle AOB$	
ნახევარწრეწირი	ნახევარწრეწირის გრადუსული ზომა 180° -ია. $\sphericalangle ADB = 180^\circ$	

მაგალიტი: $\sphericalangle LN$ მინორული რკალი: $\sphericalangle LN = 110^\circ$

$\sphericalangle LMN$ მაჟორული რკალი: $\sphericalangle LMN = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

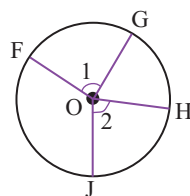


კონგრუენტული რკალები

წრეწირის რკალები, რომლებსაც ტოლი გრადუსული ზომები აქვთ კონგრუენტული რკალებია.

თუ, $\angle 1 \cong \angle 2$ მაშინ $\sphericalangle FG \cong \sphericalangle HJ$.

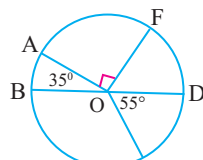
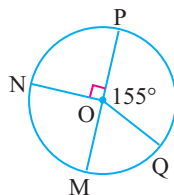
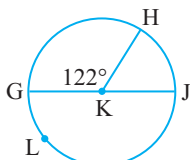
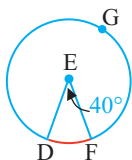
თუ, $\sphericalangle FG \cong \sphericalangle HJ$ მაშინ $\angle 1 \cong \angle 2$.



წრეწირი. ცენტრული კუთხე. წრეწირის რკალი

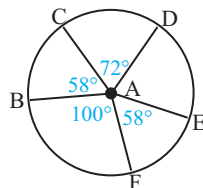
სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > სურათის მონაცემების მიხედვით დაწერეთ მინორული, მაჟორული რკალებისა და ნახევარწრეწირების სახელები, განსაზღვრეთ გრადუსული ზომები.

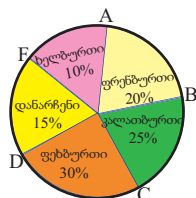


- 2 > განსაზღვრეთ რკალების გრადუსული ზომები. რომელი რკალებია კონგრუენტული?

1. BC და EF
2. BC და CD
3. CD და DE
4. BFE და CBF



- 3 > წრიული დიაგრამის მიხედვით იპოვეთ თითოეული ინფორმაციის შესაბამისი რკალის გრადუსული ზომა.



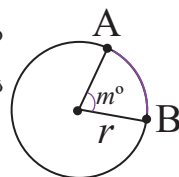
რკალის სიგრძე

ცენტრული კუთხე სრული კუთხის რა ნაწილიცაა, შესაბამისი რკალის სიგრძეც წრეწირის სიგრძის იგივე ნაწილია.

1° -იანი რკალის სიგრძე წრეწირის სიგრძის $\frac{1}{360}$ ნაწილია. m° -იანი

ცენტრული კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძე წრეწირის სიგრძის $\frac{m}{360}$ ნაწილს შეადგენს:

$$l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$$



რკალის სიგრძე სიგრძის საზომი ერთეულებით (მმ, სმ, მ და სხვ.) გამოისახება.

ნიმუში 1. იპოვეთ 72 სმ სიგრძის წრეწირის 45° -იანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძე.

ამოხსნა: 45° -იანი ცენტრული კუთხე მთელი კუთხის $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ ნაწილია. შესაბამისი

რკალის სიგრძე წრეწირის სიგრძის $\frac{1}{8}$ -ის ტოლია: $l = \frac{1}{8} \cdot 72 = 9$ (სმ)

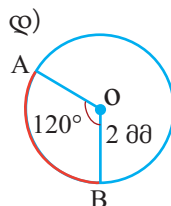
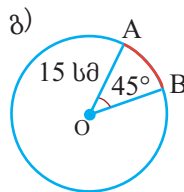
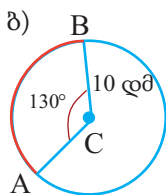
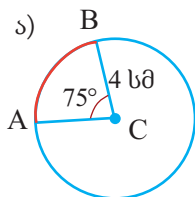
ნიმუში 2. გამოთვალეთ 15 სმ რადიუსიანი წრეწირის 72° -იანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძე.

ამოხსნა: $m = 72$, $r = 15$ მნიშვნელობები შევიტანოთ რკალის სიგრძის ფორმულაში:

$$l = \frac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 6\pi \approx 18,85 \text{ (სმ)}$$

წრწირო. ცენტრული კუთხე. წრწირის რკალი

- 4 > იპოვეთ სურათზე მოცემული ცენტრული კუთხის შესაბამისი AB რკალის სიგრძე. შედეგი დაამრგვალეთ მეასედებამდე.



- 5 > წრწირის რადიუსისა და ცენტრული კუთხის მიხედვით იპოვეთ რკალის l სიგრძე. პასუხი დაამრგვალეთ მეასედებამდე.

ა) $r = 3$ სმ, $m = 45^\circ$

ბ) $r = 7$ მ, $m = 80^\circ$

გ) $r = 8$ მ, $m = 120^\circ$

- 6 > საათის წუთების ისრის სიგრძე 20 სმ-ია. 12:00 საათიდან 12:30-მდე ამ საათის წუთების ისარის წვერო რამდენი სანტიმეტრი სიგრძის რკალს შემოწერს?



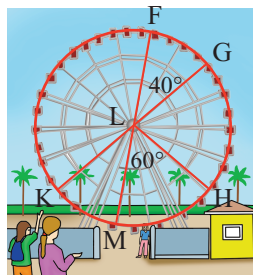
- 7 > სათესი ფართობი სხვადასხვა მცენარეების მოყვანი-სათვის ტოლ ნაწილებადა დაყოფილი.

ა) წრიული დიაგრამის მიხედვით იპოვეთ ლობიოს, წიწკისა და პომიდორის სათესი ნაწილების შესაბამისი წრწირის რკალის გრადუსული ზომა.

ბ) თუ დიამეტრი 120 ერთეული იქნება, იპოვეთ შესაბამისი წრწირში თითოეული ნაწილის შესაბამისი რკალის სიგრძე.



- 8 > FM არის კარუსელის დიამეტრი და 30 მ-ის ტოლია. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ რკალების სიგრძეები.



1) $\sim FG$

5) $\sim FKH$

2) $\sim MF$

6) $\sim GHM$

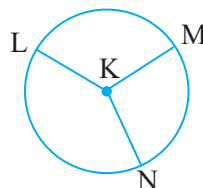
3) $\sim GH$

7) $\sim MKG$

4) $\sim MH$

8) $\sim HGF$

- 9 > 5 სმ რადიუსიანი წრწირი L, M და N წერტილებით 5:3:4 რკალებადა დაყოფილი. იპოვეთ ამ რკალების: ა) გრადუსული ზომები; ბ) სიგრძეები.



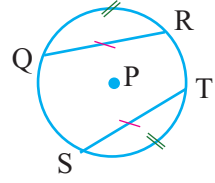
წრეწირი. ქორდა

თეორემა კონგრუენტული ქორდების შესახებ

თეორემა 1. წრეწირის კონგრუენტული რკალების მომჭიმავი ქორდები კონგრუენტულია.

შებრუნებული თეორემა 1. წრეწირის კონგრუენტული ქორდებით მოჭიმული რკალები კონგრუენტულია.

1) თუ $\neg QR \cong \neg ST$, მაშინ $QR \cong ST$ 2) თუ $QR \cong ST$, მაშინ $\neg QR \cong \neg ST$

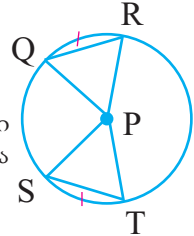


სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > გამოიკვლიეთ თეორემა 1-ის დამტკიცება. რვეულში შესაბამისი წერტილების სხვა ასოებით აღნიშვნით, თეორემის დამტკიცება ჩაწერეთ ხელახლა.

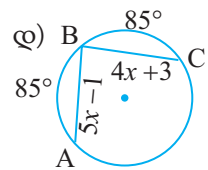
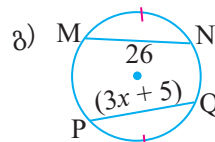
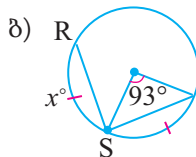
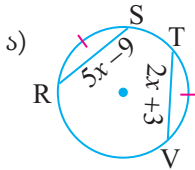
თეორემა 1-ის დამტკიცება: თუ $\neg QR \cong \neg ST$, მაშინ $QR \cong ST$

პირობა	საფუძველი
1. $\neg QR \cong \neg ST$	1. მოცემულია
2. $\angle QPR \cong \angle SPT$	2. კონგრუენტული რკალების შესაბამისი ცენტრული კუთხეები კონგრუენტულია
3. $QP \cong RP \cong SP \cong TP$	3. წრეწირის რადიუსებია
4. $\triangle QPR \cong \triangle SPT$	4. ზპზ ნიშნის თანახმად
5. $QR \cong ST$	5. კონგრუენტული სამკუთხედების შესაბამისი გვერდებია.

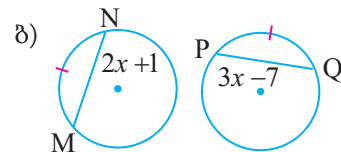
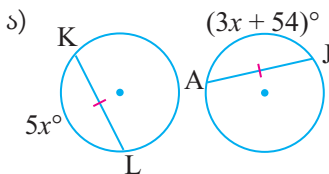


- 2 > ანალოგიური წესით დაამტკიცეთ შებრუნებული თეორემა 1.

- 3 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x ცვლადი.



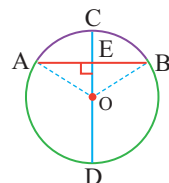
- 4 > იპოვეთ x ცვლადი, თუ ცნობილია მოცემული წრეწირების კონგრუენტულობა.



თეორემა ქორდის შუა მართობის შესახებ

თეორემა 2. ქორდის მართობული დიამეტრი ამ ქორდას და შესაბამის რკალს შუაზე ჰყოფს.

თუ $CD \perp AB$, მაშინ $AE \cong EB$ და $\neg AC \cong \neg CB$



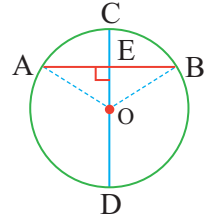
წრეწირი. ქორდა

თეორემა 2-ის დამტკიცება.

მოცემულია: O ცენტრიანი წრეწირი, $CD \perp AB$

დაამტკიცეთ: $AE \cong EB$, $\angle AOC \cong \angle BOC$,

გაავლეთ წრეწირის OA და OB რადიუსები.



პირობა	საფუძველი
1. $AB \perp CD$	1. მოცემულია
2. $\angle AEO$ და $\angle BEO$ მართი კუთხეებია.	2. მართობული წრფეები მართი კუთხით იკვეთებიან.
3. $OA \cong OB$	3. წრეწირის რადიუსები კონგრუენტულია.
4. $\triangle AOE \cong \triangle BOE$	4. მართკუთხა სამკუთხედების კონგრუენტულობა ჰიპოტენუზისა და კათეტის მიხედვით.
5. $AE \cong BE$	5. კონგრუენტული სამკუთხედების შესაბამისი გვერდები.
6. $\angle AOE \cong \angle BOE$	6. კონგრუენტული სამკუთხედების შესაბამისი კუთხეები.
7. $\angle AOC \cong \angle BOC$	7. კონგრუენტული ცენტრული კუთხეების შესაბამისი რკალები კონგრუენტულია.

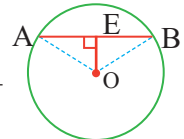
დასკვნა 1. წრეწირის ცენტრზე გამავალი და ქორდის მართობული წრფე ქორდასა და ქორდის შესაბამის რკალს შუაზე ყოფს.

დასკვნა 2. წრეწირის ცენტრი ქორდის შუა მართობულ მდებარეობს. ქორდის შუამართობი წრეწირის ცენტრზე გადის.

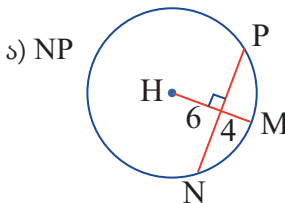
ნიმუში: წრეწირის რადიუსი 17 ერთეულია. იპოვეთ მანძილი

ცენტრიდან 30 ერთეული სიგრძის მქონე ქორდამდე.

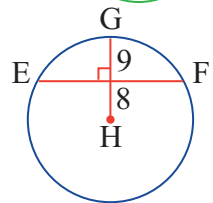
ამოხსნა: თუ $OE \perp AB$, მაშინ $AE = EB = 30 : 2 = 15$. $\triangle AOE$ -დან პითაგორას თეორემის თანახმად $OE^2 = OA^2 - AE^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, $OE = 8$



- 5 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ H ცენტრიანი წრეწირის ქორდის სიგრძე.

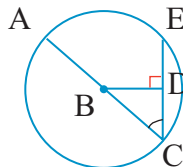


ბ) EF

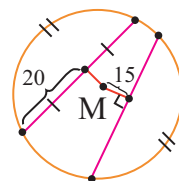


- 6 > B ცენტრიანი წრეწირის დიამეტრი 30 ერთეულია. $\angle ACE = 45^\circ$ იპოვეთ:

- ა) BD მონაკვეთის სიგრძე;
 ბ) DC მონაკვეთის სიგრძე;
 გ) CE ქორდის სიგრძე.



- 7 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ წრეწირის რადიუსი. M წერტილი წრეწირის ცენტრია.



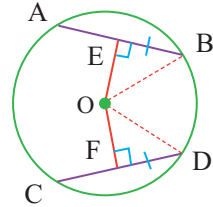
წრეწირი. ქორდა

თეორემა ცენტრიდან ტოლ მანძილზე არსებული ქორდების შესახებ

თეორემა 3. წრეწირის კონგრუენტული ქორდები ცენტრიდან ერთი და იგივე მანძილზე მდებარეობენ.

თუ $AB \cong CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, მაშინ $OE \cong OF$

შებრუნებული თეორემა 3. წრეწირის ცენტრიდან ერთი და იგივე მანძილზე მდებარე ქორდები კონგრუენტულია.

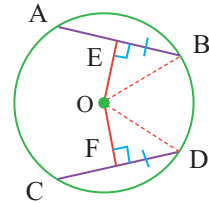


თეორემა 3-ის დამტკიცება.

მოცემულია: O ცენტრიანი წრეწირი, $AB \cong CD$

$OE \perp AB$ $OF \perp CD$

დაამტკიცეთ: $OE \cong OF$



(ტექსტი) დამტკიცება: წრეწირის ცენტრზე გამავალი და ქორდის მართობული წრფე ქორდასა და მის მომჭიმავ რკალს შუაზე ყოფს. OE და OF კონგრუენტული AB და CD ქორდების შუამართობია. ვინაიდან კონგრუენტული ფიგურების ნახევრებია. $EB \cong FD$. გავავლოთ წრეწირის OB და OD რადიუსები: $OB \cong OD$ ჰიპოტენუსისა და კათეტის მიხედვით $\triangle OEB$ და $\triangle OFD$ მართკუთხა სამკუთხედები კონგრუენტულია. ვინაიდან OE და OF ამ კონგრუენტული სამკუთხედების შესაბამისი გვერდებია: $OE \cong OF$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამოცანა. AD და BC ქორდები ცენტრიდან ტოლ მანძილზეა $OE = OF = 9$.

იპოვეთ AD და BC, თუ წრეწირის რადიუსი 41 ერთეულია.

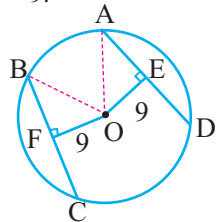
ამოხსნა: ვინაიდან AD და BC ქორდები ცენტრიდან თანაბარ მანძილზეა კონგრუენტულეობა: $AD \cong BC$.

$OE \perp AD$ და $OF \perp BC$. A და B წერტილები შევავერთოთ O წერტილთან.

$\triangle AEO$ მართკუთხა სამკუთხედში: $AE^2 + OE^2 = OA^2$

$AE^2 + 9^2 = 41^2$; $AE^2 = 1600$; $AE = 40$; $AD = 2 \cdot AE = 2 \cdot 40 = 80$

$AD \cong BC$ ამიტომ $BC = 80$.

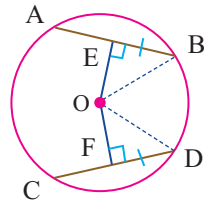


8 > დაამტკიცეთ შებრუნებული თეორემა 3.

მოცემულია: წრეწირი O ცენტრით, $OE \cong OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$

დაამტკიცეთ: $AB \cong CD$.

დამტკიცების გეგმა: გამოიყენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობა.

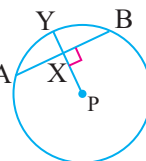


9 > P ცენტრიან წრეწირში მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილები.

ა) **მოცემულია:** $PY = 13$

$AB = 10$

იპოვეთ: $BX = ?$; $PX = ?$

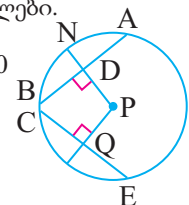


ბ) **მოცემულია:** $PD = 10$

$PQ = 10$

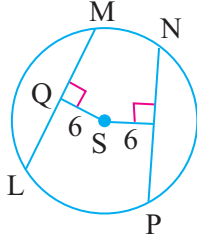
$QE = 24$

იპოვეთ: $AB = ?$, $PN = ?$

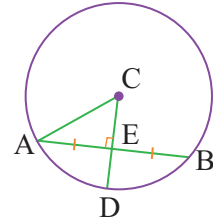


წრეწირი. ქორდა

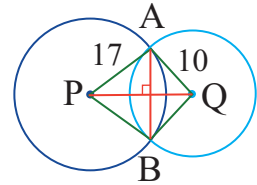
- 10 > ა) მოცემულია: წრეწირი, რომლის ცენტრია S:
 $LM = x + 8$ და $PN = 2x$
 იპოვეთ: წრეწირის რადიუსი



- ბ) მოცემულია: C წრეწირის ცენტრია. წრეწირში $CD \perp AB$
 $AB = 8$ სმ, $CD = 5$ სმ
 იპოვეთ: $CE = ?$



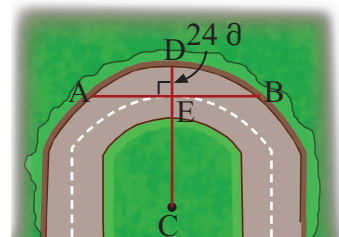
- 11 > AB მონაკვეთი წრეწირების P და Q ცენტრების შემართებული მონაკვეთის მართობულია. იპოვეთ PQ, თუ $AP = 17$, $AQ = 10$ და $AB = 16$ ერთეულს.



- 12 > **ღია ტიპის შეკითხვა.** 1) გაავლეთ წრეწირის არატოლი ორი ქორდა და მათი შუამართობები. რომელი ქორდაა ცენტრთან უფრო ახლოს: გრძელი ქორდა თუ მოკლე ქორდა?
 2) დახაზეთ სხვადასხვარადიუსიანი ორი წრეწირი. თითოეულ წრეწირში გაავლეთ ისეთი ქორდა, რომ მათი სიგრძეები ტოლი იყოს. უჩვენეთ ამ ქორდების მომჭიმავი მინორული რკალების შესაბამისი ცენტრული კუთხეები. რომელი ცენტრული კუთხეა უფრო მეტი? განმარტეთ მოსაზრება.

- 13 > 5 სმ რადიუსიან წრეწირში იპოვეთ ორ პარალელურ 6 სმ და 8 სმ სიგრძის ქორდებს შორის მანძილი. რამდენი შემთხვევაა შესაძლებელი?

- 14 > გზის მრუდწირული ნაწილი C წერტილში ცენტრის მქონე და 120 მ რადიუსიანი წრეწირის ნაწილია. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ DE-ს სიგრძე 24 მ-ია.



- 15 > ამოხსენით ამოცანები შესაბამისი სურათების დახაზვით.

ა) წრეწირის დიამეტრი 30 სმ-ია, ქორდის სიგრძე კი 18 სმ. რას უდრის მანძილი წრეწირის ცენტრსა და ქორდას შორის?

ბ) წრეწირში 12 სმ სიგრძის ქორდა ცენტრიდან 8 სმ მანძილზეა. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

გ) წრეწირის დიამეტრი 52 სმ-ია. ქორდის ცენტრიდან დაშორება 10 სმ-ია. იპოვეთ ქორდის სიგრძე.

წრეწირში ჩახაზული კუთხე

კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ხოლო გვერდები ამ წრეწირს გადაკვეთს წრეწირში ჩახაზული კუთხე ეწოდება. წრეწირში ჩახაზული კუთხით შემოსაზღვრულ რკალს, ამ კუთხის საყრდენი რკალი ეწოდება.

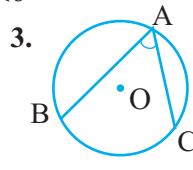
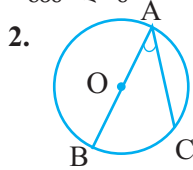
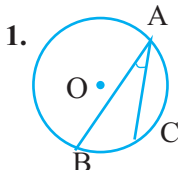
სურათზე $\angle BAC$ არის O ცენტრიან წრეწირში ჩახაზული კუთხე, BC რკალი კი ამ კუთხის საყრდენი რკალია.

ქვემოთ გამოსახულია წრეწირში ჩახაზული სამი სხვადასხვა კუთხე.

წრეწირის ცენტრი ჩახაზული კუთხის გარეთაა.

წრეწირის ცენტრი წრეწირში ჩახაზული კუთხის გვერდზეა.

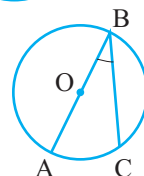
წრეწირის ცენტრი ჩახაზული კუთხის გვერდებს შორისაა.



წრეწირში ჩახაზული კუთხე

თეორემა 1. წრეწირში ჩახაზული კუთხის გრადუსული ზომა ზომა საყრდენი რკალის გრადუსული ზომის ნახევრის ტოლია:

$$\angle ABC = \frac{\text{რკალი } AC}{2}$$

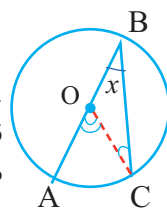


დამტკიცება (ტექსტი): OB და OC წრეწირის რადიუსებია და $\triangle BOC$ ტოლფერდა სამკუთხედი, მაშასადამე $\angle B = \angle C$.

რადგან $\angle AOC$ არის $\triangle BOC$ -ს გარე კუთხე, ამიტომ $\angle AOC = \angle B + \angle C$.

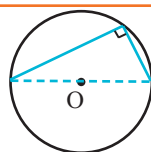
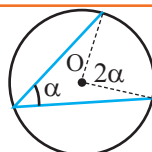
თუ მივიღებთ, რომ $\angle B = \angle C = x$, მაშინ $\angle AOC = 2x$. ვინაიდან ცენტრული კუთხისა და საყრდენი რკალის გრადუსული ზომები ტოლია $\text{რკალი } AC = \angle AOC = 2x$. საიდანაც $\angle ABC = \frac{\text{რკალი } AC}{2}$.

დაწერეთ თეორემის დამტკიცება ორსვეტიანი ცხრილის სახით.



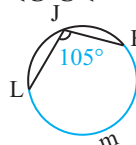
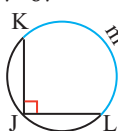
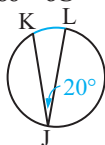
დასკვნა 1. წრეწირში ჩახაზული კუთხე შესაბამისი ცენტრული კუთხის ნახევრის ტოლია.

დასკვნა 2. დიამეტრზე (ნახევარწრეზე) დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე მართი კუთხეა.

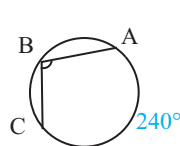
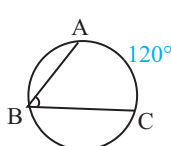
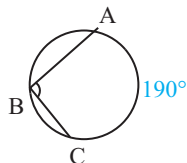


სასწავლო დაფალებები

1 > იპოვეთ კუთხის საყრდენი წრეწირის რკალის გრადუსული ზომა.



2 > მოცემული წრეწირის რკალის მიხედვით იპოვეთ ჩახაზული კუთხის გრადუსული ზომა.

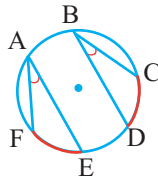
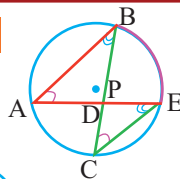


წრეწირში ჩახაზული კუთხე

წრეწირში ჩახაზული კონგრუენტული კუთხეები

დასკვნა 3. ერთი და იგივე რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეები კონგრუენტულია. $\angle EAB \cong \angle BCE$, $\angle ABC \cong \angle AEC$.

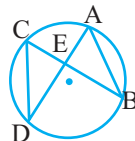
დასკვნა 4. კონგრუენტული საყრდენი რკალების მქონე ჩახაზული კუთხეები კონგრუენტულია. თუ $\sim FE \cong \sim CD$, მაშინ $\angle FAE \cong \angle DBC$



3 > მოცემულია: $CD \cong AB$

დაამტკიცეთ: $\triangle CDE \cong \triangle ABE$

დამტკიცების გეგმა: გამოიყენეთ სამკუთხედების კონგრუენტულობის თვისება ორი კუთხისა და ერთი გვერდის (მზმ) მიხედვით.

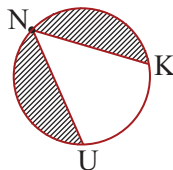
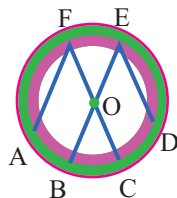


4 > 1) კომერციული ნიშნებისათვის ხშირ შემთხვევაში წრიული სახის ლოგოები გამოიყენება. სურათზე ორი ჩახაზული კუთხისა და ცენტრული კუთხის დიზაინიანი ლოგოა გამოსახული. ა) დაწერეთ ამ კუთხეების სახელები.

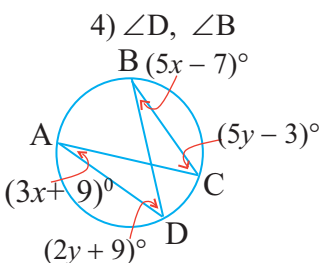
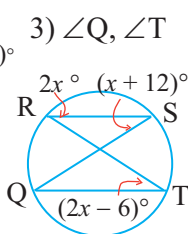
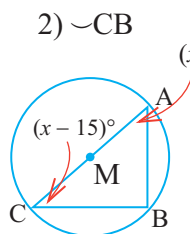
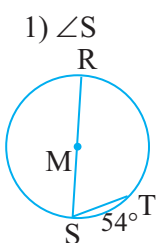
ბ) $\sim AC \cong \sim BD$, $\sim AF = 90^\circ$, $\sim FE = 45^\circ$, $\sim ED = 90^\circ$ პირობებში იპოვეთ $\angle AFC$ და $\angle BED$.

2) თუ სურათზე მოცემულ ლოგოზე $\sim NK \cong \sim NU$, $\sim NK = 130^\circ$ მაშინ იპოვეთ $\angle KNU$.

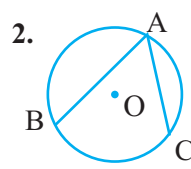
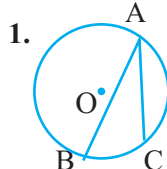
3) თქვენც შექმენით ერთი ლოგოს დიზაინი.



5 > იპოვეთ სურათზე მონაცემების მიხედვით (M წრეწირის ცენტრია).



6 > თეორემა 1-ის დამტკიცება მე-2 შემთხვევისათვის გვერდი 35-ზეა მოცემული. დაამტკიცეთ ეს თეორემა ჩახაზული კუთხის 1-ლი და მე-3 მდგომარეობისათვისაც.



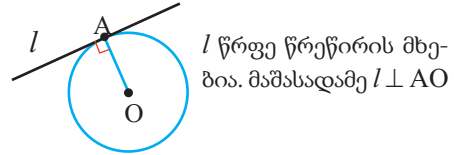
7 > წრეწირი ოთხი წერტილით 3:4:5:6 თანაფარდობითაა დაყოფილი. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის კუთხეები, რომლის წვეროებიც მოცემულ წერტილებშია.

წრეწირის მხები

წრეწირის მხები. მხების თვისება

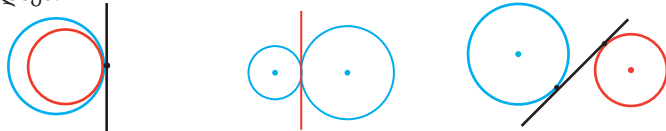
წრფეს, რომელსაც წრეწირთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს წრეწირის მხები ეწოდება.

თეორემა 1. წრეწირის მხები წრფე (მონაკვეთი) შეხების წერტილში გავლებული რადიუსის პერპენდიკულარულია.

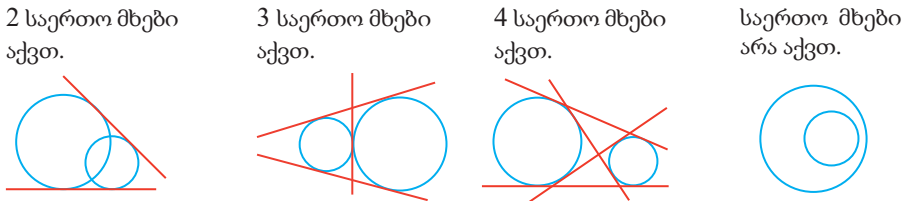


შებრუნებული თეორემა (მხების თვისება): წრფეს, რომელიც წრეწირის წერტილზე ამ წერტილში გავლებული რადიუსის მართობულად გადის წრეწირის მხებია.

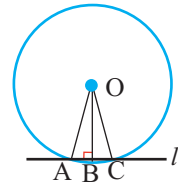
წრფეს, რომელიც ორივე წრეწირს ეხება წრეწირების საერთო მხები ეწოდება. წრეწირებს, როგორც შიგა შეხებისას, ისე გარე შეხებისას ერთ წერტილში შეიძლება ერთი და იგივე მხები ჰქონდეს. ამასთან შეიძლება ერთი და იგივე მხებს სხვადასხვა წერტილებში ეხებოდნენ.



ორ წრეწირს შეიძლება რამდენიმე საერთო მხებიც ჰქონდეს ან არცერთი საერთო მხები არ ჰქონდეს.

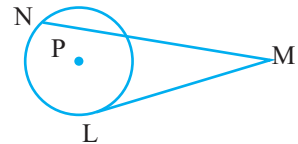


თეორემა 1-ის დამტკიცება: თუ l წრფე წრეწირის მხებია, მაშასადამე წრეწირთან ერთი საერთო წერტილი აქვს. წარმოვიდგინოთ, რომ l წრფე A წერტილში გავლებული OA რადიუსის მართობული არაა. გავავლოთ $OB \perp l$ და l წრფეზე გამოვყოთ $AB=BC$. მაშინ რადგან $\triangle AOB \cong \triangle COB$, ამიტომ $OC = OA = r$. მაშასადამე C წერტილიც წრეწირზეა. ანუ l წრფეს წრეწირთან ორი საერთო წერტილი აქვს. ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას. მაშასადამე $l \perp OA$.

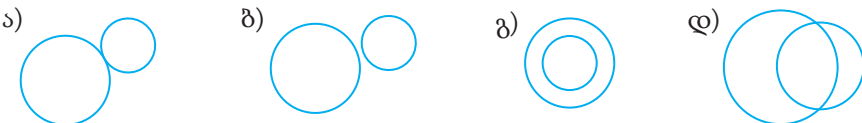


სახსრავლო დავალებები

- 1 > სურათის მიხედვით განმარტეთ: რატომ არ შეიძლება MN -ს ეწოდოს P ცენტრიანი წრეწირის მხები, ხოლო ML -ს ეწოდოს მხები?

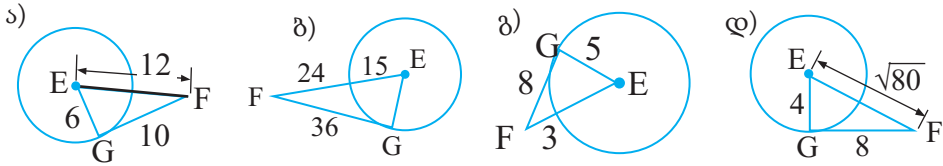


- 2 > რეკულში ჩაიხაზეთ სურათზე მოცემული წრეწირები და მათი საერთო მხებები. აღნიშნეთ ისინი, რომლებსაც საერთო მხები არ აქვთ.

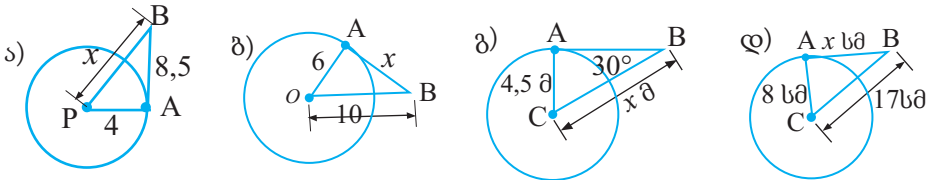


წრეწირის მხები

- 3 > რომელ სურათზე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ GF მონაკვეთი არის წრეწირის მხები?
ამ კითხვაზე პასუხის გაცემისათვის დაწერეთ პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა და გამოიყენეთ ამოცანის ამოხსნისას. E წერტილი წრეწირის ცენტრია.

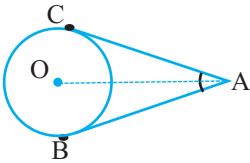


- 4 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x , თუ ცნობილია, რომ AB არის წრეწირის მხები.



ერთი და იგივე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხებების თვისება

თეორემა 2. ერთი და იგივე წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული ორი მხების შეხების წერტილამდე არსებული მონაკვეთები კონგრუენტულია და წრეწირის ცენტრი მხებებით შექმნილი კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობს.



AB და AC, O ცენტრიან წრეწირისადმი A წერტილიდან გავლებული მხებებია.

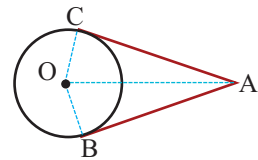
$AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

- 5 > დაამტკიცეთ თეორემა 2.

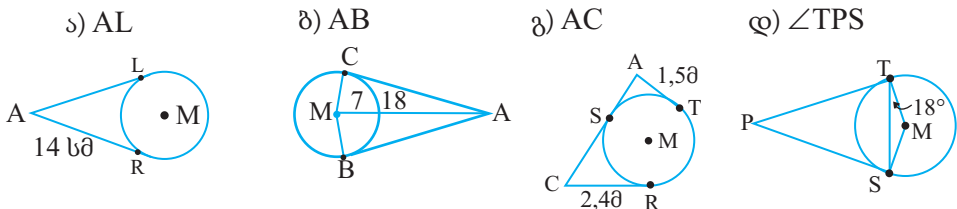
მოცემულია: AB და AC, A წერტილიდან O ცენტრიან წრეწირისადმი გავლებული მხებების შეხების წერტილამდე არსებული მონაკვეთებია.

დაამტკიცეთ: $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

დამტკიცების გეგმა: დახაზეთ წრეწირის OB და OC რადიუსები და AO მონაკვეთი. გამოიყენეთ შესაბამისი სამკუთხედების კონგრუენტულობა.



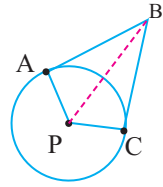
- 6 > სურათზე წრეწირის გარეთ მდებარე წერტილიდან, რომლის ცენტრია M, წრეწირის მიმართ მხებებია გავლებული. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ



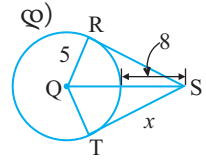
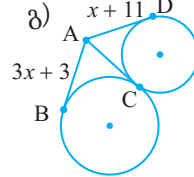
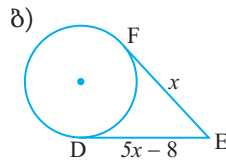
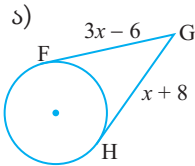
წრეწირის მხეხი

- 7 > B წერტილიდან P ცენტრის მქონე წრეწირისადმი მხეხები გაკლებული. დაწერეთ მოცემული პირობებიდან თითოეული რის საფუძველზე ითვლება მართებულიად.

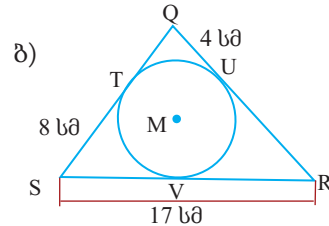
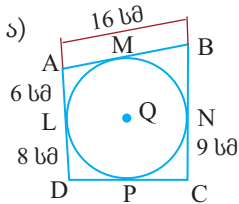
ა) $BA \cong BC$ ბ) $PA \cong PC$ გ) $\triangle PAB \cong \triangle PCB$



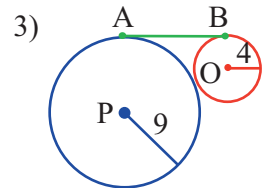
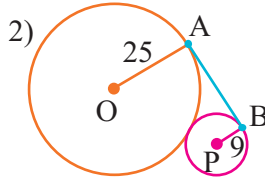
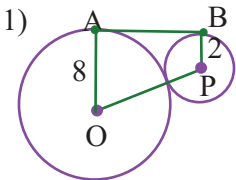
- 8 > წრეწირის გარეთ აღებული წერტილიდან წრეწირის მიმართ მხეხები გაკლებული. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადი.



- 9 > სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მრავალკუთხედების გვერდების სიგრძეები და პერიმეტრი.

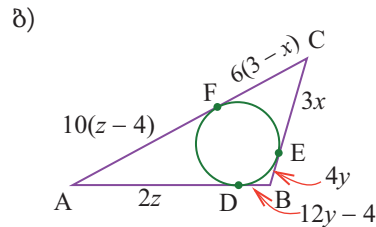
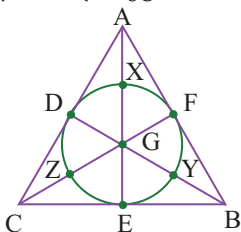


- 10 > AB არის O და P ცენტრების მქონე წრეწირების გარე შეხების საერთო მხეხია. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე.

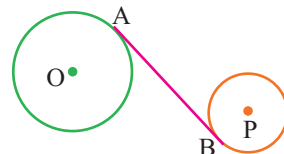


- 11 > მოცემული ინფორმაციების მიხედვით იპოვეთ $\triangle ABC$ -ს პერიმეტრი.

ა) $BY = CZ = AX = 2,5$
წრეწირის დიამეტრი $EX = 5$

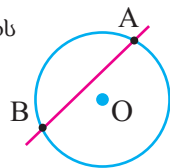


- 12 > AB არის O და P ცენტრების მქონე წრეწირების მხეხი. წრეწირების რადიუსები შესაბამისად 15 სმ და 12 სმ-ია. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ $OP = 36$ სმ.



მკვეთითა და მხეხებით შედგენილი კუთხეები

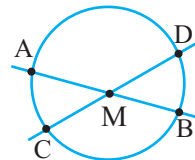
წრფეს, რომელსაც წრეწირთან ორი საერთო წერტილი აქვს წრეწირის მკვეთი ეწოდება. სურათზე AB წრფე წრეწირის მკვეთია.



ორ მკვეთს შორის არსებული კუთხეები

კუთხის წვერო წრეწირის შიგნით მდებარეობს

თეორემა 1. თუ წრეწირის მკვეთი ორი წრფით შედგენილი კუთხის წვერო წრეწირშია, მისი გრადუსული ზომა ამ კუთხის საყრდენი რკალისა და მისი ვერტიკალური კუთხის საყრდენი რკალის გრადუსული ზომების ჯამის ნახევრის ტოლია:



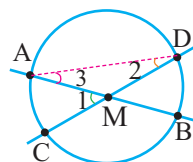
$$\angle AMC = \frac{\text{რკალი } AC + \text{რკალი } DB}{2}$$

$$\angle AMD = \frac{\text{რკალი } AD + \text{რკალი } BC}{2}$$

1 > თეორემის დამტკიცება რვეულში დაასრულეთ.

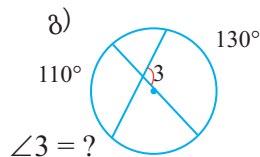
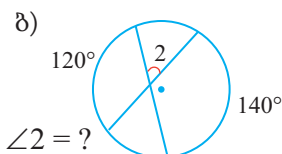
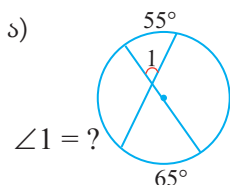
მოცემულია: AB და CD წრეწირის მკვეთებია.

დაამტკიცეთ: $\angle 1 = \frac{\text{რკალი } AC + \text{რკალი } DB}{2}$



პირობა	საფუძველი
1. $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	1. $\angle 1$ $\triangle AMD$ -ის _____ კუთხეა
2. $\angle 2 = \frac{\text{რკალი } AC}{2}$	2. _____
3. $\angle 3 = \frac{\text{რკალი } DB}{2}$	3. _____
4. $\angle 1 = \frac{\text{რკალი } AC + \text{რკალი } DB}{2}$	4. _____

2 > სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილები.



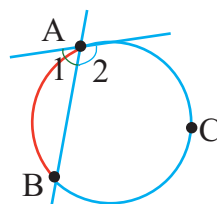
კუთხეები მხეხსა და მკვეთს შორის

კუთხის წვერო წრეწირზე მდებარეობს

თეორემა 2. თუ წრეწირის მხეხითა და მკვეთით შექმნილი კუთხის წვერო წრეწირზე იქნება, მისი გრადუსული ზომა ამ კუთხის საყრდენი რკალის გრადუსული ზომის ნახევრის ტოლია:

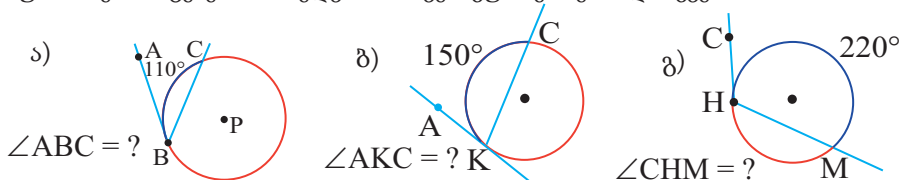
$$\angle 1 = \frac{\text{რკალი } AB}{2}$$

$$\angle 2 = \frac{\text{რკალი } ACB}{2}$$



მკვეთითა და მხეებით შედგენილი კუთხეები

3 > სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ კუთხე მხეებსა და მკვეთს შორის.



მკვეთითა და მხეებით შედგენილი კუთხეები

კუთხის წვერო წრეწირის გარეთ მდებარეობს

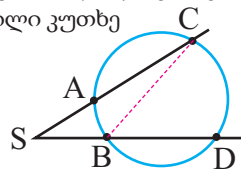
თეორემა 3. წრეწირის მკვეთითა და მხეებით, ორი მხეებით ან ორი მკვეთით შედგენილი კუთხის (თუ წვერო წრეწირის გარეთ მდებარეობს) გრადუსული ზომა კუთხის გვერდებს შორის დარჩენილი რკალების გრადუსული ზომების სხვაობის ნახევრის ტოლია.

1. მხეებითა და მკვეთით შედგენილი კუთხე	2. ორი მხეებით შედგენილი კუთხე	3. ორი მკვეთით შედგენილი კუთხე
 $\angle S = \frac{\text{arc } BC - \text{arc } AB}{2}$	 $\angle S = \frac{\text{arc } AD - \text{arc } AB}{2}$	 $\angle S = \frac{\text{arc } CD - \text{arc } AB}{2}$

4 > დაასრულეთ თეორემა 3-ის დამტკიცება მე-3 შემთხვევისათვის. 1-ლი და მე-2 შემთხვევისათვის თვითონ დაწერეთ. 3) ორი მკვეთით შედგენილი კუთხე

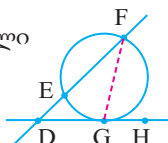
მოცემულია: SC და SD წრეწირის მკვეთებია.

დაამტკიცეთ: $\angle S = \frac{1}{2}(\text{arc } CD - \text{arc } AB)$

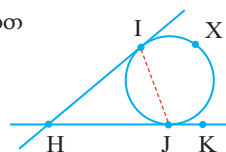


პირობა	საფუძველი
1. $\angle CBD = \angle CSB + \angle SCB$	1. $\angle CBD \triangle SBC$ -ის გარე კუთხეა.
2. $\angle CBD = \frac{1}{2} \text{arc } CD$	2. _____
3. $\angle SCB = \frac{1}{2} \text{arc } AB$	3. _____
4. $\angle CSB = \angle CBD - \angle SCB$	4. _____
5. $\angle CSB = \frac{1}{2} \text{arc } CD - \frac{1}{2} \text{arc } AB$	5. _____

1) მკვეთითა და მხეებით შედგენილი კუთხე

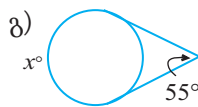
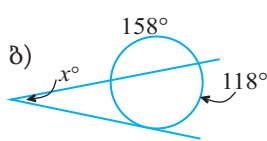
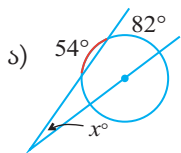


2) ორი მხეებით შედგენილი კუთხე

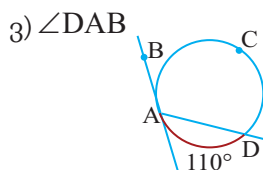
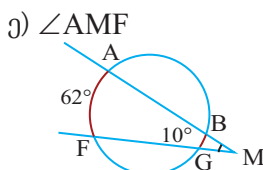
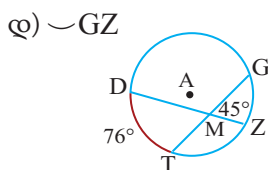
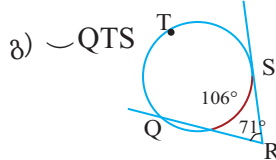
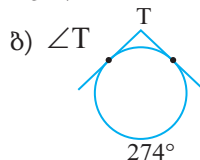
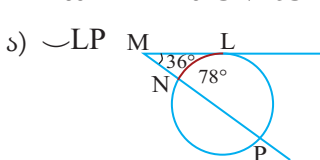


მკვეთითა და მხეხებით შედგენილი კუთხეები

- 5 > იპოვეთ x -ით აღნიშნული კუთხე ან რკალი.

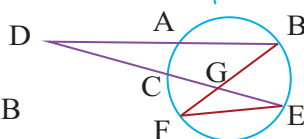


- 6 > იპოვეთ მითითებული კუთხე ან რკალი.

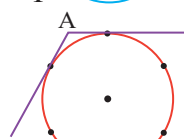


- 7 > მოცემულია: $\angle AB = 108^\circ$, $\angle FE = 118^\circ$,
 $\angle EGB = 52^\circ$, $\angle EFB = 30^\circ$

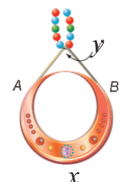
იპოვეთ: ა) $\angle AC$ ბ) $\angle CF$ გ) $\angle EDB$



- 8 > ქალაქში 6 ფოსტის შენობა ცენტრალური ფოსტიდან და მეზობელი ფოსტიდან ერთი და იგივე მანძილზე წრიული ფორმითაა განლაგებული. ნერმინი A წერტილშია და აქედან მხოლოდ ორ ფოსტის შენობას ხედავს. იპოვეთ A კუთხის გრადუსული ზომა.



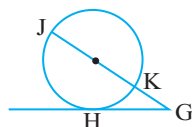
- 9 > წრიული ფორმის მედალიონის ძაფები შესაბამისი წრეწირის მხეხებია. x -ით აღნიშნული რკალი 220° -ია. იპოვეთ ძაფებით შექმნილი კუთხის გრადუსული ზომა.



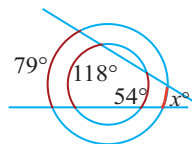
- 10 > 1) JK წრეწირის დიამეტრი, GH კი მხეხია.

ა) განმარტეთ $\angle G$ მნიშვნელობის ცვლილების ინტერვალი.

ბ) თუ $\angle G = 32^\circ$, იპოვეთ $\angle HK$ და $\angle HJ$.

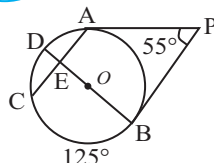


2) სურათზე კონცენტრული წრეწირებია გამოსახული. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ x .



- 11 > მოცემულია: PA და PB მხეხები, BD დიამეტრი.
 $\angle APB = 55^\circ$, $\angle CB = 125^\circ$

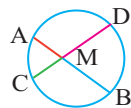
იპოვეთ: ა) $\angle AB$ ბ) $\angle DEC$ გ) $\angle AD$ დ) $\angle PBD$ ე) $\angle PAC$



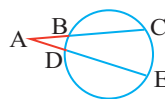
წრეწირის მკვეთი მონაკვეთები

წრეწირის მკვეთი მონაკვეთების სიგრძეები

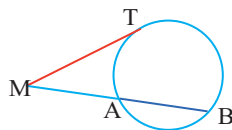
თეორემა 1. თუ წრეწირის ორი ქორდა იკვეთება, გადაკვეთის წერტილით პირველი ქორდის მონაკვეთების ნამრავლი, მეორე ქორდის მონაკვეთების ნამრავლის ტოლია. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



თეორემა 2. თუ A წერტილიდან წრეწირის შესაბამისად B, C და D, E წერტილებზე ორ მკვეთ წრფეს გავავლებთ, მაშინ მართებულია ტოლობა: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$.

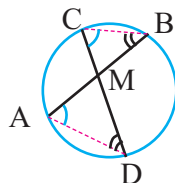


თეორემა 3. თუ M წერტილიდან გავლებულია A და B წერტილებზე გამავალი მკვეთი და T წერტილზე გამავალი მხები, მაშინ მართებულია ტოლობა: $MT^2 = MA \cdot MB$.



1 > დაასრულეთ თეორემა 1-ის დამტკიცება.

პირობა	საფუძველი
1. $\angle A \cong \angle C$	1. იგივე რკალი _____
2. $\angle D \cong \angle B$	2. იგივე _____
3. $\triangle AMD \sim \triangle CMB$	3. _____
4. $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$	4. _____
5. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$	5. _____

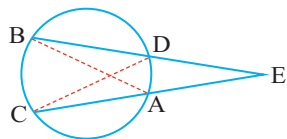


2 > დაამტკიცეთ თეორემა 2.

მოცემულია: EB და EC მკვეთები.

დაამტკიცეთ: $EB \cdot ED = EC \cdot EA$

დამტკიცების გეგმა: $\triangle ABE$ და $\triangle DCE$ -ს მსგავსებით ისარგებლეთ.

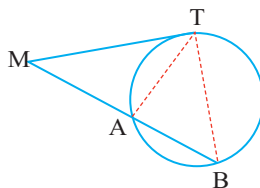


3 > დაამტკიცეთ თეორემა 3.

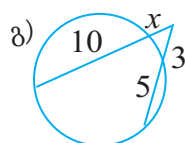
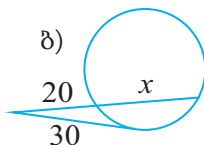
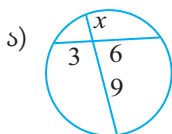
მოცემულია: მოცემულია MT მხებია, MB კი წრეწირის მკვეთია.

დაამტკიცეთ: $MT^2 = MA \cdot MB$

დამტკიცების გეგმა: $\triangle MTA$ და $\triangle MBT$ -ს მსგავსებით ისარგებლეთ.



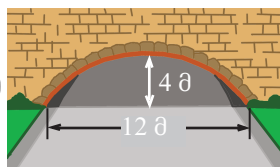
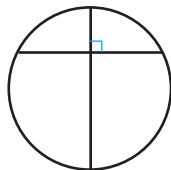
4 > იპოვეთ x სურათის მონაცემების მიხედვით.



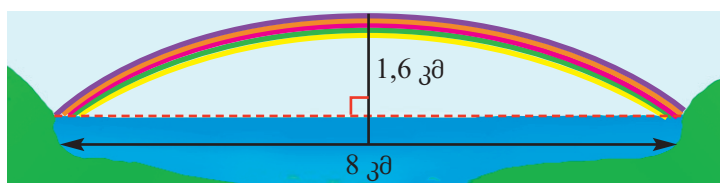
წრეწირის მკვეთი მონაკვეთები

- 5 > გვირგვინის გეგმაზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ რკალისებრი ნაწილის შესაბამისი წრეწირის რადიუსი.

მითითება: შესაბამისი სქემატურ გამოსახულებაზე დაწერეთ ზომები და ამოხსენით.



- 6 > ცისარტყელა სინამდვილეში ერთი სრული წრეწირია. ჩვენ კი მის მხოლოდ ერთ ნაწილს, რკალს ვხედავთ. სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ:
- ცისარტყელის რკალის შესაბამისი წრეწირის რადიუსი;
 - ცისარტყელის წრეწირის სიგრძე.

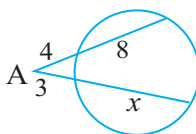


- 7 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადი.

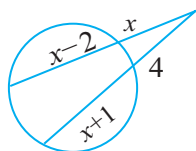
ა)



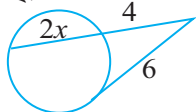
ბ)



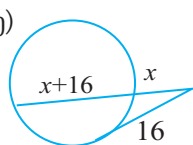
გ)



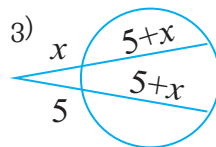
დ)



ე)



ვ)

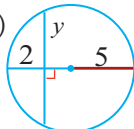


- 8 > **გაზომვა.** ლეილა ხიდან 4 მ-ის მოშორებით, ქენანი კი ხის ძირას გაჩერდა. ლეილასა და ქენანს შორის მანძილი 5 მ-ია, ეს სიტუაცია გამოსახეთ სქემატურად და იპოვეთ ხის დიამეტრი.

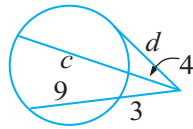


- 9 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადი.

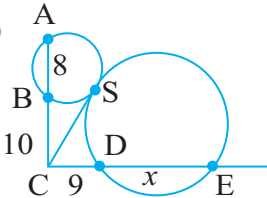
ა)



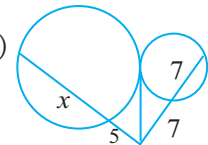
ბ)



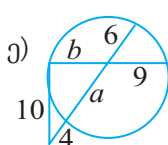
გ)



დ)



ე)

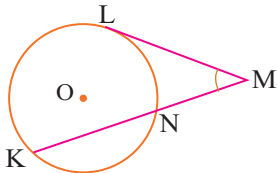


განმარტავადებული დავალებები

- 1 > მოცემულია: ML , O ცენტრის მქონე წრეწირის მხეზია, MK კი მკვეთი.

$$\sim LN : \sim NK : \sim KL = 3 : 4 : 5$$

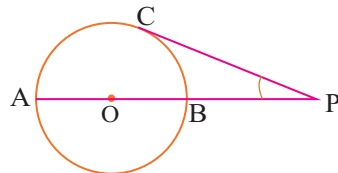
იპოვეთ: $\angle LMK$



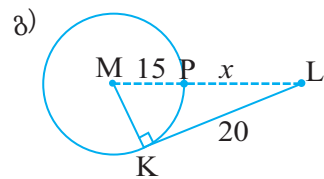
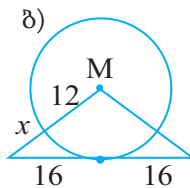
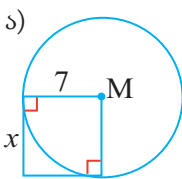
- 2 > მოცემულია: CP O ცენტრის მქონე წრეწირის მხეზია, AP კი დიამეტრის შემცველი მკვეთია.

$$\sim AC : \sim CB = 7 : 2$$

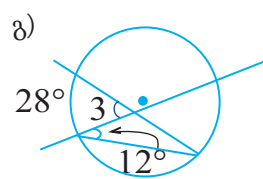
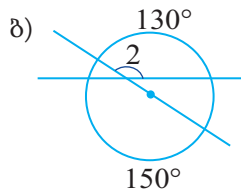
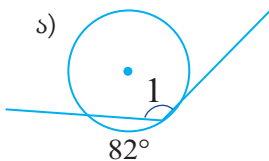
იპოვეთ: $\angle CPA$



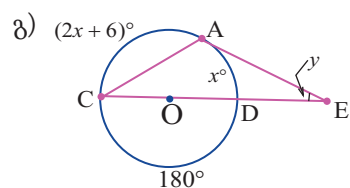
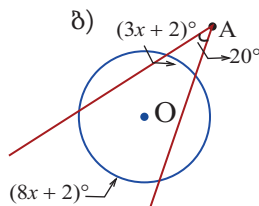
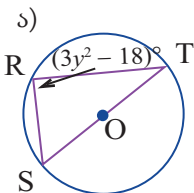
- 3 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადი. M წერტილი წრეწირის ცენტრია.



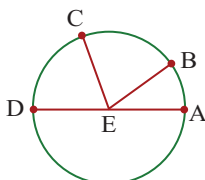
- 4 > იპოვეთ ციფრებით აღნიშნული კუთხეების გრადუსული ზომები.



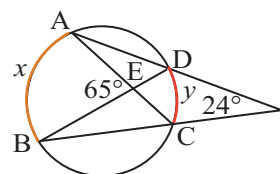
- 5 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადი. O წერტილი წრეწირის ცენტრია.



- 6 > 12 სმ დიამეტრიან E ცენტრის მქონე წრეწირში $\angle AEB : \angle BEC : \angle CED = 2 : 3 : 4$. იპოვეთ ამ კუთხეების შესაბამისი რკალების სიგრძეები.

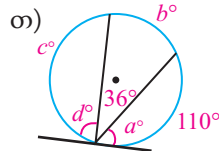
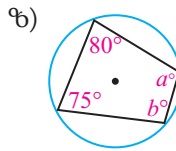
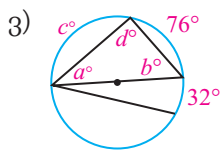
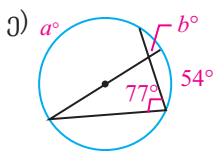
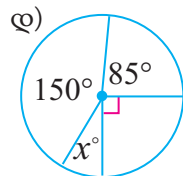
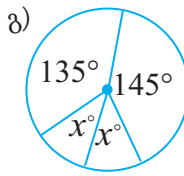
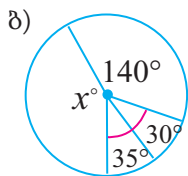
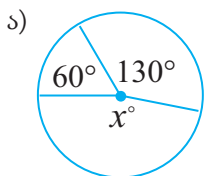


- 7 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ AB და CD რკალების გრადუსული ზომები.

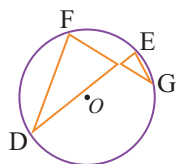


განმაზოგადებელი დავალებები

- 8 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადები. წრეწირის ცენტრი წერტილითაა აღნიშნული.

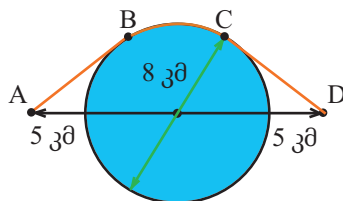


- 9 > O ცენტრიდან წრეწირში DF, FG, EG, ED კორდები ისეა გავლებული, რომ $\text{DF} : \text{FE} : \text{EG} : \text{GD} = 5 : 2 : 1 : 7$. სურათის მიხედვით განსაზღვრეთ კონგრუენტული კუთხეები და იპოვეთ ზომები.



- 10 > ქალაქის მმართველობა ქალაქგარეთ მდებარე ტბის გასუფთავებისათვის ყოველწლიურად ველოსპორტში შეჯიბრს აწყობს. სპორტსმენები მასში მონაწილეობისათვის ყოველ კილომეტრ მანძილზე ნებაყოფლობით განსაზღვრულ თანხას იხდის.

წლეულს ქენანი იღებს მონაწილეობას შეჯიბრში და ორგანიზატორებს შეატყობინა, რომ ყოველ კილომეტრ მანძილზე 5 მანეთს გადაიხდის. შეჯიბრის მანძილი სურათზე ნაჩვენებია ABCD-თი არის განსაზღვრული. A და D წერტილები წრიული ტბის სხვადასხვა მხარეს ცენტრიდან 5 კმ მანძილზე მდებარეობენ. ტბის დიამეტრი 8 კმ-ია. AB და CD მხებებია, BC კი ტბის პირად რკალისებრი გზაა.



ა) რამდენი კილომეტრია შეჯიბრის ჩასატარებელი გზის სიგრძე? პასუხი მეთაუდებამდე დაამრგვალეთ.

ბ) დაახლოებით რამდენი მანეთი ფული უნდა გადაიხადოს ქენანმა ქველმოქმედებისათვის.

- 11 > ხშირ შემთხვევაში არქეოლოგები ნივთების ნაწილებს აღმოაჩენენ, შემდეგ მთელი რიგი გაზომვებით, გამოკვლევების ჩატარებით აღადგენენ მის ნამდვილ ფორმას.

ა) თუ სურათზე გამოსახულ თევზზე ნაჩვენებ კუთხე $\angle SHD = 60^\circ$, მაშინ იპოვეთ $\angle SCH$ -ის გრადუსული ზომა. (HD თევზის წრეწირის მხებია).



ბ) დავუშვათ, რომ გაზომეთ თევზის SCH რკალი და განსაზღვრეთ, რომ იგი 9,5 სმ-ია. ამ ინფორმაციის მიხედვით, როგორ განსაზღვრავდით თევზის მთელი წრეწირის სიგრძეს?

1. კვადრატული ფუნქცია 2. წრეწირის განტოლება

კვადრატული ფუნქციის
გრაფიკი

კვადრატული ფუნქციის
ნულები

კვადრატული ფუნქციის
ზოგადი სახე

ამოცანების ამოხსნა კვადრატუ-
ლი ფუნქციის გამოყენებით

$y = |x|$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

ორ წერტილს შორის მანძილი
წრეწირის განტოლება
სექტორი და სეგმენტი



კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

გამოკვლევა: h_0 (მ) სიმაღლიდან v_0 ($\frac{m}{წმ}$) საწყისი სიჩქარით მალა

ასროლილი სხეულის დროის t (წმ) მომენტში დედამიწიდან მანძილი

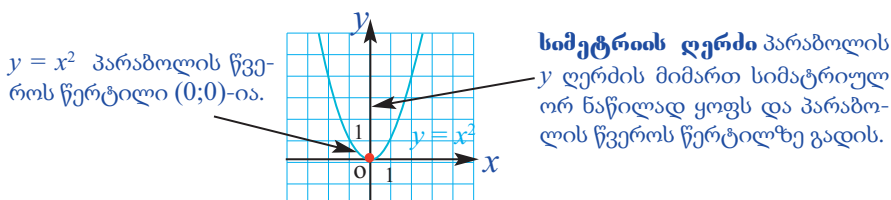
$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ ფორმულით გამოითვლება. როგორ შეიძლება

ვიზოვით სხეულის ასვლის უმაღლესი სიმაღლე?

კვადრატული ფუნქცია

$y = ax^2 + bx + c$ სახის ფუნქციას, სადაც $a \neq 0$ კვადრატული ფუნქცია ეწოდება. კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი პარაბოლაა.

როცა $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ კვადრატული ფუნქცია $y = x^2$ სახისაა და მისი გრაფიკი სურათზეა ნაჩვენები.

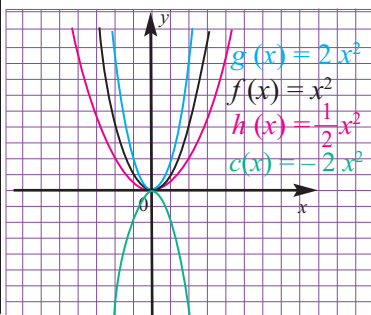


1. $y = ax^2$ ფუნქციის გრაფიკი

ნიმუში 1. $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$ ფუნქციებისათვის გამოვიკვლიოთ

მნიშვნელობათა ცხრილი. განსაზღვრეთ სურათზე მოცემული თითოეული გრაფიკი რომელი ფუნქციისაა.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 2x^2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^2$	$y = -2x^2$
-3	9	18	4,5	-18
-2	4	8	2	-8
-1	1	2	0,5	-2
0	0	0	0	0
1	1	2	0,5	-2
2	4	8	2	-8
3	9	18	4,5	-18



$y = x^2$ პარაბოლაზე თითოეული წერტილის აბსცისის შეუცვლელად თუ ორდინატს 2-ჯერ გავზრდით $y = 2x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე არსებული წერტილები მიიღება.

ამრიგად, $y = 2x^2$ ფუნქციის გრაფიკი $y = x^2$ პარაბოლის აბსცისთა ღერძისაგან 2-ჯერ გაწელოვით მიიღება.

$y = \frac{1}{2}x^2$ ფუნქციის გრაფიკი კი $y = x^2$ პარაბოლის აბსცისთა ღერძისადმი 2-ჯერ შეკუმშვით მიიღება.

$y = \frac{1}{2}x^2$ პარაბოლა $f(x) = x^2$ ფუნქციის პარაბოლაზე 2-ჯერ განიერია. $y = -x^2$ პარაბოლა $y = x^2$ პარაბოლასაგან აბსცისთა ღერძის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნით მიიღება. მსგავსი წესით $y = -2x^2$ და $y = 2x^2$ პარაბოლები სიმეტრიულები არიან აბსცისთა ღერძის მიმართ.

კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

$y = ax^2$ ფუნქციის გრაფიკი არის პარაბოლა, რომლის წვეროს წერტილი კოორდინატთა სათავეზე მდებარეობს და სიმეტრიის ღერძს ორდინატთა ღერძი წარმოადგენს.

- როცა $a > 0$, პარაბოლის შტოები ზევითაა მიმართული, როცა $a < 0$, მაშინ კი ქვევითაა მიმართული.
- როცა $|a| > 1$, პარაბოლა აბსცისთა ღერძიდან ვერტიკალური მიმართულებით გაიწელება და უფრო „გამართული“ ხდება, $y = x^2$ პარაბოლასთან შედარებით „ვიწროვდება“
- როცა $|a| < 1$, პარაბოლა აბსცისთა ღერძისაკენ მიმართულებით იბოჭება და $y = x^2$ პარაბოლასთან შედარებით „ფართოვდება“.

სასწავლო დაგვლებები

1 > რომელია კვადრატული ფუნქცია?

ა) $y = 2x^2 + x - 3$ ბ) $y = 2x^2 - 5$ გ) $y = 5x + 2$ დ) $y = -x^2 + 2x$

2 > გამოთვალეთ $y = x^2 - 2x + 1$ ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა: ა) $x = -1$; ბ) $x = -2$; გ) $x = 0$

3 > არგუმენტის რა მნიშვნელობისთვისაა $y = x^2 - x - 3$ ფუნქციის მნიშვნელობა ა) -1 -ის; ბ) 3 -ის; გ) -3 -ის ტოლი?

4 > გამოიყენეთ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი და იგივე საკოორდინატო სიბრტყეში ააგეთ $y = -3x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2$ ფუნქციების გრაფიკები.

5 > $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით ააგეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები. ააგეთ ეს გრაფიკები გრაფიკალულატორზეც.

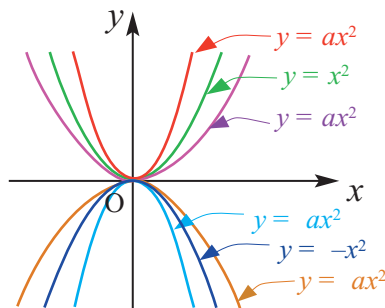
ა) $f(x) = 3x^2$ ბ) $f(x) = -4x^2$ გ) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2$ დ) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

6 > ერთი და იგივე კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ $y = \frac{1}{2}x^2$ და $y = \frac{1}{2}x + 1$ ფუნქციების გრაფიკები და უჩვენეთ მათი გადაკვეთის წერტილები.

7 > $y = ax^2$ პარაბოლა გადის $A(-6; 9)$ წერტილზე.

- 1) განსაზღვრეთ a კოეფიციენტი; 2) გაივლის თუ არა ეს პარაბოლა: ა) $B(3; 5)$, ბ) $C(-2; 1)$ წერტილზე?

8 > სურათზე გამოსახული გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ a -ს მნიშვნელობის ცვლილების ინტერვალი.

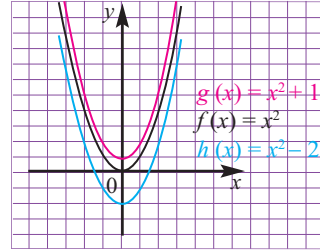


კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

2. $y = x^2 + n$ ფუნქციის გრაფიკი

ნიმუში 2. $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$ ფუნქციების გრაფიკები წარმოდგენილია ცხრილში და გრაფიკზე. ცხრილი და გრაფიკი რვეულში ჩაიხაზეთ. გამოიკვლიეთ $y = x^2 + n$ ფუნქციის გრაფიკი როგორ იცვლება n -ის მნიშვნელობაზე დამოკიდებულებით.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = x^2 - 2$
-3	9	10	7
-2	4	5	2
-1	1	2	-1
0	0	1	-2
1	1	2	-1
2	4	5	2
3	9	10	7



ავაგოთ $y = x^2$ პარაბოლა და იგი Oy ღერძის გასწვრივ ავწიოთ 1 ერთეულით ზევით. პარაბოლის წვეროს წერტილი იქნება $(0; 1)$, სიმეტრიის ღერძი კი Oy ღერძი რჩება. თითოეული წერტილის აბსცისა იგივე რჩება ორდინატი კი 1 ერთეულით იზრდება. ანუ ახალ პარაბოლაზე x აბსცისიანი წერტილის ორდინატი $x^2 + 1$ ხდება: $y = x^2 + 1$.

$y = x^2 + 1$ ფუნქციის შესაბამისი პარაბოლა $y = x^2$ ფუნქციის პარაბოლის Oy ღერძის გასწვრივ 1 ერთეულით ზევით გადანაცვლება. წვეროს წერტილია $(0; 1)$.

შევადართ $y = x^2$ და $y = x^2 - 2$ ფუნქციების პარაბოლები.

$y = x^2 - 2$ ფუნქციის შესაბამისი პარაბოლა $y = x^2$ ფუნქციის შესაბამისი პარაბოლის Oy ღერძის გასწვრივ 2 ერთეულით ქვევით ჩამოცურებით მიიღება. წვეროს წერტილია: $(0; -2)$

როგორც ჩანს, n წვერის მიხედვით პარაბოლის მდგომარეობა Oy ღერძის გასწვრივ ვერტიკალურად იცვლება. პარაბოლის წვეროს წერტილის სწორად აღნიშვნა მნიშვნელოვანია.

$y = ax^2 + n$ ფუნქციის გრაფიკი $y = ax^2$ პარაბოლის Oy ღერძის გასწვრივ მოცურებაა.

- პარაბოლა Oy ღერძის გასწვრივ $|n|$ ერთეულით თუ $n < 0$, ქვევით უნდა ჩამოცურდეს, ხოლო თუ $n > 0$, მაშინ ზევით უნდა აცურდეს.
- პარაბოლის წვეროს წერტილი $(0; n)$ წერტილში მდებარეობს.

9 > $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის მოცურებით სქემატურად ასახეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკები.

ა) $y = x^2 - 2$

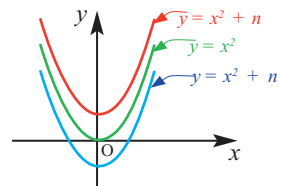
ბ) $y = x^2 + 3$

გ) $y = x^2 + 2$

დ) $y = x^2 - 3$

ე) $y = x^2 + 0,5$

ვ) $y = x^2 - 1,5$



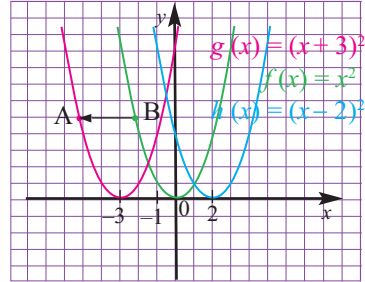
10 > სურათზე გამოსახული გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ n -ის ნიშნები.

11 > $y = x^2 + n$ ფუნქციაში n -ისათვის სხვადასხვა მნიშვნელობების მინიჭებით დაწერეთ ნიმუშები და გრაფიკულატორით ააგეთ გრაფიკები.

კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

ნიმუში 3. $y = x^2$, $y = (x + 3)^2$, $y = (x - 2)^2$ ფუნქციები ცხრილითა და გრაფიკითაა წარმოდგენილი. ცხრილი და გრაფიკი რვეულში ჩაიხაზეთ. გამოიკვლიეთ $y = (x - m)^2$ ფუნქციის გრაფიკი როგორ იცვლება m -ის მნიშვნელობაზე დამოკიდებულებით.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
-5	25	4	49
-4	16	1	36
-3	9	0	25
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



3. $y = (x - m)^2$ ფუნქციის გრაფიკი

$y = x^2$ პარაბოლა 3 ერთეულით მარცხნივ მოვაცდურეთ. პარაბოლის წვეროს წერტილი $(-3; 0)$ იქნება. მოცურებულ პარაბოლაზე $A(x_1; y_1)$ წერტილი მოცემულ პარაბოლაზე B წერტილისაგან 3 ერთეულით მარცხნივ მოცურებით მიიღება. ამიტომ B წერტილის აბსცისა $x_1 + 3$ იქნება ორდინატი კი A -ს ორდინატის ტოლია. ვინაიდან მოცემულ პარაბოლაზე ნებისმიერი წერტილის ორდინატი აბსცისას კვადრატის ტოლია, მიიღება რომ $y_1 = (x_1 + 3)^2$. ანუ მოცურებულ პარაბოლაზე არსებული $(x_1; y_1)$ წერილისათვის $y_1 = (x_1 + 3)^2$ იქნება.

$y = x^2$ პარაბოლის 3 ერთეულით მარცხნივ მოცურებით $y = (x + 3)^2$ პარაბოლა მიიღება.
 $y = x^2$ პარაბოლის 2 ერთეულით მარჯვნივ მოცურებით $y = (x - 2)^2$ პარაბოლა მიიღება.
 m წვერი პარაბოლის Ox ღერძის გასწვრივ (ჰორიზონტალურ) მდგომარეობას ცვლის.

$y = a(x - m)^2$ ფუნქციის გრაფიკი $y = ax^2$ პარაბოლის აბსცისთა ღერძის გასწვრივ $|m|$ ერთეულით მოცურდება.

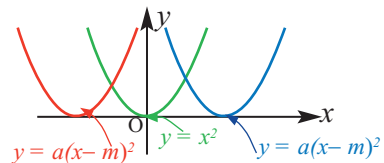
- როცა $m > 0$, პარაბოლა Ox ღერძის გასწვრივ მარჯვნივ, ხოლო როცა $m < 0$, მაშინ მარცხნივ მოცურდება.
- m პარაბოლის წვეროს წერტილის აბსცისას შეესაბამება. პარაბოლის წვეროს წერტილი $(m; 0)$ იქნება.
- $x = m$ წრფე პარაბოლის სიმეტრიის ღერძია.

12 $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით ერთი და იგივე კოორდინატა სისტემაში ააგეთ $y = (x + 5)^2$ და $y = (x - 5)^2$ ფუნქციების გრაფიკები.

13 ფუნქციის გრაფიკი გამოსახეთ სქემატურად.

- ა) $y = (x - 2)^2$ ბ) $y = (x + 4)^2$
 გ) $y = (x + 2)^2$ დ) $y = (x - 4)^2$
 ე) $y = (x - 1,5)^2$ ვ) $y = (x + 1,5)^2$

14 სურათზე გამოსახული გრაფიკების მიხედვით განსაზღვრეთ m -ის ნიშანი.



კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

4. $y = a(x - m)^2 + n$ ფუნქციის გრაფიკი

ზემოთ განხილული აგებების განზოგადებით $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ვუჩვენოთ. $y = a(x - m)^2 + n$ პარაბოლის აგება. განვიხილოთ ეს კონკრეტულ მაგალითზე.

მაგალიტი 4. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$ ფუნქციის გრაფიკის აგება განვიხილოთ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის მოცულობით.

1. ააგეთ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

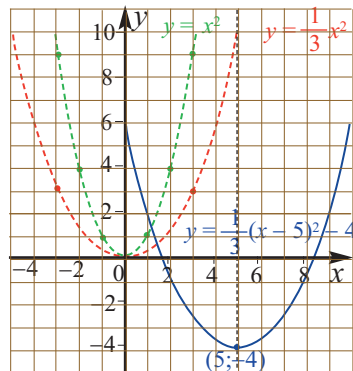
2. რადგან $a > 0$, გრაფიკის მიმართულება არ იცვლება.

რადგან $a < 1$ პარაბოლა “ფართოვდება”, რადგან x -ის იგივე მნიშვნელობისათვის y -ის მნიშვნელობა 3-ჯერ ნაკლები იქნება. მაგალითად $y = x^2$ -ის გრაფიკზე (3; 9) წერტილი $y = \frac{1}{3}x^2$ -სათვის იქნება როგორც (3; 3).

3. აღნიშნეთ Oy სიმეტრიის ღერძის მიმართ (3; 3) წერტილის სიმეტრიული (-3; 3) წერტილი.

4. დახაზეთ პარაბოლა, რომელიც გადის (3; 3), (0; 0) და (-3; 3) წერტილებზე. ეს $y = \frac{1}{3}x^2$ ფუნქციის გრაფიკია.

5. ვინაიდან $m = 5$ და $n = -4$, ამიტომ პარაბოლა 5 ერთეულით მარჯვნივ და 4 ერთეულით ქვემოთ მოაძვრეთ. მიღებული პარაბოლა არის $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$ ფუნქციის გრაფიკი.



$y = a(x - m)^2 + n$ პარაბოლის წვეროს წერტილი $(m; n)$ წერტილში მდებარეობს. ამ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძი $x = m$ წრფეა.

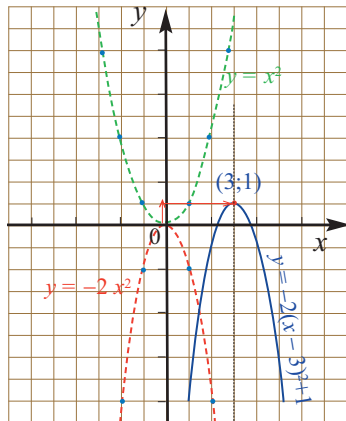
მაგალიტი 5. $y = -2(x - 3)^2 + 1$

• ააგეთ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

• რადგან კოეფიციენტი $a = -2$, $y = -2x^2$ ფუნქციის გრაფიკის პარაბოლის შტოები ქვევითაა მიმართული. ამ ფუნქციის გრაფიკი, $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკზე უფრო “ვიწრო” იქნება, იმიტომ რომ, რომ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობისათვის y -ის აბსოლუტური მნიშვნელობა 2-ჯერ მეტია. მაგალითად, შესაბამისი წერტილები ასე იქნება: (1; 1) → (1; -2); (2; 4) → (2; -8). აღნიშნეთ ეს წერტილები და გლუვი მრუდის შეერთებით ააგეთ $y = -2x^2$ ფუნქციის გრაფიკი.

• ვინაიდან $m = 3$ და $n = 1$, $y = -2x^2$ პარაბოლის 3 ერთეულით მარჯვნივ და 1 ერთეულით ზევით მოცულობით აიგება $y = -2(x - 3)^2 + 1$ ფუნქციის გრაფიკი. პარაბოლის წვერო (3; 1) წერტილშია.

• $x = 3$ წრფე ამ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძია.



კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

15 > $y = x^2$ გრაფიკის მოცურებით ააგეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები.

ა) $y = 2(x + 3)^2 - 1$ ბ) $y = -3(x + 1)^2 + 3$ გ) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$

16 > $y = \frac{1}{2}x^2$ და $y = 2x^2$ ფუნქციების გრაფიკები ააგეთ სქემატურად და პარაბოლის წვეროს წერტილი გადაიტანეთ ქვემოთ მოცემულ წერტილებში. დაწერეთ ახალი გრაფიკების შესაბამისი ფუნქციების ფორმულები.

ა) $(0; -1)$ ბ) $(3; 2)$ გ) $(-4; 1)$ დ) $(-2; -2)$

კვადრატული ფუნქციის სხვადასხვა ფორმებში წარდგენა და გრაფიკები

კვადრატული ფუნქცია	გრაფიკი
1. წვეროს წერტილის მიხედვით ნაწერით ან სრული კვადრატის გამოყოფით $y = a(x - m)^2 + n$	პარაბოლის წვეროს წერტილი: $(m; n)$ სიმეტრიის ღერძი: $x = m$
2. აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების მიხედვით ნაწერით $y = a(x - p)(x - q)$	გრაფიკი Ox ღერძს p და q წერტილებში კვეთს. სიმეტრიის ღერძი: წვეროები $(p; 0)$ და $(q; 0)$ მქონე მონაკვეთის შუამართობია. წვეროს წერტილის აბსცისაა $m = (p + q) : 2$.

თუ $a > 0$ ყველა შემთხვევაში პარაბოლის შტოები ზემოთაა მიმართული.

თუ $a < 0$ პარაბოლის შტოები ქვემოთაა მიმართული.

პარაბოლის წვეროს წერტილი და საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები პარაბოლის მნიშვნელოვანი წერტილებია.

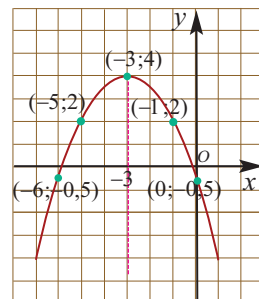
პარაბოლის აგების ნაბიჯები:

1. მოიძებნება წვეროს წერტილი და იგი საკოორდინატო სიბრტყეზე აღინიშნება;
2. მოიძებნება Ox ღერძთან (თუ არსებობს) და Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილები;
3. განისაზღვრება სიმეტრიის ღერძი;
4. სიმეტრიის ღერძის მიხედვით ავლნიშნოთ პარაბოლის რამდენიმე წერტილი;
5. ავაგოთ პარაბოლა, რომელიც გაივლის აღნიშნულ წერტილებზე.

ნიმუში 1. ავაგოთ $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4$ ფუნქციის გრაფიკი.

ვინაიდან $a < 0$ პარაბოლის შტოები ქვევითაა მიმართული.

1. ავლნიშნოთ პარაბოლის წვეროს წერტილი $(-3; 4)$.
2. როცა $x = 0$, მიიღება $y = -0,5$, ანუ პარაბოლა Oy ღერძს $(0; -0,5)$ წერტილში გადაკვეთს.
3. გავავლოთ $x = -3$ სიმეტრიის ღერძი და ავლნიშნოთ პარაბოლაზე მდებარე $(-1; 2)$ წერტილი.
4. ავლნიშნოთ $(0; -0,5)$ და $(-1; 2)$ წერტილების $x = -3$ წრფის მიმართ სიმეტრიული $(-6; -0,5)$ და $(-5; 2)$ წერტილები.
5. ავაგოთ ამ წერტილებზე გამავალი პარაბოლა.



კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

ნიმუში 2. ააგეთ $y = -(x + 2)(x - 4)$ ფუნქციის გრაფიკი.

• $a = -1$, $p = -2$, $q = 4$; Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია: $(-2; 0)$ და $(4; 0)$.

• სიმეტრიის ღერძი ამ წერტილებიდან ტოლი მანძილებით დაშორებულ წერტილებზე გადის: $x = 1$.

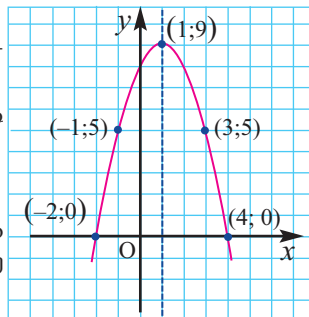
• პარაბოლის წვეროს წერტილის აბსცისაა $x = 1$, ორდინატი: $y = -(1 + 2)(1 - 4) = 9$

$(1; 9)$ წვეროს წერტილი აღვნიშნოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე.

• გავავლოთ სიმეტრიის ღერძი: $x = 1$

ავლნიშნოთ სიმეტრიის ღერძის მიმართ ორი სიმეტრიული წერტილი. მაგალითად, როცა $x = 3$ და $x = -1$, $y = 5$ ანუ $(3; 5)$ და $(-1; 5)$ წერტილები.

• ავაგოთ აღნიშნულ წერტილებზე გამავალი პარაბოლა.



ნიმუში 3. გრაფიკის წვეროს წერტილის მიხედვით ($y = a(x - m)^2 + n$) ჩანაწერით გამოსახეთ პარაბოლის განტოლება.

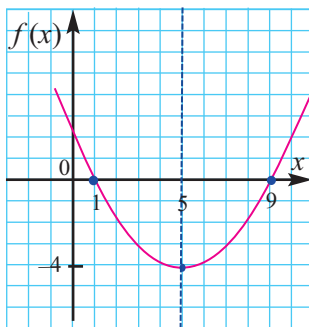
1. როგორც ჩანს, პარაბოლის წვერო $(5; -4)$ წერტილშია: $m = 5$, $n = -4$.

2. ვინაიდან პარაბოლის შტოები ზევითაა მიმართული, $a > 0$ უნდა იყოს. m -ისა და n -ის მნიშვნელობების გათვალისწინებით ფუნქციის $y = a(x - 5)^2 - 4$ სახით დაწერა შეიძლება.

3. გრაფიკზე არსებული ნებისმიერი წერტილის მაგალითად, $(1; 0)$ ან $(9; 0)$ წერტილის კოორდინატების ფუნქციის ფორმულაში ჩაწერით შეიძლება ვიპოვოთ a . $(1; 0)$ წერტილის გათვალისწინებით:

$$0 = a(1 - 5)^2 - 4,$$

$$16a = 4, \quad a = \frac{1}{4}. \quad \text{ფუნქციის ფორმულა: } y = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 4 \text{ სახისაა.}$$



17 ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები. გრაფიკზე აღნიშნეთ წვეროს წერტილების კოორდინატები და სიმეტრიის ღერძი.

1. $y = (x - 3)^2$

2. $y = (x + 4)^2$

3. $y = -(x + 3)^2 + 2$

4. $y = 3(x - 2)^2 - 1$

5. $y = -2(x - 2)^2 + 4$

6. $y = -(x + 1)^2 + 3$

7. $y = 2(x + 1)^2 - 5$

8. $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2$

9. $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

18 ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები. გრაფიკზე აღნიშნეთ წვეროს წერტილი და სიმეტრიის ღერძი.

1. $y = (x + 3)(x - 3)$

2. $y = -(x - 1)(x + 3)$

3. $y = 2(x + 2)(x + 4)$

4. $y = 2(x - 5)(x - 1)$

5. $y = -(x - 4)(x - 1)$

6. $y = (x - 3)(x + 7)$

კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი

19 > ლოგიკური აზროვნება. ა) რატომაა, რომ $y = x^2 + 3$ პარაბოლის აგებისათვის ხდება $y = x^2$ პარაბოლის Oy ღერძის გასწვრივ დადებითი მიმართულებით ზევით, ხოლო $y = (x + 3)^2$ ფუნქციის გრაფიკის აგებისას კი Ox ღერძის გასწვრივ მარცხნივ მოცურება?

ბ) კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა ყოველთვის ერთი და იგივე არაა. ეს აზრი Oy ღერძისთვისაც იგივეა? განმარტეთ.

20 > გრაფიკზე მდებარე წერტილთა წყვილების რომელი კოორდინატების მიხედვითაა შესაძლებელი პარაბოლის სიმეტრიის ღერძის განტოლების დაწერა? შესაძლებლობის შემთხვევაში დაწერეთ სიმეტრიის ღერძის განტოლება.

ა) (3; 10) და (7; 10)

ბ) (4; 6) და (6; -2)

21 > მონაცემების მიხედვით დაწერეთ კვადრატული ფუნქცია $y = a(x - m)^2 + n$ სახით.

ა) წვერო (0; 0) წერტილზეა და (6; 9) წერტილზე გადის;

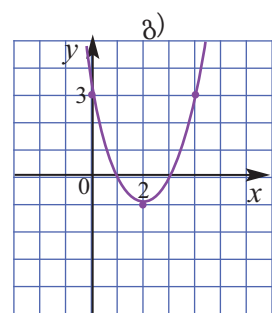
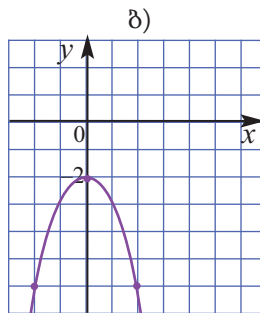
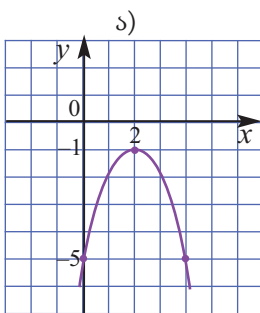
ბ) წვერო (0; -3) წერტილზეა და (3; 24) წერტილზე გადის;

გ) წვერო (2; 5) წერტილზეა და (4; -11) წერტილზე გადის;

დ) წვერო (-3; -10) წერტილზეა და (2; -5) წერტილზე გადის.

22 > (2; 3) და (24; 3) წერტილები კვადრატული ფუნქციის გრაფიკზეა. ამ წერტილების კოორდინატების მიხედვით განსაზღვრეთ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძის განტოლება.

23 > ფუნქციის გრაფიკები $y = x^2$ პარაბოლის როგორი მოცურების შედეგადაა მიღებული? დაწერეთ ამ ფუნქციების ფორმულები.



24 > ღია ტიპის შეკითხვა. დაწერეთ ნებისმიერი ისეთი კვადრატული ფუნქციის ფორმულა რომელიც $f(x) = x^2$ -თან შედარებით არის “გაფართოებული”, ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მიმართულებით მოცურებითი მოძრაობის შედეგად მიღებული. გამოსახეთ გრაფიკი სქემატურად.

კვადრატული ფუნქციის ნულები

კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთა

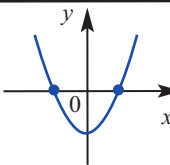
ფუნქციის გრაფიკის აბსცისთა ღერძზე მდებარე წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლი ხდება. არგუმენტის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც ფუნქციას ნულად აქცევენ ფუნქციის ნულები ეწოდება. $y = a(x - m)^2 + n$ ფუნქციისათვის ნულების რაოდენობის განსაზღვრა a და n -ის მნიშვნელობების მიხედვით შესაძლებელია.

- a -ს მნიშვნელობის მიხედვით შეიძლება ითქვას, პარაბოლის შტოები ზევითაა მიმართული თუ ქვევით.

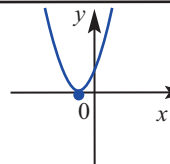
- n -ის მნიშვნელობის მიხედვით შეიძლება ითქვას, პარაბოლის წვერო აბსცისთა ღერძის ზევითაა, ქვევითაა თუ აბსცისთა ღერძზე მდებარეობს.

პარაბოლის წვეროს წერტილისა და შტოების ზევით თუ ქვევით მიმართულების მიხედვით მოცემული ნიშნუებისათვის განვსაზღვროთ აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა.

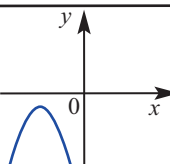
ნიმუში 1. ა) $f(x) = 0,8x^2 - 3$

a -ს მნიშვნელობა	n -ის მნიშვნელობა	გრაფიკი	აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა
$a > 0$ პარაბოლის შტოები ზევითაა მიმართული	$n < 0$ წვერო Ox ღერძის ქვემოთაა		2 გრაფიკი აბსცისთა ღერძს ორ წერტილში გადაკვეთს

ნიმუში 2. ბ) $f(x) = 2(x + 1)^2$

a -ს მნიშვნელობა	n -ის მნიშვნელობა	გრაფიკი	აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა
$a > 0$ პარაბოლის შტოები ზევითაა მიმართული	$n = 0$ წვეროს წერტილი Ox ღერძზეა		1 გრაფიკს აბსცისთა ღერძთან 1 საერთო წერტილი აქვს და ეს წერტილი აბსცისთა ღერძზე პარაბოლის წვეროს წერტილია.

ნიმუში 3. გ) $f(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

a -ს მნიშვნელობა	n -ის მნიშვნელობა	გრაფიკი	აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა
$a < 0$ პარაბოლის შტოები ქვევითაა მიმართული	$n < 0$ წვეროს წერტილი Ox ღერძის ქვევითაა		0 გრაფიკი აბსცისთა ღერძთან არ იკვეთება და შტოების ქვევით მიმართვით მთლიანად Ox ღერძის ქვევით მდებარეობს.

სასწავლო დაფალებები

1 > განსაზღვრეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკების აბსცისთა ღერძთან საერთო წერტილების რაოდენობა.

ა) $f(x) = 5x^2 - 7$

ბ) $f(x) = -2(x + 1)^2$

გ) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 9$

კვადრატული ფუნქციის ნულები

- 2 > ა) $y = 5(x - 15)^2 - 100$ ბ) $y = -4x^2 + 14$ გ) $y = (x + 18)^2 - 8$
ფუნქციებისათვის გრაფიკის აგების გარეშე განსაზღვრეთ:

1) პარაბოლის შტოების მიმართულება; 2) წვეროს წერტილის კოორდინატები;
3) სიმეტრიის ღერძის განტოლება; 4) Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა.

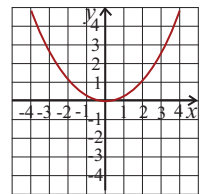
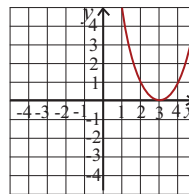
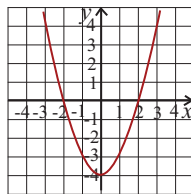
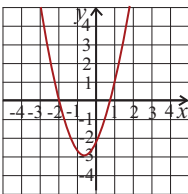
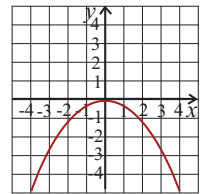
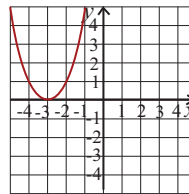
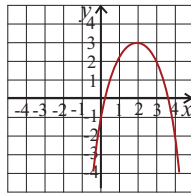
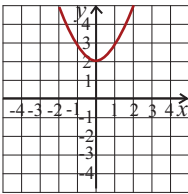
- 3 > ა) კვადრატული სამწევრის მამრავლებად დაშლით მოცემული ფუნქციები დაწერეთ $y = a(x - p)(x - q)$ სახით; ბ) განსაზღვრეთ Ox და Oy ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები; გ) ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები.

1) $f(x) = x^2 - 5x - 24$ 2) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 3) $p(x) = 4x^2 - 20x + 24$

- 4 > (10; 0) და (4; 0) წერტილები არის იმ პარაბოლის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები, რომლის წვეროს წერტილის ორდინატია -9 . ა) დაწერეთ ფუნქციის ფორმულა; ბ) დაწერეთ ამ პარაბოლაზე მდებარე სიმეტრიის ღერძის მიმართ სიმეტრიული სამი წყვილი წერტილის კოორდინატები. გ) ააგეთ გრაფიკი.

- 5 > განსაზღვრეთ რომელი გრაფიკი რომელი ფუნქციისაა და გრაფიკები რვეულში ჩაიხაზეთ.

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ $g(x) = (x + 3)^2$ $v(x) = (x - 3)^2$ $h(x) = \frac{1}{4}x^2$
 $t(x) = x^2 + 2$ $s(x) = x^2 - 4$ $p(x) = (x + 1)^2 - 3$ $u(x) = -(x - 2)^2 + 3$



- 6 > ააგეთ ფუნქციის გრაფიკები. იპოვეთ მანძილი აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს შორის. დაწერეთ სიმეტრიის ღერძის განტოლება.

ა) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
ბ) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

ბ) $f(x) = x^2 + 2x - 8$
დ) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

- 7 > მოცემულია პარაბოლის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები. ამ ინფორმაციების მიხედვით იპოვეთ პარაბოლის წვეროს წერტილის კოორდინატები.

ა) (3; 0), (-1; 0), (0; -6); ბ) (-2; 0), (-3; 0), (0; 4); გ) (-3; 0), (1; 0), (0; 3).

კვადრატული ფუნქციის ზოგადი სახე

$y = ax^2 + bx + c$ სახით მოცემული ნებისმიერი კვადრატული ფუნქცია სრული კვადრატის გამოყოფით $y = a(x - m)^2 + n$ სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ.

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = \frac{4ac - b^2}{4a}, \quad \text{თუ ავღნიშნავთ } y = a(x - m)^2 + n$$

$y = ax^2 + bx + c$ პარაბოლის სიმეტრიის ღერძი $x = m$ წრფეა.

წვეროს წერტილი $(m; n)$ იქნება, სადაც $m = -\frac{b}{2a}, \quad n = \frac{-D}{4a}, \quad D = b^2 - 4ac.$

მაგალიტი 1: $y = -2x^2 + 4x + 3 = -2 \cdot (x^2 - 2x - 1,5) = -2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1 - 1,5) =$
 $= -2 \cdot ((x - 1)^2 - 2,5) = -2 \cdot (x - 1)^2 + 5$

მაგალიტი 2: $y = 4x^2 - 12x + 7 \quad a = 4, \quad b = -12, \quad c = 7, \quad D = b^2 - 4ac = 32$

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 4} = 1,5 \qquad n = \frac{-D}{4a} = \frac{-32}{4 \cdot 4} = -2$$

m -ის და n -ის მნიშვნელობების $y = a(x - m)^2 + n$ ფორმულაში შეტანით, მოცემული $y = 4x^2 - 12x + 7$ ფუნქცია $y = 4(x - 1,5)^2 - 2$ სახეს მიიღებს.

სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > დაწერეთ კვადრატული ფუნქციები $y = a(x - m)^2 + n$ სახით.
 - ა) $y = x^2 + 8x + 8$ ბ) $y = 2x^2 - 16x + 21$ გ) $y = -x^2 + 8x - 13$
- 2 > მოცემული კვადრატული ფუნქციების გრაფიკებისათვის იპოვეთ:
 - ა) აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები;
 - ბ) ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები;
 - გ) წვეროს წერტილის კოორდინატები;
 - დ) გამოსახეთ კვადრატული ფუნქცია წვეროს წერტილის მიხედვით ჩანაწერით და ააგეთ გრაფიკი.
 - 1) $y = x^2 - 2x - 3$ 2) $y = -x^2 - 4x + 5$ 3) $y = x^2 + 6x + 5$
- 3 > **ღია ტიპის შეკითხვა.** ა) დაწერეთ ორი სხვადასხვა კვადრატული ფუნქცია, რომელთა შესაბამისი პარაბოლების წვეროები $(5; -3)$ წერტილში მდებარეობს და სქემატურად ააგეთ გრაფიკები.

ბ) დაწერეთ ორი კვადრატული ფუნქცია, რომელთა უდიდესი მნიშვნელობა 5-ის ტოლია. შესაბამისი პარაბოლის სიმეტრიის ღერძი კი $x = -3$ და ააგეთ გრაფიკები.
- 4 > ააგეთ $f(x) = 2(x + 1)^2 + 2$ და $g(x) = 5(x + 1)^2 + 2$ ფუნქციების გრაფიკები. გამოიკვლიეთ ამ გრაფიკების საერთო და განსხვავებული თვისებები.

კვადრატული ფუნქციის ზოგადი სახე

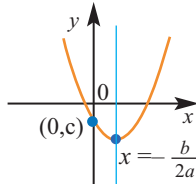
$$y = ax^2 + bx + c$$

$y = ax^2 + bx + c$ სახის კვადრატული ფუნქციის თვისებები შეიძლება განვაზოგადოთ ქვემოთ მოცემული სახით.

- თუ $a > 0$, კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის პარაბოლის შტოები ზევითაა მიმართული, ხოლო თუ $a < 0$, მაშინ პარაბოლის შტოები ქვევითაა მიმართული.

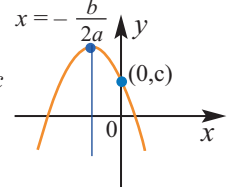
$$a > 0$$

$$y = ax^2 + bx + c$$



$$a < 0$$

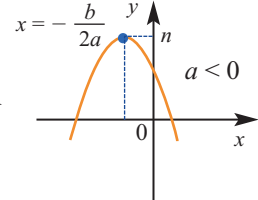
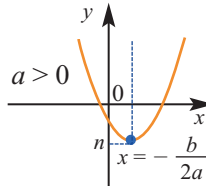
$$y = ax^2 + bx + c$$



- პარაბოლის წვეროს წერტილის აბსცისა $-\frac{b}{2a}$ და სიმეტრიის ღერძის განტოლება $x = -\frac{b}{2a}$ იქნება.

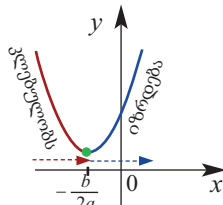
- პარაბოლა ორდინატთა ღერძთან $(0; c)$ წერტილში იკვეთება.

- $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის წვეროს წერტილის ორდინატის მნიშვნელობა (ანუ n) თუ $a > 0$, ფუნქციის **უმცირესი მნიშვნელობაა**, ხოლო თუ $a < 0$ ფუნქციის **უდიდესი მნიშვნელობაა**. ამ მნიშვნელობებს ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის მნიშვნელობებსაც ვუწოდებთ.

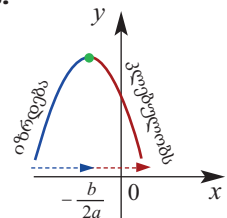


არგუმენტის (x -ის) მიღებულ მნიშვნელობათა სიმრავლე ფუნქციის განსაზღვრის არეა. კვადრატული ფუნქციის განსაზღვრის არე ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა. ფუნქციის (y -ის) მიღებული მნიშვნელობები კი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეს ქმნის. $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციისათვის მნიშვნელობათა სიმრავლე, როცა $a < 0$, მაქსიმალურ მნიშვნელობაზე ნაკლები ან მისი ტოლი ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა ($y \leq n$); როცა $a > 0$ მაშინ კი მინიმალურ მნიშვნელობაზე მეტი ან მისი ტოლი ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა ($y \geq n$).

თუ გრაფიკი მარცხნიდან მარჯვნივ “ზევით იწევს” **ფუნქცია იზრდება**. თუ გრაფიკი მარცხნიდან მარჯვნივ “ქვევით ეშვება” **ფუნქცია კლებულობს**.



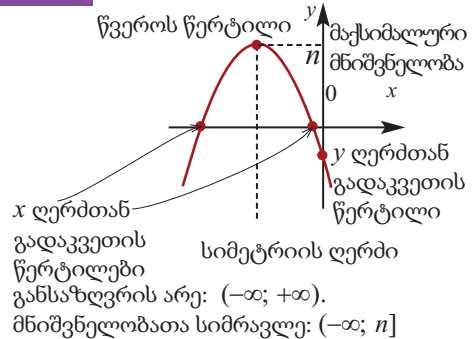
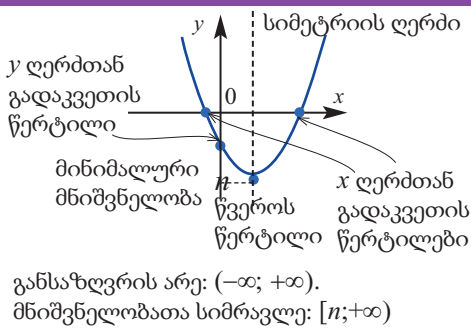
როცა $a > 0$, $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქცია $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ შუალედში კლებულობს, $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ შუალედში კი იზრდება.



როცა $a < 0$, $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქცია $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ შუალედში იზრდება $[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ შუალედში კი კლებულობს.

კვადრატული ფუნქციის ზოგადი სახე

$y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გამოკვლევა



სასწავლო დავალებები

5 > $y = -2x^2 + 4x + 6$ ფუნქციისათვის განსაზღვრეთ:

- პარაბოლის შტოების მიმართულება;
- კოორდინატა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;
- სიმეტრიის ღერძის განტოლება;
- წვეროს წერტილი;
- უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა (თუ გააჩნია);
- განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

6 > გამოყავით სრული კვადრატი და შეასრულეთ მე-5 დავალების პირობები.

ა) $g(x) = x^2 - 8x + 12$ დ) $h(x) = x^2 + 4x - 5$ ზ) $n(x) = 2x^2 + 12x + 13$

ბ) $f(x) = 4x^2 + 16x + 19$ ე) $p(x) = -3x^2 + 6x - 5$ თ) $F(x) = 5x^2 + 10x + 5$

გ) $k(x) = x^2 + 7x + 10$ ვ) $m(x) = x^2 - x - 6$ ი) $Q(x) = -3x^2 + 12x$

7 > იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა.

ა) $f(x) = 3(x - 5)^2 + 8$ ბ) $g(x) = -2(x - 1)^2 + 4$ გ) $t(x) = -3(x + 7)^2$

დ) $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$ ე) $g(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2$ ვ) $f(x) = -5x^2 + \frac{1}{2}$

8 > **ღია ტიპის შეკითხვა.** დაწერეთ ისეთი კვადრატული ფუნქცია, რომ მნიშვნელობათა სიმრავლე იყოს მოცემულ რიცხვზე არანაკლები ყველა ნამდვილ რიცხვთან სიმრავლე.

9 > კვადრატული ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა 20-ია. გრაფიკის აბსცისთან ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია $(-15; 0)$ და $(25; 0)$. დაწერეთ კვადრატული ფუნქცია ჯერ $y = a(x - m)^2 + n$ სახით, შემდეგ კი ზოგადი სახით.

10 > იპოვეთ ქვემოთ მოცემული ფუნქციების პარაბოლის წვეროს კოორდინატები.

ა) $y = x^2 + 4x + 3$ ბ) $y = 2x^2 + 16x + 7$ გ) $y = 5x^2 + 50x + 7$
 დ) $y = 7x^2 - 14x + 21$ ე) $y = 3x^2 - 18x + 12$ ვ) $y = -6x^2 + 24x + 24$

კვადრატული ფუნქციის ზოგადი სახე

11> $y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციის გრაფიკის-პარაბოლის (m ; n) წვეროს წერტილის

კოორდინატები $m = \frac{-b}{2a}$, $n = am^2 + bm + c$ გზით შეიძლება ვიპოვოთ.

წვეროს წერტილის კოორდინატების მიხედვით შესაძლებელია ფუნქციის განსაზღვრა? თუ შესაძლებელი არ არის, კიდევ რომელი ინფორმაციის მოცემით, შევძლებთ მოთხოვნილი ფუნქციის დაწერას? პასუხი ნიმუშებზე წარმოადგინეთ.

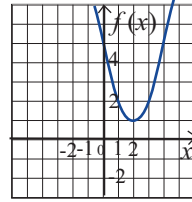
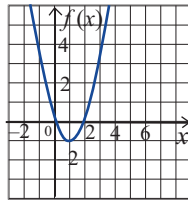
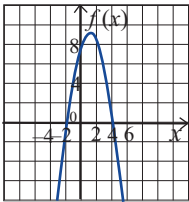
12> კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით განსაზღვრეთ:

- სიმეტრიის ღერძის განტოლება;
- მაქსიმუმის ან მინიმუმის მნიშვნელობა;
- წვეროს წერტილი;
- განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე;
- x და y ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;
- ზრდისა და კლების შუალედები.

ა) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

ბ) $f(x) = x^2 - 2x$

გ) $f(x) = x^2 - 4x + 5$



13> $y = x^2 + bx - 1$ ფუნქციაში b ნამდვილი რიცხვია. b -ს 1-ის ტოლი და 1-ზე მეტი რამდენიმე მნიშვნელობისათვის ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი. გამოიკვლიეთ b -ს მნიშვნელობა როგორ ცვლის გრაფიკს. როგორ იცვლება Ox და Oy ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები? რისი თქმა შეგიძლიათ წვეროს წერტილის კოორდინატების ცვლილების შესახებ? დავალება $y = x^2 - bx - 1$ ფუნქციისათვის გაიმეორეთ.

14> ქვემოთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომელია მცდარი და რომელია ჭეშმარიტი?

1) თუ $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკს 2 ერთეულით მარჯვნივ და 1 ერთეულით ქვევით მოვაცურებთ, მივიღებთ $y = x^2 - 4x + 3$ ფუნქციის გრაფიკს.

2) $y = x^2 - x + 3$ ფუნქციის გრაფიკი Oy ღერძს აბსცისთა ღერძის ქვევით კვეთს.

3) $y = 14 - x^2 - 2x$ ფუნქციის მაქსიმუმი 15-ის ტოლია.

15> b და c -ს რა მნიშვნელობებისათვის $y = x^2 + bx + c$ პარაბოლა:

ა) აბსცისთა ღერძს კვეთს $(-1; 0)$ და $(3; 0)$ წერტილებში.

ბ) აბსცისთა ღერძს $(1; 0)$, ორდინატთა ღერძს კი $(0; 3)$ წერტილში კვეთს;

გ) აბსცისთა ღერძს $(2; 0)$ წერტილში ეხება?

16> ბურთი v_0 ($\frac{m}{წმ}$) საწყისი სიჩქარით ზევით იქნა ასროლილი. ბურთის t წამის შემდეგ მიღწეული h (m) სიმაღლის $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ ფორმულით განსაზღვრა შეიძლება. დაასაბუთეთ, რომ ბურთი მაქსიმალურ სიმაღლეს $t = \frac{v_0}{g}$ წამში მიაღწევს. უჩვენეთ, რომ ბურთი მაქსიმუმ $\frac{v_0^2}{2g}$ სიმაღლეზე შეიძლება ავიდეს.

ამოცანების ამოხსნა კვადრატული ფუნქციის გამოყენებით

ნამუშაო 1. უნდა აშენდეს 200 მ პერიმეტრის მქონე მართკუთხა ფორმის საქონლის სადგომი. რა ზომების უნდა აშენდეს იგი, რომ ფართობი იყოს უდიდესი?

ამოხსნა:

1. დავუშვათ, რომ 200 მ პერიმეტრის მქონე სადგომის სიგრძე არის x მ, დავწეროთ გამოსახულება, რომელიც უჩვენებს დამოკიდებულებას მის სიგრძესა და სიგანეს შორის:

$$b = (200 - 2x) : 2 = 100 - x$$

2. დავწეროთ საქონლის სადგომის ფართობის მის სიგრძეზე დამოკიდებულების მაჩვენებელი ფუნქცია:

$$S(x) = x(100 - x) \text{ ან } S(x) = -x^2 + 100x$$

3. $S(x) = -x^2 + 100x$ ფუნქციიდან გამოვყოთ სრული კვადრატი:

$$S(x) = -x^2 + 100x - 2500 + 2500 = -(x - 50)^2 + 2500$$

4. დავწეროთ წვეროს წერტილის კოორდინატები და გამოვიკვლიოთ ამოცანა.

წვეროს წერტილი იქნება (50; 2500). ვინაიდან $a < 0$, ეს წერტილი $S(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმია. ე.ი. ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას იძენს როცა $x = 50$ და ეს მნიშვნელობა 2500-ის ტოლია. აქედან ჩანს, რომ 200 მ პერიმეტრიანი მართკუთხა ფორმის საქონლის სადგომის ფართობი 2500 მ² რომ იყოს, თუ მისი სიგრძე 50 მ-ია, სიგანეც 50 მ უნდა იყოს (ანუ კვადრატული ფორმისა უნდა იყოს).

ნამუშაო 2. უნივერსიტეტის სტუდენტების ჯგუფმა გახსნა კომპიუტერის დეტალების მწარმოებელი კომპანია. მათ მიერ ამ წარმოებიდან მიღებული შემოსავალი (მანეთობით) შეიძლება $P(x) = -2x^2 + 100x - 800$ ფუნქციით - გამოისახოს. სადაც x გვიჩვენებს კვირის განმავლობაში წარმოებული დეტალების რაოდენობას.

ა) იპოვეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები. რომელ ინფორმაციას გამოსახავენ სინამდვილეში ეს კოორდინატები?

ბ) იპოვეთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები. რომელ ინფორმაციას გამოსახავენ სინამდვილეში ეს კოორდინატები?

გ) იპოვეთ შემოსავლის გამომსახველი ფუნქციის გრაფიკის წვეროს წერტილის კოორდინატები. რომელ ინფორმაციას შეესაბამება რეალობაში ეს ინფორმაცია?

დ) გრაფიკის სახით წარმოადგინეთ მოგების გამომსახველი ფუნქცია.

ამოხსნა:

ა) გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებში ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება $P(x) = 0$.

$$-2x^2 + 100x - 800 = 0$$

$$-2(x^2 - 50x + 400) = 0$$

$$-2(x - 10)(x - 40) = 0$$

$$x = 10 \text{ ან } x = 40$$

ამოცანების ამოხსნა კვადრატული ფუნქციის გამოყენებით

(10; 0) და (40;0) წერტილები გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია. ამ წერტილების ორდინატი მოგების ნულს უჩვენებს. ანუ როცა დეტალების რაოდენობა იქნება 10 და ასევე 40, მოგება ნულის ტოლი იქნება. ამ წერტილს ეკონომიკაში “გარდატეხის” წერტილს უწოდებენ.

ბ) Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილი:

$P(0) = -2 \cdot 0 + 100 \cdot 0 - 800 = -800$. Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილია (0; -800). ამ ინფორმაციის თანახმად, თუ კომპანია არც ერთ დეტალს არ დამზადებს, მისი კვირეული დანაკარგი 800 მანეთი იქნება.

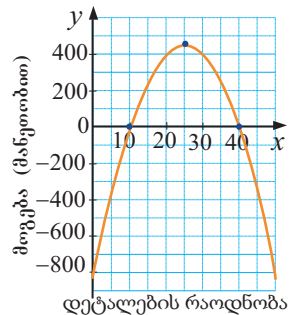
გ) ფუნქციის გრაფიკის წვეროს წერტილის აბსცისა

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2 \cdot (-2)} = 25;$$

ორდინატი: $P(25) = -2 \cdot 25^2 + 100 \cdot 25 - 800 = 450$

წვეროს წერტილის კოორდინატებია: (25;450). ეს ინფორმაცია უჩვენებს, რომ კომპანიას კვირაში მაქსიმუმ 450 მანეთის მოგება შეუძლია. ეს კი შესაძლებელია 25 დეტალის დამზადების დროს.

დ) $P(x) = -2x^2 + 100x - 800$ ფუნქციის გრაფიკი



ნიმუში 3. სპორტული მაისური 8 მანეთი ღირს მაღაზია დღეში 10 მაისურს ყიდის. მაღაზიის პატრონი ფიქრობს, რომ ერთი მაისურის ფასის ყოველ ჯერზე 2 მანეთით გაიზარდა, 5 მაისურით მეტის გაყიდვას გამოიწვევს. მაისურის რამდენ მანეთად გაყიდვის შემთხვევაში იქნება გაყიდვიდან შემოსული ფული მაქსიმალური?

1. თუ 2 მანეთიანი გაიზარდეს რაოდენობას x -ად ჩავთვლით, მაშინ ერთი მაისურის ფასი $(8 - 2x)$ იქნება.

2. ყოველდღიურად გაყიდული მაისურების რაოდენობა $(10 + 5x)$ იქნება.

3. **რეალიზაციიდან შემოსული თანხა = მაისურის ფასი $\times$ მაისურების რაოდენობა**

$$S(x) = (8 - 2x)(10 + 5x) = 80 + 40x - 20x - 10x^2 = -10x^2 + 20x + 80$$

$S(x) = -10x^2 + 20x + 80$ ფუნქცია გამოსახავს გაყიდვიდან შემოსულ ფულს.

ამ ფუნქციის წვეროს წერტილის კოორდინატებია: $m = -\frac{b}{2a} = 1$

$$S(1) = -10 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1 + 80 = 90$$

(1; 90) წვეროს წერტილის კოორდინატებია. მაშასადამე, სპორტული მაისურების ერთი ცალი თუ გაიყიდება $8 - 1 \cdot 2 = 6$ მანეთად, მაისურების გაყიდვიდან შემოსული ფული მაქსიმუმ 90 მანეთი იქნება (თუ მაღაზიის მეპატრონის მოსაზრება სწორია).

სასარგებლოა იცოდეთ

თვითღირებულება = ერთი ერთეულის თვითღირებულება $\times$ საქონლის რაოდენობაზე
საერთო შემოსავალი = ერთი ცალი სარეალიზაციო ფასი $\times$ გაყიდული საქონლის რაოდენობა

მოგება = საერთო შემოსავალი - თვითღირებულება

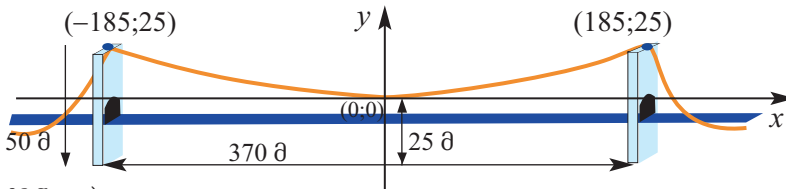
ამოცანების ამოხსნა კვადრატული ფუნქციის გამოყენებით

- 1 > **ფართობი.** ელდარი სხვადასხვა მართკუთხედებს ხაზავს. თუმცა ამ მართკუთხედების სიგრძისა და სიგანის ჯამი ყოველთვის 12 სმ-ია.
 ა) შეადგინეთ ცხრილი სიგანისა და სიგრძის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის;
 ბ) ჩათვალეთ მართკუთხედის სიგანე x -ად და დაწერეთ ფართობის მაჩვენებელი გამოსახულება;
 გ) დაწერეთ მართკუთხედის ფართობი სიგანეზე დამოკიდებული ფუნქციის სახით;
 დ) მართკუთხედის რამდენ სანტიმეტრიან სიგანის შემთხვევაში იქნება ფართობი უდიდესი?

- 2 > **ბიზნესი. მაქსიმალური შემოსავალი.** მგზავრთა გადაყვანით დასაქმებული სატრანსპორტო კომპანია დღიურად 200 მგზავრს ემსახურება. ერთი ბილეთის ფასი 5 მანეთია. კომპანიის პატრონი ვარაუდობს, რომ ყოველი 50 კაპიკით ფასის მომატება 10 მგზავრით შემცირებას გამოიწვევს.
 ა) რამდენჯერ ასეთი გაძვირების შედეგად მიიღებს კომპანია მაქსიმალურ შემოსავალს?
 ბ) ამ ფასმომატებებით კომპანიის დღიური შემოსავალი მაქსიმუმ რამდენი მანეთი შეიძლება იყოს?

- 3 > **გამოკვლევა:**
<http://questgarden.com/127/37/4/110617141445/process.htm> და
<http://passyworldofmathematics.com/sydney-harbour-bridge-mathematics/>
 მისამართებზე კლასშიც და სახლშიც შეგიძლიათ ნახოთ ფილმები ხიდების კონსტრუქციების შესახებ.

ნიმუში 4. ხიდის სიმძიმის დამჭერი ბაგირი (ტროსი), რომელთა შორის მანძილი 370 მ-ია, ორ საყრდენ ბოძზეა დამაგრებული. მას პარაბოლის ფორმა აქვს მიღებული და მისი ყველაზე ქვედა წერტილი მიწიდან 25 მ-ის სიმაღლეზეა. თითოეული საყრდენის სიმაღლე 50 მ-ია. ბაგირზე საყრდენი ბოძიდან 60 მ-ზე მდებარე წერტილი დედამიწიდან რა სიმაღლეზე იმყოფება?



ამოხსნა: ა) დახაზეთ შესაბამისი პარაბოლა სქემატურად, მასზე აღნიშნეთ ამოცანაში მოცემული ინფორმაციები.

კოორდინატა სათავე $(0;0)$ პარაბოლის წვეროს წერტილში (ბაგირის ყველაზე ქვედა წერტილში) მოათავსეთ.

კოორდინატა სათავედან საყრდენებამდე მანძილსა და საყრდენების სიმაღლის შესახებ ინფორმაცია: $(-185;25)$, $(185;25)$.

ბ) სამაგრი ტროსის ფორმის $f(x) = ax^2$ -ით გამოსახვა შეიძლება. იპოვეთ a
 $(185;25)$ წერტილის მიხედვით: $25 = a \cdot 185^2$, $a = \frac{25}{185^2}$, $f(x) = \frac{1}{1369} x^2$

გ) ერთ-ერთი საყრდენიდან 60 მ მანძილზე მყოფი წერტილი პარაბოლის წვეროს წერტილიდან $185 - 60 = 125$ (მ) მანძილზე იქნება.

$f(125) = \frac{1}{1369} \cdot 125^2 = \frac{15625}{1369} \approx 11,4$ ამიტომ აღნიშნული წერტილი დედამიწიდან დაახლოებით 36,4 მ სიმაღლეზეა.

ამოცანების ამოხსნა კვადრატული ფუნქციის გამოყენებით

4 > მოძრაობა. ზევით ასროლილი ბურთის t წამის შემდეგ მიღწეული h სიმაღლის (მეტრობით) მოძებნა შეიძლება ფორმულით: $h = -5t^2 + 20t + 1$.

ა) რამდენი წამის შემდეგ მიაღწევს ბურთი 16 მ სიმაღლეს?

ბ) მაქსიმუმ რა სიმაღლეზე მიაღწევს ბურთი?

გ) რამდენი წამი დარჩება ბურთი ჰაერში?

5 > კონცერტზე გაყიდული ბილეთების რაოდენობა (N) და ბილეთების გაყიდვის დღეთა (n) შორის დამოკიდებულება ასეთია: $N(n) = -10n^2 + 60n + 200$ მერამდენე დღეს გაიყიდა ყველაზე მეტი ბილეთი? იპოვეთ იმ დღეს გაყიდული ბილეთების რაოდენობა.

6 > ხიდის დამჭერ ბაგირს ორ საყრდენს შორის

აქვს პარაბოლის ფორმა, რომელიც მოიცემა

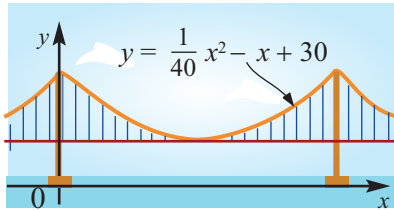
ფორმულით $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$ შერჩეულ

კოორდინატთა სისტემაში, ისე როგორც ნაჩ-

ვენებია სურათზე (x, y მეტრებში). ბაგირის

ყველაზე ქვედა წერტილი ხიდზეა. წყლის ზედაპირიდან რა სიმაღლეზე იმყოფება

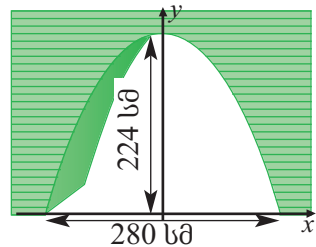
ხიდი?



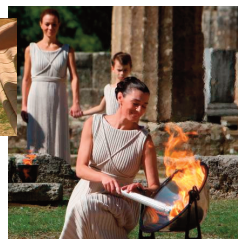
7 > 1) საკოორდინატო სისტემის ისეთად მიღებით, როგორიც სურათზეა ნაჩვენები დაწერეთ თაღის სახით მოცემული ზომების შესაბამისი კვადრატული ფუნქცია.

2) იპოვეთ თაღის სიმაღლე მისი ერთი მხრიდან:

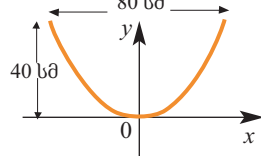
ა) 70 სმ; ბ) 1 მ 20 სმ მანძილზე მყოფ წერტილებში.



8 > ოლიმპიური ტრადიცია. ტრადიციის თანახმად, ოლიმპიური ცეცხლი ითება ქალაქ ოლიმპიაში ჰერას ტაძრის ნანგრევების წინ პარაბოლისებრ სარკეში. ეს აღიქმება, როგორც მზისგან აღებული ცეცხლის სიმბოლო. პირველ ჩირაღდანს ანთებენ სპეციალურ ტანსაცმელში გამოწყობილი ვოგონები.



სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით დაწერეთ სარკის ღერძული კვეთისას წარმოშობილი პარაბოლის მაჩვენებელი ფუნქცია. კოორდინატთა სათავედ აირჩიეთ წერტილი, რომელიც ჩაზნექილი სარკის შუაში, ყველაზე ღრმა წერტილშია.

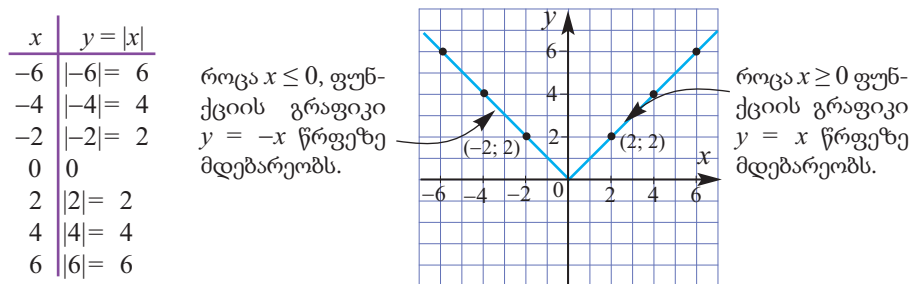


$y = |x|$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

ცნობილია, რომ x -ის აბსოლუტური მნიშვნელობა: $|x| = \begin{cases} x & \text{თუ } x > 0 \\ 0 & \text{თუ } x = 0 \\ -x & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$

ავაგოთ $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი.

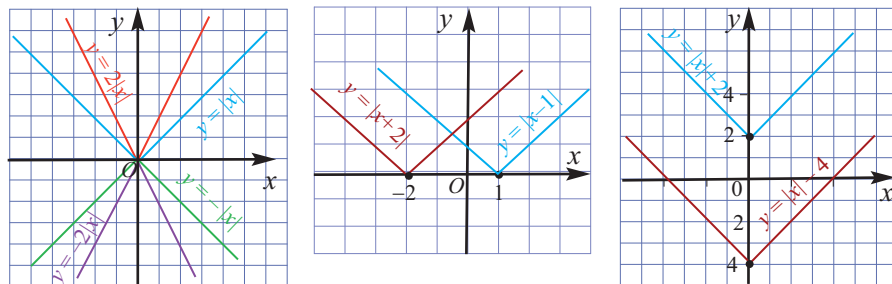
$y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი ორი სხივისაგან I და II მეოთხედების ბისექტრისებისაგან შედგება. $(0;0)$ წერტილი გრაფიკის წვეროს წერტილია.



$y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ. იმიტომ, რომ გრაფიკის თითოეულ $(x; y)$ წერტილიდან ერთად Oy ღერძის მიმართ სიმეტრიული $(-x; y)$ წერტილიც გრაფიკს ეკუთვნის.

ა) გამოიკვლიეთ $y = |x|$, $y = 2|x|$ და $y = -|x|$, $y = -2|x|$ ფუნქციების ერთი და იგივე კოორდინატა სისტემაში აგებული გრაფიკები.

ბ) გამოიკვლიეთ $y = |x + 2|$ და $y = |x - 1|$ ფუნქციების, ამასთანავე $y = |x| + 2$ და $y = |x| - 4$ ფუნქციების გრაფიკები.



ამ გრაფიკების მიხედვით შეიძლება მოვახდინოთ ქვემოთ მოცემული განზოგადება.

$y = a|x - m| + n$ ფუნქციის ძირითადი თვისებები:

• $y = a|x - m| + n$ ფუნქციის გრაფიკი $y = a|x|$ ფუნქციის გრაფიკის $|m|$ ერთეულით ჰორიზონტალურად (როცა $m > 0$ მარჯვნივ, როცა $m < 0$ მარცხნივ), $|n|$ ერთეულით ვერტიკალურად (როცა $n > 0$ ზევით, როცა $n < 0$ ქვევით) მოცურება.

• გრაფიკის წვეროს წერტილია და გრაფიკი $x = m$ წრფის მიმართ სიმეტრიულია.

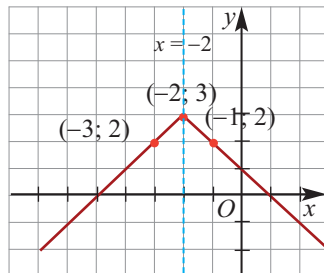
• როცა $a > 0$, გრაფიკის შემდგენი სხივები ზევითაა მიმართული, ხოლო როცა $a < 0$, მაშინ- ქვევითაა მიმართული.

$y = |x|$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

ნიმუში 1. ააგეთ $y = -|x + 2| + 3$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა:

1. საკოორდინატო სისტემაზე აღნიშნეთ გრაფიკის $(-2; 3)$ წვეროს წერტილი.
2. აღნიშნეთ ფუნქციის შესაბამისი რომელიმე სხვა, მაგალითად $(-3; 2)$ წერტილი.
3. აღნიშნეთ $x = -2$ სიმეტრიის ღერძის მიმართ $(-3, 2)$ წერტილის სიმეტრიული $(-1; 2)$ წერტილი.
4. ვინაიდან $a = -1 < 0$, ააგეთ აღნიშნული სამ წერტილზე გამავალი გრაფიკი, რომლის შტოები ქვევითაა მიმართული.



ნიმუში 2. დაწერეთ ფუნქცია გრაფიკისა და მოცემული წერტილების მიხედვით.

ამოხსნა:

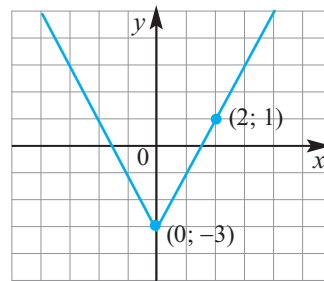
1. გრაფიკის წვერო $(0, -3)$ წერტილშია.
2. $y = a|x - m| + n$ განტოლებაში m -ის და n -ის ადგილას ჩავწეროთ შესაბამისი 0 და -3 მნიშვნელობები:
 $y = a|x - 0| + (-3); \quad y = a|x| - 3$

გრაფიკზე $(2; 1)$ წერტილის კოორდინატები შევიტანოთ $y = a|x| - 3$ ფორმულაში:

$$1 = a|2| - 3; 1 = 2a - 3; 4 = 2a; a = 2$$

გრაფიკის შესაბამისი ფუნქცია იქნება: $y = 2|x| - 3$.

შეპოწმება: ამისათვის ავაგოთ $y = 2|x| - 3$ ფუნქციის გრაფიკი. მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ გრაფიკის შტოები ზევით იყოს მიმართული და ამასთან $y = |x|$ გრაფიკთან შედარებით ორდინატა ღერძის მიმართ უფრო მეტად იყოს შემჭიდროებული.



სასწავლო დაგეგმვები

- 1 >** $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკის მოცურებით ააგეთ $y = |x + 2|$; $y = |x - 2|$ და $y = |x| + 2$ ფუნქციების გრაფიკები და დაწერეთ განმარტებული მოსაზრებები.

- 2 >** მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

ა) განსაზღვრეთ $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკთან შედარებით “შეზოჩილია” ან “გაფართოებულია” თუ იგივე “სიგანისა”.

ბ) განსაზღვრეთ გრაფიკის შტოები ქვევითაა მიმართული თუ ზევით;

გ) $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ააგეთ ფუნქციების გრაფიკები.

$$1) y = \frac{1}{2} |x|$$

$$3) y = |x + 5|$$

$$5) y = |x| - 6$$

$$2) y = |x| + 4$$

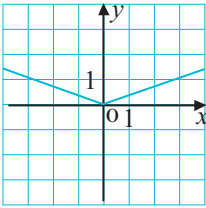
$$4) y = 2|x + 6| - 10$$

$$6) y = -|x - \frac{1}{4}| - 8$$

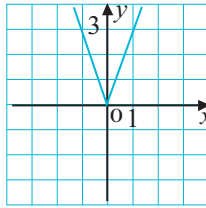
$y = |x|$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი

3 > რომელი გრაფიკი რომელ ფუნქციას შეესაბამება?

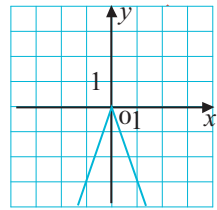
$$f(x) = 3|x|$$



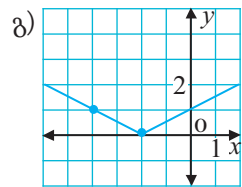
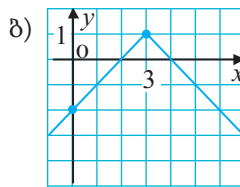
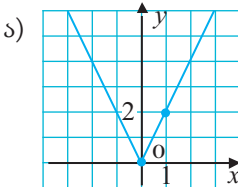
$$f(x) = -3|x|$$



$$f(x) = \frac{1}{3}|x|$$



4 > დაწერეთ გრაფიკების შესაბამისი ფუნქციები.



5 > უმრავლეს გრაფიკულატორზე მოდულის ნიშანი **abs**-ით აღინიშნება. ააგეთ ფუნქციის გრაფიკები გრაფიკულატორის მეშვეობით.

$$y = -|x - 2| + 5;$$

$$y = -3,2|x| + 7$$

$$y = |0,05x - 3| + 0,02$$

$$y = -3,75|x + 1,5| - 5;$$

$$y = 1,5|x - 3| + 6$$

$$y = 1,27|2x - 3|$$

6 > მუსიკალური ჯგუფის ახალგამოსული მუსიკალური ალბომის გაყიდვა ჯერ მუდმივი რიცხვით იზრდებოდა. შემდეგ კი იგივე რიცხვით შემცირდა. თუ გაყიდული ალბომების რაოდენობას ავლნიშნავთ n -ით (ასეულობით), მისი ცვლილება შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით: $n = -2|t - 20| + 40$. t (კვირაობით) დროს გვიჩვენებს.

ა) ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი $0 \leq t \leq 40$ მნიშვნელობისათვის.

ბ) მერამდენე კვირაში გაიყიდა ყველაზე მეტი ალბომი? რამდენი ალბომი გაიყიდა იმ კვირაში?

7 > სპორტული საქონლის მაღაზიის საცურო კოსტუმებისა და მოწყობილობების რეალიზაციიდან მიღებული შემოსავალი (ათას მანეთობით) $M(t) = -0,9|t - 6| + 5$ ფუნქციით იცვლება. სადაც t (თვეობით) დროს გვიჩვენებს.

ა) ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი $0 \leq t \leq 12$ მნიშვნელობისათვის.

ბ) მერამდენე თვეში მიაღწია გაყიდვამ მაქსიმუმს? იპოვეთ ამ თვის შემოსავალი.

8 > შეასრულეთ დავალებები მოცემული ფუნქციების მიხედვით.

1) განსაზღვრეთ Ox და Oy ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

2) ააგეთ გრაფიკები ერთი და იგივე საკოორდინატო სისტემაში;

3) განსაზღვრეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

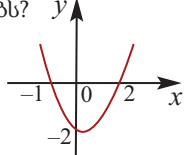
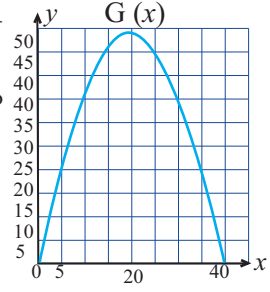
ა) $y = |3x|$ და $y = 3|x|$

ბ) $y = |-4x|$ და $y = 4|x|$

გ) $y = |x - 6|$ და $y = |x| - 6$

დ) $y = |x + (-2)|$ და $y = |x| + 2$

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 1 > b -სა და c -ს რა მნიშვნელობებისათვის გაივლის $y = x^2 + bx + c$ პარაბოლა $A(-1; 6)$ და $B(0; 2)$ წერტილებზე?
- 2 > $y = x^2 - 2x - 15$ ფუნქციის გრაფიკი რომელ წერტილებში გადაკვეთს საკოორდინატო ღერძებს?
- 3 > $y = x^2$ პარაბოლის 3 ერთეულით მარცხნივ და 2 ერთეულით ქვემოთ მოცურებით რომელი ფუნქციის გრაფიკი მიიღება?
- 4 > k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $y = x^2 + 6x + k$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა 1-ის ტოლი?
- 5 > უჩვენეთ $y = x^2 - 2x + 3$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.
- 6 > იპოვეთ b და ააგეთ გრაფიკი თუ $y = x^2 + bx + 3$ პარაბოლის წვეროს წერტილის ორდინატი ტოლია -1 -ის. რამდენი შესაძლო შემთხვევა არსებობს?
- 7 > დაწერეთ სურათზე მოცემული პარაბოლის შესაბამისი კვადრატული ფუნქცია.
 
- 8 > დედამიწიდან $v_0 = 20$ მ/წმ სიჩქარით ზემოთ ასროლილი ბურთის ასროლის სიმაღლის (მეტრობით) t (წმ) დროზე დამოკიდებულება $h(t) = -5t^2 + 20t$ ფორმულითაა მოცემული. იპოვეთ ბურთის მიღწევის უმაღლესი დონე.
- 9 > **ფიზიოლოგია.** მეცნიერებმა დაადგინეს, რომ ფეხით სიარულისას მოხმარებული ენერგიის $y = 0,00849(x - 90,2)^2 + 51,3$ ($50 \leq x \leq 150$) ფუნქციით განსაზღვრა შეიძლება. სადაც x უჩვენებს პიროვნების სიჩქარეს (მ/წთ-ობით). ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი მოცემული განსაზღვრის არისათვის. როგორ იცვლება ენერგიის მოხმარება სიჩქარის ზრდის კვალობაზე? რომელი სიჩქარის შემთხვევაშია ენერგიის მოხმარება მინიმალური?
- 10 > **ბიზნესი. მაქსიმალური მოგება.** გამოკვლევებმა უჩვენეს, რომ გამომცემლობის შემოსავალი $G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x$ ფუნქციით იცვლება. სადაც x არის გაყიდული წიგნების რაოდენობა (ათასობით) $G(x)$ კი - შესაბამისი შემოსავალი (ათას მანეთობით).
 
 - ა) რამდენი წიგნის რეალიზაციიდან მიიღო 32 ათასი მანეთი მოგება გამომცემლობამ?
 - ბ) რამდენი წიგნის გაყიდვისას მიიღებდა მაქსიმალურ მოგებას გამომცემლობა?
 - გ) როგორ განმარტავდით Δ პუნქტში მიღებულ 2 პასუხს?
- 11 > კარავის გარე ხედის $y = -\frac{3}{4}|x - 2| + 1,5$ ფუნქციით გამოსახვა შეიძლება. x და y უჩვენებს ზომებს მეტრობით. ჩათვალით, რომ Ox ღერძი მიწის ზედაპირზე კარავის ფუძეზე მდებარეობს. რა ზომებისაა კარავი გარედან?
- 12 > იპოვეთ a და b მნიშვნელობები თუ $f(x) = |ax + b|$ ფუნქციის გრაფიკი აბსცისთა ღერძს $(-\frac{3}{2}; 0)$ წერტილში, ხოლო ორდინატთა ღერძს $(0; 6)$ წერტილში გადაკვეთს.

ორ წერტილს შორის მანძილი

ორ წერტილს შორის მანძილი

• რიცხვით ღერძზე



$$PR = |a - b| \text{ ან } PR = |b - a|$$

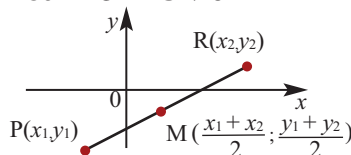
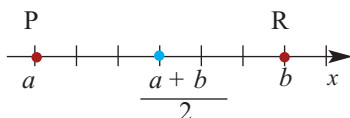
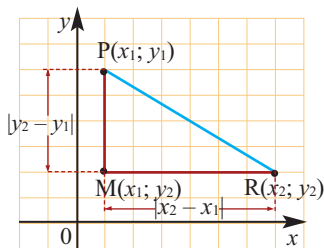
• საკოორდინატო სიბრტყეზე

P და R წერტილებს შორის მანძილი, ანუ PR მონაკვეთის სიგრძის ΔMPR -დან პითაგორას თეორემის გამოყენებით პოვნა შეიძლება. ვინაიდან MR და MP კათეტების სიგრძეები შესაბამისად $|x_2 - x_1|$ და $|y_2 - y_1|$ ტოლია:

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

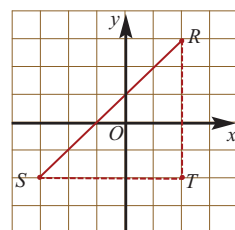
ეს ფორმულა ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულაა.

ორ წერტილს შორის მანძილის შესახებ ამოცანების ამოხსნისას ხშირ-ხშირად გამოიყენება მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატების ფორმულაც.



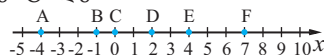
- 1 > R და S წერტილებს შორის მანძილი გამოთვალეთ ორი ხერხით:

- 1) საკოორდინატო სიბრტყეზე ერთეულოვანი უჯრების დათვლით პითაგორას თეორემის გამოყენებით.
- 2) შესაბამისი წერტილების კოორდინატების სახით განსაზღვრით, ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით.



- 2 > გამოთვალეთ მანძილი რიცხვით ღერძზე მოცემულ წერტილებს შორის.

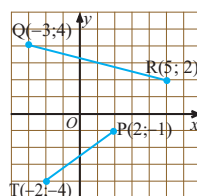
- ა) A და D ბ) B და E გ) C და F



- 3 > გამოთვალეთ მანძილი მოცემულ წერტილებს შორის.

- ა) 1) A(-1; 3) და B(5; 11);
2) C(-3; 2) და D(1; 5);
3) E(6,5; -2,4) და F(-5,5; 2,6).

ბ)



- 4 > იპოვეთ იმ ფიგურების პერიმეტრები, რომელთა წვეროები მოცემულ წერტილებშია:

- ა) სამკუთხედი: A(-2; -1), B(2; 2), C(6; -1)
ბ) კვადრატი: A(-4; -3), B(0; -2), C(-1; 2), D(-5; 1)

- 5 > იპოვეთ სამკუთხედის CM მედიანის სიგრძე, თუ ამ სამკუთხედის წვეროები A(-3; 3), B(1; 7), C(2; 1) წერტილებშია.

- 6 > ქვემოთ მოცემულია RT მონაკვეთის R წვეროსა და S შუაწერტილის კოორდინატები.

- 1) ამ კოორდინატების მიხედვით განსაზღვრეთ T წერტილის კოორდინატები.
2) იპოვეთ RT მონაკვეთის სიგრძე სხვადასხვა ხერხებით.

- ა) R(-1; -3), S(-1; 2)

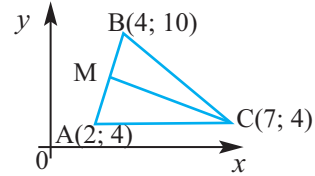
- ბ) R(2; 6), S(-1; 2)

- გ) R(-3; 0), S(2; 12)

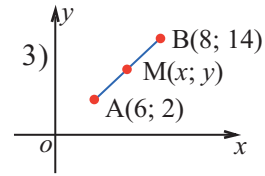
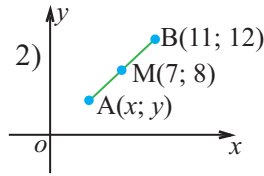
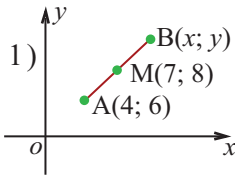
ორ წერტილს შორის მანძილი

- 7 > მოცემულია LM მონაკვეთი. მისი წვეროებია: $L(-5; -6)$ და $M(7; 10)$. X წერტილი LM მონაკვეთზე მდებარეობს და $LX = \frac{1}{4} LM$. განსაზღვრეთ X წერტილის კოორდინატები.

- 8 > M წერტილი AB გვერდის შუაწერტილია. იპოვეთ მანძილი C და M წერტილებს შორის.



- 9 > M წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ:
 ა) ცვლადების მნიშვნელობები; ბ) AB მონაკვეთის სიგრძე.



- 10 > ააგეთ სამკუთხედები მოცემული წვეროს წერტილების კოორდინატების მიხედვით. რომელია მართკუთხა სამკუთხედი? განმარტეთ. დაასაბუთეთ თქვენი მოსაზრება იმ წრფეთა განტოლებების დაწერით, რომლებიც მოიცავენ სამკუთხედის გვერდებს.

ა) $(1; 2), (2; 3), (5; 0)$ ბ) $(2; 1), (4; 2), (2; 6)$ გ) $(3; 2), (5; 1), (2; 5)$

- 11 > k -ს რა მნიშვნელობისათვისაა მანძილი $A(6; -4)$ და $B(2; k)$ წერტილებს შორის 5 ერთეულის ტოლი? რამდენი ასეთი წერტილი არსებობს?

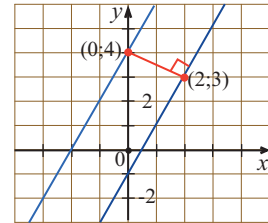
- 12 > Ox ღერძზე იპოვეთ წერტილები, რომლებიც ერთნაირად არიან დაშორებული წერტილებიდან: $(0; 2)$ და $(8; 6)$.

- 13 > საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახულების მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

ა) დაწერეთ წრფეთა განტოლებები.

ბ) განმარტეთ ამ წრფეთა პარალელობა მათი განტოლებების მიხედვით.

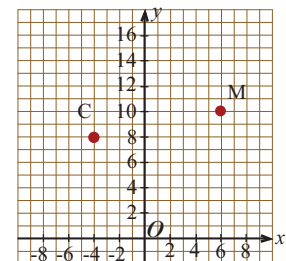
გ) იპოვეთ მანძილი წრფეთა შორის.



- 14 > მეჰრიბანის სახლი საკოორდინატო სიბრტყეზე $M(6; 10)$ წერტილითაა აღნიშნული. ჯალილის სახლი მეჰრიბანის სახლიდან 2 ერთეულით სამხრეთით, 10 ერთეულით დასავლეთით მდებარეობს. სკოლა ორივეს სახლიდან ტოლ მანძილზეა.

ა) საკოორდინატო სიბრტყეზე აღნიშნეთ ჯალილის სახლის კოორდინატები.

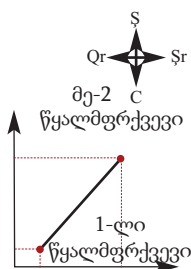
ბ) წარმოადგინეთ სკოლის მდებარეობის შესაძლო ვარიანტები. გამოთვლებით დააზუსტეთ, რომ სკოლა ორივეს სახლიდან ნამდვილად ერთი და იგივე მანძილზე მდებარეობს და ერთ ნიმუშზე უჩვენეთ.



მითითება: გამოიყენეთ მონაკვეთის შუამართობის თვისება.

ორ წერტილს შორის მანძილი

- 15> ოსტატმა მართკუთხა ფორმის ნაკვეთის სხვადასხვა ადგილებში უნდა დააყენოს დაწვიმების გზით სარწყავი სისტემა. ამისათვის მან უნდა შეიძინოს მილი, რომელიც შეაერთებს პირველ და მეორე წყალმფრქვევებს. მას დაავიწყდა ამ მანძილის გაზომვა და წავიდა მაღაზიაში. მაგრამ ოსტატმა დაიმახსოვრა რამდენიმე განზომილება.



პირველი წყალმფრქვევი იმყოფება მწვანე ნაკვეთიდან 3 მ აღმოსავლეთით და 1 მ ჩრდილოეთით, მეორე წყალსაფრქვევი კი 15 მ აღმოსავლეთით, 10 მ ჩრდილოეთით მდებარეობს. ოსტატს საშუალო სკოლაში შესწავლილი რომელი მათემატიკური ცოდნის გამოყენებით შეუძლია განსაზღვროს მანძილი ორ წყალსაფრქვევს შორის და არ გახდეს აუცილებელი სახლში დაბრუნება?

გეგმაზე დაწერეთ მოცემული რიცხვითი ინფორმაციები და ამოხსენით ამოცანა.

- 16> **მასშტაბი.** $\triangle ABC$ -ს წვეროები შემდეგ წერტილებშია: (2;4), (5;4) და (5;1)

ა) იპოვეთ $\triangle ABC$ -ს პერიმეტრი

ბ) გაზარდეთ წვეროს კოორდინატების მნიშვნელობა 2-ჯერ; 3-ჯერ და კვლავ გამოთვალეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

გ) განმარტეთ დამოკიდებულება წვეროს წერტილების კოორდინატების ზრდასა და პერიმეტრის ზრდას შორის.

- 17> ორი მხედარი გამოვიდა ცხენებით

სასიერნოდ. მათ დაიწყეს მოძრაობა ერთი ადგილიდან და ერთდროულად. ერთმა ცხენით გაიარა 2 კმ დასავლეთით და 3 კმ სამხრეთით, ხოლო მეორემ 4 კმ აღმოსავლეთით და 5 კმ ჩრდილოეთით. იპოვეთ მანძილი მხედრებს შორის.

- 18> საკოორდინატო სიბრტყეზე დახაზეთ ოთხკუთხედი, რომლის წვეროების წერტილებია: A(1; 1), B(5; 9), C(2; 8) და D(0; 4)

ა) დაასაბუთეთ, რომ მოცემული ოთხკუთხედი ტრაპეციაა.

ბ) დაასაბუთეთ, რომ მოცემული ოთხკუთხედი ტოლფერდა ტრაპეციაა.

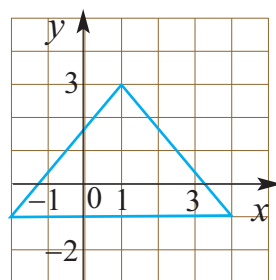
- 19> ა) ჩაიხაზეთ ნახაზი რვეულში.

ბ) იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.

გ) განსაზღვრეთ თითოეული გვერდის შუაწერტილის კოორდინატები.

დ) დახაზეთ ახალი სამკუთხედი, რომელიც მიმდევრობით აერთებს შუაწერტილებს.

ე) შეადარეთ მოცემული ორი სამკუთხედის პერიმეტრები.



- 20> წვეროების კოორდინატების მიხედვით განსაზღვრეთ სამკუთხედის სახე: ტოლგვერდა, ტოლფერდა, სხვადასხვაგვერდა.

ა) (2; 0), (0; 8), (-2; 0)

ბ) (4; 1), (1; 2), (6; 4)

გ) (1; 9), (4; 2), (-3; 2)

დ) (2; 5), (8; 2), (4; 1)

ე) (5; 1), (4; 0), (3; 5)

ვ) (4; 4), (8; 1), (6; 5)

ორ წერტილს შორის მანძილი

- 21 > Excel პროგრამის დახმარებით გამოთვალეთ მანძილი მოცემულ ორ წერტილს შორის.

1-ელ სტრიქონზე დაწერეთ თითოეული სვეტის დასახელება

მე-2 სტრიქონზე დაწერეთ თითოეული კოორდინატის შესაბამისი რიცხვითი ინფორმაციები

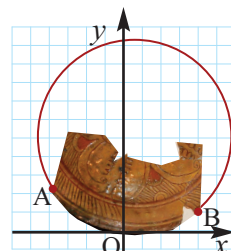
	A	B	C	D	E
1	X1	Y1	X2	Y2	Distance
2	54	120	113	215	
3					
4					

დაწერეთ ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოთვლის ფორმულა

- ა) (5; 120), (113; 215) ბ) (68; 153), (175; 336)
 გ) (421; 454), (502; 798) დ) (837; 980), (612; 625)

- 22 > **არქეოლოგია. მცირე საპროექტო სამუშაო.** ქვემოთ მოცემულია არქეოლოგიური გათხრების დროს ნაპოვნი თევზის ნამტვრების მიხედვით მისი ნამდვილი ზომის პოვნის პრობლემის გადაწყვეტისათვის გადადგმული ნაბიჯები. ამოხსენით ამოცანა ამ ნაბიჯების მიხედვით.
- შეადგინეთ გამოყენებული მათემატიკური ცნებების შეძლებისდაგვარად ვრცელი სია. შეადგინეთ ამ ცნებების განმარტებითი ლექსიკონი. დაწერეთ განმარტებები სურათებითა და ნიმუშებით.

1. თევზის ნატეხი საკოორდინატო სისტემაშია მოთავსებული. წრიულ ნაწილზე სამი წერტილის (A, O, B წერტილები) აღნიშვნით სქემატურად ჩაიხაზეთ რვეულში.



2. წრეწირის ცენტრის განსაზღვრისათვის:

ა) გაავლეთ AO და OB მონაკვეთების შუამართობები;

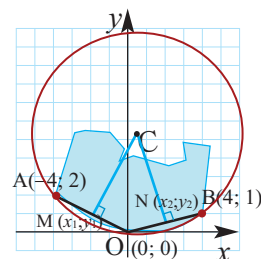
ბ) დაწერეთ იმ წრფეთა განტოლებები, რომლებიც მოიცავენ შუამართობებს.

♦ AO მონაკვეთის შუამართობის მომცავი წრფის განტოლების დაწერისათვის:

• იპოვეთ M შუაწერტილის კოორდინატები;

• განსაზღვრეთ AO მონაკვეთის მომცველი წრფის კუთხური კოეფიციენტი;

• შუამართობის ამ წრფესთან ურთიერთმართობულობის საფუძველზე იპოვეთ მისი კუთხური კოეფიციენტი და დაწერეთ წრფის განტოლება.



♦ OB მონაკვეთის შუამართობის მომცველი წრფის განტოლების დაწერისათვის:

• იპოვეთ N შუაწერტილის კოორდინატები;

• განსაზღვრეთ OB-ზე გამავალი წრფის კუთხური კოეფიციენტი.

• იპოვეთ შუამართობის მომცველი წრფის კუთხური კოეფიციენტი და დაწერეთ ამ წრფის განტოლება.

♦ წრეწირის ცენტრი შუამართობების გადაკვეთის წერტილია. მაშასადამე, შუამართობების მომცველი წრფეების განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემის ამონახსენი წრეწირის C ცენტრის კოორდინატებია.

♦ C წერტილიდან აღნიშნული წერტილებიდან თითოეულამდე არსებული მანძილის გამოთვლით იპოვეთ ამ წრეწირის რადიუსი. დაწერეთ თევზის დიამეტრის მიახლოებითი ზომა.

წრეწირის განტოლება

წრეწირის განტოლება

ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით შეიძლება კოორდინატთა სათავეში ცენტრის მქონე, r რადიუსიანი წრეწირის განტოლების დაწერა. წრეწირის ცენტრს $(0; 0)$ წერტილსა და მის ნებისმიერ $(x; y)$ წერტილს შორის მანძილი r რადიუსის ტოლია.

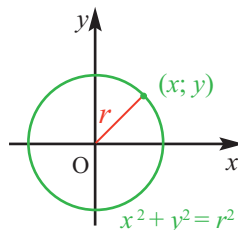
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

*მანძილი ორ წერტილს შორის
გამართივება*

ორივე მხარის კვადრატში აყვანა



კოორდინატთა სათავეში ცენტრის მქონე, r რადიუსიანი წრეწირის განტოლება:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

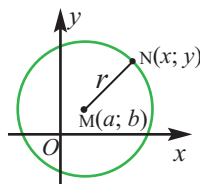
მაგალითად, კოორდინატთა სათავეში $(0; 0)$ ცენტრის მქონე განტოლებასა $x^2 + y^2 = 4$, რომლის რადიუსი 2-ის ტოლია.

$M(a; b)$ წერტილში ცენტრის მქონე r რადიუსიანი წრეწირზე ნებისმიერ $N(x; y)$ წერტილისათვის ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$.

აქედან ორივე მხარის კვადრატში ახარისხებით მივიღებთ ცენტრის $(a; b)$ წერტილში მქონე r რადიუსიანი წრეწირის განტოლებას:

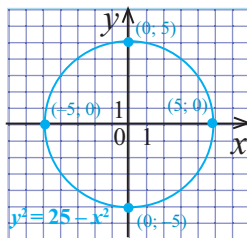
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

მაგალითად, ცენტრი $(3; 2)$ წერტილში და რადიუსი 4-ის მქონე წრეწირის განტოლება იქნება: $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 4$; $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$.



ნიმუში 1: საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ $y^2 = 25 - x^2$ განტოლებით მოცემული წრეწირი.

ამოხსნა: დაწეროთ განტოლება $x^2 + y^2 = 5^2$ სახით. როგორც ვხედავთ, $r = 5$ -ია. ავღნიშნოთ კოორდინატთა სათავედან 5 ერთეულ მანძილზე არსებული ოთხი წერტილი. მაგალითად, $(5; 0)$, $(-5; 0)$, $(0; 5)$, $(0; -5)$. გავავლოთ წრეწირი, რომელიც გადის ამ წერტილებზე.



ნიმუში 2: $A(2; 3)$ წერტილი იმ წრეწირზეა, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია. დაწერეთ ამ წრეწირის განტოლება.

ამოხსნა: კოორდინატთა სათავეში ცენტრის მქონე წრეწირის $x^2 + y^2 = r^2$, განტოლებაში შევიტანოთ A წერტილის კოორდინატები, $2^2 + 3^2 = r^2$, $r^2 = 13$. ამ წრეწირის განტოლება: $x^2 + y^2 = 13$

სასწავლო დავალებები

1 > დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და რადიუსია:

ა) 3

ბ) $2\sqrt{3}$

გ) $\sqrt{15}$

დ) $5\sqrt{2}$

ე) $\sqrt{22}$

წრეწირის განტოლება

- 2 > მოცემული ცენტრის, რადიუსის ან დიამეტრის მიხედვით დაწერეთ წრეწირის განტოლება.

ა) $(2; -11)$, $r = 3$

ბ) $(-4; 2)$, $d = 2$

გ) $(0; 0)$, $r = \sqrt{5}$

დ) $(6, 0)$, $r = \frac{2}{3}$

ე) $(-1; -1)$, $d = \frac{1}{4}$

ვ) $(-5, 9)$, $d = 2\sqrt{20}$

- 3 > $x^2 + y^2 = 169$ განტოლებით მოცემულ წრეწირზე იპოვეთ: ა) იმ წერტილის ორდინატი, რომლის აბცისაა 5; ბ) ორდინატი 0-ის მქონე წერტილის აბცისა.

- 4 > მოცემული განტოლებების მიხედვით განსაზღვრეთ წრეწირის ცენტრის კოორდინატები და რადიუსი. ააგეთ წრეწირი.

ა) $x^2 + y^2 = 36$

გ) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$

ბ) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$

დ) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$

- 5 > წრეწირის მოცემული განტოლების მიხედვით განსაზღვრეთ მისი ცენტრის წერტილის კოორდინატები და რადიუსი.

ნამუშა: იპოვეთ იმ წრეწირის ცენტრი და რადიუსი, რომელიც მოცემულია განტოლებით: $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$.

ამოხსნა: $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 4 = 0$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$$

წრეწირის ცენტრი $M(1; -2)$ წერტილია. რადიუსი კი $r = 3$ -ია.

ა) $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$

ბ) $x^2 + y^2 + 16x + 40y - 20 = 0$

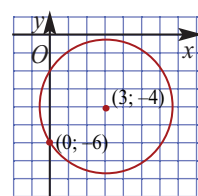
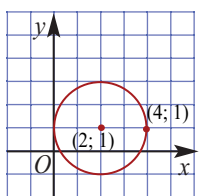
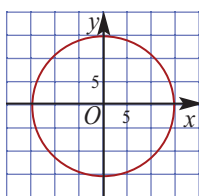
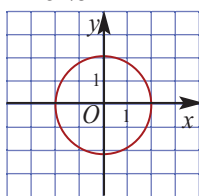
გ) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$

დ) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

ე) $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$

ვ) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

- 6 > დაწერეთ წრეწირის განტოლება საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახულების მიხედვით:



- 7 > ა) დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის დიამეტრის ბოლო წერტილებია: $(2; -1)$ და $(4; 7)$. იპოვეთ წერტილები, რომლებიც ამ წრეწირზე მდებარეობენ და რომელთა აბცისაა -1 .

ბ) დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და დიამეტრი 12 სმ-ია. ეს წრეწირი მოაცურეთ 6 ერთეულით მარჯვნივ, 5 ერთეულით ქვევით და დაწერეთ მისი განტოლება.

გ) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ წრეწირი 6 ერთეულით მარცხნივ და 3 ერთეულით ქვევით მოაცურეს. დაწერეთ წრეწირის ბოლო მდგომარეობის შესაბამისი განტოლება.

წრეწირის განტოლება

8 > მონაცემების მიხედვით დაწერეთ წრეწირის განტოლება.

ცენტრის წერტილი:	(0; 0)	(1; 2)	(-3; 5)	(-13; π)	(9; 10)
წრეწირზე აღებული წერტილი:	(0; 6)	(4; 2)	(1; 8)	(2; π)	(-7; 3)

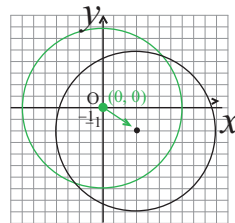
9 > ა) დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომლის რადიუსი 7-ის ტოლია და ცენტრი $(3; -2)$ წერტილებშია.

ბ) განსაზღვრეთ ამ წრეწირის ჰორიზონტალური დიამეტრის წვეროს წერტილების კოორდინატები.

მითითება: ამოხსენით ორი ხერხით.

1) $(0; 0)$ წერტილში ცენტრის მქონე წრეწირის მიხედვით მოცურებაში კოორდინატების შედარებით.

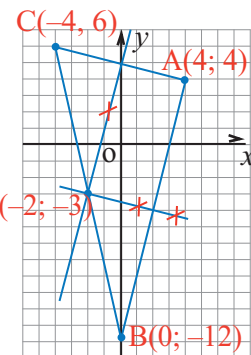
2) წრეწირის განტოლებაში $y = -2$ მნიშვნელობის შეტანითა და ამოხსნით.



10 > იპოვეთ $x^2 + y^2 - 6x + 9y + 8 = 0$ წრეწირის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

11 > გამოიკვლიეთ მოცემულ სამ წერტილზე გამავალი წრეწირის განტოლების ნიმუშები და შეასრულეთ დავალებები.

ა) **ნიმუში.** მობილური ტელეფონები სიგნალების ერთი გადამცემი სადგურიდან სხვა სადგურზე თანამგზავრების საშუალებით გადაცემით მუშაობენ. მობილური ოპერატორული კომპანია ეცდება, რომ გადამცემი სადგური ისე მოათავსოს, უფრო მეტ აბონენტს მოემსახუროს. წარმოიდგინეთ სამი დიდი ქალაქი $A(4; 4)$, $B(0; -12)$, $C(-4; 6)$ წერტილებში მდებარეობს. საკოორდინატო სისტემაზე 1 ერთეული 100 კმ მანძილს შეესაბამება. გადამცემი სადგური ამ ქალაქებიდან ტოლ მანძილზე მყოფ წერტილში უნდა განთავსდეს. დაწერეთ ამ წერტილის კოორდინატები და შესაბამისი წრეწირის განტოლება.



ამოხსნა: ჯერ შევავსოთ ეს წერტილები და ვიპოვოთ მიღებული სამკუთხედის გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილი. ეს $(-2; -3)$ წერტილია. ეს წერტილი იქნება წრეწირის ცენტრი. იგი სადგურის ადგილს გვიჩვენებს. მანძილი ცენტრსა და ნებისმიერ მოცემულ წერტილს შორის წარმოადგენს წრეწირის რადიუსს.

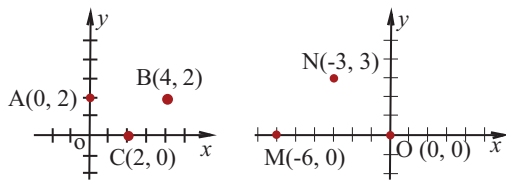
$$r = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-3 - (-12))^2} = \sqrt{4 + 81} = \sqrt{85}$$

$$\text{წრეწირის განტოლება: } (x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{85})^2, \quad (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 85$$

შენიშვნა. წრეწირის ცენტრის კოორდინატების შუამართობების შესაბამისი წრფივი განტოლებების განსაზღვრით, განტოლებათა სისტემის ამოხსნითაც შეიძლება იპოვოთ.

წრეწირის განტოლება

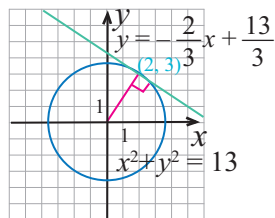
ბ) სურათები რვეულში გადაიხაზეთ. დაწერეთ აღნიშნულ სამ წერტილზე გამავალი წრეწირის განტოლება და ააგეთ წრეწირი.



- 12** > გამოიკვლიეთ ნიმუში. დაწერეთ მოცემული წრეწირის მოცემულ წერტილში გავლებული მხების განტოლება.

ნიმუში: დაწერეთ $x^2 + y^2 = 13$ განტოლებით მოცემული წრეწირის (2;3) წერტილში გავლებული მხების განტოლება. შეხების წერტილში გავლებული რადიუსის შემცველი წრფის კუთხური კოეფიციენტი:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$



ვინაიდან (2; 3) წერტილზე გამავალი რადიუსი და მხები ურთიერთმართობულებია, მხების კუთხური კოეფიციენტი $-\frac{2}{3}$ იქნება.

მხების განტოლება: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2); \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

ა) $x^2 + y^2 = 13; (2; 3)$

ბ) $x^2 + y^2 = 41; (-4; -5)$

გ) $x^2 + y^2 = 65; (-8, 1)$

დ) $x^2 + y^2 = 40; (-2, 6)$

- 13** > A(2; 3), B(3; 4), C(4; 4), D(4; -3), E(-3; 4) წერტილებიდან რომლები მდებარეობენ $x^2 + y^2 = 25$ განტოლებით მოცემულ წრეწირზე?

- 14** > გამოიკვლიეთ ნიმუშისათვის ამოხსნილი ამოცანა და ამოხსენით ამოცანები.

ნიმუში. გადამცემი სადგურიდან რადიოსიგნალები 90 კმ მანძილზე შეიძლება გადაიცეს. ლემანის სახლი გადამცემი სადგურიდან 45 კმ-ით აღმოსავლეთით და 56 კმ ჩრდილოეთით მდებარეობს.

უტოლობის დაწერით განსაზღვრეთ გადამცემი სიგნალების გავრცელების არე, ლემანის ოჯახს შეუძლია ისარგებლოს ამ გადამცემით?

ამოხსნა: $x^2 + y^2 = r^2$ წრეწირის შიგა და გარე არე ქვემოთ მოცემული უტოლობებით განისაზღვრება:

შიგა არე: $x^2 + y^2 < r^2$; გარე არე: $x^2 + y^2 > r^2$

სიგნალების გავრცელების ფართობი: $x^2 + y^2 < 90^2$ შევამოწმოთ, რომ

$45^2 + 56^2 < 90^2$. $5161 < 8100$, მაშასადამე, მათ ამ გადამცემით სარგებლობა შეუძლიათ.

1) მიწისძვრა ეპიცენტრიდან 110 კმ მანძილზე იგრძნობოდა, საცხოვრებელი ადგილი ეპიცენტრიდან 50 კმ აღმოსავლეთით და 30 კმ ჩრდილოეთით მდებარეობს, თქვენც შეიგრძნობდით ამ მიწისძვრას?

2) საზღვაო შუქურის სინათლეები 20 კმ-ზე ვრცელდება. შუქურიდან 10 კმ აღმოსავლეთით და 16 კმ ჩრდილოეთით მყოფი გემიდან შეიძლება ამ შუქურის სინათლის დანახვა?

წრეწირის განტოლება

15> იპოვეთ მანძილი $A(10; 7)$ წერტილიდან $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ განტოლებით მოცემული წრეწირის ცენტრამდე.

16> იპოვეთ მანძილი $C(5; -2)$ წერტილიდან $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$ წრეწირამდე.

17> მოცემული განტოლებების მიხედვით განსაზღვრეთ წრფე წრეწირის მხეზია, მკვეთია თუ არცერთი არაა.

ა) $x^2 + y^2 = 36$

ბ) $x^2 + y^2 = 100$

გ) $x^2 + y^2 = 4$

$y = 6$

$y = 14 - x$

$x + y = 7$

დ) $x^2 + y^2 = 10$

ე) $x^2 + y^2 = 9$

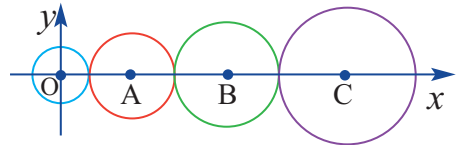
ვ) $x^2 + y^2 = 9$

$y = 3x$

$y = x - 3$

$y = x$

18> ოთხი მხეზი წრეწირის ცენტრები Ox ღერძზეა. A წრეწირის რადიუსი O წრეწირის რადიუსზე 2-ჯერ, B წრეწირის რადიუსი O წრეწირის რადიუსზე 3-ჯერ, ხოლო C წრეწირის რადიუსი O წრეწირის რადიუსზე 4-ჯერ მეტია. ცნობილია, რომ $BC = 28$. დაწერეთ A წრეწირის განტოლება.



19> რომელია წრეწირის განტოლება? დაასაბუთეთ მოსაზრება.

1) $x^2 + y^2 = -16$

3) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$

2) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

4) $x^2 + 10x + y^2 - 8y + 8 = 0$

20> ა) უჩვენეთ, რომ $(x-2)(x-6) + (y-5)(y-11) = 0$ განტოლება წრეწირის განტოლებაა.

ბ) უჩვენეთ, რომ თუ დიამეტრის წვეროს წერტილების კოორდინატებია $(a; b)$ და $(c; d)$ წრეწირის განტოლება $(x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0$ სახისა იქნება.

21> ა) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$; $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 1$
იპოვეთ ამ განტოლებებით მოცემული წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი.

ბ) ააგეთ ეს წრეწირები საკოორდინატო სიბრტყეზე. წრეწირზე უჩვენეთ უახლოესი ორი წერტილი და იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის.

წრეწირის განტოლება

პრაქტიკული მეცადინეობა. 1) აბცისთა ღერძზე კოორდინატთა სათავიდან მარჯვნივ აღნიშნეთ A წერტილი და ცენტრის O წერტილში განთავსებით გაავლეთ $r = OA$ რადიუსიანი წრეწირი.

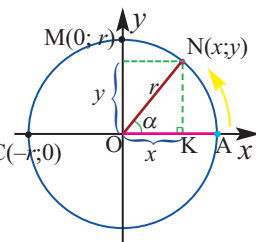
2) O წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საპირისპირო მიმართულებით α მახვილი კუთხით მობრუნებით A წერტილის მობრუნების წერტილით N(x; y) უზვენეთ.

3) სურათის მიხედვით ONK მართკუთხა სამკუთხედში დავეწროთ α მახვილი კუთხის სინუსი და კოსინუსი:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

4) ეს ფორმულები, როცა $\alpha = 90^\circ$, $M(0; r)$ წერტილისათვის, ხოლო როცა $\alpha = 180^\circ$, $C(-r; 0)$ წერტილისათვის გამოიყენეთ:

$$\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0, \quad \sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{-r}{r} = -1$$

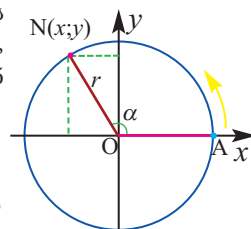


წრეწირზე არსებული წერტილების კოორდინატები და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

კოორდინატთა სათავის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით α კუთხით მობრუნებისას, თუ $A(r; 0)$ წერტილი $N(x; y)$ წერტილად გარდაიქმნება, მაშინ მიიღება:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

აქედან კოორდინატთა სათავეში ცენტრის მქონე r რადიუსიან წრეწირზე მდებარე $N(x; y)$ წერტილის კოორდინატებისათვის მიიღება $x = r \cdot \cos \alpha$, $y = r \cdot \sin \alpha$.



ამ ფორმულებში α არის კუთხე ათვლილი აბსცისთა ღერძის დადებითი მიმართულებიდან საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ON სხივამდე.

$$\text{თუ } N(x; y) \text{ ორდინატთა ღერძზე არაა, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{r \cdot \sin \alpha}{r \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

22 > ა) უჯრიან ფურცელზე 1 უჯრის ერთეულად ჩათვლით დახაზეთ წრეწირი, რომლის ცენტრიც კოორდინატთა სათავეშია და რადიუსი $r = 10$. $\alpha = 30^\circ$ კუთხით მობრუნებისას $A(10; 0)$ წერტილი გარდაქმნილი $N(x; y)$ წერტილის კოორდინატების მიხედვით იპოვეთ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ –ს მიახლოებითი მნიშვნელობები.

ბ) დავალბა შესრულებით $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ მობრუნების კუთხისთვისაც. მიღებული შედეგები შეადარეთ კალკულატორით გამოთვლილ შედეგებთან.

23 > კოორდინატთა სათავეში ცენტრის, რადიუსი 5-ის მქონე წრეწირზე აღნიშნეთ $A(5; 0)$ წერტილი. კოორდინატთა სათავის გარშემო მოცემული α კუთხის შესაბამისი მობრუნებისას იპოვეთ A წერტილის გარდაქმნით $N(x; y)$ წერტილის კოორდინატები:

ა) $\alpha = 40^\circ$

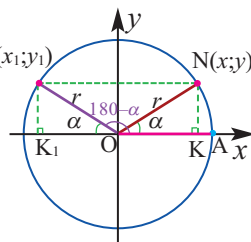
ბ) $\alpha = 100^\circ$

გ) $\alpha = 120^\circ$

წრეწირის განტოლება

პრაქტიკული მცადანებობა. 1) წრეწირზე, რომლის

ცენტრიც არის კოორდინატთა სათავე და რადიუსია r , $N_1(x_1; y_1)$ აღნიშნეთ $N(x; y)$ წერტილი რომელიც α მახვილი კუთხით მობრუნებისას A წერტილის გარდაქმნილად მიღებული და $180^\circ - \alpha$ მობრუნების წერტილის შესაბამისი $N_1(x_1; y_1)$ წერტილი. N და N_1 წერტილები რომელი ღერძის მიმართ არიან სიმეტრიული?



2) დაასაბუთეთ $\triangle ONK$ და $\triangle ON_1K_1$ -ის კონგრუენტულობა

და ამის საფუძველზე N და N_1 წერტილების კოორდინატებს შორის $y_1 = y$ და $x_1 = -x$ დამოკიდებულების არსებობა განმარტეთ.

$$3) \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha$$

ტოლობები გამოიკვლიეთ.

4) გამოთქვით მოსაზღვრე კუთხეების სინუსებისა და კოსინუსების შესახებ.

მოსაზღვრე კუთხეების სინუსები ტოლია, კოსინუსები კი ურთიერთმომხრადპირე სიდიდეებია. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

აქედან, როცა $\cos \alpha \neq 0$ წევრ-წევრად გაყოფით მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

ამ ფორმულებზე დაყრდნობით, 90° -ზე მეტი კუთხის სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის მახვილი კუთხის სინუსით, კოსინუსითა და ტანგენსით გამოსახვა შეიძლება.

ნამუშაო: იპოვეთ 150° -იანი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

ამოხსნა: ვინაიდან 150° -იანი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე 30° -ია.

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

24 > იპოვეთ 120° , 135° , 150° -იანი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

25 > რომელი ტოლობაა სწორი?

ა) $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$

ბ) $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$

გ) $\cos 46^\circ = \cos 134^\circ$

დ) $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$

ე) $\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ$

ვ) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$

26 > ა) წრეწირის $x^2 + y^2 = r^2$ განტოლების ორივე მხარის r^2 -ზე გაყოფით, $\frac{x}{r} = \cos \alpha$, $\frac{y}{r} = \sin \alpha$ ტოლობების გათვალისწინებით, უჩვენეთ, რომ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

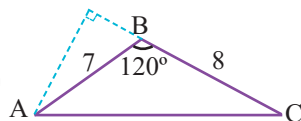
იგივეობა მართებულია ნებისმიერი α კუთხისათვის.

ბ) $\sin \alpha = 0,6$ და α მახვილი კუთხეა, იპოვეთ $\cos \alpha$.

გ) $\sin \alpha = 0,8$ და α ზღაგვი კუთხეა, იპოვეთ $\cos \alpha$.

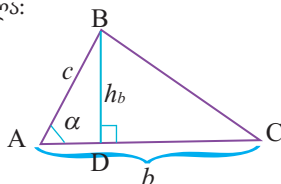
27 > სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ $\triangle ABC$ გვერდის სიგრძე და C კუთხის სინუსი.

მითითება: A წვეროდან გაავლეთ სიმაღლე სურათზე ნაჩვენები წესით.



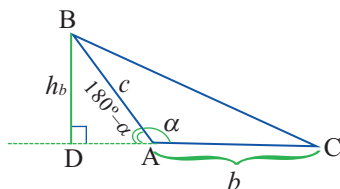
წრეწირის განტოლება

- 28 > გამოკვლევა:** 1) სხვადასხვა შემთხვევისათვის გამოიკვლიეთ სამკუთხედის ფართობის ფორმულა:



$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c} \quad h_b = c \cdot \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$



$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_b}{c}$$

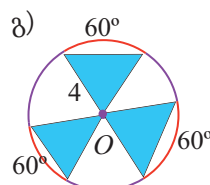
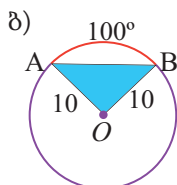
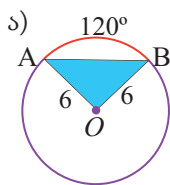
$$h_b = c \cdot \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

2) გამოტოვებული სიტყვების შევსებით განსაზღვრება რვეულში გადაიტანეთ: სამკუთხედის ფართობი მისი ... გვერდის და ამ გვერდებით შექმნილი ... ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

3) დაადგინეთ, რომ ეს განსაზღვრება მართებულია მაშინაც კი, როცა $\alpha = 90^\circ$.

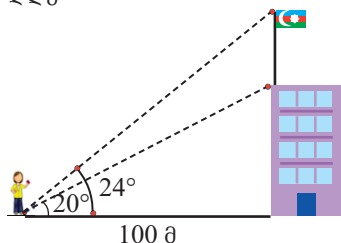
- 29 >** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი. O წერტილი წრეწირის ცენტრია.



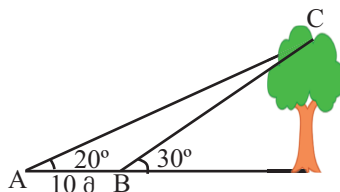
- 30 >** პარალელოგრამის დიაგონალები 6 სმ და 8 სმ-ია. დიაგონალებს შორის კუთხე 45° -ია. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

- 31 >** ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები 18 სმ-ია, მათ შორის კუთხე 30° -ია. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

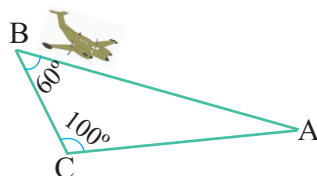
- 32 >** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ შენობისა და დროშის სიმაღლე.



- 33 >** სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ AC და BC მანძილები.

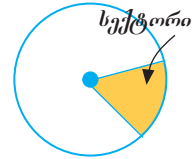


- 34 >** თვითმფრინავი ABC შეკრული სვლაგეზით მოძრაობს $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 100^\circ$. 600 კმ-იან BC გზას თვითმფრინავი 1 საათში გაივლის. რამდენი საათი დასჭირდება იმავე სიჩქარით ერთი ბრუნისათვის.



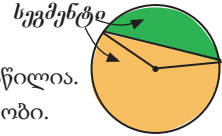
სექტორი და სეგმენტი

სექტორი არის წრეწირის ცენტრული კუთხის შემქმნელი ორი რადიუსითა და შესაბამისი რკალით შემოსაზღვრული წრის ნაწილი. ცენტრული კუთხე სრული კუთხის რა ნაწილიც არის, შესაბამისი სექტორის ფართობიც წრის ფართობის იგივე ნაწილია.



მაგალითად, 60° -იანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი წრის ნაწილი - სექტორი მთელი წრის $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ ნაწილს შეადგენს, რადგან წრის ფართობი πr^2 -ია ამ სექტორის ფართობი $\frac{1}{6} \pi r^2$ იქნება.

სეგმენტი ქორდის შესაბამისი რკალით შემოსაზღვრული წრის ნაწილია. სეგმენტის ფართობი = სექტორის ფართობი $\pm$ სამკუთხედის ფართობი.

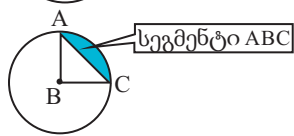
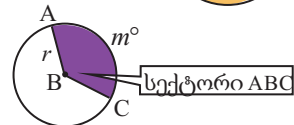


სექტორის ფართობი

სექტორის ფართობი: $S_{ABC} = \frac{m}{360} \pi r^2$

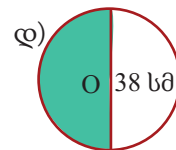
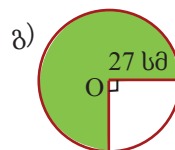
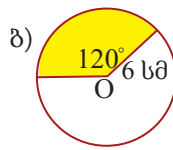
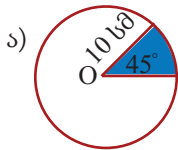
სექტორის ფართობი: $S_{\text{სეგმენტი}ABC} = S_{\text{სექტორი}ABC} - S_{\triangle ABC}$

შენიშვნა: დიდი რკალის შესაბამისი სეგმენტის ფართობის პოვნისას შესაბამისი სექტორის ფართობს $\triangle ABC$ -ს ფართობი ემატება.

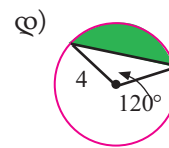
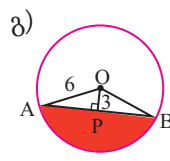
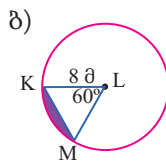
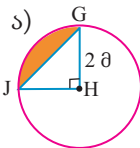


სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > იპოვეთ სურათზე გამოსახული სექტორების ფართობები. შედეგები მეთაუდებამდე დაამრგვალოთ.

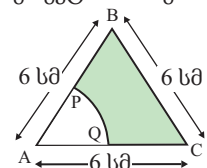


- 2 > იპოვეთ სურათზე გამოსახული სეგმენტების ფართობები. შედეგები მეთაუდებამდე დაამრგვალოთ.



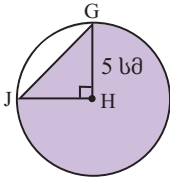
- 3 > ა) იპოვეთ 12 სმ რადიუსიანი წრეწირის 80° -იანი რკალის შესაბამისი სექტორის ფართობი.
 ბ) 72° -იანი ცენტრული კუთხის მქონე სექტორის ფართობი 16π მ²-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი მეთაუდებამდე სიზუსტით.
 გ) იპოვეთ 8 სმ რადიუსიანი წრეწირის 20π მ² ფართობის მქონე სექტორის შესაბამისი ცენტრული კუთხე.

- 4 > $\triangle ABC$ ტოლგვერდია. P წერტილი AB გვერდის შუაწერტილია. APQ არის A წერტილში ცენტრის მქონე წრის სექტორი. იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.

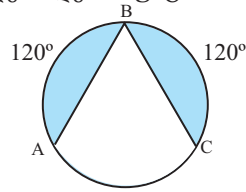


სექტორი და სეგმენტი

- 5 > იპოვეთ გაფერადებული ნაწილის ფართობი.



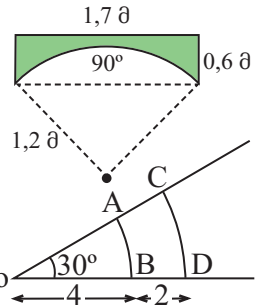
- 6 > სურათზე მოცემული წრეწირის სიგრძე 12π მმ-ია. გამოთვალეთ ფერადი ნაწილის ფართობი მესამედამდე სიზუსტით.



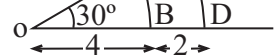
- 7 > წარმოიდგინეთ, რომ სასადილოში 2 სახის ნამცხვარი შემოგთავაზეს. ნამცხვრები ერთი და იგივე სისქისაა, 24 სმ და 32 სმ დიამეტრიანი წრიულფორმიანია და თითოეული 8 ტოლ ნაჭრადაა დაჭრილი. რომელ შემთხვევაში მოგიწევთ უფრო მეტი ნამცხვრის შეჭმა, როცა მიირთმევთ 16 სმ რადიუსიანი ნამცხვრის ერთ ნაჭერს თუ როცა მიირთმევთ 12 სმ რადიუსიანი ნამცხვრის ორ ნაჭერს?



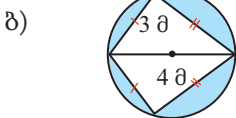
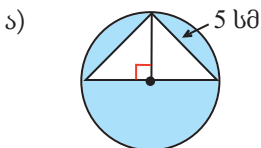
- 8 > სურათზე ნაჩვენებია ფანჯრის ჩარჩოს ნაწილი უნდა შეიღებოს. ამისათვის საჭიროა წინასწარ მისი ფართობის გამოთვლა. შეასრულეთ გამოთვლები სურათის მიხედვით.



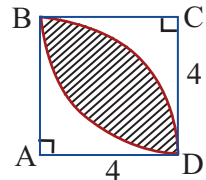
- 9 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ:
ა) $\angle AOB$ და $\angle COD$ სიგრძეები;
ბ) $\angle AOB$ და $\angle COD$ სექტორების ფართობები.



- 10 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ფერადი ნაწილების ფართობი.



- 11 > ABCD კვადრატია. A და C ცენტრიანი წრეწირების რკალების გადაკვეთის შედეგად მიღებული ფართობი დაშტრიხულია. იპოვეთ ეს ფართობი.

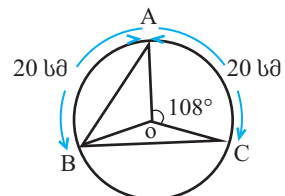


- 12 > სურათზე გამოსახული ფიგურას 40 სმ რადიუსიანი წრეებისაგან 90° -იანი ნაწილების ამოჭრის-ამოღების შედეგადაა დამზადებული. თუ მოისურვებთ, რომ ნაწილების ზედაპირი დაფაროთ ქაღალდით, დაახლოებით რამდენი ქაღალდი დაგჭირდებათ?



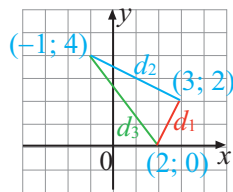
- 13 > O წერტილი წრეწირის ცენტრია. $\angle AOB$ და $\angle AOC$ რკალების სიგრძე 20 სმ-ია. იპოვეთ ქვემოთ აღნიშნულები.

- ა) $\angle AOB$ ბ) $\angle AOC$ გ) $S_{\text{სექტორი AOC}}$



განმაზოგადებელი დაგალებები

- 1 > (3; 2), (2; 0), და (-1; 4) წერტილები მართკუთხა სამკუთხედის წვეროს წერტილებია თუ არა?

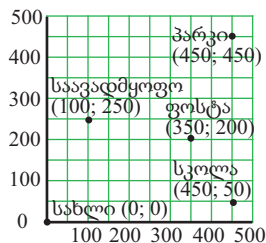


- 2 > სურათზე ტურისტებისათვის მისაქირავებლად შეთავაზებული სახლის მდებარეობის გეგმა მოცემული. გეგმაზე თითოეული კვადრატული უჯრის გვერდი 50 მ მანძილს უზენებს.

1) რას უდრის უმოკლესი მანძილი სახლიდან სკოლამდე?

2) წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ აქ ისვენებთ. რა მანძილის გავლა მოგიწევთ, თუ უმოკლესი გზით ფოსტაში, შემდეგ პარკში წახვალთ და სახლში დაბრუნდებით?

3) სახლიდან გამოსვლის და გეგმაზე ასახული ყველა ობიექტის შემოვლის ორი შესაძლო მოკლე გზა არსებობს: განსაზღვრეთ ეს ორი გზა ობიექტების მიმდევრობით.



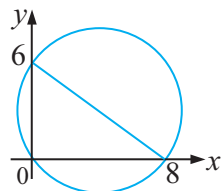
- 3 > წრეწირი (0; 0), (0; 6), (8; 0) წერტილებზე გადის.

ა) იპოვეთ წრეწირის ცენტრის კოორდინატები.

ბ) π -ის საშუალებით გამოსახეთ წრეწირის საკოორდინატო სიბრტყეზე I მეოთხედში დარჩენილი ნაწილის ფართობი.

გ) π -ის საშუალებით გამოსახეთ საკოორდინატო ღერძებით I მეოთხედში გამოყოფილი წრეწირის რკალის სიგრძე.

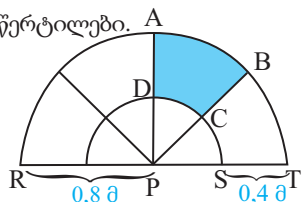
დ) კოორდინატა სათავეზე გამავალი წრფე წრეწირის მხებია. იპოვეთ ამ წრფის კუთხური კოეფიციენტი და დაწერეთ განტოლება.



- 4 > ა) დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი $M(-2; 3)$ წერტილში მდებარეობს და $A(-5; -1)$ წერტილზე გადის.

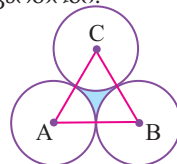
ბ) იპოვეთ ამ წრეწირის აბცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.

- 5 > სურათზე ფანჯრის სქემა მოცემული. ფანჯარა 80 სმ რადიუსიანი ნახევარწრის ფორმისაა. ST მანძილი 40 სმ, AB რკალი კი 45° -ია. იპოვეთ ფანჯრის ABCD ნაწილში მინის ფართობი.

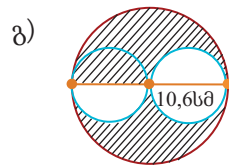
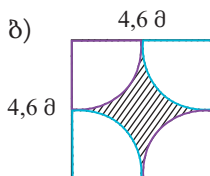
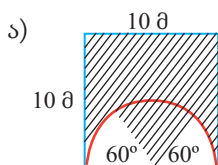


- 6 > წრეწირის ცენტრი (0; 4) წერტილშია და წრეწირი $A(8; 10)$ წერტილზე გადის. იპოვეთ ამ წრეწირის 45° -იანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი სექტორის ფართობი.

- 7 > სურათზე ერთმანეთის მხები 3 წრეწირია ასახული. წრეწირების რადიუსები 4 სმ-ია. იპოვეთ ფერადი ნაწილის ფართობი.



- 8 > იპოვეთ გაფერადებული ნაწილის ფართობი.



1. განტოლებები და განტოლებათა სისტემები 2. მრავალკუთხედები

მაღალხარისხიანი განტოლების ამოხსნა:

- მამრავლებად დაშლით;
 - ახალი ცვლადის შემოტანით.
- რაციონალური განტოლებების ამოხსნა
ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ
შემცველი განტოლებების ამოხსნა
- გრაფიკული ხერხით;
 - ალგებრული ხერხით.

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.

- განტოლებათა სისტემის ამოხსნა,
რომლებშიც ერთი ცვლადი პირველი,
მეორე კი მეორე ხარისხისაა:
- გრაფიკული ხერხით;
- ალგებრული ხერხით.

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა,
რომლებშიც ორივე ცვლადი მეორე
ხარისხისაა:

- გრაფიკული ხერხით;
- ალგებრული ხერხით.

ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა
სისტემის შესახებ

მრავალკუთხედები:

- ტეხილი, მრავალკუთხედი;
 - წესიერი მრავალკუთხედები;
 - მრავალკუთხედის შიგა და გარე
კუთხედები.
- წრეწირში ჩახაზული და წრეწირ-
ზე შემოხაზული მრავალკუთხე-
დები:
- სამკუთხედში და ოთხკუთხედ-
ში ჩახაზული და მათზე შემოხა-
ზული წრეწირები;
 - წრეწირში ჩახაზული და წრე-
წირზე შემოხაზული ოთხკუთხე-
დის თვისებები.
- წესიერი მრავალკუთხედის ფარ-
თობი



მაღალხარისხიანი განტოლებების ამოხსნა

მამრავლებად დაშლის ხერხი

განტოლებას, რომლის მარცხენა მხარე უცნობის მიმართ n ხარისხიანი მრავალწევრია, მარჯვენა მხარე კი ნულია $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, სადაც $a_n \neq 0$. ერთცვლადიანი n ხარისხის განტოლება ეწოდება.

ნიმუშები: $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$ *მესამე ხარისხის განტოლება*
 $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$ *მეოთხე ხარისხის განტოლება*

მესამე და მეოთხე ხარისხის განტოლებებისათვის ფესვების პოვნის ფორმულები ცნობილია, თუმცა ეს ფორმულები ძალიან რთულია. მაღალხარისხიანი განტოლებების განსაზღვრული ხერხების გამოყენებით ამოხსნა უფრო ხელსაყრელია. ერთ-ერთი ამ ხერხთაგანი მამრავლებად დაშლის ხერხია.

ნიმუში: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

წევრები ქვემოთ მოცემული წესით დავაჯგუფოთ და მარცხენა მხარე დავშალოთ მამრავლებად:

$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0; \quad x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0; \quad (x^2 - 4)(x - 1) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 1) = 0;$$

იმისათვის, რომ ნამრავლი ნულის ტოლი იყოს, მამრავლებიდან ერთი მაინც უნდა იყოს ნულის ტოლი. ამიტომაც $x - 2 = 0$ ან $x + 2 = 0$ ან $x - 1 = 0$.

საიდანაც $x = 2$; $x = -2$; $x = 1$.

სასწავლო დავალებები

- 1 > ამოხსენით განტოლებები სხვადასხვა გამრავლების ფორმულების გამოყენებით.

ა) $x^3 - 27 = 0$; ბ) $16x^3 = -2$ გ) $x^3 - 64 = 0$;

დ) $5x^3 + 40 = 0$ ე) $x^4 - 1 = 0$; ვ) $16x^4 = 81$;

- 2 > წევრები გადაიყვანეთ მარცხენა მხარეს. საერთო მამრავლი გაიტანეთ ფრჩხილებს გარეთ და ამოხსენით განტოლებები.

ა) $16x^5 = x$ ბ) $2x^4 = 16x$ გ) $2x^3 - 7x = x$

დ) $5x^3 = 320$ ე) $x^3 = 16x$ ვ) $x^4 + 125x = 0$

ზ) $5x^3 - 20x^2 = 0$ თ) $5x^4 - 20x^2 = 0$ ი) $x^3 + x^2 = 2x^2$

- 3 > ამოხსენით განტოლებები მამრავლებად დაშლის ხერხით.

1) $x^3 + x^2 = 20x$ 9) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

2) $x + 1 = 9x^3 + 9x^2$ 10) $2x^3 - 3x^2 = 18x - 27$

3) $4y^3 - 2 = y - 8y^2$ 11) $3x^3 + 7x^2 - 12x = 28$

4) $2x - 3 = 8x^3 - 12x^2$ 12) $4x^3 + 16x^2 + x + 4 = 0$

5) $x^3 + 2x^2 - 9x = 18$ 13) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 = 0$

6) $9y^3 + 8 = 4y + 18y^2$ 14) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

7) $3x^3 + 2x^2 = 12x + 8$ 15) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

8) $4x^3 - 12x^2 = 9x - 27$ 16) $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

მაღალხარისხიანი განტოლებების ამოხსნა

- 4 > $x^3 - x^2 - kx + k = 0$ განტოლების მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.
 ა) იპოვეთ განტოლების დამაკმაყოფილებელ ნამდვილ ფესვთა რაოდენობა, როცა $k = 0$.
 ბ) რამდენი ნამდვილი ფესვი აქვს განტოლებას, როცა $k = -1$?
 გ) რამდენი ნამდვილი ფესვი აქვს განტოლებას, როცა $k = 4$?
- 5 > ამოხსენით განტოლებები მამრავლებად დაშლის ხერხის გამოყენებით.
 ა) $3x^5 - 48x = 0$ დ) $x^3 + x^2 - 2x = 0$ ზ) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$
 ბ) $x^4 + 4x^2 = 32$ ე) $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$ თ) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$
 გ) $x^4 - 3x^2 = 4$ ვ) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = -16x$ ი) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
- 6 > $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$ განტოლების ერთი ფესვი 3-ის ტოლია. იპოვეთ a და ამოხსენით განტოლება.
- 7 > იპოვეთ ფუნქციის ნულები.
 ა) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 16x - 80$ ბ) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
 გ) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ დ) $f(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$
- 8 > **ბიზნესი.** მცირე ბიზნესით დასაქმებული მესაკუთრის შემოსავლის მათემატიკური მოდელი $R = 5t^3 + 250t^2 + 2000t$ სახით შეიძლება დაიწეროს, სადაც t 2000 წლიდან დაწყებული წლების რაოდენობას უჩვენებს. რამდენი წლის შემდეგ ექნება ბიზნესმენს შემოსავალი 50000 მანეთი?

განტოლებები, რომლებიც კვადრატულ განტოლებაზე დაიყვანება

ახალი ცვლადის შემოტანით შესაძლებელია გარკვეული განტოლებების კვადრატულ განტოლებაზე დაყვანა. მაგალითად, $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ განტოლება $x^n = u$ ჩანაცვლებით, $au^2 + bu + c = 0$ განტოლებაზე დაიყვანება. კერძო შემთხვევაში, როცა $n = 2$, მაშინ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ განტოლებას ($a \neq 0$) ბიკვადრატული განტოლება ეწოდება და მისი ამოხსნისათვის $x^2 = u$ ახალი ცვლადი შემოიტანება.

ნიმუში: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

$$(x^2)^2 - 4(x^2) - 5 = 0$$

$$u^2 - 4u - 5 = 0$$

$$(u - 5)(u + 1) = 0$$

$$u - 5 = 0 \text{ ან } u + 1 = 0$$

$$u = 5 \text{ ან } u = -1$$

$$x^2 = 5 \text{ ან } x^2 = -1 \rightarrow \emptyset$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

მოცემული განტოლება

ხარისხის თვისება

$$x^2 = u \text{ ჩანაცვლება}$$

მამრავლებად დაშლა

ნამრავლის ნულოვანი ფაქტორება

უცნობის პოვნის წესი

$$u = x^2 \text{ ჩანაცვლება}$$

კვადრატული ამოფესვა

სასწავლო დაგეგმვები

9 > ამოხსენით განტოლებები ახალი ცვლადის შემოტანით.

ა) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ დ) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ ზ) $8x^6 - 7x^3 + 1 = 0$
 ბ) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ ე) $27x^6 - 26x^3 + 1 = 0$ თ) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$
 გ) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$ ვ) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ ი) $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - \frac{x+2}{x-1} - 2 = 0$

10 > ამოხსენით განტოლებები.

ა) $(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3) = 5$ ბ) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = 3$
 გ) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) = 5$ დ) $(2x^2 + x - 5)(2x^2 + x - 6) = 20$
 ე) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) + x^2 - 3 = 0$ ვ) $(x^2 + 1)^2 + x^2(x^2 - 1) - 4 = 0$
 ზ) $\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0$ თ) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$

11 > თუ $\frac{1}{x}$ რიცხვი $\frac{1}{a}$ და $\frac{1}{b}$ რიცხვების საშუალო არითმეტიკულია, მაშინ x რიცხვს a და b რიცხვების ჰარმონიული საშუალო ეწოდება. ა) გამოსახეთ ეს მოსაზრება რაციონალური ტოლობის სახით და იპოვეთ x . ბ) ორი დადებითი რიცხვისათვის ჰარმონიული საშუალო 6-ის, ხოლო ამ რიცხვების სხვაობა 8-ის ტოლია. იპოვეთ ეს რიცხვები.

12 > იგივეობიდან იპოვეთ k კოეფიციენტი.

ა) $\frac{x^2 + kx - 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x - 1}{x + 2}$ ბ) $\frac{2x^2 + kx - 10}{2x^2 + 7x + 6} = \frac{2x - 5}{2x + 3}$

13 > წარმოდგინეთ, რომ თქვენ ყოველკვირეულად მაქსიმუმ 60 ქულიანი შეფასების დავალებებს წერთ. 6 კვირის შედეგების მიხედვით თქვენი საშუალო ქულაა 48.

ა) რას უნდა უდრიდეს მომდევნო ორ კვირაში საშუალო ქულა, რომ 8 კვირის საშუალო ქულა 50 გახდეს?

ბ) პირველ 6 კვირაში საშუალო ქულა იყო 50. რა პირობებში არის შესაძლებელი, რომ 10-კვირეულმა საშუალო ქულამ შეადგინოს მაქსიმალური ქულის 85%?

14 > ამოხსენით საძიებელი ცვლადის მიხედვით:

ა) იპოვეთ r , როცა $P = \frac{A}{1 + rt}$; ბ) იპოვეთ m , როცა $V = \frac{mv}{m + M}$;
 გ) იპოვეთ q , როცა $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$; დ) იპოვეთ v_0 , როცა $S = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$.

15 > ავტომობილის სიჩქარესა და დამუხრუჭების შემდეგ გავლილ მანძილს შორის დამოკიდებულებაა $d \approx \frac{v^2}{2a}$, სადაც v არის სიჩქარე, a - სიჩქარის ცვლილება.

ა) დაწერეთ სიჩქარის მაჩვენებელი ფორმულა, თუ დამუხრუჭების დაწყების შემდეგ a ტოლია 10 მ/წმ²-ისა.

ბ) რამდენი მეტრი იქნება დამუხრუჭების მანძილი 90 კმ/სთ სიჩქარიანი ავტომობილისა თუ იგი 10 მ/წმ² თანაბარშენელებით მოძრაობს?

რაციონალური განტოლებები და ამოცანების ამოხსნა

1 > ამოხსენით რაციონალური განტოლებები. დაწერეთ (პლ).

ა) $\frac{3}{x-2} - \frac{5}{x+2} + \frac{6x}{4-x^2} = 0$

ბ) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{4}{x-2}$

გ) $\frac{5}{x^2-7x+12} = \frac{2}{x-3} + \frac{5}{x-4}$

დ) $\frac{9}{x^2+7x+10} = \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x+5}$

ე) $\frac{12}{x+5} - \frac{12}{x} = \frac{2}{x+5}$

ვ) $\frac{25}{y} - \frac{25}{y-2} = \frac{2}{y}$

ზ) $\frac{1}{4}a - 4a^{-1} = 0$

თ) $\frac{1}{2}t - 18t^{-1} = 0$

ი) $8t^{-1} + 2 = 3t^{-1}$

2 > ამოხსენით განტოლებები პროპორციის თვისების გამოყენებით.

ა) $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2}$

ბ) $\frac{-2}{x-1} = \frac{x-8}{x+1}$

გ) $\frac{x}{x^2-8} = \frac{2}{x}$

დ) $\frac{8(x-1)}{x^2-4} = \frac{4}{x-2}$

ე) $\frac{x^2-3}{x+2} = \frac{x-3}{2}$

ვ) $\frac{2(x-2)}{x^2-10x+16} = \frac{2}{x+2}$

ზ) $\frac{-1}{x-3} = \frac{x-4}{x^2-27}$

თ) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{3}{x}$

ი) $\frac{3x}{x+1} = -\frac{12}{1-x}$

3 > ამოხსენით განტოლებები.

ა) $\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{x+1}{x-2}$

ბ) $\frac{x-4}{x^2-3x-54} = \frac{2}{x^2-12x+27}$

გ) $\frac{x-4}{x} = \frac{6}{x^2-3x}$

დ) $\frac{3}{2x+1} - \frac{x+3}{2x^2+7x+3} = \frac{5}{x+3}$

ე) $\frac{2x}{4-x} = \frac{x^2}{x-4}$

ვ) $1 = \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{x^2+3x-4}$

4 > გამოსახეთ საძიებელი ცვლადი სხვების საშუალებით

ა) $h = \frac{2A}{b}$ ტოლობიდან b

ბ) $\frac{1}{a} - \frac{2}{b} = 3$ ტოლობიდან a

გ) $\frac{x}{3r} + \frac{y}{4r} = 1$ ტოლობიდან r

დ) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ტოლობიდან c

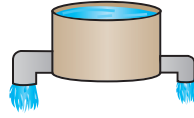
ე) $1 + \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ტოლობიდან d

ვ) $x = \frac{a+b}{a-b}$ ტოლობიდან a

5 > თუ რეკიმი და ჯემილი ერთად იმუშავენ მთელ ნაკვეთს 2 საათში გათიბავენ. თუ ჯემილი მარტო იმუშაებს, ამ სამუშაოს რეკიმზე 3 საათით ადრე მოამთავრებს. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე?

რაციონალური განტოლებები და ამოცანების ამოხსნა

- 6 > აუზის წყალი ერთდროულად სხვადასხვა დიამეტრიანი ორი მილით 3 საათში შეიძლება დაიცალოს. მცირედიამეტრიანი მილი, მსხვილდიამეტრიან მილთან შედარებით ამ სამუშაოს 8 საათით მეტ დროს მოანდომებს. რამდენ საათში შესაძლებლეს ამ სამუშაოს თითოეული მილი ცალ-ცალკე?



ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლებები

ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლებების ამოხსნა

ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლებების ამოხსნისას განიხილება ორი შემთხვევა:

1-ლი შემთხვევა. მოდულის ნიშანქვეშა გამოსახულება დადებითია ან ნულის ტოლია.

მე-2 შემთხვევა. მოდულის ნიშანქვეშა გამოსახულება უარყოფითია. რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობის განსაზღვრების თანახმად: $|x| = \begin{cases} x & \text{თუ } x \geq 0 \\ -x & \text{თუ } x < 0 \end{cases}$

ნამუშაო 1. $|3x - 2| + 11 = 5$

ტოლობის მარცხენა მხარეს დავტოვოთ მხოლოდ მოდულიანი გამოსახულება:

$|3x - 2| = 5 - 11$; $|3x - 2| = -6$. ეს კი რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობის განსაზღვრებას არ შეესაბამება, რადგან რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა ან ნულის ან კიდევ დადებითი რიცხვის ტოლი უნდა იყოს. ამ ტიპის განტოლებებს ამონახსენი არა აქვს. **პასუხი:** $\emptyset$

ნამუშაო 2. $|x - 3| = 6$

ამოხსნა ალგებრული ხერხით

$x - 3$ უნდა იყოს 6 ან -6 -ის ტოლი.

თუ $x - 3 = 6$, მაშინ $x = 9$

თუ $x - 3 = -6$, მაშინ $x = -3$ მიიღება.

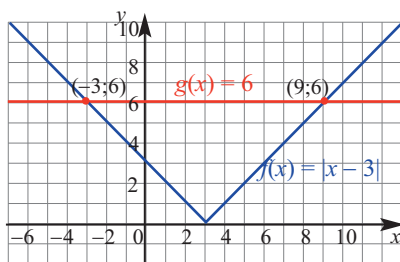
ახლა კი შევამოწმოთ $x = 9$ და $x = -3$ მნიშვნელობების მიერ განტოლების დამაყოფილება.

$x = 9$, $|9 - 3| = 6$; $6 = 6$ $x = -3$, $|-3 - 3| = 6$; $|-6| = 6$

პასუხი: მოცემულ განტოლებას ორი ფესვი აქვს: 9 და -3

ამოხსნა გრაფიკული ხერხით

ერთ კოორდინატა სისტემაში ავაგოთ $f(x) = |x - 3|$ და $g(x) = 6$ ფუნქციების გრაფიკები. გაირკვევა, რომ ამ ფუნქციების გადაკვეთის წერტილებია $(-3; 6)$ და $(9; 6)$. აქედან კი მიიღება, რომ $x = -3$ და $x = 9$ მნიშვნელობები განტოლების ფესვებია.



ნამუშაო 3. $|x^2 - 2x| = 3$

მოცემული განტოლებიდან მიიღება. $\begin{cases} x^2 - 2x = 3 \\ -(x^2 - 2x) = 3 \end{cases}$

I შემთხვევა. $x^2 - 2x = 3$ $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x_1 = 3$ ან $x_2 = -1$

შემოწმება: $x = 3$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|3^2 - 2 \cdot 3| = 3$; $|3| = 3$ განტოლების ამონახსენია.
 $x = -1$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|(-1)^2 - 2 \cdot (-1)| = 3$; $|3| = 3$ განტოლების ამონახსენია.

II შემთხვევა. $-(x^2 - 2x) = 3$; $x^2 - 2x = -3$; $x^2 - 2x + 3 = 0$,

დისკრიმინანტი უარყოფითია.

პასუხი: მოცემული განტოლების ამონახსენი $\{-1; 3\}$ იქნება.

ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შეტყველი განტოლებები

ნიმუში 4. $|2x - 4| = 1 - 3x$

აბსოლუტური მნიშვნელობის განსაზღვრების თანახმად:

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{თუ } x \geq 2 \\ -(2x - 4), & \text{თუ } x < 2 \end{cases}$$

I შემთხვევა. თუ $x \geq 2$, მაშინ $|2x - 4| = 2x - 4$ და მოცემული განტოლება $2x - 4 = 1 - 3x$ სახეს მიიღებს. ეს ასე იწერება:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 4 = 1 - 3x \end{cases}$$

$2x - 4 = 1 - 3x$ განტოლებიდან $5x = 5$, $x = 1$ მიიღება. ეს მნიშვნელობა $x \geq 2$ პირობას არ აკმაყოფილებს. ანუ ამ შემთხვევაში განტოლებას ამონახსენი არა აქვს.

II შემთხვევა. თუ $x < 2$, მაშინ $|2x - 4| = -(2x - 4)$ და მოცემული განტოლება $-(2x - 4) = 1 - 3x$ სახეს მიიღებს. ამ შემთხვევაში

$$\begin{cases} x < 2 \\ -(2x - 4) = 1 - 3x \end{cases} \text{ სისტემას მივიღებთ.}$$

$-(2x - 4) = 1 - 3x$ განტოლებიდან $x = -3$ ირკვევა, რომ ეს მნიშვნელობა $x < 2$ პირობას აკმაყოფილებს. ამრიგად, მოცემულ განტოლებას ერთი ფესვი აქვს. **პასუხი:** $\{-3\}$

სასწავლო დაგვლებები

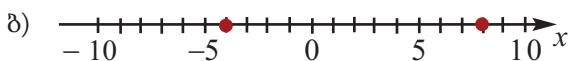
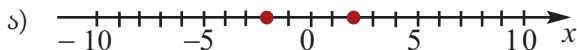
1 > წარმოადგინეთ განტოლების ამონახსენი (თუ არსებობს) რიცხვით ღერძზე გამოსახვით.

ა) $|x| = 4$ ბ) $|x| - 3 = 10$ გ) $|x| + 5 = 5$ დ) $|x| = -4$

2 > ამოხსენით განტოლებები გრაფიკული ხერხით.

ა) $|x - 4| = 10$ ბ) $|x + 3| = 2$ გ) $|x - 1| = 0$ დ) $|x + 9| = -3$

3 > რიცხვით ღერძზე მოცემული ამონახსნების მიხედვით დაწერეთ $|ax + b| = c$ სახის განტოლებები.



4 > ამოხსენით განტოლებები.

ა) $ 1 - 2x + 6 = 9$	ბ) $ -2x = 8$	გ) $ -x = 1$
დ) $4 - 2x = 3$	ე) $5 - \frac{1}{2}x = 4$	ვ) $ x - 2 = -\frac{1}{2}$
ზ) $ x^2 - 9 = 0$	თ) $ x^2 - 2x = 3$	ი) $ x^2 + x = 12$
კ) $ x - 1 = 2x - 1$	ლ) $ 2x - 3 = x - 1$	მ) $ x + 1 = 3x - 1$

ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლებები

5 > გამოიკვლიეთ ნიშნით და ამოხსენით განტოლებები.

ნიშნით: $|2x - 4| = |5x + 2|$

$$2x - 4 = 5x + 2 \quad \text{ან} \quad 2x - 4 = -(5x + 2)$$

$$-3x = 6 \quad \text{ან} \quad 7x = 2;$$

$$x = -2 \quad \text{ან} \quad x = \frac{2}{7}$$

შემოწმება: $x = -2$: $|2 \cdot (-2) - 4| = |5 \cdot (-2) + 2|$; $|-8| = |-8|$

$$x = \frac{2}{7} : |2 \cdot \frac{2}{7} - 4| = |5 \cdot \frac{2}{7} + 2|$$
; $|- \frac{24}{7}| = | \frac{24}{7}|$

პასუხი: $\{-2; \frac{2}{7}\}$

ა) $|6x - 3| = |-15|$

ბ) $|9x + 7| = |-7|$

გ) $|-3 - 4x| = |5 - x|$

დ) $|5n - 4| = |7 - 5n|$

ე) $|14y + 5| = |7 - 14y|$

ვ) $\left| \frac{4p - 1}{6} \right| = \left| \frac{2}{3}p + \frac{5}{6} \right|$

ზ) $|4,8m - 1,8| = |2,2m + 6|$

თ) $|6,5n - 1,4| = |3,5n - 8,6|$

ი) $|2y + 1| = |2y - 7|$

კ) $|6y + 10| = |7y - 16|$

ლ) $|12a + 1| = |12a - 25|$

მ) $\left| \frac{5p + 3}{6} \right| = \left| \frac{1}{3}p - 3 \right|$

გამოყენებითი დავალებები

6 > მაჰირმა $|x - 2| = x^2$ განტოლება გრაფიკული ხერხით, ხოლო ლეილამ კი ალგებრული ხერხით ამოხსნა. ვისი ამოხსნაა სწორი?

ლეილა:

$$|x - 2| = x^2$$

1. $x - 2 = x^2$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

ამონახსენი არა აქვს

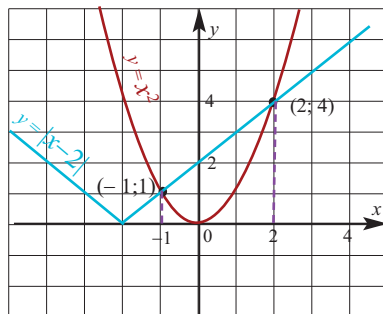
2. $-x + 2 = x^2$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2 ; x = 1$$

მაჰირ:



7 > $|x^2 - 1| = k$ განტოლებაში k -ს ადგილას ისეთი რიცხვი ჩაწერეთ, რომ:

ა) განტოლებას ამონახსენი არ ჰქონდეს; გ) განტოლებას სამი ნამდვილი ფესვი ჰქონდეს;

ბ) განტოლებას ორი ნამდვილი ფესვი ჰქონდეს; დ) განტოლებას ოთხი ნამდვილი ფესვი ჰქონდეს.

8 > ა) დაწერეთ ცვლადის აბსოლუტური მნიშვნელობის ნიშნის ქვეშ შემცველი ისეთი განტოლება, რომ რიცხვით ღერძზე მისი ამონახსნების შესაბამისი წერტილები ნულის წერტილიდან 6 ერთეულის მანძილზე იყოს.

ბ) დაწერეთ ცვლადის აბსოლუტური მნიშვნელობის ნიშნის ქვეშ შემცველი ისეთი განტოლება, რომ რიცხვით ღერძზე მისი ამონახსნების შესაბამისი წერტილები ნულის წერტილიდან $\frac{11}{2}$ ერთეულის მანძილზე იყოს.

ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლებები

9 > საბუკი და ქამრანი ინტერნეტში მოცემული კითხვებით IQ დონეს ამოწმებდნენ. საბუკი ამბობს, რომ ჩემი IQ დონე ქემრანის დონისაგან 15 ქულით განსხვავდება. ქემრანის IQ დონე 119 ქულით იყო შეფასებული. საბუკის დონის მაჩვენებელი ქულები წარმოადგინეთ ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლების სახით.

10 > დაწერეთ თითოეული მოსაზრების შესაბამისი მოდულიანი განტოლება და ასახეთ რიცხვით ღერძზე

ა) k რიცხვი 2-დან 4 ერთეულ მანძილზეა;

ბ) m რიცხვი -3-დან 5 ერთეულ მანძილზეა;

გ) $2x$ რიცხვი 5-დან 3 ერთეულ მანძილზეა;

დ) $3t$ რიცხვი -2-დან 4 ერთეულ მანძილზეა.

11 > ორი ნამდვილი m და n რიცხვებისათვის, მათ შორის უმცირესი-მინიმუმი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\min(m, n) = \frac{m + n - |m - n|}{2}$$

m -ისა და n -ის რამდენიმე მნიშვნელობისათვის შეამოწმეთ ტოლობის სისწორე.

12 > ჰესენის მასა 48 კგ-ია. ექიმი მას ეუბნება, რომ ეს მისთვის იდეალურად მიჩნეული მასისაგან სულ 5%-ით განსხვავდება. ექიმის ნაგულისხმევი იდეალური მასა დაწერეთ ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი განტოლების სახით.

13 > ამოხსენით განტოლებები.

ა) $11 + |x| = 3$

ბ) $|x| - 22 = -3$

გ) $7 - 3|x + 4| = -8$

დ) $|4x - 3| = |5x + 3|$

ე) $|x - 8| = |8 - x|$

ვ) $|x - 6| = 3 - 4x$

ზ) $4 - \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}x - 5 \right| = 3$

თ) $\left| \frac{7}{4} - x \right| = \left| 4 - \frac{1}{4} \right|$

ი) $\left| x - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{1}{3}x - \frac{5}{6} \right|$

14 > დაამტკიცეთ, რომ თუ $|x - a| = |x - b|$ (სადაც $a < b$),

მაშინ $x = \frac{a + b}{2}$ (ანუ $x \in [a; b]$ მონაკვეთის შუა წერტილია).

15 > ა) ააგეთ $f(x) = |3x - 2|$ და $g(x) = |-3x + 2|$ ფუნქციების გრაფიკები. დაწერეთ მოსაზრებები ამ ორი გრაფიკის შესახებ.

ბ) დაწერეთ $g(x) = |ax + b|$ სახის სხვა ფუნქცია, რომლის გრაფიკიც ემთხვევა $f(x) = |2x + 1|$ ფუნქციის გრაფიკს.

განტოლებათა სისტემა

ორცვლადიანი განტოლებები. განტოლებათა სისტემა

ორცვლადიანი განტოლებების ნიმუშები:

$$2x - 3y = 1 \quad 3x^2 - 2xy + y = 0 \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$(x_0; y_0)$ წყვილს, თუ იგი მოცემულ განტოლებას სწორ რიცხვით ტოლობად აქცევს, განტოლების ამონახსენი ეწოდება. მაგალითად, 1-ლი x ცვლადის, მე-2 კი y ცვლადის მნიშვნელობის მაჩვენებელი $(-2; 5)$ რიცხვითი წყვილი $y - x^2 = 1$ განტოლების ამონახსენია $(5 - (-2)^2 = 1)$ ტოლობა სწორია).

ორცვლადიანი განტოლების გრაფიკი არის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლის კოორდინატები განტოლების ამონახსენებია. მაგალითად, $y - 2x = 3$ განტოლების გრაფიკია წრფე, $y = x^2 - 2x$ განტოლების გრაფიკია პარაბოლა, $x^2 + y^2 = 3$ განტოლების გრაფიკია წრეწირი.

მოცემული ორცვლადიანი განტოლებებიდან თითოეულის დამაკმაყოფილებელი $(x_0; y_0)$ წყვილების მოძებნა თუ მოითხოვება, საჭირო გახდება განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. სისტემის განტოლებებიდან თითოეულის ამონახსენ $(x_0; y_0)$ წყვილს სისტემის ამონახსენი, ასეთ წყვილთა სიმრავლეს კი სისტემის ამონახსენთა სიმრავლე ეწოდება.

სასწავლო დავალებები

- 1 > შეამოწმეთ, რომელი წყვილია $x^2 - y + 2 = 0$ განტოლების ამონახსენი.
 - ა) $x = 1, y = 3$
 - ბ) $x = -2, y = 2$
 - გ) $x = -2, y = 6$
- 2 > უჩვენეთ განტოლების რომელიმე სამი ამონახსენი.

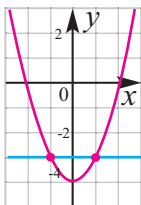
$$x - 2y = 3 \quad | \quad x^2 + 2y = 1 \quad | \quad (x-1)(y+2) = 0 \quad | \quad (x^2 + 4)(y-3) = 0$$
- 3 > ააგეთ განტოლებების გრაფიკები.
 - ა) $xy = 6$
 - ბ) $x^2 + y^2 = 16$
 - გ) $y = x^2 - 2x$
- 4 > ა) $(-8; 6)$; ბ) $(-5; 3)$ წყვილი $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = -2 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემის ამონახსენია?

განტოლებათა სისტემა ერთი ერთცვლადიანი და ერთი ორცვლადიანი განტოლებით

გრაფიკული ხერხი

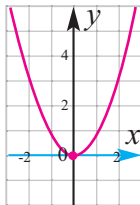
სისტემაში შემავალი განტოლებების გრაფიკების ერთ საკოორდინატო სიბრტყეში აგებით, გადაკვეთის წერტილების კოორდინატების მოძებნით სისტემის ამოხსნების (გარკვეული სიზუსტით) განსაზღვრა შეიძლება. გრაფიკული ხერხით ამოხსნა როგორც წესი სისტემის ამონახსენების რაოდენობის შესახებ მოსაზრების გამოთქმისათვის უფრო ხელსაყრელია.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3 \end{cases}$$



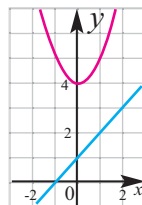
წრფე პარაბოლას ორ წერტილში კვეთს. სისტემას ორი ამონახსენი აქვს.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$



წრფე პარაბოლის მხებია. სისტემას ერთი ამონახსენი აქვს.

$$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$$



წრფესა და პარაბოლას საერთო წერტილი არა აქვთ. სისტემას ამონახსენი არა აქვს.

განტოლებათა სისტემა

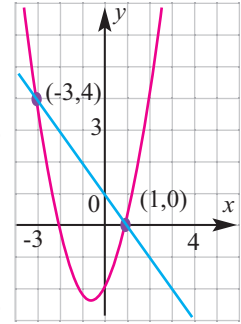
ნამუში 1.

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

ავაგოთ ორივე განტოლების შესაბამისი გრაფიკები ერთ კოორდინატთა სისტემაში. $y = x^2 + x - 2$ განტოლების გრაფიკი პარაბოლაა, $y = -x + 1$ განტოლების გრაფიკი კი წრფეა.

განვსაზღვროთ ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები: $(1; 0)$ და $(-3; 4)$

ამ მნიშვნელობების სისტემის განტოლებაში შეტანით შეიძლება იმის შემოწმება, რომ ამ შემთხვევაში ზუსტი ამონახსნებია ნაპოვნი.



1. განტოლება

მარცხენა

მარჯვენა

$$(1; 0) \quad 0 = 1^2 + 1 - 2, 0 = 0;$$

$$(-3; 4) \quad 4 = (-3)^2 - 3 - 2, 4 = 4;$$

პასუხი: $(1; 0), (-3; 4)$

2. განტოლება

მარცხენა

მარჯვენა

$$0 = -1 + 1, 0 = 0.$$

$$0 = 1 + 1, 0 = 0.$$

$$4 = -(-3) + 1 = 4$$

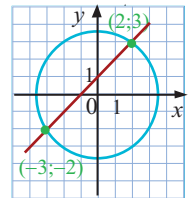
ნამუში 2.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = x + 1 \end{cases} \text{ განსაზღვრეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა რაოდენობა.}$$

ამოხსნა: სისტემაში შემავალი 1-ლი განტოლება წრეწირის, მეორე კი წრფის განტოლებაა. $x^2 + y^2 = 13$ წრეწირისა და $y = x + 1$ წრფის ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე აგებით განვსაზღვრავთ, რომ ისინი ორ წერტილში იკვეთებიან.

ამ წერტილების კოორდინატების $(x; y)$ წყვილები მოცემული სისტემის ამონახსნებია.

პასუხი: მოცემულ სისტემას ორი ამონახსნი აქვს.



5 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა გრაფიკული ხერხით.

ა) $\begin{cases} y = 3 - x \\ y = (x + 3)^2 + 2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} y = (x - 3)^2 + 2 \\ y + x = 0 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} y + 3 = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ y = 5 \end{cases}$

6 > წრეწირისა და წრფის ერთი და იგივე საკოორდინატო სისტემაში აგებით განსაზღვრეთ რამდენი ამონახსნი აქვს განტოლებათა სისტემას.

ა) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ალგებრული ხერხით

ჩასმის ხერხი. 1) პირველი ხარისხის განტოლებიდან ერთი ცვლადი გამოისახება სხვა ცვლადით.

2) ამ გამოსახულების სისტემის მეორე განტოლებაში შეტანით ერთცვლადიანი განტოლება მიიღება.

3) მიღებული განტოლების ამოხსნით ცვლადებიდან ერთის მნიშვნელობა მოიძებნება.

4) ამ მნიშვნელობის შესაბამისად მეორე ცვლადის მნიშვნელობა გამოითვლება.

ნიმუში 1.

$$\begin{cases} y + 9 = x^2 + 6x \\ -3x + y = -5 \end{cases}$$

1) $-3x + y = -5$ განტოლება ამოვხსნათ y -ის მიმართ: $y = -5 + 3x$

2) $y + 9 = x^2 + 6x$ განტოლებაში $y = -5 + 3x$ თუ გავითვალისწინებთ:

$$-5 + 3x + 9 = x^2 + 6x; \quad x^2 + 3x - 4 = 0; \quad (x - 1)(x + 4) = 0; \quad x_1 = 1, x_2 = -4$$

3) $y = -5 + 3x$ ჩასმის მიხედვით ვიპოვოთ y -ის შესაბამისი მნიშვნელობა.

$$y_1 = -5 + 3 \cdot 1 = -2, \quad y_2 = -5 + 3 \cdot (-4) = -17.$$

4) **პასუხი:** $(1; -2), (-4; -17)$.

მხარეების შეკრება (ან გამოკლება)

ნიმუში 2. $\begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$ შევასრულოთ ამოხსნა ქვემოთ მოცემულ ნაბიჯებად:

1) თუ განტოლებებს მხარეებად გამოვაკლებთ, $-\begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$

$$\frac{0 = x^2 - 4x - 12}{\text{განტოლებას მივიღებთ.}}$$

2) ამოვხსნათ $x^2 - 4x - 12 = 0$ განტოლება: $(x - 6)(x + 2) = 0; x_1 = 6, x_2 = -2$

3) ერთ-ერთ განტოლებაში x -ის მნიშვნელობების შეტანით ვიპოვოთ y -ის შესაბამისი მნიშვნელობები. $y_1 = -4 \cdot 6 + 7 = -17, y_2 = -4 \cdot (-2) + 7 = 15$

4) **პასუხი:** $(6; -17), (-2; 15)$

სასწავლო დაფალებები

7 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემები ჩასმის ხერხით.

ა) $\begin{cases} x = y + 3 \\ y \cdot x = -2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x - y = 3 \\ y^2 - x = 3 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x + y = 4 \\ y + xy = 6 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} y - x = 4 \\ xy = -3 \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} y + x = 3 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases}$

8 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა შეკრების (გამოკლების) ხერხით.

ა) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} y = x - 11 \\ y = x^2 - 4x - 5 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} 2x + y - 11 = 0 \\ 2x + 5y - y^2 - 6 = 0 \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} x^2 + 4y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

9 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ალგებრული ხერხით. განსაზღვრეთ წრეწირი-სა და წრფის გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა. გრაფიკალურად შეამოწმეთ.

ა) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = x - 4 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

განტოლებათა სისტემა

10 > დისკრიმინანტის გამოყენებით განსაზღვრეთ სისტემის ამონახსენთა რაოდენობა.

ნამუშაო:
$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

I განტოლებიდან $y = x^2 + 3x + 3$, II ანტოლება გავითვალისწინოთ და ერთცვლადიან განტოლებაზე დავიყვანოთ $x^2 + 3x + 5 = 0$. განვსაზღვროთ დისკრიმინანტი ნულია, დადებითია თუ უარყოფითია.

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 20 = -11 < 0. \quad D < 0 \text{ ამიტომ სისტემას ამონახსენი არა აქვს.}$$

ა) $\begin{cases} y = x^2 + 3x + 3 \\ y = -2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ y = 4x \end{cases}$

გ) $\begin{cases} y = x^2 - 5x - 3 \\ y = -3x \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = 2x^2 - 2x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 5 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} y = x^2 + 5 \\ y = x + 2 \end{cases}$

11 > კუთხური კოეფიციენტი $k = 2$ მქონე წრფეს და $y = 2x^2 + 6x + 5$ პარაბოლას ერთი საერთო წერტილი აქვთ. განსაზღვრეთ ამ წრფის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატი.

ამოხსნა: რადგან $k = 2$ წრფის განტოლება $y = 2x + b$ იქნება.

განტოლებათა სისტემა: $\begin{cases} y = 2x + b \\ y = 2x^2 + 6x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + b = 2x^2 + 6x + 5$

$$\overset{a}{2}x^2 + \overset{b}{4}x + \overset{c}{(5-b)} = 0$$

სისტემას აქვს ერთი ამონახსნი მაშასადამე, განტოლების დისკრიმინანტი ნულის ტოლია.

$$D = 0; 16 - 4 \cdot 2 \cdot (5 - b) = 0; 16 - 40 + 8b = 0; 8b = 24; b = 3$$

წრფის განტოლება $y = 2x + 3$ იქნება. b -ს მნიშვნელობა წრფის Oy ღერძის გადაკვეთის წერტილს განსაზღვრავს. სხვა სიტყვებით, წრფე როცა $x = 0$, მაშინ Oy ღერძს გადაკვეთს. მიიღება: როცა $x = 0$, მაშინ $y = 3$. **პასუხი: 3**

12 > ა) $y = 4x + b$ წრფეს და $y = -3x^2 - 2x + 4$ პარაბოლას საერთო წერტილი არა აქვთ. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს b -მ?

ბ) $y = 3x + b$ წრფეს და $y = 2x^2 - 5x + 3$ პარაბოლის ერთი საერთო წერტილი აქვთ. იპოვეთ b -ს მნიშვნელობა.

13 > წრფის განტოლება $y = kx - 5$ სახისაა. k -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება ეს წრფე $y = 3x^2 + 4x - 2$ კვადრატული ფუნქციის შესაბამისი პარაბოლის მხები?

14 > b -ს რა მნიშვნელობისათვის $y = x^2 + 1$ და $y - 2x = b$ განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას არ ექნება ამონახსენი?

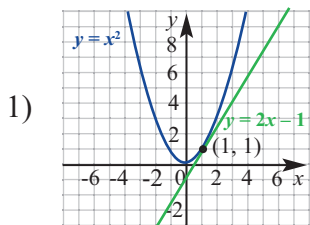
15 > იპოვეთ გადაკვეთის წერტილები:

ა) $y = \frac{8}{x}$ ჰიპერბოლის და $y = x - 2$ წრფისათვის;

ბ) $x^2 + y^2 = 5$ წრეწირისა და $3y + x = 5$ წრფისათვის.

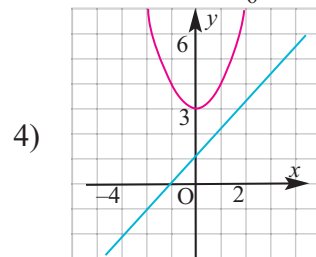
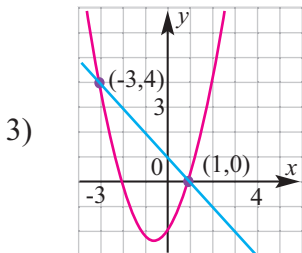
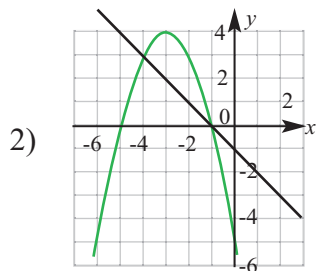
განტოლებათა სისტემა

16 > თითოეული გრაფიკის შესაბამისად დაწერეთ განტოლებათა სისტემა.



ნიმუში:

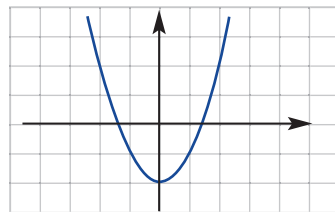
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$



17 > სურათზე მოცემული კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის შესაბამისად დაწერეთ სისტემის წრფივი განტოლება, რომ სისტემას:

- ა) ორი ამონახსენი ჰქონდეს;
- ბ) ერთი ამონახსენი ჰქონდეს;
- გ) ამონახსენი არ ჰქონდეს.

ღია ტიპის შეკითხვა. დაწერეთ თითოეული შემთხვევის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა და

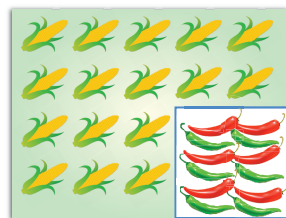


18 > გრაფიკის გამოსახვით წარმოადგინეთ:

- ა) განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემა, რომლის გრაფიკია პარაბოლა და ჰორიზონტალური წრფე.
- ბ) სისტემა რომლის გრაფიკია პარაბოლა და კუთხური კოეფიციენტი $k > 0$ წრფე.

19 > სამირმა ფეხბურთის ბურთი ზევით დაარტყა. იმავდროულად 16 მ სიმაღლეზე მყოფი ბუდიდან ფრინველი ამოფრინდა. მისი სიჩქარე 4 მ/წმ იყო. ბურთის დედამიწიდან h (მ-ობით) მანძილის t (წმ) დროზე დამოკიდებულება $h(t) = 24t - 5t^2 + 1$ ფორმულითაა მოცემული. რამდენი წამის შემდეგ იქნება ფრინველი და ბურთი ერთ სიმაღლეზე?

20 > ფერმერი სიმინდის დასათესი მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთის ერთ კუთხეში წიწაკის მოსაყვანად ადგილის გამოყოფას გეგმავს. მან ამ ნაკვეთის შემოღობისათვის გამოიყენა 32 მ სიგრძის მასალა და შემოღობა 64 მ^2 მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთი. იპოვეთ წიწაკით დაკავებული ნაკვეთის ზომები.



21 > სისტემის განტოლებებიდან ერთი $y = x^2 - 6x - 10$, მეორე კი პარაბოლის $x = 3$ და $x = 2$ წერტილებში მკვეთი წრფის განტოლებაა. დაწერეთ ამ განტოლებათა სისტემა.

განტოლებათა სისტემა

- 22 > სპორტსმენის თვითმფრინავიდან გადმოხტომისას პარაშუტის გახსნის მომენტამდე მოძრაობა

$h(t) = -5t^2 + 5000$ ფორმულით, პარაშუტის გახსნის შემდეგ კი $h(t) = -5t + 4000$ ფორმულით შეიძლება გამოისახოს, აქ t (წმ) დროს, h პარაშუტისტის დაშორებას დედამიწიდან (მეტრობით) გვიჩვენებს.

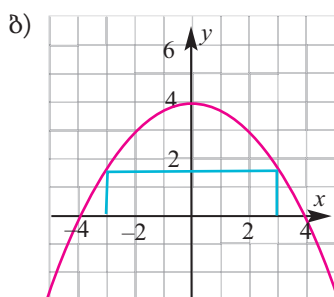
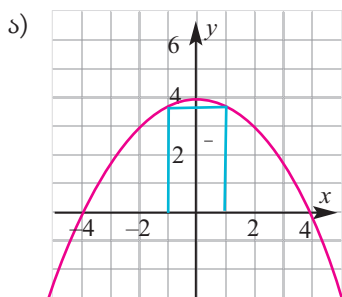


ა) დედამიწიდან რა სიმაღლეზე გაიხსნა პარაშუტი?

ბ) რამდენი წამის შემდეგ გაიხსნა პარაშუტი?

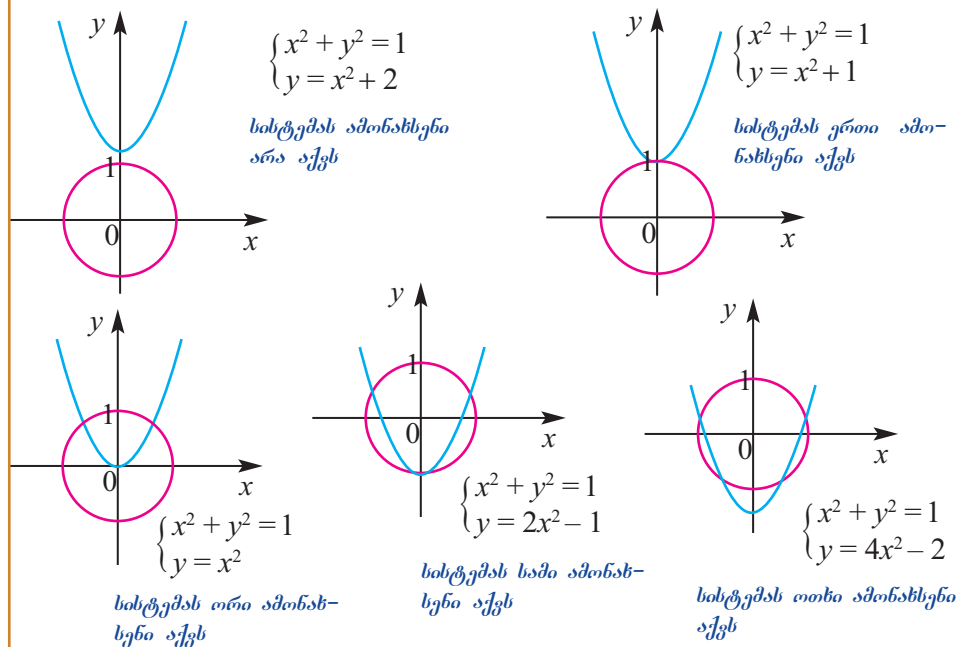
- 23 > სურათზე მოცემული მართკუთხედის 2 წვერო აბსცისთა ღერძზეა, ხოლო დანარ-

ჩენი ორი წვერო კი $y = 4 - \frac{x^2}{4}$ პარაბოლაზეა. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.



განტოლებათა სისტემა, რომლის ორივე განტოლება მეორე ხარისხისაა

ორივე მეორე ხარისხის განტოლებიანი განტოლებათა სისტემის გრაფიკული ამონახსნის მიხედვით შეიძლება განისაზღვროს სისტემის ამონახსნთა რიცხვი.



განტოლებათა სისტემა

24 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა გრაფიკული ხერხით.

ა) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} y = 2(x - 3)^2 + 4 \\ y = -2(x - 3)^2 + 4 \end{cases}$

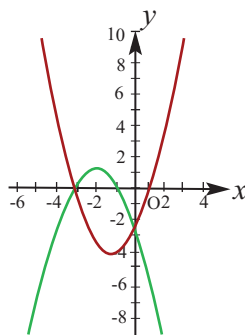
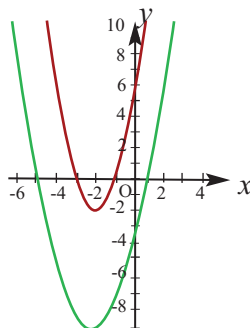
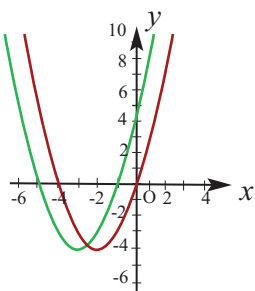
გ) $\begin{cases} y = (x + 2)^2 - 4 \\ y = (x - 4)^2 - 4 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 - 7 \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} xy = 3 \\ y - x^2 = 2 \end{cases}$

25 > გრაფიკების შესაბამისად დაწერეთ განტოლებათა სისტემა.



26 > $\begin{cases} y = (x + 3)^2 - 1 \\ y = x^2 + 6x + 8 \end{cases}$ განტოლებათა სისტემას უსასრულო რაოდენობის ამონახსენი აქვს.

განტოლების გრაფიკები ერთმანეთს ემთხვევა, რადგან პირველი განტოლების მარჯვენა მხარის გამარტივებით ჩანს, რომ ორივე განტოლება ერთი და იგივეა. უსასრულო რაოდენობის ამონახსენთა მქონე განტოლებათა სისტემის ერთი ნიმუშიც თქვენ დაწერეთ.

27 > შეასრულეთ დავალებები, თუ ცნობილია, რომ განტოლებათა სისტემის ამონახსენებია $(-1; 2)$ და $(2; 5)$.

ა) დაწერეთ ისეთი განტოლებათა სისტემა, რომლის ერთი განტოლება წრფეა, მეორე მეორე ხარისხის და მხოლოდ ეს ორი წერტილი იყოს სისტემის ამონახსენი.

ბ) დაწერეთ ისეთი განტოლებათა სისტემა, რომ ორივე განტოლება იყოს მეორე ხარისხის და მხოლოდ ეს ორი წერტილი იყოს სისტემის ამონახსენი.

გ) დაწერეთ ისეთი განტოლებათა სისტემა, რომ ორივე განტოლება იყოს მეორე ხარისხის და მოცემული წერტილების ჩათვლით სისტემას ჰქონდეს უამრავი ამონახსენი

28 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ალგებრული ხერხით.

ა) $\begin{cases} x^2 = xy + 3 \\ xy = -2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x(y + 1) = 0 \\ x + 5xy + y = 4 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

29 > სისტემაში შემავალი განტოლებების გრაფიკების სქემატური გამოსახვით განსაზღვრეთ რომელს აქვს ორი ამონახსენი, ერთი ამონახსენი, უსასრულო რაოდენობის ამონახსენი და არც ერთი ამონახსენი.

ა) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} y = (x - 3)^2 - 3 \\ y = \frac{1}{3}(x - 3)^2 - 4 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y = 2(x + 2)^2 - 3 \\ y = -2(x + 2)^2 - 3 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} y = 2(x - 3)^2 + 1 \\ y = -2(x - 3)^2 - 1 \end{cases}$

ვ) $\begin{cases} y = (x + 4)^2 - 1 \\ y = x^2 + 8x + 15 \end{cases}$

ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა სისტემის შედგენით

- 1 > ახალ სპექტაკლზე 560 ბილეთი გაიყიდა. ერთი ბილეთის ფასი 6 მანეთია. სტუდენტებს ბილეთი 30% ფასდაკლებით მიეყიდემათ. რამდენმა სტუდენტმა შეიძინა ბილეთი, თუ სულ ბილეთების გაყიდვიდან შემოვიდა 2586 მანეთი?
- 2 > ჯელილმა და სემედმა თანაკლასელებისათვის ბუფეტიდან ბუტერბროდი და ლიმონათი შეიძინეს. ჯელილმა 5 ბუტერბროდსა და 2 ლიმონათში 7,1 მანეთი, სემედმა კი 4 ბუტერბროდსა და 7 ლიმონათში 10 მანეთი გადაიხადა. იპოვეთ ერთი ლიმონათისა და ერთი ბუტერბროდის ფასი.
- 3 > გულენდამს ორი საბანკო ანგარიში აქვს: 4,5% მარტივი საპროცენტო ზრდისა და 6% მარტივი საპროცენტო ზრდით. 6% -იან ანგარიშზე თანხა 4,5%-იანი ანგარიშის თანხაზე 3-ჯერ მეტია. რა თანხა ჰქონდა ჩადებული გულენდამს თითოეულ ანგარიშზე, თუ ორივე ანგარიშზე ერთად ერთი წლის შემდეგ იყო 4225 მანეთი?

	4,5%	6%
საწყისი თანხა	x	y
წლიური მატება	$0,045x$	$0,06y$
ჯამი	4225	

ცხრილი გამოიკვლიეთ, რვეულში ხელახლა ჩაიხაზეთ. ამოხსენით ამოცანა განტოლებათა სისტემის შედგენით.

- 4 > ბანკი ორ სხვადასხვა მომსახურებას გთავაზობთ: თანხის დაზღვევის გარეშე შეტანისას 5,5%, დაზღვევით შეტანისას 3,5% წლიური მარტივი პროცენტის ზრდით. სერდარმა ორივე ანგარიშზე შეიტანა ფული. ამასთან დაუზღვეველ ანგარიშზე 700 მანეთით მეტი, ვიდრე დაზღვეულზე. წლის ბოლოს სარგებლის სახით სერდარმა მიიღო 250 მანეთი. რა თანხა ჰქონდა შეტანილი თითოეულ ანგარიშზე?
- 5 > A გასაწმენდ სითხეში 25% მჟავაა, B გასაწმენდ სითხეში კი - 50%. შემადგენლობაში 35% მჟავას შემცველი 10 ლ გასაწმენდი ნივთიერების დამზადებისათვის თითოეული სითხის რამდენი ლიტრი უნდა ავურიოთ?

მითითება: 25% გასაწმენდი სითხის ოდენობა ავლნიშნოთ x -ით, ხოლო 50% სითხის ოდენობა y -ით. მოცემული ინფორმაცია შევიტანოთ ცხრილში.

	25%	50%	35%
სითხის ოდენობა	x	y	$x + y$
მჟავას ოდენობა	$0,25x$	$0,5y$	$0,25x + 0,5y$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{0,25x + 0,5y}{x + y} = 0,35 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნით შეიძლება ვიპოვოთ ამოცანაში მოთხოვნილი სიდიდეები.

ამოცანების ამოხსნა განტოლებათა სისტემის შედგენით

- 6 > ფაბრიკაში აბრეშუმის ტანსაცმლის წარმოებაში იყენებენ სუფთა აბრეშუმსა და 85%-იან აბრეშუმის ძაფს. თითოეული სახის რამდენი კილოგრამი ძაფის გამოყენება არის საჭირო 120 კგ 96%-იანი აბრეშუმის ძაფის მისაღებად?
- 7 > 15%-იანი ბედქონდარას ჩაი, აურიეს 22%-იან ბედქონდარას ჩაიში და მიიღეს 18%-იანი ბედქონდარას 5 კგ ჩაი. თითოეული ჩაის რამდენი კილოგრამი აიღეს მისი მიღებისათვის?
- 8 > როცა 1 კგ ბალი ღირდა 3 მანეთი, ბაზარში 12000 კგ მოთხოვნის პირობებში 16000 კგ მოსავალი იყო. ბალის 1 კგ-ის ფასის 1,50 მანეთზე ჩამოსვლისას ბაზარში 10 000 კგ მოსავლის არსებობისას მასზე მოთხოვნილება 14 000 კგ იყო. ბალზე მოთხოვნილებისა და შემოთავაზებულ ფასს შორის (მოთხოვნილება - ფასი, შემოთავაზება - ფასი) წრფივი დამოკიდებულების პირობით, მოთხოვნილების შემოთავაზებით დაფარვისას განსაზღვრეთ გასაყიდად გამოტანილი ბალის ოდენობა და 1 კგ-ის ფასი.
- მითითება:** ბალის ოდენობა x -ით (ათას კგ-ობით), 1 კგ ბალის ფასი y -ით (მანეთობით) აღნიშნეთ. (16; 3) და (10; 1,5) წერტილების $y - y_1 = k(x - x_1)$ წრფივი განტოლების მხედველობაში მიღებით (შემოთავაზება - ფასი) დაწერეთ დამოკიდებულება. ანალოგიურად მოთხოვნა - ფასი დამოკიდებულება შეამოწმეთ (12; 3) და (14; 1,5) წერტილებში.
-
- 9 > მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 17 სმ-ია. თუ თითოეულ კათეტს 3 სმ-ით შევამცირებთ მიღებული სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 4 სმ-ით შემცირდება. იპოვეთ თავდაპირველი მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი.
- 10 > თუ ორი მილი ერთდროულად იმუშავენ, ავზი 12 წუთში გაივსება. თუ ჯერ ავზის ნახევარი პირველი მილით, შემდეგ დარჩენილი ნახევარი მეორე მილით შეივსება, მაშინ ავზის ავსებას 25 წუთი დასჭირდება. რამდენ წუთში გაივსება ავზი თუ თითოეული მილი ცალ-ცალკე იმუშავენ?
- 11 > A და B ქალაქებს შორის მანძილი 80 კმ-ია. ამ ქალაქებიდან ერთდროულად ორმა ავტომობილმა ერთმანეთის პირისპირ დაიწყეს მოძრაობა, შეხვედრიდან 20 წუთის შემდეგ ერთი ავტომობილი B-ში, ხოლო 45 წუთის შემდეგ კი მეორე A ქალაქში ჩავიდა. იპოვეთ ავტომობილების სიჩქარე.
- 12 > მგზავრს მეტროში მოძრავ ესკალატორზე სიარული 24 წამი, ხოლო უძრავ ესკალატორზე იმავე სიჩქარით მოძრაობისას 42 წამი სჭირდება. რამდენ წამში გაივლის მგზავრი მეტროს მოძრავი ესკალატორის მანძილს თუ თვითონ გაჩერებული იქნება?

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 1 > განტოლებათა სისტემის ამოხსნით განსაზღვრეთ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილების რაოდენობა.

$$1) \begin{cases} x^2 - y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -3x^2 + y^2 = 9 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ -x + y = -4 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + 2y^2 = -6 \\ x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 17 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 4x^2 - 5y^2 = 16 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 15 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x^2 = 6y \\ y = -x \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ y = x - 7 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} (x - 4)(y - 5) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} (x + y)(x - y) = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} x^2 - x + 1 = y \\ y^2 - y + 1 = x \end{cases}$$

- 2 > არსებობს 20%-იანი და 10%-იანი მარილის ხსნარი. 100 გრამ 20%-იან ხსნარს, რამდენი გრამი 10%-იანი ხსნარი უნდა დავუმატოთ, რომ მივიღოთ 12,5%-იანი ხსნარი?

- 3 > ამოხსენით განტოლებები.

$$ა) x^5 - x^3 = 0$$

$$ბ) x^4 = 16x^2$$

$$გ) x^3 - x^2 = 4(x - 1)^2$$

$$დ) 2x^3 + 2x^2 = (x + 1)^2$$

$$ე) (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 25x^2 - 16$$

$$ვ) (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 1$$

$$ზ) (x^2 + 6x)^2 - 24 = x^2 + 6x$$

$$თ) (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 3$$

- 4 > ორ პუნქტს შორის მანძილი 18 კმ-ია. ამ პუნქტებიდან ერთდროულად ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით ორი ტურისტული ჯგუფი გამოვიდა და 2 საათის შემდეგ შეხვდნენ ერთმანეთს. იპოვეთ თითოეული ჯგუფის სიჩქარე, თუ პირველ ჯგუფს ამ პუნქტებს შორის მანძილის დასაფარად დასჭირდა 54 წთ-ით მეტი დრო ვიდრე მეორეს.

- 5 > კომპანიის შემოსავალი $P = 200n - n^2$ ფორმულით გამოითვლება. სადაც n თანამშრომელთა რაოდენობას უჩვენებს.

ა) რამდენი თანამშრომლის შემთხვევაში ექნება ამ კომპანიას მაქსიმალური მოგება?

ბ) მოცემული ფუნქციისათვის განსაზღვრეთ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე.

გ) გამოსახეთ n ცვლადი P -თი. ტოლობის ფესქვეშა ნაწილში გამოსახულებისათვის რომელი შეზღუდვები უნდა აღინიშნოს?

განმარტადებელი დავალებები

- 6 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა მხარეების შეკრების ხერხით.

$$ა) \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 9 \end{cases}$$

$$გ) \begin{cases} x^2 + xy = 8 \\ y^2 + xy = 8 \end{cases}$$

- 7 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა მხარეების გაყოფის ხერხით.

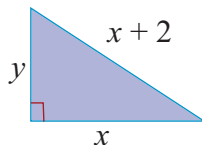
$$ა) \begin{cases} xy - x = 2 \\ xy^3 - xy^2 = 8 \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + x^2y = 12 \end{cases}$$

$$გ) \begin{cases} xy^2 - x = 9 \\ xy^3 - xy = 18 \end{cases}$$

- 8 > წესების დამრღვევა მძღოლმა 90 კმ/სთ სიჩქარით გზის პირას მდგომ პოლიციის მანქანას ჩაუარა და გზა განაგრძო. პოლიციამ წესების დამრღვევი ავტომობილის გაჩერებისათვის მუდმივი აჩქარებით სიჩქარის ზრდით იმოძრავა და მისი გავლილი მანძილი (მ-ობით) დროზე (წუთობით) დამოკიდებულება $d = 375t^2$ ფორმულით გამოისახება. რა დროში დაეწევა პოლიციელი ავტომობილს?

- 9 > სამკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია. სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები.



- 10 > ამოხსენით განტოლებები.

$$ა) x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$$

$$დ) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2\frac{1}{2}$$

$$ბ) x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$$

$$ე) \frac{x + 6}{x + 7} - \frac{5}{x - 7} = \frac{3x - 7}{x^2 - 49}$$

$$გ) \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x - 1} = 12$$

$$ვ) \frac{x + 4}{x - 6} - \frac{3}{x + 2} = \frac{x + 25}{x^2 - 4x - 12}$$

- 11 > მართი კუთხის წვეროდან ორმა სხეულმა მისი კათეტების გასწვრივ ერთდროულად დაიწყო მოძრაობა და 3 წამის შემდეგ მათ შორის მანძილი 15 მ გახდა. იპოვეთ მათი სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ პირველი სხეულის მიერ 3 წამში გავლილი მანძილი მეორის მიერ 4 წამში გავლილი მანძილის ტოლია.

- 12 > დაამტკიცეთ, რომ $y = x^2 + 4$ პარაბოლა და $y - x + 3 = 0$ წრე არ იკვეთებიან.

- 13 > მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთის სიგრძე 60 მ-ია, სიგანე კი 8მ. ამ ნაკვეთის სიგრძისა და სიგანის რამდენი მეტრით შემცირება საჭირო, რომ მისი ფართობი 2-ჯერ, პერიმეტრი კი 44 მ-ით შემცირდეს?

- 14 > a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებათა სისტემას ერთადერთი ამონახსენი?

$$ა) \begin{cases} y + 2x = a \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$

$$ბ) \begin{cases} x + y = a \\ yx = 9 \end{cases}$$

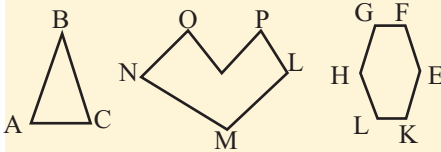
მრავალკუთხედი

ტეხილი. მრავალკუთხედი

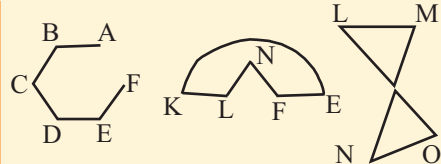
ტეხილი არის ისეთი რამდენიმე მონაკვეთისაგან შემდგარი ფიგურა, რომ მათ შორის პირველი ფიგურის ბოლო, მეორე მონაკვეთის დასაწყისი, მეორე მონაკვეთის ბოლო მესამის დასაწყისი და ა. შ. მიმდევრობითაა შეერთებული. თუ ტეხილის წვეროები (ბოლო მონაკვეთის ბოლო და პირველი მონაკვეთის საწყისი) ემთხვევა ერთმანეთს, მას შეკრული ტეხილი ეწოდება.

მრავალკუთხედი არის მეზობელი მონაკვეთების ერთ წრფეზე არამდებარე და არამეზობელი მონაკვეთების არამკვეთი შეკრული ტეხილის შემდგენი ფიგურა.

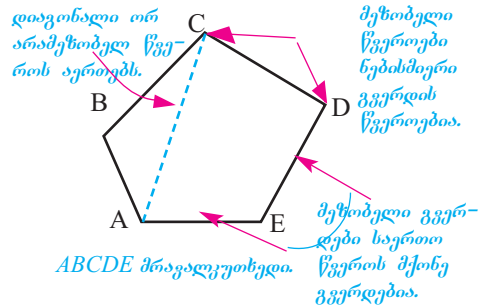
მრავალკუთხედა



არაა მრავალკუთხედი

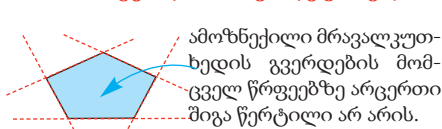


- მრავალკუთხედი სიბრტყითი ფიგურაა.
- გვერდები განსაზღვრული რაოდენობის მონაკვეთებისგან შედგება.
- მრავალკუთხედი შეკრული ფიგურაა და სიბრტყეს ორ ნაწილად ყოფს: მრავალკუთხედის შიგნით დარჩენილი სასრული ნაწილი და მის გარეთ დარჩენილი უსასრულო ნაწილი.
- მრავალკუთხედი სახელდება მისი წვეროების მარჯვენაზე ასობით.

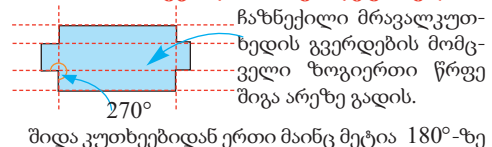


მრავალკუთხედი შეიძლება იყოს ამოზნექილი და ჩაზნექილი. თუ გვერდების მომცველ წრფეებზე მრავალკუთხედის შიგა არეს წერტილი არ არის, ამ მრავალკუთხედს **ამოზნექილი**, ხოლო თუ არის **ჩაზნექილი** მრავალკუთხედი ეწოდება.

ამოზნექილი მრავალკუთხედი



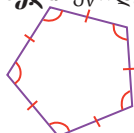
ჩაზნექილი მრავალკუთხედი



მრავალკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი და ყველა კუთხე კონგრუენტულია **წესიერი მრავალკუთხედი** ეწოდება.

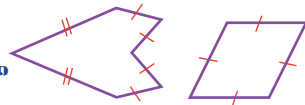
წესიერი

მრავალკუთხედი



არაწესიერი

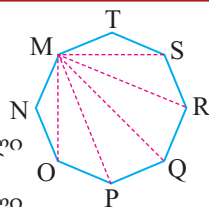
მრავალკუთხედი



მრავალკუთხედებს წვეროები, კუთხეები და გვერდები ერთი და იგივე რაოდენობისა აქვს. n გვერდიან მრავალკუთხედს n -კუთხედი ეწოდება. მრავალკუთხედი გვერდების რაოდენობის მიხედვით სამკუთხედად, ოთხკუთხედად, ხუთკუთხედად, ექვსკუთხედად და ა.შ. იწოდება. ამოზნექილი n -კუთხედის ერთი წვეროდან $(n - 3)$ დიაგონალის გავლება შეიძლება.

მრავალკუთხედები

1 > სურათზე მოცემული ფიგურის მიხედვით დაწერეთ: ა) გვერდების; ბ) ნებისმიერი წვეროს არამეზობელი ხუთი წვეროს; გ) ორი მეზობელი გვერდის; დ) სამი დიაგონალის სახელი.

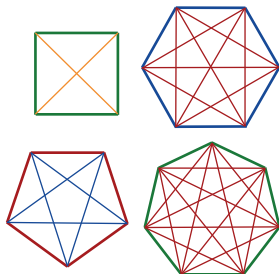


2 > ა) ჩაიხაზეთ რვეულში ორი ამოხნეპილი და ორი ჩაზნეპილი მრავალკუთხედი.

ბ) ჩაიხაზეთ რვეულში ერთი ამოხნეპილი და ერთი ჩაზნეპილი ხუთკუთხედი და გაავლეთ მათი ყველა დიაგონალი.

3 > რვეულში ჩაიხაზეთ სურათზე ნაჩვენები მრავალკუთხედები და გაავლეთ მათი ყველა დიაგონალი შეადგინეთ მრავალკუთხედის გვერდების, ერთი წვეროდან გავლენი დიაგონალების და დიაგონალების საერთო რაოდენობის მაჩვენებელი ცხრილი. დაასაბუთეთ, რომ ამოხნეპილი n -კუთხედის ყველა დიაგონალის რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$



4 > ა) სულ რამდენი დიაგონალი აქვს ამოხნეპილ რვაკუთხედს, ათკუთხედს?

ბ) რამდენი გვერდი აქვს მრავალკუთხედს, რომელსაც აქვს 35; 90 დიაგონალი?

5 > ა) იპოვეთ ამოხნეპილი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა თუ დიაგონალების რაოდენობა გვერდების რაოდენობაზე 2-ჯერ მეტია.

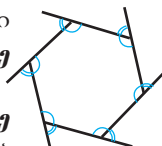
ბ) ამოხნეპილი მრავალკუთხედის დიაგონალების რაოდენობა გვერდების რაოდენობაზე 6-ჯერ მეტია. რამდენი დიაგონალის გავლება შეიძლება ამ მრავალკუთხედის ერთი წვეროდან?

მრავალკუთხედების შიგა და გარე კუთხეები

ამოხნეპილი მრავალკუთხედის მოცემული წვეროდან გამოსული ორი გვერდით შექმნილ კუთხეს, ამ წვეროსთან მდებარე **შიგა კუთხე** ეწოდება.

შიგა კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს კი მრავალკუთხედის **გარე კუთხე** ეწოდება.

მრავალკუთხედის ნებისმიერ წვეროსთან მდებარე შიგა და გარე კუთხეების (თითოეულ წვეროსთან გარე კუთხეებიდან ერთი აიღება) ჯამი 180° -ია.

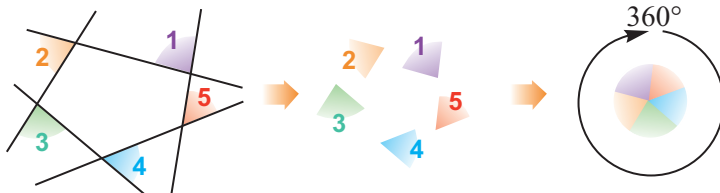


გამოკვლევა 1. შეავსეთ ქვემოთ მოცემული ცხრილი. დაწერეთ n გვერდიანი ამოხნეპილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

						...	
მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა	3	4	5	6	7	...	n
ერთი წვეროდან გავლენი დიაგონალების რაოდენობა	0	1				...	
სამკუთხედების რაოდენობა	1	2					
შიგა კუთხეების ჯამი	$1 \cdot 180^\circ$	$2 \cdot 180^\circ$					

მრავალკუთხედები

გამოკვლევა 2. ქალაღზე, სურათზე ნაჩვენები წესით თითოეულ წვეროსთან გარე კუთხის გაფერადებით დახაზეთ ამოხსნიელი მრავალკუთხედი: გარე კუთხეები ამოჭერით და წვეროებს იგივე წერტილებში ყოფნით ერთმანეთზე გადაუსვლეთ პირობით სხვა ქალაღზე დააწებეთ. გამოთქვით მოსაზრება ყველა გარე კუთხის ჯამის შესახებ.



მრავალკუთხედის შიგა და გარე კუთხეების ჯამი

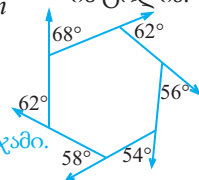
თეორემა 1. ამოხსნიელი n -კუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი $180^\circ \cdot (n-2)$ -ის ტოლია ($n \geq 3$).

დასკვნა 1. წესიერი n -კუთხედის თითოეული შიგა კუთხე $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ -ის ტოლია.

თეორემა 2. ამოხსნიელი მრავალკუთხედის გარე კუთხეების ჯამი 360° -ია.

გარე კუთხეების ჯამი = გაშლილი კუთხეების ჯამი – შიგა კუთხეების ჯამი.

$$\begin{aligned} \text{გარე კუთხეების ჯამი: } 180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) &= \\ &= 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$



დასკვნა 2. წესიერი n -კუთხედის თითოეული გარე კუთხე $\frac{360^\circ}{n}$ -ის ტოლია.

ნიმუში 1. წესიერი მრავალკუთხედის ერთ წვეროსთან გარე კუთხე 60° -ია. იპოვეთ:

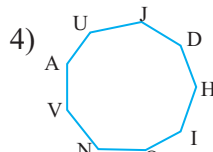
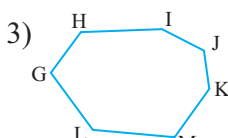
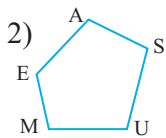
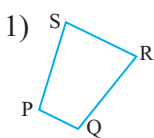
ა) მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების გრადუსული ზომა;

ბ) მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა.

ამოხსნა: ა) შიგა კუთხე + გარე კუთხე = 180° ; შიგა კუთხე = $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\text{ბ) } \frac{360^\circ}{n} = 60^\circ \quad n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$$

6 > იპოვეთ სურათზე მოცემული თითოეული მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი.



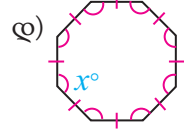
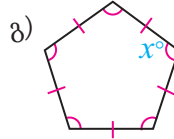
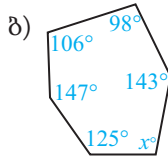
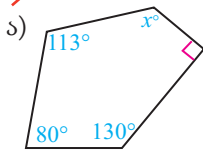
7 > 1) ამოხსნიელი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 1800° -ია. ამ მრავალკუთხედს: ა) რამდენი გვერდი აქვს? ბ) რამდენი დიაგონალი აქვს?

2) იპოვეთ წესიერი: ა) ექვსკუთხედის; ბ) ათკუთხედის შიგა და გარე კუთხეების გრადუსული ზომები.

3) წესიერი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 1080° -ია. იპოვეთ ამ მრავალკუთხედის თითოეული შიგა და გარე კუთხის გრადუსული ზომები.

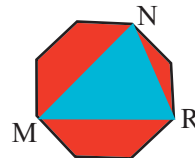
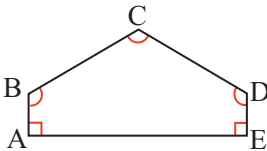
მრავალკუთხედები

- 8 > იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედების შიგა და გარე კუთხეების გრადუსული ზომები, თუ გვერდების რაოდენობაა: $n = 8$; $n = 9$; $n = 12$ და $n = 15$.
- 9 > იპოვეთ ამოზნექილი მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი, თუ დიაგონალების რაოდენობაა 27.
- 10 > წესიერი მრავალკუთხედის გარე კუთხე შიგა კუთხის 25%-ის ტოლია. იპოვეთ მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა.
- 11 > იპოვეთ მრავალკუთხედის x -ით აღნიშნული კუთხე.

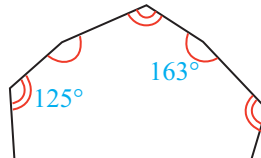
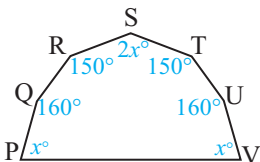


- 12 > ამოზნექილი ხუთკუთხედის შიგა კუთხეებია 60° , 80° , 120° , 140° . იპოვეთ მეხუთე კუთხის გრადუსული ზომა.
- 13 > ამოზნექილი ექვსკუთხედის კუთხეებია: 90° , 110° , 120° , 124° და 116° იპოვეთ ექვსკუთხედის მეექვსე წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე.
- 14 > იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა მოცემულ შიგა კუთხის მიხედვით.
- 1) 120° 2) 150° 3) 140° 4) 160°
- 15 > იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა მოცემული გარე კუთხის მიხედვით.
- 1) 72° 2) 40° 3) 36° 4) 30°

- 16 > ა) სურათზე სახლის სახურავის წინხედი ასახული. მოცემული აღნიშვნების მიხედვით დაწერეთ თითოეული კუთხის გრადუსული ზომა.
- ბ) სურათზე წესიერ ექვსკუთხედა STOP ნიშანზე MNR სამკუთხედი გამოსახული. ამ სამკუთხედის გვერდების მიხედვით განსაზღვრეთ მისი სახე.



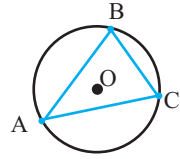
- 17 > ა) სურათზე კარავის წინხედი მოცემული. იპოვეთ ცვლადით აღნიშნული კუთხეების გრადუსული ზომები.
- ბ) მრავალკუთხედის შიგა კუთხეები სურათზე ნაჩვენებია ზომის კონგრუენტული კუთხეების მიმდევრობისაგან შედგება. გარე კუთხეების გამოყენებით იპოვეთ მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობა.



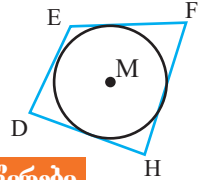
- 18 > წესიერი მრავალკუთხედების შიგა კუთხეების ჯამი გარე კუთხეების ჯამზე 11-ჯერ მეტია. რამდენი გვერდი აქვს ამ მრავალკუთხედს?

წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები

განსაზღვრება 1. თუ მრავალკუთხედის ყველა წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ამ მრავალკუთხედს წრეწირში ჩახაზული მრავალკუთხედი, წრეწირს კი მრავალკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ეწოდება. სურათზე $\triangle ABC$ წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედი.

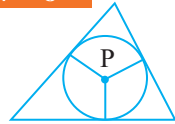


განსაზღვრება 2. თუ მრავალკუთხედის ყველა გვერდი წრეწირს ეხება, ამ მრავალკუთხედს წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედი, წრეწირს კი მრავალკუთხედში ჩახაზული წრეწირი ეწოდება. სურათზე $DEFH$ წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედი.

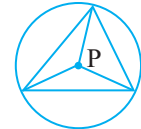


სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირები

თეორემა 1. ნებისმიერ სამკუთხედში წრეწირის ჩახაზვა შეიძლება. ამ წრეწირის ცენტრი სამკუთხედების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია.

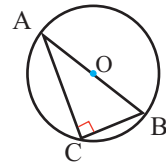


თეორემა 2. ნებისმიერ სამკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. ამ წრეწირის ცენტრი სამკუთხედის გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია.

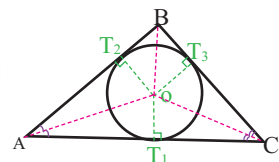


თეორემა 3. თუ წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედი მართკუთხაა, ჰიპოტენუზა ამ წრეწირის დიამეტრია.

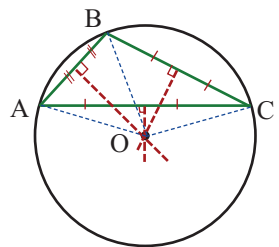
შებრუნებული თეორემა. თუ წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედის გვერდი ამ წრეწირის დიამეტრია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხა სამკუთხედი.



თეორემა 1-ის დამტკიცება: (ტექსტით). გავავლოთ $\triangle ABC$ სამკუთხედის კუთხეების ბისექტრისები და მათი გადაკვეთის წერტილი ავლნიშნოთ O ასოთი. ბისექტრისაზე არსებული ნებისმიერი წერტილი კუთხის გვერდებიდან ტოლ მანძილებზეა: $OT_1 = OT_2 = OT_3$. გავავლოთ წრეწირი, რომლის ცენტრი O წერტილშია და რადიუსი $r = OT_1$. სამკუთხედის გვერდები OT_1 , OT_2 და OT_3 რადისებთან მართობულობის გამო T_1 , T_2 და T_3 წერტილებში წრეწირს ეხება. მაშასადამე, ეს წრეწირი მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირია.



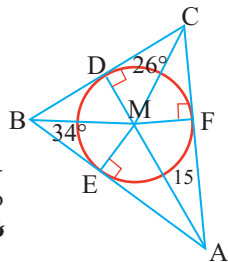
თეორემა 2-ის დამტკიცება: $\triangle ABC$ -ს AB და BC გვერდების შუაწერტილებიდან გავავლოთ ამ გვერდების მართობები და მათი გადაკვეთის წერტილი ავლნიშნოთ O -თი. მონაკვეთის შუამართობის თვისების თანახმად $OA = OB = OC$. ვინაიდან $\triangle AOC$ ტოლფერდაა O წერტილი თანაც AC გვერდის შუამართობზეა. O წერტილში ცენტრის მქონე $R = AO$ რადიუსიანი წრეწირი სამკუთხედის სამივე წვეროს წერტილებზე გავლით შემოხაზული წრეწირი ხდება.



შენიშვნა: მოცემულ სამკუთხედზე მხოლოდ ერთი წრეწირის შემოხაზვა შეიძლება. მოცემულ წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედების რაოდენობა კი უსასრულოა.

წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოსაზული მრავალკუთხედები

- 1 > M წერტილი სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. იპოვეთ: ა) $\angle MAC$; ბ) MF , თუ $\angle MBA = 34^\circ$, $\angle MCB = 26^\circ$ და $MA = 15$.

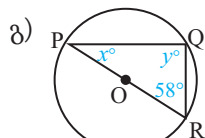
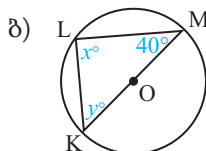
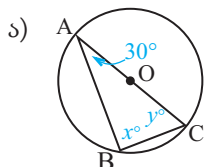


- 2 > ჩახაზეთ წრეწირში მოთხოვნილი სამკუთხედი. განსაზღვრეთ წრეწირის ცენტრის ადგილი თითოეულ შემთხვევაში **სამკუთხედშია, სამკუთხედის გარეთაა, სამკუთხედის გვერდზეა** გამოთქმებიდან ერთ-ერთის შერჩევით.

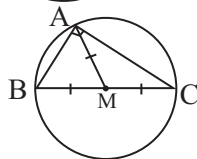
ა) მახვილკუთხა სამკუთხედი;
გ) ბლაგვკუთხა სამკუთხედი.

ბ) მართკუთხა სამკუთხედი

- 3 > იპოვეთ წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედის ცვლადით აღნიშნული კუთხეების გრადუსული ზომები. O წერტილი წრეწირის ცენტრია.



- 4 > AM წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედის მედიანაა და მისი სიგრძე 10 სმ-ია. $AB = 12$ სმ. იპოვეთ $\triangle ABC$ -ს ფართობი. M წერტილი წრეწირის ცენტრია.

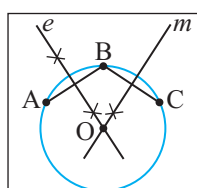
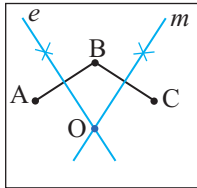
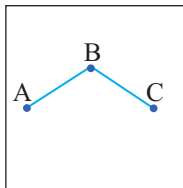


- 5 > ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე გამავალი წრეწირის აგება.

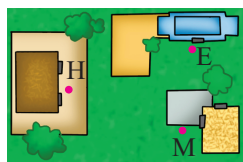
1. აღნიშნეთ ერთ წრფეზე არამდებარე A, B, C წერტილები და გაავლეთ მათი შემაერთებელი AB და BC მონაკვეთები.

2. ააგეთ AB და BC მონაკვეთების შუამართობები. შუამართობების გადაკვეთის წერტილი აღნიშნეთ O ასოთი.

რადგან წრეწირის ცენტრი ქორდების შუამართობებზე უნდა მდებარეობდეს O წერტილის ცენტრად შერჩევით დახაზეთ A, B და C წერტილებზე გამავალი წრეწირი.



- 6 > პროგრამული უზრუნველყოფითა და ტექნიკური მხარდაჭერით დასაქმებული კომპანია გეგმაზე ნაჩვენებ H, M და E კომპანიებს ემსახურება და ახალი საოფისე ბინის დაქირავებას გეგმავს. გადაიხაზეთ გეგმა რვეულში და ამ კომპანიის ახალი ოფისი გეგმაზე ისე განათავსეთ, რომ სამივე კომპანიიდან თანაბარ მანძილზე იყოს.



წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები

წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედების თვისებები

სამკუთხედებისაგან განსხვავებით ნებისმიერ ოთხკუთხედში წრეწირის ჩახაზვა ან ოთხკუთხედზე შემოხაზვა არაა შესაძლებელი.

თეორემა 4. წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია: $AB + CD = BC + AD$

შებრუნებული თეორემა. თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლია, მაშინ მასში წრეწირის ჩახაზვა შესაძლებელია.

თეორემა 5. წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180° -ია:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$$

შებრუნებული თეორემა. თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180° -ია, მაშინ მასზე ოთხკუთხედის შემოხაზვა შესაძლებელია.

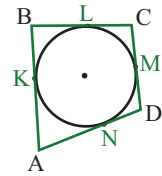
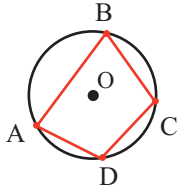
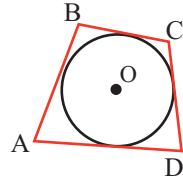
თეორემა 4-ის დამტკიცება: დავუშვათ K, L, M, N წერტილები ოთხკუთხედის გვერდების წრეწირთან შეხების წერტილებია. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხეგების თვისების თანახმად $AK = AN, BK = BL, CM = CL, DM = DN$

ამ ტოლობებს მხეგების მიხედვით თუ შევკრებთ მივიღებთ:

$$AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN$$

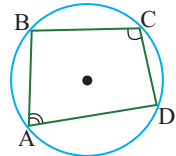
ან

$$AB + CD = BC + AD.$$



7 > დაასრულეთ თეორემა 5-ის დამტკიცება.

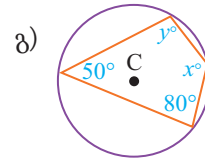
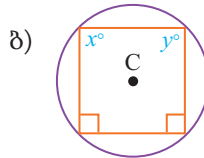
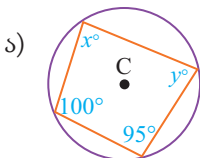
პირობა	საფუძველი
1. $\angle A = \frac{\angle BCD}{2}, \quad \angle C = \frac{\angle DAB}{2}$	1.
2. $\angle A + \angle C = \frac{\angle BCD + \angle DAB}{2}$	2. წევრ-წევრ შეკრება
3. $\angle A + \angle C = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$	3.



8 > წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე გვერდის სიგრძის ჯამი 12 სმ-ია. იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

9 > წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის სამი გვერდის სიგრძე 4 სმ, 6 სმ და 7 სმ-ია. რამდენი სანტიმეტრი შეიძლება იყოს პერიმეტრი? გამოიკვლიეთ შესაძლო შემთხვევები.

10 > იპოვეთ წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის ცვლადით აღნიშნული კუთხეების გრადუსული ზომები.



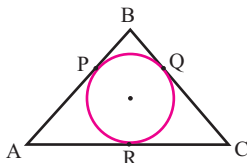
წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები

- 11 > ა) დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში ჩახაზული ტრაპეცია ტოლფერდაა.
 ბ) დახაზეთ წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული პარალელოგრამები. რა შემთხვევაშია ეს შესაძლებელი? განსაზღვრეთ პარალელოგრამის სახე.
- 12 > ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის შეხების წერტილი ფერდს 3 სმ და 4 სმ მონაკვეთებად ყოფს. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი. რამდენი ამონახსენი აქვს ამოცანას?

- 13 > ჩახაზული წრეწირი $\triangle ABC$ -ს გვერდებს P , Q და R წერტილებში ეხება.

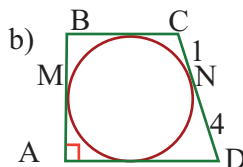
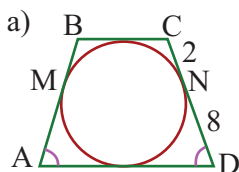
ა) სურათის მიხედვით დაწერეთ კონგრუენტული მონაკვეთების სახელები.

ბ) თუ $AB=10$ სმ, $BC=12$ სმ, $AC=5$ სმ, იპოვეთ AP , PB , BQ , QC , AR , RC მონაკვეთების სიგრძეები.

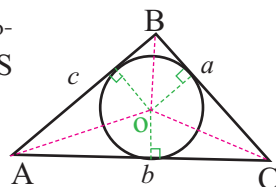


გ) დავუშვათ $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$. გამოსახეთ AP , PB , CR მონაკვეთების სიგრძეები a , b , c ცვლადებით.

- 14 > სურათზე მოცემულების მიხედვით იპოვეთ წრეწირზე შემოხაზული ტრაპეციის პერიმეტრი და ფართობი.



- 15 > ა) დაამტკიცეთ, სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსისათვის $r = \frac{2S}{P}$ ფორმულის მართებულობა, სადაც S არის სამკუთხედის ფართობი, P კი პერიმეტრი.



მითითება: $S_{\triangle ABC}$ გამოსახეთ $S_{\triangle AOC}$, $S_{\triangle AOB}$, $S_{\triangle BOC}$ -ით.

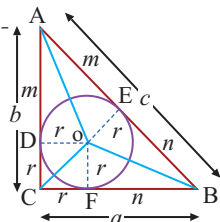
ბ) დაამტკიცეთ, რომ ეს ფორმულა მართებულია ოთხკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსისათვის.

გ) იპოვეთ იმ წრის რადიუსი, რომელიც ჩახაზულია სამკუთხედში, თუ სამკუთხედის გვერდებია: 10, 10, 12 ერთეული.

დ) 5 სმ რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი 26 სმ-ია. იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის ფართობი.

- 16 > ა) სურათის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსისათვის $r = \frac{a+b-c}{2}$ ფორმულა არის მართებული.

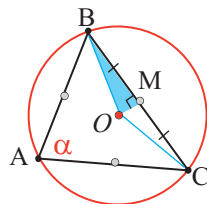
ბ) იპოვეთ 6 სმ და 8 სმ კათეტებანი მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსები.



წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები

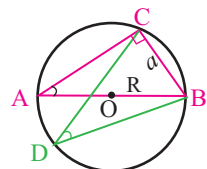
- 17** > წრეწირში ჩახაზული სამკუთხედის გვერდის მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან შეფარდება ამ წრეწირის დიამეტრის ტოლია: $d = \frac{a}{\sin \alpha}$

ა) მოცემული დამტკიცება გამოიკვლიეთ, განიხილეთ და რვეულში ჩაიწერეთ იმ შემთხვევისათვის, როცა წრეწირის ცენტრი სამკუთხედში მდებარეობს.



დამტკიცება:	პირობა	საფუძველი
1. $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$		1. მოცემულია
2. $\angle BOC = 2\alpha$		2. ჩახაზული კუთხის თვისება
3. $\triangle BOC$ ტოლფერდაა		3. $BO = OC$ წრეწირის რადიუსებია
4. $\angle BOM \cong \angle MOC = \alpha$		4. ტოლფერდა სამკუთხედის ბისექტრის თვისება
5. $\triangle BOM$ და $\triangle MOC$ კონგრუენტული მართკუთხა სამკუთხედებია		5. კონგრუენტულობის გზა ნიშანი
6. $\sin \alpha = \frac{BM}{OB}$		6. BOM მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსის განსაზღვრება
7. $\sin \alpha = \frac{BM}{OB} = \frac{2BM}{2OB}$		7. წილადის თვისება
8. $\sin \alpha = \frac{2BM}{2OB} = \frac{BM + MC}{2r} = \frac{a}{d}$		8. რადგან $\triangle BOM \cong \triangle MOC$, მაშინ $BM \cong MC$, მონაკვეთების შეკრების აქსიომა, დიამეტრის განსაზღვრება
9. $\sin \alpha = \frac{a}{d}$ $d = \frac{a}{\sin \alpha}$		9. გამარტივება ტოლობის ნიშნის მიხედვით

ბ) პირობის დამტკიცება ჯერ წრეწირში ჩახაზული მართკუთხა სამკუთხედისათვის შეასრულეთ. შემდეგ ისარგებლეთ მოცემული სურათით და განაზოგადეთ ყველა სამკუთხედისათვის.



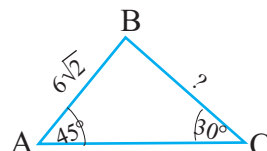
- 18** > ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 10 სმ, ფერდებს შორის კუთხე 120° -ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

- 19** > სამკუთხედის 30° -იანი კუთხის მოპირდაპირე გვერდის სიგრძე 8 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

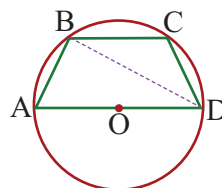
- 20** > **მოცემულია:** $\triangle ABC$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AB = 6\sqrt{2}$

იპოვეთ: 1) შემოხაზული წრეწირის რადიუსი;

2) BC გვერდის სიგრძე.



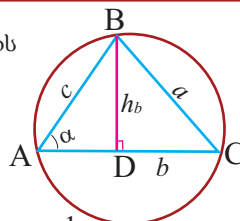
- 21** > AD დიამეტრიან წრეწირში ჩახაზულ ABCD ტრაპეციში $BC = 6$ სმ, $\angle CBD = 30^\circ$. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი და ტრაპეციის ფართობი.



წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები

- 22** > სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსისათვის დაამტკიცეთ, რომ $R = \frac{abc}{4S}$

ფორმულა არის მართებული. სადაც S არის სამკუთხედის ფართობი, a, b, c კი მისი გვერდებია.



ამოხსნა: სამკუთხედის ფართობის ფორმულის თანახმად: $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha} = \frac{abc}{4S}$$

$$d = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ რადიან}$$

წილადის პრაციკელი და მნიშვნელი მრავალდება $(b \cdot c)$ -ზე

სამკუთხედის ფართობის ფორმულის გათვალისწინებით

- 23** > ა) სამკუთხედის გვერდები 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები.

ბ) ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე ისე შეეფარდება ფერდს, როგორც 4 : 3. ფუძისადმი გავლებული სიმაღლე 20 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსები.

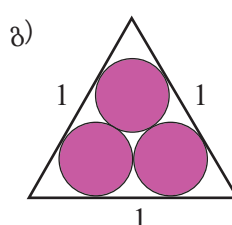
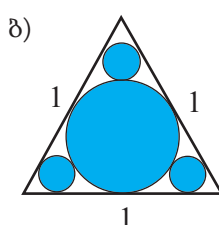
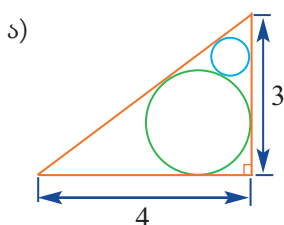
- 24** > ა) დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების ცენტრები მედიანების გადაკვეთის წერტილში მდებარეობს.

დაამტკიცეთ $R = \frac{2}{3} h$ და $r = \frac{1}{3} h$ ფორმულების მართებულობა,

სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, r - ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, h - სამკუთხედის სიმაღლე.

ბ) იპოვეთ 9 სმ პერიმეტრიან ტოლგვერდა სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსები.

- 25** > სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ თითოეული წრეწირის რადიუსი.



- 26** > დაამტკიცეთ, რომ წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის შუახაზი ფერდის ტოლია.

- 27** > იპოვეთ იმ რომბში ჩახაზული წრეწირის დიამეტრი, რომლის დიაგონალებია 6 სმ და 8 სმ.

- 28** > იპოვეთ ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის სიგრძე, თუ ტრაპეციის ფუძეები 6 სმ და 1 სმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი ფერდი 4 სმ-ია.

წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები

ნებისმიერ წესიერ მრავალკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა და ასევე მასზე შემოხაზვა. ამასთან, ამ წრეწირების ცენტრები ემთხვევა ერთმანეთს. წესიერი n -კუთხედის კუთხეების ბისექტრისები O წერტილში იკვეთებიან და მიღებული ტოლფერდა სამკუთხედები სურათზე ნაჩვენებია $\triangle AOB$ -ს (კგ ნიშნის თანახმად) კონგრუენტულებია. თუ გავვლებთ ცენტრის O წერტილში მდებარე OA რადიუსიან წრეწირს, ეს წრეწირი ყველაზე წვეროზე გავლით შემოხაზული წრეწირი იქნება. OH რადიუსიანი წრეწირი კი მრავალკუთხედის ყველა გვერდზე შეხებით ჩახაზული წრეწირი იქნება.

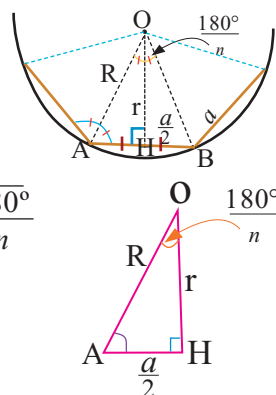
R -წესიერ n -კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, r -ჩახაზული წრეწირის რადიუსია, a -წესიერი მრავალკუთხედის გვერდია,

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n} \text{ ცენტრული კუთხეა.}$$

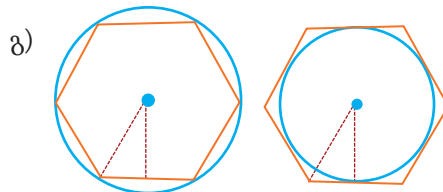
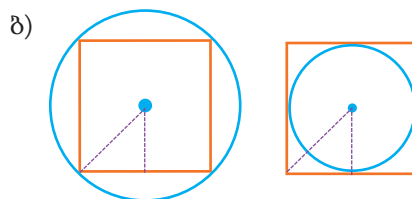
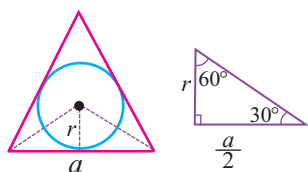
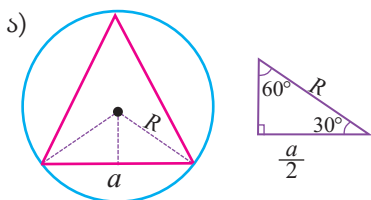
$$OA = R, OH = r, AH = \frac{a}{2}, \quad \angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$$

$$\triangle AOH\text{-დან} \quad \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin \frac{180^\circ}{n} \quad R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\triangle AOH\text{-დან} \quad \frac{AH}{OH} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$



- 29** > იპოვეთ a გვერდიან წესიერ ა) სამკუთხედზე; ბ) ოთხკუთხედზე; გ) ექვსკუთხედზე შემოხაზული და ასევე მათში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები. დახაზულია ა) პუნქტის შესაბამისი სურათი.

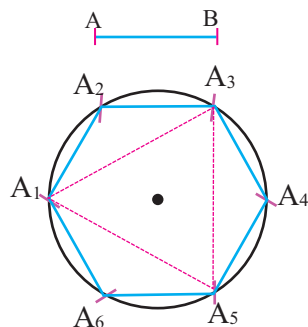


- 30** > ა) სურათზე უჩვენეთ, რომ წესიერი ექვსკუთხედის დიდი დიაგონალი შემოხაზული წრეწირის დიამეტრია. შედეგი განაზოგადეთ წესიერი $2n$ -კუთხედისათვის.
 ბ) იპოვეთ R რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის პერიმეტრი. R -ით გამოსახეთ ამ ექვსკუთხედის დიდი და პატარა დიაგონალების სიგრძეები.

წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედები

აგების ამოცანა: წესიერი ექვსკუთხედის აგება.

1. გაავლეთ წესიერი მრავალკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძის AB მონაკვეთი.
 2. ფარგლით ამ მონაკვეთის ტოლი სიგრძის რადიუსიანი წრეწირი შემოხაზეთ.
 3. ფარგლის მდგომარეობის შეუცვლელად წრეწირზე გარშემო აღნიშნეთ ტოლზომიანი ნაწილები.
 4. აღნიშნული წერტილები მიმდევრობით შეაერთეთ.
- აიგო წესიერი ექვსკუთხედი.

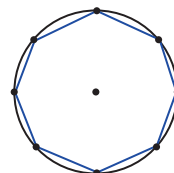
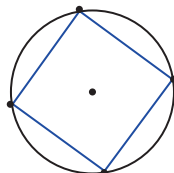
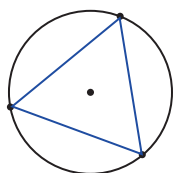


თუ წესიერი $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ექვსკუთხედის, მაგალითად A_1, A_3, A_5 წვეროებს წყვილ-წყვილად შევეერთებთ, აიგება წესიერი სამკუთხედი.

წესიერი ოთხკუთხედის აგებისათვის საჭიროა წრეწირის ორი ურთიერთმართობული დიამეტრის გავლება და მათი წვეროების მიმდევრობით შეერთება.

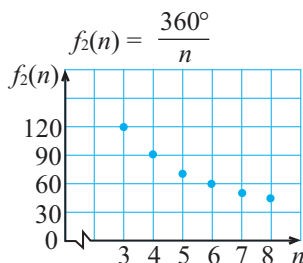
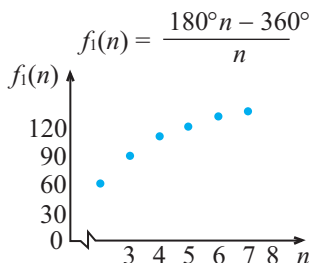
თუ წრეწირში წესიერი n -კუთხედი ჩახაზება და მისი გვერდების შუამართობების წრეწირთან გადაკვეთის წერტილებს ავლნიშნავთ, მიღებული წერტილები $2n$ -კუთხედის დანარჩენი წვეროებია.

31 > ქვემოთ მოცემული სურათების გამოყენებით რვეულში ააგეთ წესიერი სამკუთხედი, წესიერი ოთხკუთხედი და წესიერი რვაკუთხედი.



გამოკვლევა 3. იპოვეთ წესიერ მრავალკუთხედების შიგა და გარე კუთხეები, როცა $n = 10$; $n = 30$; $n = 50$.

სურათზე $f_1(n) = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}$ და $f_2(n) = \frac{360^\circ}{n}$ ფუნქციების გრაფიკებია მოცემული. n -ის მნიშვნელობის ზრდის კვალობაზე, წარმოადგინეთ წესიერი მრავალკუთხედის შიგა და გარე კუთხის გრადუსული ზომების ცვლილება.



წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი

წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრი. წესიერ მრავალკუთხედებზე შემოხაზული (ან მასში ჩახაზული) წრეწირის ცენტრი წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრია. წესიერი მრავალკუთხედის **ცენტრი** მრავალკუთხედის ყველა წვეროდან და ყველა გვერდიდან ტოლ მანძილზეა.

წესიერი მრავალკუთხედის აპოთემა. წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრიდან გვერდისადმი გაკლებულ მართობს მისი **აპოთემა** ეწოდება.

წესიერი მრავალკუთხედის აპოთემა ჩახაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია.

მოცემულ ნაბიჯებად შეასრულეთ ქვემოთ მოცემული სავარჯიშო და განსაზღვრეთ წესიერი მრავალკუთხედის აპოთემაზე ფართობის დამოკიდებულების ფორმულა.

მეცადინეობა. აპოთემა და მრავალკუთხედის ფართობი

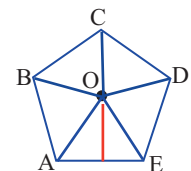
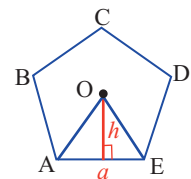
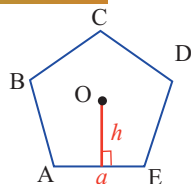
1. დახაზეთ წესიერი ABCDE ხუთკუთხედი
2. O ცენტრიდან გაავლეთ AE გვერდის შუამართობი.
3. A და E წერტილები შეაერთეთ O ცენტრის წერტილთან.
4. AOE სამკუთხედის ფართობი გამოსახეთ a და h ცვლადებით. მიაქციეთ ყურადღება, სამკუთხედის სიმაღლე მრავალკუთხედის რომელ ზომას შეესაბამება.
5. B, C და D წვეროებიც შეაერთეთ O წერტილთან. შეადარეთ მიღებული სამკუთხედების ფართობები.
6. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ხუთკუთხედის ფართობი სამკუთხედების ფართობების ჯამის ტოლია.

მრავალკუთხედის ფართობი:

$$S = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} ah =$$

$$= \frac{1}{2} (ah + ah + ah + ah + ah) = \frac{1}{2} \cdot 5ah$$

7. რომელ ზომას შეესაბამება $5a$ გამოსახულება? გამოსახეთ მრავალკუთხედის ფართობი მისი პერიმეტრით.



წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი

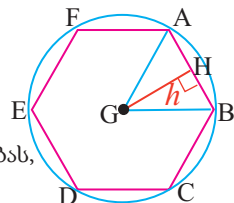
წესიერი n -კუთხედის ცენტრის წვეროს წერტილებთან შეერთებით n რაოდენობის კონგრუენტული ტოლფერდა სამკუთხედები მიიღება.

მრავალკუთხედის ფართობი = სამკუთხედების რაოდენობა $\times$ ერთი სამკუთხედის ფართობი.

$$S = n \cdot \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} (a \cdot n)h$$

$$S = \frac{1}{2} Ph \quad \text{ან} \quad S = \frac{1}{2} anh$$

a მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძეს, n გვერდების რაოდენობას, h აპოთემას უჩვენებს.



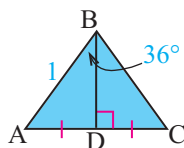
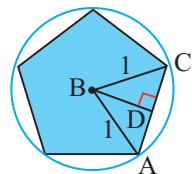
წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი

ნიმუში 1. 1 ერთეული რადიუსიან წრეწირში წესიერი ხუთკუთხედი ჩახაზული. იპოვეთ ხუთკუთხედის ფართობი.

ხუთკუთხედის ფართობი: $S = \frac{1}{2} Ph$

ხუთკუთხედის h - აპოთემა და P - პერიმეტრი უნდა მოვძებნოთ.

$\angle ABC$ ცენტრული კუთხე $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ -ია. $\triangle ABC$ ტოლფერდა სამკუთხედი და მისი BD სიმაღლე თან მედიანაა, თანაც ბისექტრისა. მაშასადამე, $\angle ABD = 36^\circ$. $\triangle ABD$ სამკუთხედის გვერდების პოვნისათვის გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.



$$\cos 36^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{AD}{AB}$$

$$BD = AB \cos 36^\circ \approx 1 \cdot 0,8 = 0,8$$

$$AD = AB \sin 36^\circ \approx 1 \cdot 0,6 = 0,6$$

BD ხუთკუთხედის აპოთემა, $h = BD \approx 0,8$;

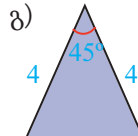
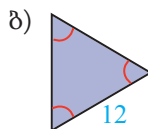
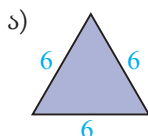
ხუთკუთხედის გვერდი: $AC = 2 \cdot AD = 2 \cdot 0,6 = 1,2$

$$S = \frac{1}{2} h \cdot P \approx \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 5 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ (კვადრატული ერთეული)}$$

სასწავლო დაფალებები

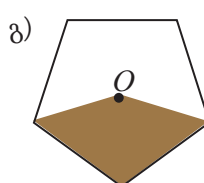
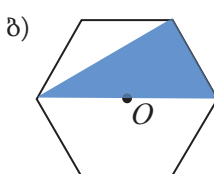
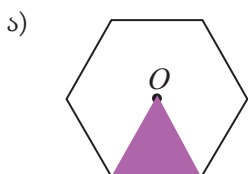
- 1 > უჩვენეთ, რომ a სიგრძის გვერდიანი ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობისათვის მართებულია $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ფორმულა.

- 2 > იპოვეთ სამკუთხედების ფართობი.



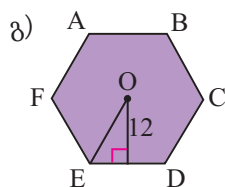
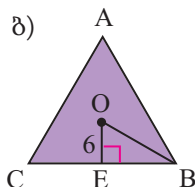
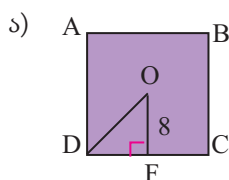
- 3 > “თუ წესიერი ექვსკუთხედისა და წესიერი სამკუთხედის გვერდები ტოლია, ექვსკუთხედის ფართობი სამკუთხედის ფართობზე 6-ჯერ მეტია”. დაასაბუთეთ ეს მოსაზრება.

- 4 > იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ გაფერადებული ფართობი 8 სმ^2 -ია. O წერტილი მრავალკუთხედის ცენტრია.

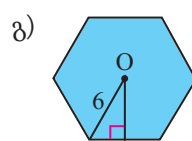
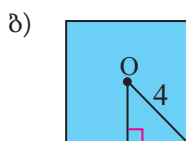
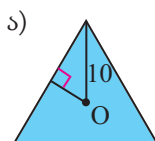


წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი

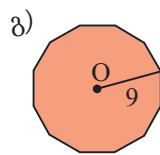
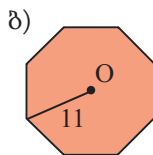
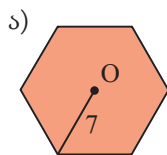
- 5 > მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი. O წერტილი მრავალკუთხედის ცენტრია.



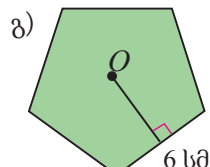
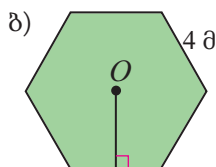
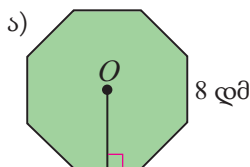
- 6 > იპოვეთ სურათზე მოცემული წესიერი მრავალკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი. O წერტილი მრავალკუთხედის ცენტრია.



- 7 > იპოვეთ სურათზე მოცემული წესიერი მრავალკუთხედების პერიმეტრი და ფართობი.



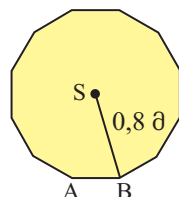
- 8 > გამოთვალეთ მოცემული სიგრძის გვერდებიანი წესიერი მრავალკუთხედების ფართობები. სურათზე O წერტილი წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრია.



- 9 > იპოვეთ წესიერი ცხრაკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდის სიგრძე 12 სმ-ია.

- 10 > 12 სმ დიამეტრიან წრეწირში წესიერი ექვსკუთხედი ჩახაზული. იპოვეთ ამ ექვსკუთხედის აპოთემა.

- 11 > მუზეუმში ექსპონატს გარშემო წესიერი თორმეტკუთხედის სახის დამცავი ზოლია. ფართობის ცენტრიდან თითოეულ წვერომდე მანძილი 0,8 მ-ია. რამდენი კვადრატული მეტრი ფართობია გამოყოფილი ექსპონატისათვის?



- 12 > ა) დაამტკიცეთ, რომ a სიგრძის გვერდებიანი წესიერი ექვსკუთხედის აპოთემა $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ -ის ტოლია.

ბ) იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხედის აპოთემა, თუ მისი ფართობი $54\sqrt{3}$ სმ²-ია.

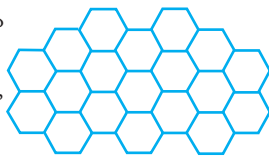
წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი

- 13> სამხარეულოში გვერდი 6 სმ-ის მქონე წესიერი ექვსკუთხა ფორმის მეტლახი უნდა დაიგოს.

ა) სულ მცირე რამდენი ფერის მეტლახის არჩევაა საჭირო, რათა ორი მეზობელი ერთი ფერისა არ იყოს?

ბ) იპოვეთ ერთი მეტლახის ფართობი.

გ) $2,5 \times 4$ მ ზომის ადგილზე დაგებისათვის სულ მცირე რამდენი ასეთი მეტლახი იქნება საჭირო?



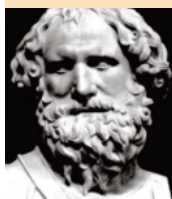
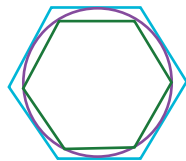
- 14> ცნობილი აზერბაიჯანელი არქიტექტორი ეჯემი ნახჩევანის უმთავრესი ქმნილება მომინე ხათუნის მავზოლეუმი ქალაქ ნახჩევანის ისტორიულ ცენტრში ათაბაგების არქიტექტორული კომპლექსიდან ჩვენ პერიოდამდე მოღწეული ერთადერთი ძეგლია.

მავზოლეუმს აქვს წესიერი ათკუთხედის ფორმა. რომელ გაზომვებს ჩაატარებდით, მავზოლეუმის დაკავებული ფართობის გამოთვლისათვის? შესაბამისი გეგმა დახაზვით უჩვენეთ.

სხვადასხვა წყაროებიდან შეაგროვეთ ინფორმაცია მავზოლეუმის რეალური ზომების შესახებ.



- 15> სურათზე წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული წესიერი ექვსკუთხედი ახაზული. რამდენი კვადრატული ერთეული იქნება შემოხაზული წრეწირის ფართობი, თუ ჩახაზული ექვსკუთხედის ფართობი 3 კვადრატული ერთეულია.



ისტორიული ინფორმაცია. ჩვ.წ.ალ-მდე მე-3 საუკუნეში არქიმედემ π -ს რიცხვითი მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის წრეწირში ჩახაზული და წრეწირზე შემოხაზული წესიერი მრავალკუთხედების პერიმეტრები გამოიყენა. ამ ხერხით თქვენც გამოიკვლიეთ π -ს მნიშვნელობა.

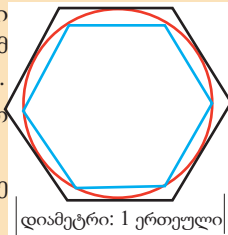
1. წრეწირის დიამეტრის ერთეულად ჩათვლით იპოვეთ ჩახაზული ექვსკუთხედის პერიმეტრი.

2. უჩვენეთ, რომ ერთეულოვან დიამეტრიანი წრეწირის სიგრძე π -ს ტოლია.

3. გაავლეთ წრეწირის რადიუსი. ერთი გვერდის სიგრძის პოვნით იპოვეთ შემოხაზული ექვსკუთხედის პერიმეტრი.

4. დაწერეთ უტოლობა: **ჩახაზული ექვსკუთხედის პერიმეტრი** $< \pi < \text{შემოხაზული ექვსკუთხედის პერიმეტრი}$.

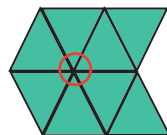
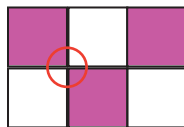
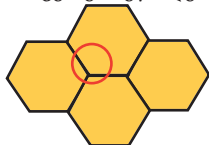
არქიმედემ მრავალკუთხედის გვერდების რაოდენობის 2-ჯერ გაზრდით 12-კუთხედზე და ბოლოს 96-კუთხედზე გამოთვლების გაგრძელებით განსაზღვრა, რომ π -ს მნიშვნელობა $3 \frac{1}{7}$ -ზე მეტი და $3 \frac{11}{70}$ -ზე ნაკლებია.



წესიერი მრავალკუთხედის ფართობი

მოპირკეთება

ფართობის ფიგურებით ისეთ დაფარვას, როცა ფართობში სიცარიელე არ რჩება მოპირკეთება ეწოდება.



როცა მრავალკუთხედის საერთო წვერობთან მდებარე კუთხეების ჯამი 360° -ია, მაშინ შესაძლებელია მოპირკეთება, სიცარიელის დატოვების გარეშე ფართობის დაფარვა. წესიერი სამკუთხედის, რომლის (კვადრატისა) და წესიერი ექვსკუთხედის გამოყენებით მოპირკეთება შესაძლებელია.

თუმცა წესიერი ხუთკუთხედით ამის გაკეთება შეუძლებელია. რადგან მისი ერთი კუთხის გრადუსული ზომა 108° -ია? თუ ერთი წვერო სამი ხუთკუთხედის საერთო წვერო იქნება. მათი კუთხეების ჯამი $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$, ხოლო თუ ოთხი ხუთკუთხედის საერთო წვერო $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$ იქნება.

მხოლოდ წესიერი შვიდკუთხედებით მოპირკეთება შესაძლებელია?

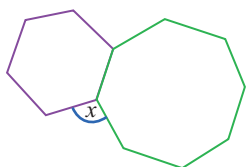
- 16 > ა) ძველ ძეგლებზე შეიძლება დანახვა, თუ სხვადასხვა წესიერი ფიგურების განლაგებით როგორ წარმოიქმნება ახალი მოხატულობები. თქვენც გამოიკვლიეთ ეს მოხატულობები.

იუსიფ იბნ ქუსეირის მაგზოლეუმი ნახჩევანელი არქიტექტორი. აჯამი აბუბეკრ ოღლუ ნახჩევანი

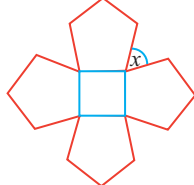


ბ) იპოვეთ აღნიშნული x კუთხე. კომპიუტერული პროგრამების დახმარებით მოცემული სურათების გამოვრებით შექმენით ახალი მოხატულობები.

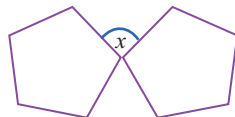
1) გამოსახულება შედგება წესიერი ექვსკუთხედისა და რვაკუთხედისაგან.



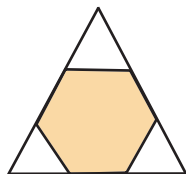
2) გამოსახულება შედგება წესიერი ხუთკუთხედებისაგან და კვადრატისაგან.



3) გამოსახულება შედგება ხუთკუთხედებისა და სამკუთხედებისაგან.



- 17 > ტოლგვერდა სამკუთხედში 12 კვადრატული ერთეული ფართობის მქონე წესიერი ექვსკუთხედი ჩახაზული. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

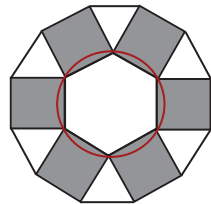


- 18 > კოშკის იატაკი წესიერი რვაკუთხა ფორმისაა. რვაკუთხედის ცენტრიდან წვერომდე მანძილი 1 მ-ია. კოშკის იატაკისათვის რამდენი ისეთი ფიგურაა საჭირო, რომლის თითოეულის ფართობი $0,2 \text{ მ}^2$ -ია?

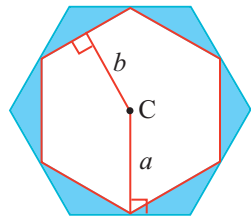


განმარტვადებული დავალებები

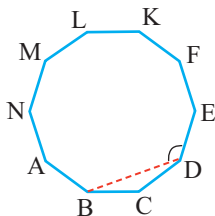
- 1 > წესიერი თორმეტკუთხედი კვადრატებისა და წესიერი სამკუთხედებისგანაა აგებული. იპოვეთ თორმეტკუთხედის პერიმეტრი თუ სურათზე მოცემული წრეწირის დიამეტრი 6 სმ-ია.



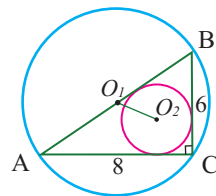
- 2 > სურათზე მოცემული ორი წესიერი ექვსკუთხედიდან პატარის წვეროები დიდის გვერდების შუაწერტილებში მდებარეობს. a და b ექვსკუთხედების აპოთემებია. იპოვეთ გაფერადებული ნაწილის ფართობი თუ $b = 6\sqrt{3}$ სმ-ს.



- 3 > სურათზე წესიერი ათკუთხედი გამოსახული. იპოვეთ $\angle BDE$ -ს გრადუსული ზომა.



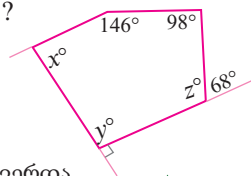
- 4 > სურათზე $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = 90^\circ$ იპოვეთ $\triangle ABC$ -ში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების ცენტრებს შორის O_1O_2 მანძილი.



- 5 > არსებობს ისეთი წესიერი მრავალკუთხედი, რომლის ერთი კუთხის გრადუსული ზომაა:

ა) 155° ბ) 160° გ) 175° დ) 168° ?

- 6 > სურათზე მოცემული ზომების მიხედვით იპოვეთ მრავალკუთხედის ცვლადით აღნიშნული შიგა კუთხეების გრადუსული ზომები.

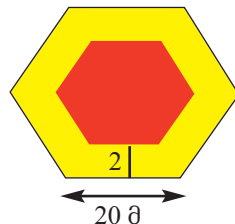


- 7 > ა) წრეწირში ჩახაზულია და მასზე შემოხაზულია ტოლგვერდა სამკუთხედი. იპოვეთ ამ სამკუთხედების ფართობების შეფარდება ამოხსენით ამოცანა სხვადასხვა ხერხით.

ბ) პატარა სამკუთხედში წრეწირია ჩახაზული. დაწერეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების შეფარდება და შესაბამისი წრეების ფართობების შეფარდება.



- 8 > ქალაქის პარკში წესიერი ექვსკუთხედი ფორმის ყვავილნარის გვერდების გარშემო ყვითელი ზამბახების 2 მ-იანი სიგანის ზოლია შემოვლებული. ყვავილნარის - დიდი ექვსკუთხედის ერთი გვერდის სიგრძე 20 მ-ია. იპოვეთ ყვითელ ზამბახდათესილი ნაწილის ფართობი.



1. უტოლობები

2. ვექტორები

უტოლობათა სისტემა და
უტოლობათა ერთობლიობა.

მოდულიანი უტოლობების
ამოხსნა.

ორცვლადიანი წრფივი
უტოლობები.

ორცვლადიანი წრფივი
უტოლობების სისტემა.

კვადრატული უტოლობები.

უტოლობების ამოხსნა
ინტერვალთა მეთოდით.

ვექტორები

ვექტორები საკოორდინატო სიბრტყეზე;

ვექტორის მიმართულება;

ვექტორების შეკრება და გამოკლება.

- კოლინეარული ვექტორების შეკრება და გამოკლება

- ვექტორების შეკრება

- პარალელოგრამის წესი

- გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისება

- ვექტორების კომპონენტების გამოყენებით შეკრება

ვექტორის კომპონენტები და
ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები.

ვექტორების გამოყენებით ამოცანების
ამოხსნა.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება.



უტოლობათა სისტემა და უტოლობათა ერთობლიობა

უტოლობათა სისტემა

გამოკვლევა: თუ ალპინისტები სიჩქარეს 1 კმ/სთ-ით გაზრდიან მწვერვალამდე 4 კმ მანძილს 2 საათით მალე გაივლიან. თუ ისინი სიჩქარეს 1 კმ/სთ-ით შეამცირებენ, 2 საათში მწვერვალს ვერ მიაღწევენ. რა სიჩქარით მოძრაობენ ალპინისტები?

ამოხსნა: ალპინისტების სიჩქარე ავლნიშნოთ x -ით.

თუ სიჩქარეს 1 კმ/სთ-ით გაზრდიან, 2 სთ-ში გავლილი მანძილი 4 კმ-ზე მეტი იქნება. შესაბამისი უტოლობა: $2(x + 1) > 4$

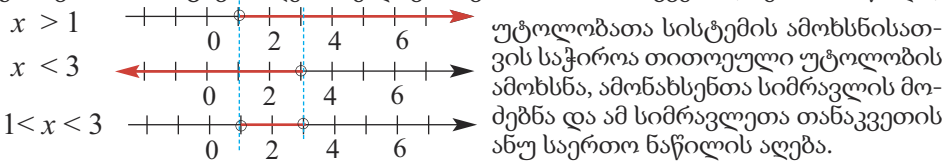
თუ სიჩქარეს 1 კმ/სთ-ით შეამცირებენ, 2 სთ-ში გავლილი მანძილი 4 კმ-ზე ნაკლები იქნება. შესაბამისი უტოლობა: $2(x - 1) < 4$

ამოცანის პირობის თანახმად x -ის $2(x + 1) > 4$ და $2(x - 1) < 4$ უტოლობების დამაკმაყოფილებელი ანუ ორივე უტოლობის დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობები უნდა ვიპოვოთ “და” კავშირით დაკავშირებული უტოლობები { ფიგურული ფრჩხილის დახმარებით იწერება და მათ უტოლობათა სისტემა ეწოდება.

მოცემულ ამოცანაში $\begin{cases} 2(x + 1) > 4 \\ 2(x - 1) < 4 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემა უნდა ამოვხსნათ.

სისტემის თითოეულ უტოლობას ტოლფასი უტოლობით თუ შევცვლით მივიღებთ: $\begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases}$. სისტემაში შემავალი უტოლობების ამონახსნების სიმრავლე

გამოვსახოთ რიცხვით ღერძზე და ვიპოვოთ მათი თანაკვეთა (საერთო ნაწილი)



პასუხი: სისტემის ამონახსენი $(1; 3)$ შუალედია.

სასწავლო დაგვარებები

- 1 > $-3; 0; 5$ რიცხვებიდან რომლები არიან მოცემულ უტოლობათა სისტემის ამონახსენი?

ა) $\begin{cases} 3 - x \leq 7 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 > 2 \\ 9 - 2x > -21 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} x + 7 > 4 \\ 3 - 2x \leq 5 \end{cases}$

- 2 > ამოხსენით უტოლობათა სისტემა. გრაფიკულად გამოსახეთ ამოხსნა.

ა) $\begin{cases} 4 - x \leq 8 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} x + 2 > 3 \\ 3 - 2x > -17 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 3x - 15 > 0 \\ 4x < 12 \end{cases}$

- 3 > ამოხსენით უტოლობათა სისტემა. გრაფიკულად გამოსახეთ ამოხსნა.

ა) $\begin{cases} 7x - 11 \geq 3 \\ 2x < 8 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 5(x - 3) - x < 1 \\ 3(x - 2) - 2 < 10 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 4x + 2 \geq 5x + 3 \\ 3 - 3x < 8 - 2x \end{cases}$

- 4 > არგუმენტის რა მნიშვნელობებისათვის $y = x - 4$ და $y = 8 - x$ ფუნქციებიდან თითოეული იღებს დადებით მნიშვნელობას?

- 5 > არგუმენტის რა მნიშვნელობისათვის $y = 0,5x + 2$ და $y = 3 - 3x$ ფუნქციები ერთდროულად: ა) დადებით; ბ) უარყოფით; გ) -3 -ზე მეტ; დ) 3 -ზე ნაკლებ მნიშვნელობას იძენს?

უტოლობათა სისტემა და უტოლობათა ერთობლიობა

6 > ამოხსენით უტოლობათა სისტემა.

$$\text{ა) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} < 2 \\ \frac{x+1}{3} > 0 \end{cases} \quad \text{ბ) } \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5} \end{cases} \quad \text{გ) } \begin{cases} \frac{x-5}{6} \leq \frac{3x-1}{4} \\ 5(x+2) > 3(x+3) \end{cases}$$

7 > x -ის რა მნიშვნელობისათვის აქვს გამოსახულებას აზრი?

$$\text{ა) } \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x} \quad \text{ბ) } \sqrt{2x+3} - \sqrt{3-x} \quad \text{გ) } \sqrt{x+8} + \sqrt{2x+4}$$

8 > მთელი რიცხვის ორმაგს რიცხვის ნახევარს თუ მივუმატებთ, ჯამი 92-ზე ნაკლები იქნება. თუ ამ რიცხვის ორმაგს გამოვაკლებთ რიცხვის ნახევარს, სხვაობა 53-ზე მეტი იქნება. იპოვეთ ეს მთელი რიცხვი.

9 > 10,8 კგ 60%-იან მარილის ხსნარი 20%-იან მარილის ხსნარში აურიეს. მეორე ხსნარიდან რამდენი უნდა ავურიოთ, რომ ნარევის მარილიანობა არ იყოს 40%-ზე მეტი და 30%-ზე ნაკლები?

10 > სამკუთხედის ერთი გვერდი 5 მ, მეორე გვერდი 8 მ-ია. რამდენი მეტრი შეიძლება იყოს მესამე გვერდის სიგრძე, თუ სამკუთხედის პერიმეტრი 22 მ-ზე ნაკლებია?

უტოლობათა ერთობლიობა

ამოცანა. ნარგიზი და ელშანი თამაშობენ რიცხვით თამაშებს. თითოეული იღებს რიცხვით ბარათს და მას 5-ს უმატებს. თუ პასუხი იქნება 10-ზე ნაკლები ან 15-ზე მეტი, მაშინ ბარათის მფლობელი მიიღებს ქულას. უტოლობის დახმარებით გამოსახეთ სიტუაცია, როცა ელშანმა აიღო ერთი ბარათი და ქულა გამოიმუშავა.

ამოხსნა: დავუშვათ ბარათზე იყო x რიცხვი. მოთხოვნილი სიტუაცია შეიძლება გამოვსახოთ უტოლობით: $x+5 < 10$ ან $x+5 > 15$.

კავშირი “ან” და შესაბამისი უტოლობა იწერება “[” ფრჩხილების დახმარებით და შეადგენენ უტოლობათა ერთობლიობას.

იმისათვის, რომ ამოვხსნათ უტოლობათა ერთობლიობა, საჭიროა ვიპოვოთ თითოეული უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე და შემდეგ ვიპოვოთ ამ სიმრავლეთა გაერთიანება.

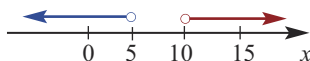
$$\begin{cases} x+5 < 10 \\ x+5 > 15 \end{cases} \text{ ამოვხსნათ ერთობლიობა.}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad x+5 &< 10 \\ x &< 10-5 \\ x &< 5 \end{aligned}$$

პირველი უტოლობის ამონახსენი
($-\infty$; 5) შუალედი.

$$\begin{aligned} 2) \quad x+5 &> 15 \\ x &> 15-5 \\ x &> 10 \end{aligned}$$

მეორე უტოლობის ამონახსენია
(10; $+\infty$) შუალედი.



უტოლობების მოცემული ერთობლიობის ამონახსენი იქნება სიმრავლე:
($-\infty$; 5) $\cup$ (10; $+\infty$).

უტოლობათა სისტემა და უტოლობათა ერთობლიობა

სასწავლო დაავალებები

- 11> ამოხსენით უტოლობათა ერთობლიობა.

ა) $\begin{cases} x - 1 > 4 \\ x + 1 < -2 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} 2x - 12 > 3 \\ 2x + 1 < -1 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} 3(x - 1) - x \geq 5 \\ 2(3 - x) - 3 < x \end{cases}$

- 12> ამოხსენით უტოლობები მამრავლების ნიშნების სხვადასხვა ვარიანტების გამოკვლევით:

ა) $(x + 1)(x - 2) > 0$

ბ) $(x - 1)(x - 3) > 0$

გ) $(x - 2)(x - 5) < 0$

დ) $(x + 3)(x - 6) \leq 0$

ნამუშა: ა) ამოხსენით უტოლობა $(x + 1)(x - 2) > 0$.

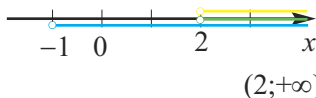
ამოხსნა: იმისათვის, რომ ორი რიცხვის ნამრავლი იყოს დადებითი, ისინი უნდა იყვნენ ერთნაირნიშნაუნი. მაშასადამე ან $(x + 1)$ და $(x - 2)$ მამრავლებიდან ორივე უნდა იყოს დადებითი, ან კიდევ ორივე იყოს უარყოფითი.

მოცემული უტოლობა $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ ერთობლიობის ამოხსნაზე დაიყვანება.

ერთობლიობის პირველი სისტემის ამოხსნა:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

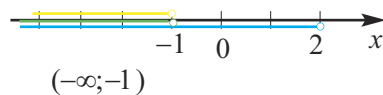
გეომეტრიული გამოსახვა:



ერთობლიობის მეორე სისტემის ამოხსნა:

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \end{cases}$$

გეომეტრიული გამოსახვა:



მოცემული უტოლობის ამონახსენი $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ იქნება.

- 13> ამოხსენით უტოლობა, წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ნიშნების სხვადასხვა ვარიანტების გამოკვლევით.

ა) $\frac{x - 1}{x - 3} < 0$

ბ) $\frac{x - 2}{x + 1} > 0$

- 14> რომელი რიცხვის კვადრატი არ აღემატება ამ რიცხვის ხუთმაგ მნიშვნელობას? იპოვეთ იმ მთელი რიცხვების ჯამი, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ პირობას.

- 15> a -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს უტოლობათა სისტემას ერთი ამონახსენი მაინც.

ა) $\begin{cases} x < 9 \\ x > a \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} x \leq 10 \\ x > a \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq a \end{cases}$

დ) $\begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq a \end{cases}$

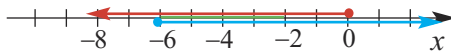
ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შემცველი უტოლობები

უტოლობათა სისტემა, უტოლობათა ერთობლიობა

მოდულიანი უტოლობები	ეკვივალენტური ორმაგი უტოლობები	ეკვივალენტურ უტოლობათა სისტემები და ერთობლიობა
$ ax + b < c$	$-c < ax + b < c$	$\begin{cases} ax + b < c \\ ax + b > -c \end{cases}$
$ ax + b \leq c$	$-c \leq ax + b \leq c$	$\begin{cases} ax + b \leq c \\ ax + b \geq -c \end{cases}$
$ ax + b > c$	$ax + b > c$ ან $ax + b < -c$	$\begin{cases} ax + b > c \\ ax + b < -c \end{cases}$
$ ax + b \geq c$	$ax + b \geq c$ ან $ax + b \leq -c$	$\begin{cases} ax + b \geq c \\ ax + b \leq -c \end{cases}$

ნიმუში 1. $|2x + 3| \leq 3 - x$

ამოხსნა: $\begin{cases} 2x + 3 \leq 3 - x \\ 2x + 3 \geq 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -6 \end{cases}$



პასუხი: $[-6; 0]$

ნიმუში 2. $|2x - 5| \geq x + 2$

ამოხსნა: $\begin{cases} 2x - 5 \geq x + 2 \\ 2x - 5 \leq -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 1 \end{cases}$



პასუხი: $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$

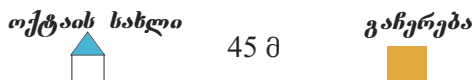
სასწავლო დავალებები

1 > ამოხსენით მოდულიანი უტოლობები, ამონახსენი გამოსახეთ რიცხვით ღერძზე.

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|----------------------------|
| ა) $ 5x + 3 - 4 \geq 9$ | დ) $ 4 - x < 5$ | ზ) $ 2x + 3 > 4 + x$ |
| ბ) $ 10 - 4x \leq 2$ | ე) $ 3x - 9 + 2 > 7$ | თ) $6 - 2x > x + 12 $ |
| გ) $ 3 + x + 7 < 10$ | ვ) $ 3x + 2 - 1 \geq 10$ | ი) $ 2x + 5 - 1 < 6x - 2$ |

2 > უჩვენეთ a -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ $|x - 3| \leq a - 2$ უტოლობას ჰქონდეს ამონახსენი და ამოხსენით იგი. a -ს იგივე მნიშვნელობისათვის ამოხსენით $|x - 3| > a - 2$ უტოლობა.

3 > ავტობუსის გაჩერება ოქტაის სახლიდან 45 მ მანძილზეა. იგეგმება გაჩერების გადატანა ამჟამინდელი ადგილიდან არაუმეტეს 30 მ-ისა. უტოლობის სახით დაწერეთ მანძილი ახალი გაჩერებიდან ოქტაის სახლამდე.

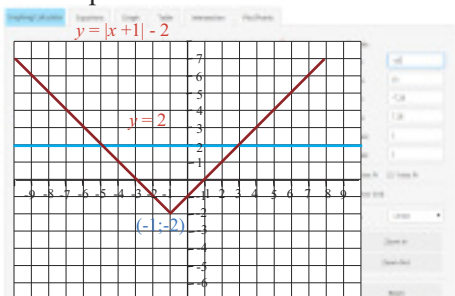


4 > გათვალისწინებულია, რომ სათამაშო ბურთების მასა იყოს 150 გრ. ითვლება ნორმალურად, თუ ბურთის მასა იქნება 20 გრ-ით მძიმე ან მსუბუქი. ჩაწერეთ ბურთის მასის ცვალებადი ინტერვალი მოდულიანი უტოლობის სახით.

ცვლადის მოდულის ნიშნის ქვეშ შეტყველი უტოლობები

- 5 > სურათზე გრაფკალკულატორში აგებული
 $y = |x+1| - 2$ და $y = 2$
 ფუნქციების გრაფიკებია აგებული.
 ჩაიხაზეთ გრაფიკი რვეულში და
 ამ ორი გრაფიკის გამოყენებით
 უჩვენეთ შემდეგი ამონახსნები:

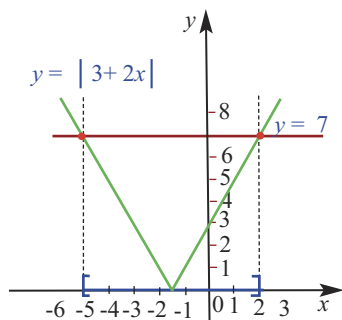
<http://www.meta-calculator.com/online/>



- ა) $|x+1| - 2 = 2$ განტოლების;
 ბ) $|x+1| - 2 < 2$ უტოლობის;
 გ) $|x+1| - 2 > 2$ უტოლობის.

- 6 > ამოხსენით მოდულიანი უტოლობები. ამონახსენი წარმოადგინეთ გრაფიკის სახით. მოცემულია

- ა) პუნქტის შესაბამისი გრაფიკი.
 ა) $|3 + 2x| < 7$ დ) $|x - 1| < 1 - 2x$
 ბ) $|4 - 2x| > 4$ ე) $|x + 2| > 2x + 1$
 გ) $|3x - 6| \leq 6$ ვ) $|x - 3| < x + 1$



- 7 > ფეიერვერკის სხვადასხვა ფერები წარმოიქმნება ქიმიურ ნივთიერებათა წვის დროს.

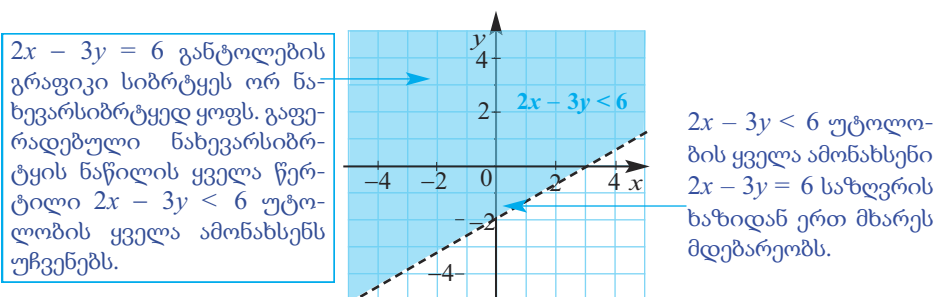
- ა) იმ ნივთიერებათა წვის დროს, რომლის შემადგენლობაშიც შედის სტრონციუმი წარმოიქმნება სინათლის ტალღა, რომლის სიგრძეც აკმაყოფილებს უტოლობას $|w - 643| < 38$. რომელი ფერი ჩანს ამ დროს ჰაერში?
- ბ) ნივთიერება, რომელიც შეიცავს სპილენძს, წვის დროს წარმოქმნის სინათლის ტალღას რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|w - 455| < 23$. რომელი ფერი ჩანს ამ დროს ჰაერში?
- გ) ნივთიერება, რომელიც შეიცავს ბარიუმ-ქლორიდს, წვის დროს წარმოქმნის სინათლის ტალღას, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|w - 519,5| < 12,5$. რომელი ფერი ჩანს ამ დროს ჰაერში?

ფერი	ტალღის სიგრძე
ულტრაიისფერი	$w < 400$
იისფერი	$400 \leq w \leq 424$
ცისფერი	$424 \leq w \leq 491$
მწვანე	$491 \leq w \leq 575$
ყვითელი	$575 \leq w \leq 585$
ნარინჯისფერი	$585 \leq w \leq 647$
წითელი	$647 \leq w \leq 700$
ინფრაწითელი	$w \geq 700$

- დ) ნივთიერება, რომელიც შეიცავს ნატრიუმს, წვის დროს წარმოქმნის სინათლის ტალღას, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $|w - 600| < 5$. რომელი ფერი ჩანს ამ დროს ჰაერში?

ორცვლადიანი წრფივი უტოლობები

$ax + by < c$, $ax + by \leq c$, $ax + by > c$, $ax + by \geq c$ სახის უტოლობები **ორცვლადიანი წრფივი უტოლობებია**. $(x; y)$ რიცხვით წყვილს, რომელიც უტოლობას სწორ რიცხვით უტოლობად აქცევს მისი ამონახსენი ეწოდება. $ax + by = c$ ორცვლადიანი წრფივი განტოლების გრაფიკის დახმარებით, საკოორდინატო სიბრტყეზე ორცვლადიანი წრფივი უტოლობების ყველა ამონახსენის ჩვენება შესაძლებელია. მაგალითად, $2x - 3y < 6$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე ვუჩვენოთ $2x - 3y = 6$ ორცვლადიანი წრფივი განტოლების გრაფიკის ჩვენებით. $2x - 3y = 6$ განტოლების გრაფიკი წარმოშობს საზღვრის ხაზს.



- უტოლობის ამოხსნის შესაბამისად ნახევარსიბრტყის სწორად შერჩევაში დარწმუნებისათვის ორივე ნახევარსიბრტყიდან ცდის მიზნით წერტილი შეირჩევა. სწორ ტოლობად გადამქცევი წერტილის მდებარე მხარე გაფერადდება.
- თუ უტოლობა $>$, $<$ ნიშნებითაა გამოსახული, საზღვრის ხაზის შემდგენ წერტილთა სიმრავლე გრაფიკს არ ეკუთვნის და $ax + by = c$ განტოლების გრაფიკი წყვეტილი ხაზით გაივლება.
- თუ უტოლობა $\geq$, $\leq$ ნიშნებით გამოისახება, საზღვრის ხაზის შემდგენი წერტილების სიმრავლე გრაფიკს ეკუთვნის და იგი როგორც უწყვეტი ხაზი ისე გაივლება.

მაგალითი 1. ა) $12x - 6y > 0$

1. ამოვხსნათ უტოლობა y ცვლადის მიმართ:

$$12x - 6y > 0; -6y > -12x, y < 2x$$

2. ავაგოთ $y = 2x$ წრფე და გავავლოთ წყვეტილი ხაზის სახით.

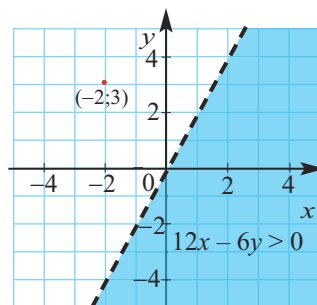
3. შევამოწმოთ უტოლობა $(-2; 3)$ წერტილში.

$$\text{მარცხენა მხარე: } 12x - 6y = 12 \cdot (-2) - 6 \cdot (3) = -42$$

$$\text{მარჯვენა მხარე: } 0.$$

$$-42 > 0 \text{ უტოლობა სწორი არ არის. უნდა გავაფერადოთ არა ის ნახევარსიბრტყე, რომელშიც ეს წერტილი მდებარეობს, არამედ მეორე ნახევარსიბრტყე.}$$

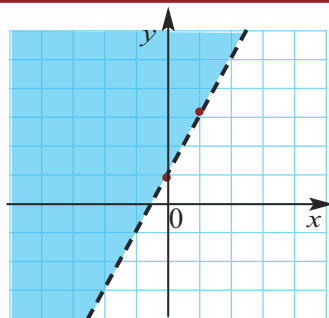
ბ) გამოსახეთ $12x - 6y < 0$ უტოლობის ამონახსენი $y = 2x$ წრფივი ფუნქციის გრაფიკის მიმართ.



ორცვლადიანი წრფივი უტოლობები

ნიმუში 2. დაწერეთ გრაფიკის შესაბამისი უტოლობა.

1. განვსაზღვროთ $y = kx + b$ საზღვრის ხაზის განტოლება. გრაფიკი y ღერძს გადაკვეთს $(0, 1)$ წერტილში. მაშასადამე $b = 1$. გრაფიკის $(1; 3)$ წერტილის მიხედვით შეიძლება განვსაზღვროთ, რომ $k = 2$ ე.ი. $y = kx + 1$ განტოლებიდან $(1; 3)$ წერტილის კოორდინატებიდან მივიღებთ $3 = k \cdot 1 + 1$ და $k = 2$ საზღვრის ხაზის განტოლება: $y = 2x + 1$. რადგან საზღვრის ხაზი დახაზულია წვეტილით, $y = 2x + 1$ განტოლების წერტილები არ შედის უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეში. ავიღოთ საცდელი წერტილი $(-2; 3)$ გაფერადებული ნაწილიდან და შევამოწმოთ. მარცხენა ნაწილი: $y = 3$, მარჯვენა ნაწილი $2x + 1; 2(-2) + 1 = -3$. მარცხენა ნაწილი $>$ მარჯვენა ნაწილი. მაშასადამე $y > 2x + 1$ უტოლობას აკმაყოფილებს. ე.ი. სურათზე გაფერადებული ნახევარსიბრტყე $y > 2x + 1$ ორცვლადიანი უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეა.



სასწავლო დაგეგმვები

1 > შეამოწმეთ, რომელი წერტილების კოორდინატები წარმოადგენენ უტოლობის ამონახსენს.

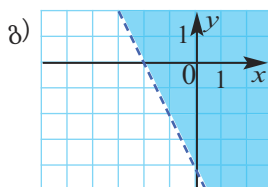
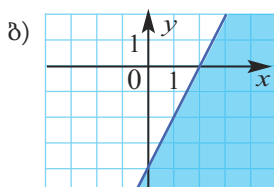
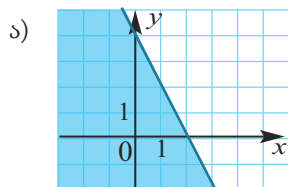
- | | | | |
|--------------------|------------------|--------------------------|-----------------|
| ა) $x \leq -5$; | (0; 2), (-5; 1) | ბ) $2y \geq 9$; | (1; -6), (0; 6) |
| გ) $y < -2x + 7$; | (-2; 2), (3; -8) | დ) $19x + y \geq -0,5$; | (2; 3), (-1; 0) |

2 > უტოლობათა ამონახსენი გამოსახეთ გრაფიკულად.

- | | | | |
|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| ა) $y < -3$ | ბ) $x > -2$ | გ) $x + y \geq -1$ | დ) $x - y \leq -2$ |
| ე) $x + y < 4$ | ვ) $x - y \leq 5$ | ზ) $x + y > 3$ | თ) $3x - y < 3$ |

3 > დაადგინეთ შესაბამისობა უტოლობებსა და გრაფიკებს შორის.

- | | | |
|--------------------|------------------|--------------------|
| 1) $2x - y \geq 4$ | 2) $-2x - y < 4$ | 3) $2x + y \leq 4$ |
|--------------------|------------------|--------------------|



4 > გამოსახეთ გრაფიკი, რომელიც შეესაბამება $x + 2y > 8$ უტოლობის ამონახსენს. დაწერეთ მოთხოვნილი მაჩვენებლები:

- აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი;
- საზღვრის ხაზის განტოლება;
- ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი;
- შესამოწმებელი წერტილი $(0; 0)$.

5 > ყულაბაში 20-კაპიკიანები და 50-კაპიკიანები არის არანაკლებ 30 მანეთისა. დაწერეთ უტოლობა, რომელიც უჩვენებს მონეტების რაოდენობას ყულაბაში, ამოხსნა უჩვენეთ გრაფიკულად.

ორცვლადიანი წრფივი უტოლობები

გამოყენებითი დავალებები

ნიმუში 1. თეატრში უფროსებისათვის ერთი ბილეთის ფასი 16 მანეთი, ბავშვებისათვის კი 4 მანეთია. ბილეთების გაყიდვიდან სალაროში შემოსული ფული 160 მანეთზე მეტი არაა. განსაზღვრეთ გაყიდული ბილეთების რაოდენობის სხვადასხვა ვარიანტები.

ამოცანის პირობის შესაბამისად რიცხვითი ინფორმაციები და ცვლადები.

ერთი ბილეთის ფასი უფროსებისათვის	•	ბილეთების რაოდენობა	+	ერთი ბილეთის ფასი ბავშვებისათვის	•	ბილეთების რაოდენობა	≤	შემოსული თანხა
16		x		4		y		160

მათემატიკური ჩანაწერი: $16x + 4y \leq 160$

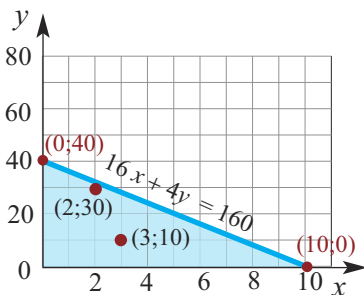
1. უტოლობის ამოხსნისათვის $16x + 4y = 160$ განტოლებიდან დავწეროთ $y = -4x + 40$ და ავაგოთ ამ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი. ბილეთების რაოდენობა არ შეიძლება იყოს უარყოფითი რიცხვი. ამიტომაც გრაფიკი მხოლოდ I მეოთხედში ავაგოთ. განვსაზღვროთ გრაფიკის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები: (10; 0) და (0; 40) ეს წერტილები შევავერთოთ მონაკვეთით.

2. გრაფიკითა და საკოორდინატო ღერძებით შემოსაზღვრული ფიგურა გავაფერადოთ.

3. გაფერადებული ნაწილიდან აღებული ნებისმიერი x და y -ის მთელი მნიშვნელობები ამ უტოლობის ამონახსენია. (0; 40) წერტილი: “ყველა ბილეთი ბავშვებისათვის იქნა შეძენილი. ე.ი. 40 ბილეთი შეიძინეს” - ინფორმაციას შეესაბამება.

(0; 10) წერტილი უჩვენებს, რომ ყველა ბილეთი

უფროსებზეა გაყიდული. ამასთან გრაფიკის ფერადი ნაწილიდან აღებული ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები (მთელი რიცხვები) $16x + 4y \leq 160$ უტოლობის შესაბამისი ამოცანის ამონახსენია.



6 > პარკში ვერცხლისა და ოქროს ფულებია. თითოეული ოქროს ფულის მასა 5 გრ-ია, თითოეული ვერცხლის ფულის მასა 8 გრ-ია. პარკის მასა 80 გრ-ზე მეტი არაა.

ა) დაწერეთ ოქროსა და ვერცხლის ფულის რაოდენობის მაჩვენებელი უტოლობა და ააგეთ გრაფიკი.

ბ) პარკში ყველა ფული ოქროსი რომ იყოს, მათი რაოდენობა რამდენი შეიძლება იყოს? დაწერეთ შესაძლო ვარიანტებიდან სამი.

7 > აიშემ კონკურსში კინოს 30-მანეთიანი კუპონი მოიგო. კინოთეატრში დღის სეანსზე ფასი 5 მან, საღამოს სეანსებზე ფასი 7,5 მანეთია.

ა) დაწერეთ უტოლობა, რომელიც უჩვენებს აიშეს კუპონის მიხედვით დღისა და საღამოს სეანსებზე კინოში წასვლის შესაძლებლობას. ააგეთ გრაფიკი.

ბ) გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ სეანსების რაოდენობის სამი შესაძლო ვარიანტი.

8 > ღია ტიპის შეკითხვა. შეადგინეთ ამოცანა, რომელიც მოითხოვს უტოლობის შედგენას. მაგალითად დახარჯული ფული არაუმეტეს 12 მანეთია. 1 კგ კომშის ფასი 2 მანეთი და 1 კგ ბროწეულის ფასი 3 მანეთია. ამ ხილიდან თითოეულის რამდენი კგ-ის შეძენა შესაძლებელი: ვიპოვოთ შესაძლო ვარიანტები და გრაფიკულად გამოვსახოთ ისინი.

ორცვლადიან წრფივ უტოლობათა სისტემა

წრფივ უტოლობათა სისტემაში შემავალი ყველა უტოლობის დამაკმაყოფილებელი წერტილთა სიმრავლის კოორდინატები - $(x; y)$ რიცხვთა წყვილი - ამ სისტემის ამონახსენია. წრფივი უტოლობების სისტემის გრაფიკის აგება მოვახდინოთ ქვემოთ მოცემულ ნიმუშზე.

ნიმუში 1.
$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$$

1. $x + y = 6$ საზღვრის ხაზის საშუალებით ავაგოთ $x + y \geq 6$ უტოლობის შესაბამისი გრაფიკი. შესაბამისი ფართობი ცისფერი ხაზებით გამოვსახოთ.

2. $2x - y = 0$ განტოლების საშუალებით ავაგოთ $2x - y \geq 0$ უტოლობის

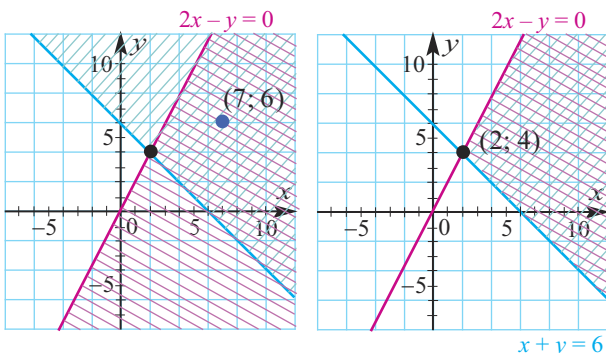
გრაფიკი და შესაბამისი სიბრტყის ნაწილი წითელი ხაზებით გამოვსახოთ.

3. სიბრტყის ორივე ფერით გაფერადებულ ნაწილში მოთავსებულ წერტილთა სიმრავლე მოცემული უტოლობის სისტემის ამონახსენია.

4. აქედან ავირჩიოთ ერთი წერტილი, მაგალითად $(7; 6)$ და შევამოწმოთ მისი კოორდინატების მიერ ამ უტოლობათა სისტემის დამაკმაყოფილება.

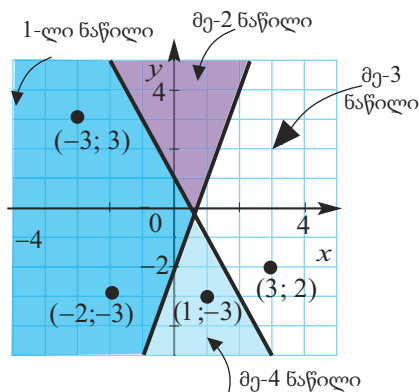
$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7 + 6 \geq 6 \\ 2 \cdot 7 - 6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 13 \geq 6 \\ 8 \geq 0 \end{cases}$$

ორივე ფერის მქონე ფართობის თითოეული $(x; y)$ წერტილის კოორდინატები მოცემული უტოლობის ამონახსენებია. უტოლობის პირობის თანახმად, საზღვრის წერტილებიც უტოლობის ამონახსენს ეკუთვნის, ამიტომ ისინი მთელი ხაზითაა აღნიშნული.



სასწავლო დაფალებები

1 > გამოკვლევა: $3x - y = 2$ და $2x + y = 1$ განტოლებების შესაბამისი წრფეთა გრაფიკები კოორდინატთა სიბრტყეს 4 ნაწილად ყოფენ. იმის შემოწმებით, თუ აღნიშნული წერტილები რომელი უტოლობათა სისტემის ამონახსენებია, განისაზღვრება თითოეული ნაწილის შესაბამისი უტოლობათა სისტემა.



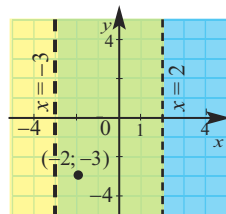
ა) $\begin{cases} 3x - y \leq 2 \\ 2x + y \leq 1 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} 3x - y \geq 2 \\ 2x + y \geq 1 \end{cases}$ გ) $\begin{cases} 3x - y \geq 2 \\ 2x + y \leq 1 \end{cases}$ დ) $\begin{cases} 3x - y \leq 2 \\ 2x + y \geq 1 \end{cases}$

ორცვლადიან წრფივ უტოლობათა სისტემა

ნამუშო 2. საკოორდინატო სიბრტყეზე გრაფიკულად გამოსახეთ $-3 < x < 2$ უტოლობა.

1. $-3 < x < 2$ ორმაგი უტოლობა ჩავწერთ $\begin{cases} x > -3 \\ x < 2 \end{cases}$ უტოლობათა სისტემის სახით.

2. გამოვსახოთ $x > -3$ უტოლობის გრაფიკი. $x = -3$ განტოლების შესაბამისი წრფე წყვეტილი სახით გავავლოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. ამ წრფის მარჯვნივ მდებარე ნახევარსიბრტყის ყველა წერტილი $x > -3$ უტოლობის ამონახსენია.



3. $x < 2$ უტოლობის გრაფიკული ასახვა: $x = 2$ განტოლების შესაბამისი წრფე წყვეტილი სახით გავავლოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. ამ წრფის მარცხნივ დარჩენილი ნახევარსიბრტყის ყველა წერტილი $x < 2$ უტოლობის ამონახსენს ასახავს.

4. საკოორდინატო სიბრტყეზე თან $x > -3$ -ზე, თანაც $x < 2$ -ზე უტოლობის ამსახველი სიბრტყის ნაწილი $-3 < x < 2$ უტოლობის ამონახსენს ასახავს. $x = -3$ და $x = 2$ გრაფიკს არ ეკუთვნის.

5. შემოწმება: $(-2; -3)$ საცდელ წერტილში შევამოწმოთ: $-3 < -2 < 2$

2 > ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა გრაფიკული ხერხით. შევამოწმოთ ამოხსნა საცდელი წერტილის შერჩევით.

ა) $\begin{cases} x < 5 \\ x > -4 \end{cases}$

ბ) $\begin{cases} y > -2 \\ y \leq 1 \end{cases}$

გ) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y < 11 \end{cases}$

დ) $\begin{cases} y < x + 4 \\ y \geq -2x + 1 \end{cases}$

ე) $\begin{cases} x + y > -8 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$

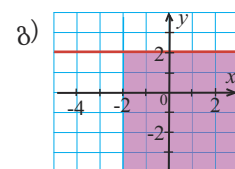
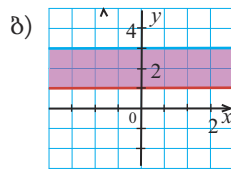
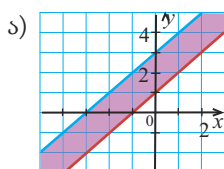
ვ) $\begin{cases} y > -3x \\ x \leq 5y \end{cases}$

ზ) $\begin{cases} x - y > 7 \\ 2x + y < 8 \end{cases}$

თ) $\begin{cases} 7x + y > 0 \\ 3x - 2y \leq 5 \end{cases}$

ი) $\begin{cases} -x < y \\ x + 3y > 8 \end{cases}$

3 > თითოეული გრაფიკის შესაბამისად დაწერეთ უტოლობათა სისტემა.

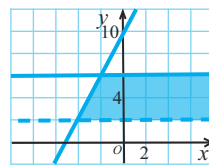
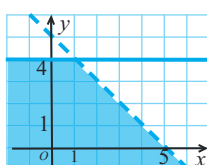
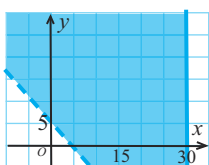


4 > დაწერეთ მოცემული გრაფიკების შესაბამისი უტოლობათა სისტემა. შეამოწმოთ ამოხსნა საცდელი წერტილის შერჩევით. რამდენ უტოლობას მოიცავს სისტემა?

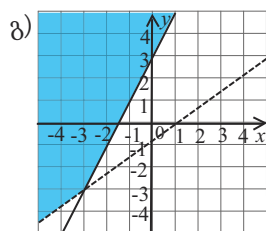
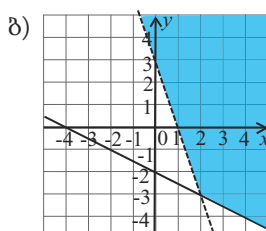
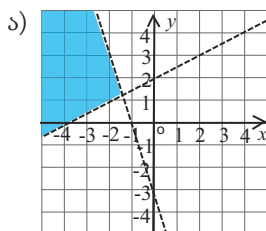
ა) $(15; 10)$

ბ) $(1; 1)$

გ) $(2; 4)$



5 > გრაფიკების მიხედვით დაწერეთ უტოლობათა სისტემა.



გამოყენებითი დავალებები

უმრავლესი რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციების შესაბამისი წრფივი უტოლობების სისტემის გრაფიკი საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში აიგება.

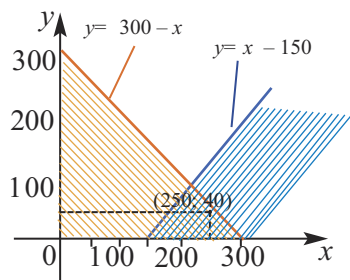
ნამუშეო 3. ორი კონვეიერიდან ერთ-ერთზე სპეციალური ნაჯერისგან მიღებული მეტალის ქვაბები, მეორეზე კი სპილენძის ქვაბები იწარმოება. ორივე კონვეიერის მაქსიმალური დატვირთვით მუშაობისას დღეში მაქსიმუმ 300 ქვაბი იწარმოება. უქანგავი მეტალისაგან დამზადებულ ქვაბებზე გაზრდილი მოთხოვნილების გამო ეცდებიან მათი დღიური წარმოების რაოდენობა სპილენძის ქვაბებზე სულ მცირე 150 ცალით მეტი იყოს. დაწერეთ დღიურად წარმოებული ქვაბების რაოდენობის მაჩვენებელი უტოლობათა სისტემა და გამოსახეთ გრაფიკულად.

ამოხსნა: 1. უქანგავი ქვაბების რაოდენობა აღვნიშნოთ x -ით, სპილენძის ქვაბების რაოდენობა y -ით. ამოცანის პირობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ ქვემოთ მოცემული უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases} x + y \leq 300 \\ x - y \geq 150 \end{cases}$$

2. $x + y \leq 300$ უტოლობის ამოხსნას $y = 300 - x$ წრფე და ამ წრფის ქვემოთ დარჩენილი ნახევარსიბრტყის ნაწილი გამოსახავს.

$x - y \geq 150$ უტოლობის ამონახსნს ასახავს $y = x - 150$ წრფე და ამ წრფის ქვემოთ დარჩენილი ნახევარ-სიბრტყის ნაწილი.



$\begin{cases} x + y \leq 300 \\ y + 150 \leq x \end{cases}$ უტოლობათა სისტემის ამოხსნა საზღვრის ზაზების ჩათვლით, ორივე უტოლობის ამოხსნის მომცველი ორი ფერის გაფერადებული სიბრტყის ნაწილის ყველა წერტილია.

3. ამ ნაწილიდან აღებული $(250; 40)$ საცდელი წერტილისათვის შევამოწმოთ უტოლობათა სისტემა. $250 + 40 \leq 300$, $250 - 40 \geq 150$; $290 \leq 300$, $210 \geq 150$. უტოლობის ამოხსნა სწორად არის განსაზღვრული.

6 > ნათიკი მაღაზიაში გაყიდული თითოეული ყუთი ლიმონათიდან 2 მანეთ, ხოლო თითოეული ყუთი კექსიდან 1 მანეთ მოგებას იღებს. ნათიკი ყოველდღიურად მაქსიმუმ 15 ყუთის გაყიდვასა და მინიმუმ 20 მანეთის მოგებას გეგმავს. ამ პირობის მიხედვით დაწერეთ ლიმონათისა და კექსის ყუთების რაოდენობის შესაძლო ვარიანტების უტოლობათა სისტემა და უჩვენეთ გრაფიკულად.

ორცვლადიან წრფივ უტოლობათა სისტემა

- 7 > ჯანმრთელი კვების რაციონის განსაზღვრისათვის ექიმ-დიეტოლოგმა A და B პროდუქტები ისე უნდა აურიოს, რომ ნარევი სულ მცირე 50 გრ პროტეინი იყოს. მიღებული ნარევის ენერგია კი 600 კალორიაზე მეტი არ იყოს. ცხრილში ერთ ფინჯან სურსათში შესაბამისი კვებითი ღირებულებებია მოცემული. მოცემული ცხრილის მიხედვით, ექიმმა თითოეული სურსათის რამდენი ფინჯანი უნდა აურიოს?

სურსათი	პროტეინი (გრ/ფინჯანი)	ენერგია (კალორია/ფინჯანი)
A	20	100
B	10	200

- 8 > ლემანი სპორტულ კომპლექსში მოვიდა და ეს განცხადება წაკითხა.

გარჯიშები და ერთ წუთში მოხმარებული კალორიები:

სარბენი ბილიკი	საშუალო სიჩქარე - 6	მაღალი სიჩქარე - 12
ტანვარჯიშის კიბეები	საშუალო სიჩქარე - 7	მაღალი სიჩქარე - 10
ველოსიპედი	საშუალო სიჩქარე - 5	მაღალი სიჩქარე - 12

ა) ლემანს სურს დღეს მაქსიმუმ 45 წუთი ველოსიპედი ატაროს და სულ მცირე 400 კალორია მოიხმაროს. მან ამას რამდენი წუთი მაღალი სიჩქარით და რამდენი წუთი საშუალო სიჩქარით ველოსიპედის ტარებით შეიძლება მიაღწიოს?
 ბ) მოცემული ინფორმაციის თანახმად დაწერეთ ორი მაგალითი და გრაფიკულად წარმოადგინეთ.

- 9 > ქალთა ფრენბურთის გუნდში შემავალი სპორტსმენების სიმაღლე 1 მ 60 სმ-დან 2 მეტრამდე სხვადასხვაა. მათი მასა კი 55 კგ-დან 75 კგ-მდე იცვლება. დაწერეთ ამ გუნდის მოთამაშეების სიმაღლისა და მასის მაჩვენებელი უტოლობების სისტემა და დახაზეთ გრაფიკი.

- 10 > საცურაო აუზებში წყლის pH ზომა 7,4 და 7,6 ერთეულს შორის, ქლორის მაჩვენებელი კი 1,0 და 1,5 PPM-ია (parts per million). pH მაჩვენებელს p-თი, ქლორირების დონეს c-თი თუ ავლნიშნავთ, წყლის ნორმის ფარგლებში დაწერეთ pH და ქლორირების დონის მაჩვენებელი უტოლობათა სისტემა და ააგეთ გრაფიკი.

- 11 > **ღია ტიპის შეკითხვა.** ა) დაწერეთ ორცვლადიანი უტოლობა, რომლის საზღვრის ხაზიც გრაფიკს ეკუთვნის და ააგეთ გრაფიკი.
 ბ) დაწერეთ უტოლობა, რომლის საზღვრის ხაზიც გრაფიკს არ ეკუთვნის და ააგეთ გრაფიკი.

- 12 > საკოორდინატო სიბრტყეზე დაშტრიხვით უჩვენეთ ქვემოთ მოცემული სისტემით მოცემულ წერტილთა სიმრავლე.

ა)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

ბ)
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 5 \\ 2y - x \geq 4 \end{cases}$$

გ)
$$\begin{cases} x + y \geq -2 \\ y - x \leq 2 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$$

კვადრატული უტოლობები

გამოკვლევა:

1) იპოვეთ $y = x^2 - 2x - 3$ პარაბოლის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x = -1, \quad x = 3$$

2) იპოვეთ წვეროს კოორდინატები:

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1, \quad n = m^2 - 2m - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

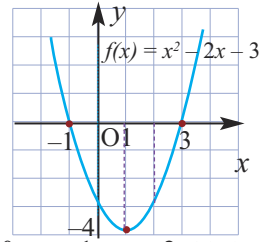
3) ააგეთ პარაბოლა.

4) განსაზღვრეთ პარაბოლაზე მდებარე და აბსცისები $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ მქონე წერტილების ორდინატების ნიშნები.

5) x -ის რომელი მნიშვნელობებისათვის მდებარეობს პარაბოლა აბსცისთა ღერძის ქვემოთ?

6) x -ის რომელი მნიშვნელობებისათვის მდებარეობს პარაბოლა აბსცისთა ღერძის ზემოთ?

7) მე-5 და მე-6 პუნქტებში კითხვებზე პასუხების გასაცემად რომელია უფრო მნიშვნელოვანი: წვეროს წერტილსა თუ აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილების ზუსტი მოძებნა?



$$\bullet ax^2 + bx + c < 0$$

$$\bullet ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$\bullet ax^2 + bx + c > 0$$

$$\bullet ax^2 + bx + c \geq 0$$

სახის უტოლობები კვადრატული უტოლობებია ($a \neq 0$).

ერთცვლადიანი მეორე ხარისხის უტოლობის ამოხსნა, შესაბამისი კვადრატული განტოლების ამოხსნით, ფუნქციის დადებითი ან უარყოფითი მნიშვნელობების შუალედების მოძებნაზე შეიძლება დავიყვანოთ. ამოხსნის ამ ხერხის დროს საჭიროა პარაბოლის შტოების მიმართულების განსაზღვრა და Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისების ცოდნა.

ნიმუში: $y = x^2 - x - 6$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით დაწერეთ ქვემოთ მოცემული უტოლობების ამონახსენთა სიმრავლე.

$$a) x^2 - x - 6 \leq 0 \quad b) x^2 - x - 6 > 0$$

$$b) x^2 - x - 6 \geq 0 \quad d) x^2 - x - 6 < 0$$

$x^2 - x - 6 = 0$ განტოლების ფესვებია $x = -2$ და $x = 3$, ამიტომ $y = x^2 - x - 6$ პარაბოლა Ox ღერძს $x = -2$ და $x = 3$ წერტილებში გადაკვეთით დადებით და უარყოფით მნიშვნელობებიან სამ შუალედად ყოფს.

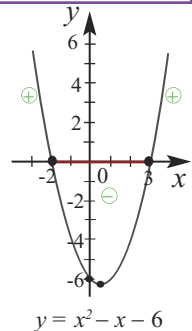
$x^2 - x - 6$ გამოსახულების მნიშვნელობები განვსაზღვროთ თითოეული შუალედისათვის.

ა) $y = x^2 - x - 6$ ფუნქციის გრაფიკი x -ის -2 და 3 მნიშვნელობებში გადაკვეთს აბსცისთა ღერძს, ამ მნიშვნელობებს შორის კი Ox ღერძის ქვევით მდებარეობს. მაშასადამე $x^2 - x - 6 \leq 0$ უტოლობის ამონახსენია: $-2 \leq x \leq 3$

ბ) x -ის -2 და -2 -ზე ნაკლები ან 3 და 3 -ზე მეტი მნიშვნელობებისათვის ფუნქციის მნიშვნელობა ($x^2 - x - 6$ გამოსახულების მნიშვნელობა) ნულის ტოლი ან ნულზე მეტია. მაშასადამე $x^2 - x - 6 \geq 0$ უტოლობის ამონახსენია: $x \leq -2$ ან $x \geq 3$.

გ) $x^2 - x - 6 > 0$ უტოლობის ამონახსენია: $x < -2$ ან $x > 3$

დ) $x^2 - x - 6 < 0$ უტოლობის ამონახსენია: $-2 < x < 3$



კვადრატული უტოლობები

კვადრატული უტოლობების გრაფიკების დახმარებით ამოხსნისათვის:

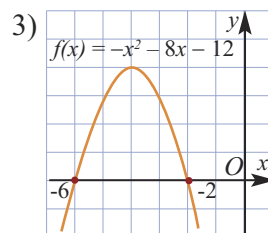
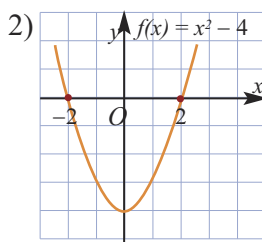
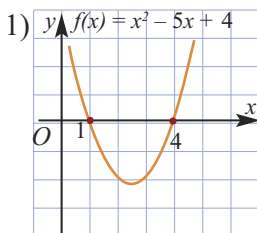
1. a კოეფიციენტის მიხედვით განისაზღვრება პარაბოლის შტოების მიმართულება.
2. გამოითვლება (თუ არსებობს) შესაბამისი კვადრატული განტოლების ნამდვილი ფესვები ან განისაზღვრება რომ ნამდვილი ფესვები არ აქვს.
3. გრაფიკის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილების მიხედვით სქემატურად აიგება ფუნქციის გრაფიკი.
4. გრაფიკის სქემატური ასახვის მიხედვით განისაზღვრება მოცემული უტოლობის შესაბამისი ნიშნების მქონე ინტერვალები.

$a > 0$ $D > 0$	$a > 0$ $D = 0$	$a > 0$ $D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$(x_1; x_2)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
$a < 0$ $D > 0$	$a < 0$ $D = 0$	$a < 0$ $D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$(x_1; x_2)$	$\emptyset$	$\emptyset$
$ax^2 + bx + c \geq 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
$ax^2 + bx + c < 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$ უტოლობის ამონახსენი		
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

კვადრატული უტოლობები

სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > დაწერეთ უტოლობათა ამონახსენი გრაფიკების მიხედვით.



ა) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

ა) $x^2 - 4 \leq 0$

ა) $-x^2 - 8x - 12 \leq 0$

ბ) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$

ბ) $x^2 - 4 \geq 0$

ბ) $-x^2 - 8x - 12 \geq 0$

გ) $x^2 - 5x + 4 > 0$

გ) $x^2 - 4 > 0$

გ) $-x^2 - 8x - 12 > 0$

დ) $x^2 - 5x + 4 < 0$

დ) $x^2 - 4 < 0$

დ) $-x^2 - 8x - 12 < 0$

- 2 > ამოხსენით უტოლობები შესაბამისი ფუნქციების გრაფიკების გამოყენებით.

ა) $x^2 - 7x + 10 > 0$

ბ) $x^2 - 4x + 3 < 0$

გ) $x^2 - 9 \geq 0$

- 3 > ამოხსენით უტოლობები.

ა) $x(x + 6) \geq 40$

ბ) $6x^2 > 11x + 35$

გ) $-2x^2 - x + 3 > 0$

ბ) $-x^2 - 11x - 24 < 0$

დ) $7x + 5 \leq -2x^2$

ვ) $-3x^2 + 5x > 2$

- 4 > დაამტკიცეთ, რომ უტოლობა მართებულია ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ა) $-x^2 + x - 1 < 0$

ბ) $6x - x^2 < 10$

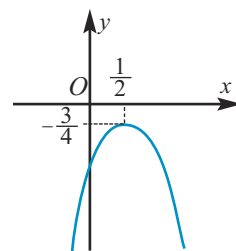
გ) $5x^2 - 2x + 1 > 0$

ნიშნა: ამოხსენით უტოლობა: $-x^2 + x - 1 < 0$.

ამოხსნა: $y = -x^2 + x - 1$ პარაბოლის შტოები ქვევითაა მიმართული.

$-x^2 + x - 1 = 0$ განტოლებას ნამდვილი ფესვები არა აქვს, ამიტომ პარაბოლა აბსცისთა ღერძს არ გადაკვეთს, მთლიანად ამ ღერძის ქვემოთ მდებარეობს. ეს იმას ნიშნავს, რომ $-x^2 + x - 1 < 0$ უტოლობას ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს.

პასუხი: $(-\infty; +\infty)$



- 5 > ამოხსენით უტოლობები.

ა) $x^2 + x + 3 > 0$

ბ) $2x^2 + x + 1 \geq 0$

გ) $x^2 - 2x + 4 < 0$

კვადრატული უტოლობები

- 6 > მოცემული კვადრატული უტოლობებიდან, რომლის: ა) ამონახსენია ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ($x \in \mathbb{R}$); ბ) ამონახსენია ცარიელი სიმრავლე ($\emptyset$) ?

ა) $x^2 + 1 > 0$

ბ) $x^2 + 1 < 0$

- 7 > იპოვეთ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე.

ა) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

ბ) $x^2 + 49 \leq 14x$

გ) $40x + 25x^2 + 16 < 0$

დ) $49x^2 + 70x + 25 \geq 0$

ნიმუში: ამოხსენით უტოლობა: $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

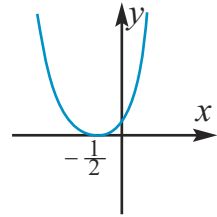
ამოხსნა: გამოვსახოთ $y = 4x^2 + 4x + 1$ ფუნქციის გრაფიკი:

$4x^2 + 4x + 1 = 0$ განტოლებას აქვს ერთი ნამდვილი ფესვი

$x = -\frac{1}{2}$. პარაბოლა Ox ღერძს ეხება $(-\frac{1}{2}; 0)$ წერტილში.

როგორც გრაფიკიდან ჩანს, ცვლადის $x = -0,5$ მნიშვნელობის გარდა, დანარჩენი ყველა მნიშვნელობისათვის მოცემულ უტოლობას აკმაყოფილებს.

პასუხი: $x \neq -0,5$



- 8 > ამოხსენით უტოლობები შესაბამისი ფუნქციების გრაფიკების აგებით.

ა) $x^2 - 9x + 8 < 0$

ბ) $x^2 - 2x - 24 \leq 0$

გ) $x^2 + 8x + 16 \geq 0$

დ) $x^2 + 6x + 5 > 0$

ე) $0 > -x^2 + 7x - 12$

ვ) $-x^2 + 2x + 15 < 0$

ზ) $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$

თ) $3x^2 - 3x + 9 > 0$

ი) $0 > -x^2 + 4x - 4$

დაწერეთ კვადრატული უტოლობები ამონახსენის მოცემული პირობის შესაბამისად.

- 9 >

ა) $-2 \leq x \leq 4$

ბ) $x < 1$ ან $x > 10$

გ) $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

დ) $x < -\frac{3}{4}$ ან $x > \frac{2}{3}$

ე) $x \leq -3 - \sqrt{5}$ ან $x \geq -3 + \sqrt{5}$

ვ) $x \in \mathbb{R}$

ზ) ამონახსენი არ აქვს.

- 10 > x -ის რა მნიშვნელობებისათვის იღებს:

ა) $3x^2 - 2x - 1$ სამწევრი დადებით მნიშვნელობას?

ბ) $-x^2 + 3x - 2$ სამწევრი უარყოფით მნიშვნელობას?

- 11 >

ცვლადის რა მნიშვნელობისათვის:

ა) $2x^2 + x - 6$ სამწევრის მნიშვნელობა ნაკლებია 4-ზე?

ბ) $-x^2 + 8x + 2$ სამწევრის მნიშვნელობა მეტია 9-ზე?

- 12 >

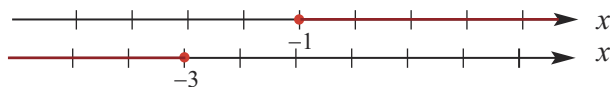
არგუმენტის რომელი მნიშვნელობებისათვის $f(x) = x^2 - 4x$ ფუნქციის მნიშვნელობა ნაკლებია $g(x) = x + 6$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობაზე?

კვადრატული უტოლობები

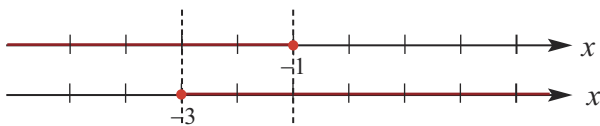
კვადრატულ უტოლობებს ალგებრული ხერხით, მარცხენა მხარის მამრავლებად დაშლით, უტოლობის ნიშნის მიხედვით შესაძლო შემთხვევათა გამოკვლევით ამოხსნა შეიძლება.

ნამუშე: $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ უტოლობა $(x+1)(x+3) \leq 0$ სახით ჩავწერთ. ორი მამრავლის ნამრავლი მაშინაა უარყოფითი, როცა მამრავლებს საპირისპირო ნიშნები აქვთ.

1-ლი ხერხი. დავუშვათ, რომ $(x+1) \geq 0$ და $(x+3) \leq 0$. სადაც $x \geq -1$ და $x \leq -3$ -ზე. x -ის ორივე უტოლობის დამაკმაყოფილებელი მნიშვნელობები $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ უტოლობის ამონახსნებია. ამ შემთხვევაში x -ს ასეთი მნიშვნელობა არა აქვს.



მე-2 ხერხი. დავუშვათ, რომ $(x+1) \leq 0$ და $(x+3) \geq 0$. თუ ორივე უტოლობას ამოვხსნით, $x \leq -1$ და $x \geq -3$ იქნება.



x -ის -1 და -3 მნიშვნელობების ჩათვლით, მათ შორის მდებარე ყველა რიცხვი. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ უტოლობის ამონახსენია: $-3 \leq x \leq -1$

13 > ამოხსენით უტოლობები შესაბამისი გამოსახულების მამრავლებად დაშლით.

ა) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$

ბ) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

გ) $4x^2 < 25$

დ) $-x^2 - 12x < 32$

ე) $x^2 - 4x - 5 > 0$

ვ) $12x^2 + 3x \leq 0$

14 > ამოხსენით უტოლობები სხვადასხვა ხერხით.

ა) $x^2 + 8x + 7 > 0$

ბ) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$

გ) $2x^2 - 11x + 15 \geq 0$

დ) $x^2 - 5x > 3x^2 - 18x + 20$

ე) $2x^2 + 12x - 11 > x^2 + 2x + 13$

15 > უტოლობები ორ ჯგუფად - წრფივ უტოლობებად და კვადრატულ უტოლობებად დააჯგუფეთ და ამოხსენით.

$y^2 - 3 < 0$

$7(3 - y) > 4 + 2y$

$(3 - 7x)^2 < -1$

$4(x - 2) < 6x - 3$

$(5x + 2)^2 \leq 4$

$x^2 - 3 < 5x + 3$

$8p^2 - 18 > 0$

$x + 3 \leq 2(x + 1)$

$x^2 \geq 4x$

16 > ამოხსენით უტოლობა: $x^2 + x \geq 6$. ქვემოთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომლებია სწორი? პასუხები დაასაბუთეთ. მოცემული უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე:

ა) $x(x+1) \geq 6$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეც არის;

ბ) $x^2 + x - 5 \geq 1$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეც არის;

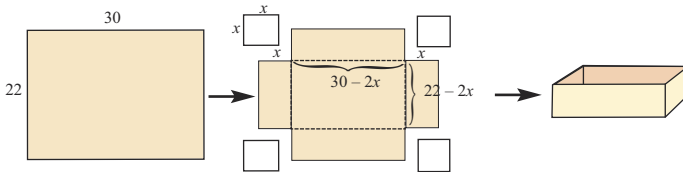
გ) $3x^2 + 3x \geq 18$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეც არის;

დ) $-x^2 - x \leq -6$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეც არის.

კვადრატული უტოლობები

გამოყენებითი დავალებები

- 17 > პირღია ყუთის დამზადებისათვის მართკუთხა ფორმის მუყაოს კუთხეებიდან კვადრატული ფორმის ნაჭრების ამოჭრით და სურათზე ნაჩვენები წყვეტილი ხაზების გასწვრივ გადაკეცვით დაწებდება. უნდა დამზადდეს $220 \text{ სმ} \times 30 \text{ სმ}$ მუყაოს ყუთი.



- ა) ამოჭრილი კვადრატული ნაწილების გვერდის სიგრძის (სმ-ობით) რომელი მთელი მნიშვნელობისათვის იქნება ყუთის მოცულობა 1200 სმ^3 ?
 ბ) ამოჭრილი კვადრატული ნაწილების გვერდის სიგრძის (სმ-ობით) რომელი მთელი მნიშვნელობისათვის იქნება ყუთის მოცულობა სულ მცირე 1200 სმ^3 ?
 18 > მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი მეორეზე 2 სმ-ით გრძელია. რამდენი სანტიმეტრი უნდა იყოს მცირე კათეტი, რომ სამკუთხედის ფართობი იყოს არანაკლებ 24 სმ^2 ?
 19 > მართკუთხედის ერთი გვერდი მეორეზე 7 სმ-ით მეტია. რამდენი სანტიმეტრი შეიძლება იყოს ამ გვერდის სიგრძე, თუ მართკუთხედის ფართობი 60 სმ^2 -ზე ნაკლებია?
 20 > რომელი გრაფიკი რომელ უტოლობას შეესაბამება? რომელი უტოლობების შესაბამისი ფუნქციების გრაფიკებია მოცემული? ააგეთ ეს გრაფიკებიც და ამოხსენით უტოლობები მათი გამოყენებით.

ა) $x^2 - 3x + 2 > 0$

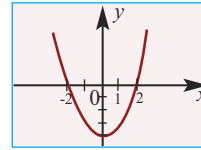
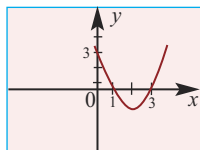
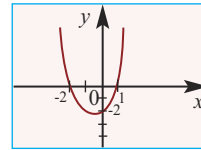
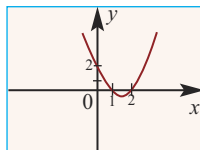
ბ) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$

გ) $x^2 - 2x - 3 < 0$

დ) $x^2 + x - 2 \geq 0$

ე) $x^2 - x - 2 < 0$

ვ) $x^2 - 4 > 0$



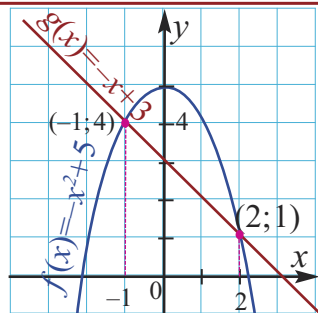
- 21 > გამოკვლევები უჩვენებს, რომ მძღოლების წინ წამოჭრილი შეფერხების რეაქციის ხანგრძლივობის $T(x) = 0,005x^2 - 0,23x + 22$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. აქ x მძღოლის ასაკს უჩვენებს: $16 \leq x \leq 70$. რამდენი სალისეა მძღოლის რეაქციის ხანგრძლივობა:
 ა) 16 წლის ასაკში. ბ) 35 წლის ასაკში? გ) რომელ ასაკშია მძღოლის რეაქციის ხანგრძლივობა 25 სალისეზე მეტი?

სალისე დროის საზომი ერთეულია და წამის $\frac{1}{60}$ -ის ტოლია.

კვადრატული უტოლობები

22 > სურათზე ნაჩვენებია $-x^2 + 5 \geq -x + 3$ უტოლობის ამონახსენი.

ა) წერითი ფორმით დაასაბუთეთ, რომ x -ის $[-1; 2]$ შუალედში არსებული მნიშვნელობები აკმაყოფილებს მოცემულ უტოლობას.



ბ) $-x^2 + 5 \geq -x + 3$ უტოლობა გამარტივებით ჩაწერეთ $-x^2 + x + 2 \geq 0$ კვადრატული უტოლობის სახით და ეს უტოლობა ამოხსენით გრაფიკული ხერხით.

გ) იგივე შედეგი მიიღეთ? რა მსგავსი და განმასხვავებელი ნიშნებია მოცემულ გრაფიკულ ამოხსნასა და თქვენს ამოხსნას შორის?

23 > სურათზე მოცემული ხიდის თალის ფორმა შერჩეულ კოორდინატა სისტემაში $y = -0,002x^2 + 1,06x$ კვადრატული ფუნქციით შეიძლება იყოს მოცემული. სადაც x არის მანძილი მარცხენა საყრდენიდან, y კი უზენეებს თალის სიმაღლეს წყლის დონიდან (მეტრობით). მარცხენა საყრდენიდან რა მანძილზეა თალი გზის ზედაპირზე?



24 > ბურთის ატყორცნის შემდეგ ბურთის მოძრაობის $h(x) = -5x^2 + 20x + 1$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება. სადაც, h ბურთის x წამის შემდეგ სიმაღლეს (მეტრობით) უჩვენებს. ა) დროის რა მონაკვეთში იქნება ბურთი 16 მ-ზე უფრო მეტ სიმაღლეზე? ბ) რამდენი წამის განმავლობაში იქნება ბურთი ჰაერში?

25 > **განზოგადება.** კვადრატული ფუნქციის გრაფიკისა და დისკრიმინანტის გამოყენებით გამოიკვლიეთ $ax^2 + bx + c \geq 0$ უტოლობის ამონახსენი.

ა) რა შემთხვევაშია ყველა ნამდვილი რიცხვი უტოლობის ამონახსენი?

ბ) რა შემთხვევაშია უტოლობის ამონახსენი ერთი ნამდვილი რიცხვი?

გ) რა შემთხვევაშია განსაზღვრულ რიცხვთა სიმრავლე უტოლობის ამონახსენი, ხოლო განსაზღვრულ რიცხვთა სიმრავლე კი არ არის ამონახსენი?

კვადრატული უტოლობები

- 26** > მანქანამ რომლის სიმაღლეც არის 3,5 მ, ხოლო სიგანე 2,2 მ-ია, უნდა გაიაროს თაღის ქვეშ. საკოორდინატო სისტემის წესით თაღის $y = -0,3x^2 + 1,8x + 1,1$ ფუნქციით მოდელირება შეიძლება (x და y მეტრობით).



- ა) გაივლის ავტომობილი თაღის ქვეშ? განმარტეთ.
 ბ) იმისათვის, რომ 3,5 მ სიმაღლის ავტომობილმა თაღის ქვეშ გაიაროს, მაქსიმუმ რამდენი უნდა იყოს მისი სიგანე?
 გ) 2,2 მ სიგანის მქონე მანქანამ თაღის ქვეშ რომ გაიაროს, მაქსიმუმ რამდენი შეიძლება იყოს მისი სიმაღლე?

- 27** > ამოხსენით უტოლობები ორი ხერხით:

- 1) კვადრატული ფუნქციისა და წრფივი ფუნქციის აგებით.
 2) გამარტივებისას მიღებული კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის აგებით.

ა) $x^2 \leq 15 - 2x$

ბ) $x^2 + 4x > 3 + 2x$

გ) $13x - 7 \leq -2x^2$

დ) $x^2 + 4x + 3 < 2x + 1$

- 28** > ამოხსენით უტოლობები შესაბამისი ფუნქციების გრაფიკების აგებით.

ა) $x^2 - 2x - 3 > 0$

ბ) $x^2 + 2x - 3 < 0$

გ) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$

დ) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

ე) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

ვ) $x^2 - 4x < 0$

ზ) $-x^2 + 3x \geq 0$

თ) $-x^2 + 9 \leq 0$

ი) $-4x^2 - 16 > 0$

- 29** > მედიცინაში წონის ინდექსად წოდებული მაჩვენებელი ნორმალური მასის განსაზღვრისათვის გამოიყენება. მათი მასა, ვისი მასის ინდექსიც არის 17-24 შორის ითვლება ნორმალურად, მასის ინდექსის $I = \frac{m}{h^2}$ ფორმულით განისაზღვრება. სადაც m არის მასა (კგ), h კი სიმაღლე (მეტრობით).

- ა) რამდენი უნდა იყოს 1 მ და 50 სმ სიმაღლის ადამიანის მასა, რომ მასის ინდექსი 24-ზე ნაკლები არ იყოს?
 ბ) სულ მცირე რამდენი უნდა იყოს 54 კგ მასის მქონე პიროვნების სიმაღლე, რომ მასის ინდექსი 24-ზე მეტი არ იყოს?

- 30** > თაჰირს სურს მწვანის დასათესად მართკუთხედის ფორმის ნაკვეთი გაამზადოს. მას შემოსაღობად 70 მ მასალა აქვს. თაჰირს სურს, რომ მწვანის ფართობი 300 მ²-ზე მეტი იყოს. რა ზომებში უნდა გამოისახოს ეს ფართობი?

ინტერვალთა მეთოდი

1. დაწერეთ უტოლობის შესაბამისი განტოლება და იპოვეთ ფესვები.
2. რიცხვით ღერძზე აღნიშნეთ ცვლადის ამ მნიშვნელობის შესაბამისი წერტილები. ამ წერტილებს უტოლობის ზღვრულ წერტილებს ვუწოდებთ.
3. ზღვრული წერტილებით შექმნილი ინტერვალებიდან მიმდევრობით შეარჩიეთ საცდელი წერტილები და ამ ინტერვალებიდან განსაზღვრეთ რომლები ეკუთვნის უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეს.

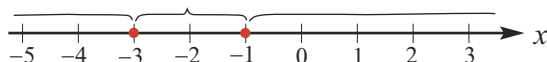
ნამუშაუ: ამოხსენით უტოლობა $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

უტოლობის ამოხსნისათვის:

1. ვიპოვოთ $x^2 + 4x + 3 = 0$ განტოლების ფესვები:

$$(x+1)(x+3)=0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -3.$$

2. რიცხვით ღერძზე ავღნიშნოთ $x_1 = -1$ და $x_2 = -3$ წერტილები. როგორც ხედავთ, ზღვრულმა წერტილებმა რიცხვითი ღერძი 3 ინტერვალად დაყვეს.



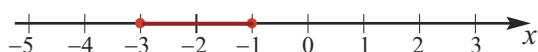
3. თითოეული ინტერვალიდან ვირჩევთ თითო მნიშვნელობას, საცდელ მნიშვნელობას $(-5; -2; 0)$ და ვამოწმებთ უტოლობას.

ინტერვალი	$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; +\infty)$
საცდელი წერტილი	-5	-2	0
მარცხენა მხარის გამოსახულების მნიშვნელობა	$(-5)^2 + 4(-5) + 3 = 8$	$(-2)^2 + 4(-2) + 3 = -1$	$(0)^2 + 4(0) + 3 = 3$
$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ -ის დაკმაყოფილება	არა	დიახ	არა

$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ უტოლობას $(-3; -1)$ ინტერვალისა და საზღვრის წერტილები აკმაყოფილებს.

პასუხი:

$$-3 \leq x \leq -1$$



სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > ამოხსენით უტოლობები ინტერვალთა მეთოდით

ა) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

ბ) $3x^2 - x - 2 < 0$

გ) $x^2 - 3x + 1 \leq 29$

დ) $x^2 - 4x > 5$

ე) $2x^2 + 5x \geq 7$

ვ) $2x^2 + 3x > 5$

ზ) $x^3 - 4x < 0$

თ) $x^3 - 9x \geq 0$

ი) $x(x+1)(x-2) > 0$

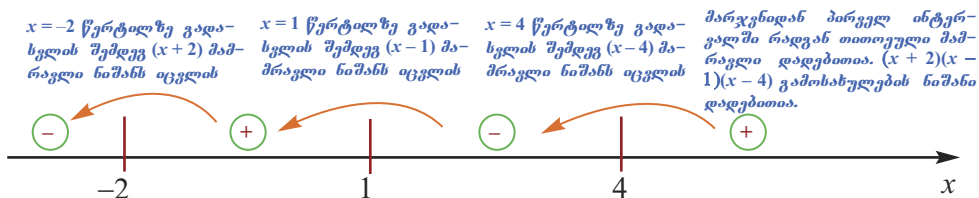
კ) $x(x+3)(x-2) > 0$

უტოლობების ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით

გამოკვლევა 1. მარცხენა მხარე $(x - c)$ სახის მამრავლების ნამრავლის, მარჯვენა მხარე 0-ის მქონე უტოლობების ამოხსნის დროს გამოვიყვლით ინტერვალებში ნიშნების ცვლილებას.

ნიმუში: $(x + 2)(x - 1)(x - 4) < 0$

$(x + 2)(x - 1)(x - 4) = 0$ განტოლებიდან ვპოულობთ $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$. რიცხვით ღერძზე ავღნიშნოთ საზღვრის წერტილები და თითოეულ ინტერვალში (მარჯვნიდან I-დან დაწყებით) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$ გამოსახულების ნიშნები განვსაზღვროთ.



როგორც ხედავთ, ამ შემთხვევაში რიცხვით ღერძზე ერთი ინტერვალიდან მორიგ ინტერვალზე გადასვლისას ნიშნები მონაცვლეობენ.

შუალედები, სადაც გამოსახულებები ნულზე ნაკლებია, ანუ უარყოფითად არის აღნიშნული მოცემული უტოლობის ამონახსენია. პასუხი: $(-\infty; -2) \cup (1; 4)$

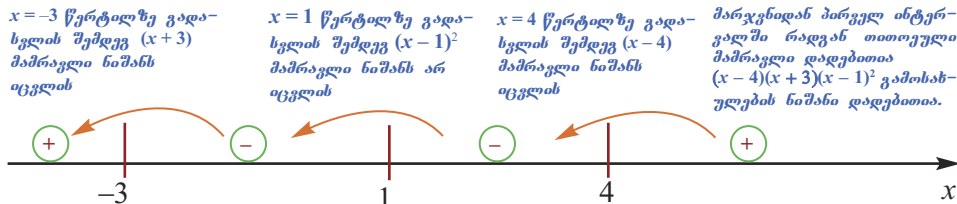
თუ თითოეული მამრავლი $(x - c_k)$ სახისაა, მაშინ მარჯვნიდან პირველ ინტერვალში ნამრავლის ნიშანი დადებითია. თუ თითოეული მამრავლი კენტ ხარისხისაა, მაშინ ინტერვალებში ნიშნები მონაცვლეობენ.

გამოკვლევა 2. $(x - c)^{2n}$ სახის ლუწხარისხიანი მამრავლის შემცველი უტოლობები და ინტერვალებში ნიშნების ცვლილება.

ნიმუში: $(x - 4)(x + 3)(x - 1)^2 \geq 0$

1) ვიპოვოთ საზღვრის წერტილები. $(x - 4)(x + 3)(x - 1)^2 = 0$, $x = 4$, $x = -3$, $x = 1$

2) ავღნიშნოთ საზღვრის წერტილები რიცხვით ღერძზე.



$(x - 1)^2$ მამრავლის გამო $x = 1$ წერტილის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს შუალედებში ნიშანი მეროდება. უტოლობას აკმაყოფილებს ის შუალედები, სადაც გამოსახულება ნულზე მეტ, ანუ დადებით მნიშვნელობას იძენს და საზღვრის წერტილები.

პასუხი: $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$

თუ $(x - c)^{2n}$ სახის ლუწი ხარისხისაგან შემდგარი მამრავლია, c საზღვრის წერტილის მარჯვნივ და მარცხნივ ნიშანი მეროდება.

2 > ამოხსენით უტოლობები.

ა) $(x + 3)(x - 8)(x - 20) < 0$

ბ) $(x^2 - 9)(x + 4)(x - 5) \leq 0$

გ) $x^3 + 2x^2 - 15x \geq 0$

ზ) $(x - 4)^2 \cdot (x^2 - 8x) < 0$

ი) $5x(x - 2)(x - 6)^2 \geq 0$

ბ) $(x - 3)(x + 2)(x - 1) \geq 0$

დ) $(x^2 - 2x)(x - 6) < 0$

ვ) $(x + 5)^2 \cdot (2x - x^2) \geq 0$

თ) $(4x - x^3) \cdot (25 - x^2) < 0$

კ) $-3(x + 4)^2(x - 5) \leq 0$

რაციონალური უტოლობების ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით

1. უტოლობა ჩავწერთ მოცემულის ეკვივალენტური უტოლობის სახით, რომლის ერთი მხარე რაციონალური გამოსახულებაა, მეორე კი ნულის ტოლია.
2. იპოვეთ ცვლადის ის მნიშვნელობები, რომლებიც რაციონალური გამოსახულების მნიშვნელსა და მრიცხველს ნულად აქცევს. ეს მნიშვნელობები მოცემული უტოლობის საზღვრის წერტილებია.
3. საზღვრის წერტილებით შექმნილი ინტერვალებიდან მიმდევრობით შეარჩიეთ საცდელი წერტილები და შეამოწმეთ ამ ინტერვალებიდან რომლები ეკუთვნის და რომლები არ ეკუთვნის უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეს.

ნამუშაუ: $\frac{x+2}{x-4} \leq 3$ მოცემული უტოლობა

1) $\frac{x+2}{x-4} - 3 \leq 0$ უტოლობის ორივე მხარეს მიემატება -3

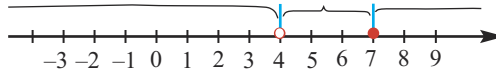
$$\frac{-2x+14}{x-4} \leq 0 \quad \text{მარტივდება}$$

$$\frac{-2(x-7)}{x-4} \leq 0 \quad \text{საერთო მამრავლი გაიტანება ფრჩხილებს გარეთ}$$

$$\frac{x-7}{x-4} \geq 0 \quad \text{ორივე მხარე იყოფა } (-2)\text{-ზე და უტოლობის ნიშანი იცვლება მოპირდაპირე ნიშნით}$$

2) ვიპოვოთ მრიცხველისა და მნიშვნელის ნულები: $x-7=0$, $x=7$, $x-4=0$, $x=4$

3) $x=4$ და $x=7$ წერტილების რიცხვით ღერძზე აღნიშვნით იგი სამ ინტერვალად იყოფა: $(-\infty; 4)$, $(4; 7)$ და $(7; +\infty)$



თითოეული ინტერვალიდან ავირჩიოთ საცდელი წერტილი და უტოლობა შევამოწმოთ.

$(-\infty; 4)$ ინტერვალი

$$x=0 \quad \frac{x+2}{x-4} \leq 3$$

$$\frac{0+2}{0-4} \leq 3; \quad -\frac{1}{2} \leq 3$$

სწორია

$(4; 7)$ ინტერვალი

$$x=5 \quad \frac{x+2}{x-4} \leq 3$$

$$\frac{5+2}{5-4} \leq 3; \quad \frac{7}{1} \leq 3$$

სწორი არ არის

$(7; +\infty)$ ინტერვალი

$$x=8 \quad \frac{x+2}{x-4} \leq 3$$

$$\frac{8+2}{8-4} \leq 3; \quad \frac{10}{4} \leq 3$$

სწორია

ვინაიდან $x=4$ წერტილში შესაბამის გამოსახულებას აზრი არა აქვს, ეს წერტილი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს ამონახსენთა სიმრავლეს. $x=7$ კი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს.

ამრიგად, $\frac{x+2}{x-4} \leq 3$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე $(-\infty; 4)$ და $[7; +\infty)$

შუალედების გაერთიანებაა. პასუხი: $(-\infty; 4) \cup [7; +\infty)$.

შენიშვნა: $\frac{x-7}{x-4} \geq 0$ მოცემული უტოლობის ამოხსნა შეიძლება უტოლობაში ინტერვალებში ნიშნების ცვლილების წესის გამოყენებითაც.

უტოლობების ამოხსნა ინტერვალთა მეთოდით

- 3 > ამოხსენით ჯერ განტოლებები, შემდეგ კი ამოხსენით შესაბამისი უტოლობები ინტერვალთა მეთოდით:

ა) $\frac{10}{x-5} = 5$	ბ) $\frac{8}{a+1} = 4$	გ) $\frac{z+2}{z-6} = -3$	დ) $\frac{w-8}{w+6} = 2$
$\frac{10}{x-5} < 5$	$\frac{8}{a+1} > 4$	$\frac{z+2}{z-6} \leq -3$	$\frac{w-8}{w+6} \leq 2$
$\frac{10}{x-5} > 5$	$\frac{8}{a+1} < 4$	$\frac{z+2}{z-6} \geq -3$	$\frac{w-8}{w+6} \geq 2$

- 4 > წევრები გადაიყვანეთ მარცხენა მხარეს და მამრავლებად დაშლით ამოხსენით უტოლობები.

ა) $x^3 \leq 16x$ ბ) $(2x-6)^2 \leq x^2$ გ) $(x^2+x-3)^2 < (x^2-x-5)^2$

- 5 > ამოხსენით.

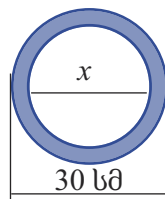
ა) $|2x-3| > |6-x|$ ბ) $|3x-5| < |x-3|$ გ) $|2x-1| < |x+1|$

მითითება: $|p(x)| < |g(x)|$ ტიპის უტოლობები, მისი ეკვივალენტური

$p^2(x) < g^2(x)$ უტოლობით ჩაანაცვლეთ და წევრების მარცხენა მხარეს გადაყვანით მიღებული უტოლობები ამოხსენით მამრავლებად დაშლით.

- 6 > შენობაში წყლის ხაზის გაყვანა იგეგმება. მილის გარე დიამეტრი 30 სმ, განივი ჭრილის ფართობი არანაკლებ 60 სმ²-ისა და არაუმეტეს 90 სმ²-ისა უნდა იყოს.

ა) ამოცანის პირობების შესაბამისად დაწერეთ კვადრატული უტოლობა და ამოხსნა გრაფიკულად გამოსახეთ.



ბ) განსაზღვრეთ წყლის მილის შიდა დიამეტრის შესაძლო ზომები. შედეგები დაამრგალეთ მეათედებამდე. ჩათვალით, რომ $\pi \approx 3$.

- 7 > ჰეიდარი ზაფხულის არდადეგებზე ავეჯის მაღაზიაში მამას ეხმარება. ისინი ყოველი მაგიდის მიტანისათვის 10 მანეთს და მაგიდებისათვის მწარმოებელ კომპანიას ყოველ კვირეულად 1800 მანეთს უხდინან. ყოველკვირეულად თითოეული x მანეთად შეთავაზებული $(120-x)$ ცალი მაგიდა იყიდება. რამდენ მანეთად უნდა გაყიდონ მათ თითოეული მაგიდა, რომ მოგებაზე იმუშაონ? მაგიდის რამდენ მანეთად გაყიდვის შემთხვევაში მიაღწევს კვირეული მოგება მაქსიმუმს? ამ შემთხვევაში რამდენი მაგიდა გაიყიდება ერთ კვირაში?

- 8 > ამოხსენით უტოლობები.

ა) $\frac{x-3}{x+7} < 0$	ბ) $\frac{2x-10}{x+8} > 0$	გ) $\frac{x}{2x-5} \leq 0$
დ) $\frac{(x-1)(x^2-36)}{x+1} < 0$	ე) $\frac{x}{x-5} \geq \frac{1}{2}$	ვ) $\frac{3x-1}{2x+5} \geq 3$

- 9 > k -ს რა მნიშვნელობისათვის მოცემულ განტოლებას: ა) ნამდვილი ფესვი არა აქვს; ბ) ორი სხვადასხვა ნამდვილი ფესვი აქვს?

1) $3x^2 + kx + 3 = 0$ 2) $kx^2 - 4x + k - 3 = 0$

განმაზოგადებელი დაგალებები

1 > ამოხსენით უტოლობები ინტერვალთა მეთოდით.

ა) $-x^2 - 2x + 48 < 0$

ბ) $3x^2 + 2x - 5 < 0$

გ) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

დ) $x^2 + 2x - 15 \leq 0$

ე) $24 + 11x + x^2 > 0$

ვ) $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$

ზ) $x^2 - 2x + 3 < 0$

თ) $x^2 - 2x + 3 > 0$

ი) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

2 > ამოხსენით უტოლობები.

ა) $\frac{3x+1}{2x-4} > 0$

ბ) $\frac{2x-1}{5x+3} \geq 0$

გ) $\frac{x-3}{x+3} \leq 5$

დ) $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} < 0$

ე) $x-17 \geq \frac{60}{x}$

ვ) $\frac{x^2-x-6}{x-3} \geq 1$

ზ) $\frac{x-2}{x-1} < 1$

თ) $\frac{x^2+x-1}{x+3} < 1$

ი) $\frac{x^2+2}{x+4} \leq 3$

კ) $|2x-3| + 5 < 6$

ლ) $|5x+3| - 4 \geq x$

მ) $|x+5| < |6x-10|$

3 > მაღაზიის ყოველი კვადრატული მეტრი ფართობისათვის გადახდილი ყოველ-თვიური ქირის თანხასა (r) და მიღებულ მოგებას (ათას მანეთობით) $P(r)$ შორის დამოკიდებულება დაახლოებით არის $P(r) = -6r^2 + 45r - 39$. ამოხსენით ქვემოთ მოცემული განტოლება და უტოლობები, თითოეული წარმოადგინეთ რეალური სიტუაციის შესაბამისად.

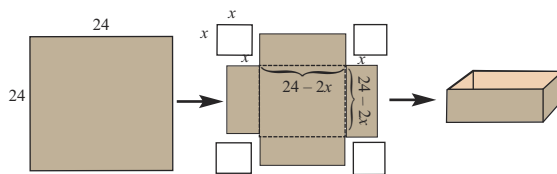
$-6r^2 + 45r - 39 = 0$

$-6r^2 + 45r - 39 > 0$

$-6r^2 + 45r - 39 \geq 15$

$-6r^2 + 45r - 39 < 15$

4 > ზომები 24 სმ $\times$ 24 სმ მქონე კვადრატული ფორმის მუყაოს ნაჭერს კუთხეებიდან x სმ გვერდებიანი კვადრატული ნაწილები ამოაჭრეს და სურათზე ნაჩვენები წესით წყვეტილი ხაზების გასწვრივ გადაკვეცით და დაწებებით პირლია ყუთი დაამზადეს. x -ის რომელი მთელი მნიშვნელობებისათვის იქნება ამ ყუთის მოცულობა 800 სმ³-ზე მეტი? ამ მნიშვნელობებიდან რომელში იქნება მოცულობა უდიდესი?

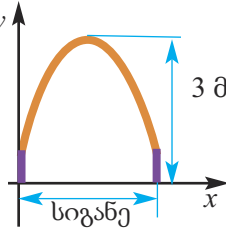


5 > **ღია ტიპის შეკითხვა.** $(x+1)(x-4) < 0$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლის განსაზღვრისათვის რომელ სამ წერტილს შეარჩევდით?

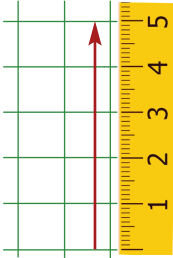
6 > ჯავიდან $2x^2 + 12x > 2x + 12$ უტოლობის ამოხსნა დაწერა $2x(x+6) > 2(x+6)$, $x > 2$ სახით. განმარტეთ ჯავიდის შეცდომა.

7 > $x^2 + 6x - 8 \leq 0$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლე $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \leq 0$ უტოლობის ამონახსენთა სიმრავლეზე 2-ჯერ “ვრცელია” მოსაზრება მართებულია?

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 8 > ბალიანი სახლის შესასვლელი თაღის ფორმისაა. კოორდი- y ნატა სისტემის სურათზე ნაჩვენები სახით შერჩევით თაღის $g(x) = -0,6x^2 + bx + 0,6$ ფუნქციის მოდელირება შეიძლება. თუ შესასვლელის სიმაღლე 3 მ-ია, რამდენი მეტრი იქნება სიგანე? იმისათვის, რომ 2,4 მ სიმაღლის მქონე მანქანა შესასვლელ კარებში გავიდეს, მაქსიმუმ რამდენი შეიძლება იყოს მისი სიგანე?
- 
- 9 > ამოხსენით უტოლობები.
- ა) $\frac{2}{2-x} \leq 3-x$ ბ) $\frac{1}{x-1} > \frac{-1}{x+2}$ გ) $\frac{2x^2+6x-8}{2x^2+5x+3} < 1$
- 10 > ერთი გამყიდველი ყოველთვე იღებს 200 მანეთ ხელფასს და დამატებით საერთო გაყიდვის 2%-ს. სხვა გამყიდველის ხელფასი კი გაყიდვის 10%-ით იანგარიშება. რამდენ მანეთიანი ვაჭრობის განხორციელებისას, მიიღებს მეორე გამყიდველი მეტ მოგებას, ვიდრე პირველი?
- 11 > ბანკის ანგარიშზე შეტანილი იქნა 5000 მანეთი 8%-იანი მარტივი საპროცენტო მატებით. კიდევ რამდენი მანეთი უნდა შეტანილი იქნას 10%-იანი მარტივი საპროცენტო მატებით, რომ წლიური მოგება იყოს 800 მანეთსა და 950 მანეთს შორის?
- 12 > ზვიგენის ნორმალური არსებობისათვის წყლის ტემპერატურა 5°C -დან 18°C -მდე უნდა იყოს. უტოლობის სახით დაწერეთ ზვიგენებისათვის არახელსაყრელი წყლის ტემპერატურა.
- 13 > ორი მთელი რიცხვის ჯამი 20-ის ტოლია. მათი კვადრატების ჯამი კი 208-ზე ნაკლებია. განსაზღვრეთ ამ რიცხვების წყვილი.
- 14 > ჩამოიჭრა მართკუთხა ფორმის აბრეშუმის ქსოვილი, რომლის სიგრძე სიგანეზე 5-ჯერ მეტია. განსაზღვრეთ სიგანის შესაძლო ზომები, თუ ცნობილია, რომ ქსოვილის ფართობი არანაკლებ 500 სმ² და არაუმეტეს 720 სმ²-ია.
- 15 > ასლანმა ბურთი 15 მ/წმ სიჩქარით 30 მ სიმაღლის შენობის სახურავიდან მაღლა აისროლა. ბურთის დედამიწიდან h მანძილი $h(t) = -5t^2 + 15t + 30$ ფორმულით შეიძლება გამოვითვალოთ. რამდენი წამის შემდეგ იქნება ბურთი დედამიწიდან:
- ა) 40 მ-ზე მეტ და 50 მ-ზე ნაკლებ სიმაღლეზე?
ბ) 12 მ-ის სიმაღლეზე?
- 16 > a -ს რა მნიშვნელობებისათვის მდებარეობენ $y = ax^2 + 2x + 1$ პარაბოლის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილები $x = 1$ წერტილის სხვადასხვა მხარეს?
- 17 > იპოვეთ უტოლობის დამაკმაყოფილებელი მთელი რიცხვების ჯამი.
- ა) $\frac{x^2-4x}{|x-3|} \leq 0$ ბ) $\frac{|x+1|}{x^2-9} < 0$
- 18 > a -ს რა მნიშვნელობებისათვისაა $ax^2 - ax + 1 > 0$ უტოლობა მართებული x -ის ყველა მნიშვნელობისათვის?

ვექტორები



პრაქტიკული მეცადინეობა

მოცემული მასშტაბისა და მიმართულების მიხედვით გაავლეთ მანძილების შესაბამისი მონაკვეთები. მიმართულება ისრით აღინიშნეთ.

25 კმ ჩრდილოეთით 1 სმ : 5 კმ	20 მ მარჯვნივ 1 სმ : 5 მ	4 კმ მარცხნივ 1 სმ : 1 კმ
250 მ ზევით 1 სმ : 25 მ	100 მ ქვევით 1 სმ : 20 მ	15 კმ ჩრდილოეთით 1 სმ : 3 კმ

ვექტორები

სხვადასხვა სიდიდეები, მაგალითად, მასა სიგრძე, დრო, ტემპერატურა და სხვა მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით ხასიათდებიან. ამნაირ სიდიდეებს სკალარული სიდიდეები ეწოდებათ, ზოგიერთი სიდიდეები კი, მაგალითად, ადგილმონაცვლეობა, სიჩქარე, აჩქარება, ძალა და სხვა განისაზღვრება არა მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით, არამედ მიმართულებითაც. ამ სახის სიდიდეებს ვექტორული სიდიდეები ეწოდება. გადაადგილება ვექტორული სიდიდეების ყველაზე მარტივი ნიმუშია. სხეულის A წერტილიდან B წერტილში გადაადგილება A-დან B-საკენ მიმართული მონაკვეთით - ვექტორით აღინიშნება.

ვექტორი მიმართული მონაკვეთით გამოისახება. ვექტორის მაჩვენებელი მონაკვეთის სიგრძეს **ვექტორის სიგრძე ან მოდული** ეწოდება.

ვექტორი საწყისი და ბოლო წერტილის დასახელებით აღინიშნება. მაგალითად, $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი, სადაც A ვექტორის საწყისი, B კი ბოლო წერტილია. ვექტორები პატარა ასოებითაც აღინიშნება, მაგალითად, $\vec{a}$ ვექტორი.

$\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე $|\vec{a}|$ სახით აღინიშნება.

• თუ ორი ვექტორი ერთნაირმიმართულებიანია და სიგრძეებიც ტოლი აქვთ, მათ ტოლი ვექტორები ეწოდება.

სურათზე მოცემული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ტოლი ვექტორებია: $\vec{a} = \vec{b}$

• ორი მოპირდაპირე მიმართულების მქონე ვექტორს, რომლებსაც ტოლი სიგრძეები აქვთ, მოპირდაპირე ვექტორები ეწოდება. სურათზე მოცემული $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორები მოპირდაპირე ვექტორებია.

$$|\vec{p}| = |\vec{q}|, \quad \vec{p} = -\vec{q}$$



$\overrightarrow{AB}$ ვექტორი და $\overrightarrow{BA}$ ვექტორი მოპირდაპირე ვექტორებია: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

თუ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილები ემთხვევა ერთმანეთს, მაშინ ვექტორს **ნულოვანი ვექტორი** ეწოდება $\vec{0}$ -ით აღინიშნება. ნულოვანი ვექტორის სიგრძე ნულის ტოლია, ხოლო მიმართულება განუსაზღვრელია.

თუ ვექტორების გამომსახველი მიმართული მონაკვეთები პარალელურია ან ერთ წრფეზე მდებარეობენ, მათ **კოლინეარული ვექტორები** ეწოდება. კოლინეარული ვექტორები შეიძლება იყოს ერთი მიმართულების ან მოპირდაპირე მიმართულების.

თუ ვექტორები ერთი მიმართულებისაა $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ სახით, $\frac{l}{m} \frac{a}{c} \frac{b}{d}$ სახით იწერება.

სურათზე $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორები კოლინეარული ვექტორებია. სადაც $l \parallel m$.

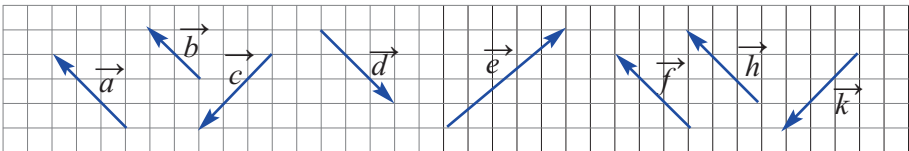
ვექტორები

სასწავლო დავალებები

- 1 > რომელ შემთხვევებში შეიძლება ვისაუბროთ ვექტორებზე და რომელ შემთხვევებში სკალარულ სიდიდეებზე?
1. ავტომობილი აღმოსავლეთის მიმართულებით 60 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობს.
 2. სევენჯმა ბურთი ჰორიზონტალურად 30° -იანი კუთხის მიმართულებით 100 ნ. ძალით წინ ისროლა.
 3. ჰესენის სიმაღლე 1მ და 75 სმ-ია. მასა 72 კგ-ია.
 4. პარაშუტისტი 20 კმ/სთ სიჩქარით თვითმფრინავიდან გადმოხტა.

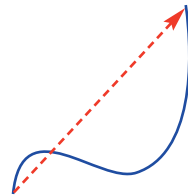
- 2 > რომელია ვექტორული სიდიდე?
- 1) 5,6 კგ
 - 2) 3,2 მ/წმ, ჩრდილო-აღმოსავლეთი მიმართულებით
 - 3) 9,81 მ/წმ², ქვევით
 - 4) $8,8 \times 10^{-3}$ მ³

- 3 > შეასრულეთ დავალებები სურათის მიხედვით.

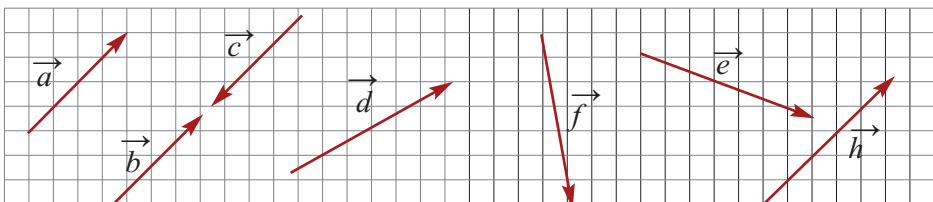


- ა) დაწერეთ ყველა ვექტორი, რომლის სიგრძე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძის ტოლია.
- ბ) დაწერეთ ყველა ვექტორი, რომლის მიმართულება $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულებისაა.
- დაწერეთ $\vec{a}$ ვექტორის ტოლი ყველა ვექტორი.
- დ) დაწერეთ $\vec{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი.

- 4 > ა) სურათზე ველოსიპედის გავლილი გზა ცისფერი ხაზითაა ნაჩვენები. რომელი სიდიდეა ნაჩვენები წითელი ხაზით?
- ბ) მასისა და წონის სიდიდეებიდან რომელია ვექტორიული და რომელია სკალარული სიდიდე? მოსაზრება განმარტეთ.



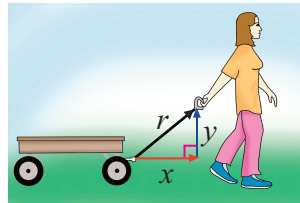
- 5 > შეარჩიეთ და დაწერეთ $\vec{b}$ ვექტორის კოლინეარული ვექტორი.



- 6 > რვეულში ჩაიხაზეთ: ა) ორი კოლინეარული ვექტორი; ბ) ორი მოპირდაპირე ვექტორი; გ) ორი ტოლი ვექტორი.
- 7 > რასიმის ნახაზში გადაადგილებული ვექტორის მანძილის შესაბამისი მონაკვეთის სიგრძე 6 სმ-ია. ნახაზი შესრულებულია მასშტაბით 1 სმ : 250 მ. რას უდრის რეალურად გადაადგილების მანძილი?

ვექტორები საკოორდინატო სიბრტყეზე

გამოკვლევა: ნაილეს ურიკაზე გამოყენებული ძალა ურიკის გამწევ და ამწევ კომპონენტებად იყოფა. ეს ძალები სურათზე რომელი ასოებითაა აღნიშნული? ნაილეს ურიკაზე გამოყენებული ძალის გამოთვლი-სათვის რომელი ფორმულა გამოიყენება ფიზიკაში?



ვექტორის საკოორდინატო სიბრტყეზე კომპონენტებით გამოსახვა

დავაკვირდეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე $\vec{AB}$ ვექტორს. ვექტორის B ბოლო წერტილით A საწყის წერტილთან შედარებით Ox ღერძის გასწვრივ $|a|$ ერთეულით (როცა $a > 0$ მარჯვნივ, როცა $a < 0$ მარცხნივ), Oy ღერძის გასწვრივ $|b|$ ერთეულით (როცა $b > 0$ ზევით, როცა $b < 0$ ქვევით) იცვლის ადგილს. a და b რიცხვებით განსაზღვრული (თან სიგრძე, თან მიმართულება) $\vec{AC}$ და $\vec{CB}$ ვექტორები $\vec{AB}$ ვექტორების კომპონენტებია.

საკოორდინატო სიბრტყეზე ვექტორი $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$

სახით იწერება. $\langle a; b \rangle$ ჩანაწერს ვექტორის

კომპონენტებით ჩაწერა ეწოდება.

ტოლი ვექტორების შესაბამისი კომპონენტები ტოლია.

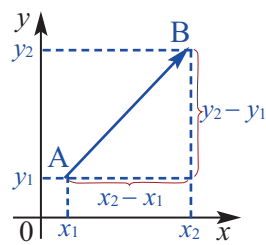
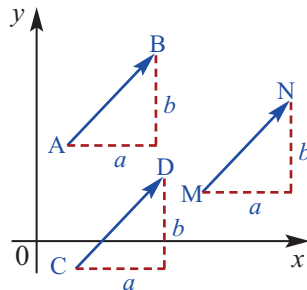
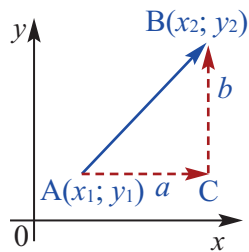
პირიქით, თუ ვექტორების შესაბამისი კომპონენტები ტოლია, მაშინ ვექტორები ტოლია. სურათზე $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{MN}$

როცა მოცემულია ნებისმიერი $\vec{AB}$ ვექტორი, სიბრტყის ნებისმიერი წერტილიდან დაწყებით ამ ვექტორის ტოლი ერთი ვექტორის აგება შეიძლება. მაშასადამე, სხვადასხვა საწყისი წერტილების შერჩევით მოცემული ვექტორის ტოლი უამრავი ვექტორის აგება შეიძლება

საწყისი წერტილი $A(x_1; y_1)$, ბოლო წერტილი კი $B(x_2; y_2)$ მქონე $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ ვექტორის ამ წერტილების კოორდინატების მიხედვით კომპონენტებით გამოსახვა შეიძლება. რადგან $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$.

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle = \langle a; b \rangle$$

სადაც a და b -ს ვექტორის კოორდინატები ეწოდება.



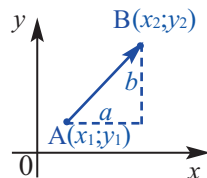
ვექტორის სიგრძე

ვექტორის სიგრძის საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატების მიხედვით ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით პოვნა შეიძლება:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

კომპონენტებით მოცემული $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ ვექტორის სიგრძე:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



ვექტორები საკოორდინატო სიბრტყეზე

ნიმუში 1. საწყისი წერტილი $(-2; 3)$, ბოლო წერტილი $(3; 7)$ მქონე $\vec{z}$ ვექტორი ჩაწერეთ $\vec{z} = \langle a; b \rangle$ სახით.

ამოხსნა: $\vec{z}$ ვექტორის კომპონენტებით $\vec{z} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle$ ჩანაწერში შესაბამისი კოორდინატები რომ გავითვალისწინოთ:

$$\vec{z} = \langle 3 - (-2); 7 - 3 \rangle = \langle 5; 4 \rangle \quad \text{პასუხი: } \vec{z} = \langle 5; 4 \rangle$$

ნიმუში 2. $\vec{a} \langle 3; 6 \rangle$ ვექტორის საწყისი წერტილი $(2; 3)$ -ია. იპოვეთ ამ ვექტორის ბოლო წერტილის კოორდინატები.

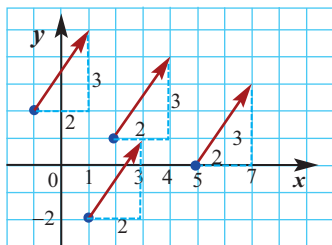
ამოხსნა: დავუშვათ, რომ $\vec{a}$ ვექტორის ბოლო წერტილის კოორდინატებია $(x; y)$.

$$\langle x - 2; y - 3 \rangle = \langle 3; 6 \rangle, \quad x - 2 = 3, \quad x = 5; \quad y - 3 = 6, \quad y = 9$$

ამ ვექტორის ბოლო წერტილია $(5; 9)$.

ნიმუში 3. საკოორდინატო სიბრტყეზე გაავლეთ $\langle 2; 3 \rangle$ ვექტორის ტოლი ვექტორები, რომელთა საწყისი წერტილებია: $(-1; 2)$, $(2; 1)$, $(1; -2)$, $(5; 0)$.

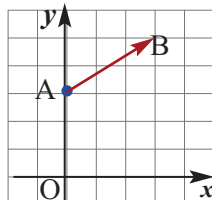
ამოხსნა: საკოორდინატო სიბრტყეზე აღინიშნება მოცემული წერტილები. ამ წერტილებიდან დაწყებით აიგება ვექტორები, რომელთა კომპონენტები $\langle 2; 3 \rangle$ ვექტორის შესაბამისი კომპონენტების ტოლია.



ნიმუში 4. $A(0; 3)$ და $B(3; 5)$ შესაბამისად $\vec{AB}$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილებია. დაწერეთ ეს ვექტორი $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ სახით და იპოვეთ სიგრძე.

ამოხსნა: $\vec{AB} = \langle 3 - 0; 5 - 3 \rangle = \langle 3; 2 \rangle$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



სასწავლო დაგეგმვები

1 > ა) P და Q შესაბამისად $\vec{PQ}$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტილებია. დაწერეთ (PQ) ვექტორი კომპონენტებით და იპოვეთ სიგრძე.

1) $P(0; 0)$, $Q(3; 4)$

2) $P(-5; 1)$, $Q(7; 6)$

3) $P(-4; -3)$, $Q(2; -7)$

4) $P(5; 4)$, $Q(-1; -4)$

5) $P(6; 3)$, $Q(-2; 1)$

6) $P(-6; 0)$, $Q(-5; -4)$

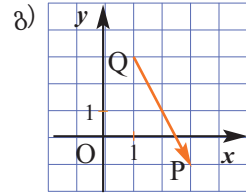
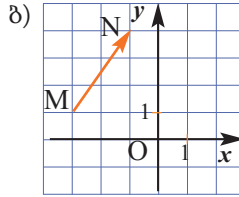
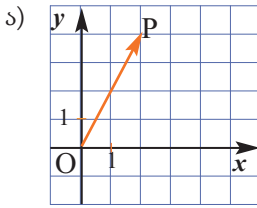
ბ) მოცემულია წერტილები: $A(-1; 2)$, $B(3; -4)$, $C(5; 6)$ ჩაწერეთ. $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$, $\vec{CB}$, $\vec{BA}$ ვექტორები კომპონენტებით.

2 > ასლანმა 2 კმ აღმოსავლეთის მიმართულებით მოძრაობის შემდეგ, 1 კმ ჩრდილოეთის მიმართულებით იმოძრავა. რეშიდმა კი 1 კმ ჩრდილოეთით მოძრაობის შემდეგ, 2 კმ აღმოსავლეთის მიმართულებით იმოძრავა. დაასაბუთეთ, რომ ასლანი და რეშიდი მოძრაობის საწყისი წერტილიდან ერთი და იგივე მანძილით არიან დაშორებულნი.

3 > საკოორდინატო სიბრტყეზე დახაზეთ $\langle 4; 2 \rangle$ ვექტორის ტოლი ვექტორები, რომელთა საწყისი წერტილებია: $(-2; 1)$, $(0; 2)$, $(3; -2)$, $(0; 0)$.

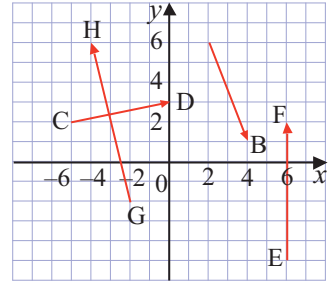
ვექტორები საკოორდინატო სიბრტყეზე

- 4 > საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახული ვექტორები წარმოადგინეთ კომპონენტებით.



- 5 > საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახული ვექტორები:

- ა) გამოსახეთ საწყისი და ბოლო წერტილების კოორდინატებით.
 ბ) დაწერეთ კომპონენტებით.
 გ) იპოვეთ ვექტორების სიგრძეები.



- 6 > ვექტორის მოცემული კოორდინატების მიხედვით იპოვეთ მეორე (საწყისი ან ბოლო) წერტილის კოორდინატები.

1) ვექტორის კომპონენტებით: $\vec{a} \langle 1; 3 \rangle$,

საწყისი წერტილის კოორდინატებია: ა) (2; 3); ბ) (0; 0); გ) (-1; 3).

2) ვექტორის კომპონენტებით: $\vec{a} \langle -2; 0 \rangle$,

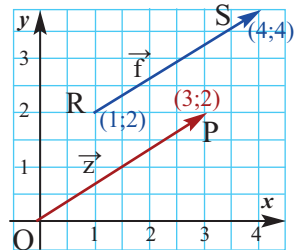
ბოლო წერტილის კოორდინატები: ა) (3;1); ბ) (5; 0); გ) (3;1).

გამოყენებითი დაგალებები

- 7 > ავტომობილის სიჩქარე $P(1; 1)$ წერტილიდან $Q(4; 5)$ წერტილის მიმართულებით ვექტორით შეიძლება გამოისახოს. საკოორდინატო სიბრტყეზე ერთი დანაყოფი ჩათვალეთ 10 კმ/სთ-ად და იპოვეთ ავტომობილის სიჩქარე.

- 8 > $\vec{OP}$ ვექტორი (0; 0) წერტილიდან (3; 2) წერტილში, $\vec{RS}$ ვექტორი კი (1; 2) წერტილიდან (4; 4) წერტილზეა მიმართული. დაამტკიცეთ, რომ ეს ვექტორები ტოლია.

მითითება: უჩვენეთ, რომ ვექტორების შესაბამისი კომპონენტები ტოლია.



- 9 > კომპონენტებით ჩანაწერების მიხედვით იპოვეთ ვექტორების სიგრძეები.

ა) $\langle 5, 1; 6, 8 \rangle$ ბ) $\langle -8; -6 \rangle$ გ) $\langle 12; -16 \rangle$

- 10 > A ვექტორის საწყისი, B კი ბოლო წერტილია. იპოვეთ ამ ვექტორის მომცველი წრფის კუთხური კოეფიციენტი.

ა) A(3;2), B(-1;4)

ბ) A(-4;3), B(2;-1)

გ) A(1;3), B(2;-1)

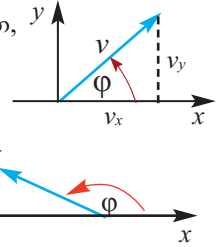
ვექტორის მიმართულება

ვექტორის მიმართულება

გამოყენების სფეროების შესაბამისად, არსებობს ვექტორის მიმართულების განსაზღვრის სხვადასხვა ხერხები. ყოველდღიურ ცხოვრებაში ჩვენ მიმართულებას გამოვხატავთ სიტყვებით: მარცხნივ, მარჯვნივ, ქვემოთ, ზემოთ, აღმოსავლეთი, დასავლეთი, ჩრდილოეთი, სამხრეთი.

საკოორდინატო სიბრტყეზე ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება Ox ღერძიდან დადებითი, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით შექმნილი კუთხით. ვუწოდოთ ამ კუთხეს დახრის კუთხე.

სურათზე ვექტორის სიგრძე $\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle$ აღნიშნულია $|\vec{v}| = v$ -ით, ხოლო მიმართულების განმსაზღვრელი კუთხე კი φ -ით.



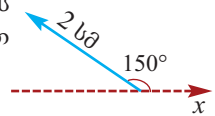
ვექტორის სიგრძე: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

ვექტორის მიმართულება: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x}$ ან $\cos \varphi = \frac{v_x}{v}$

ზოგჯერ სიმართვისათვის ვექტორი სიბრტყეზე გამოისახება მხოლოდ Ox ღერძის დადებითი მიმართულების ჩვენებით.

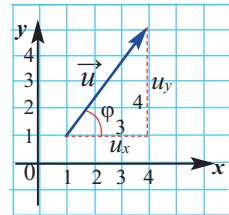
ნამუში 1. 200 მ სიგრძის ადგილმონაცვლე ვექტორის დახრის კუთხე 150° -ია. დახაზეთ ეს ვექტორი 1 სმ : 100 მ მასშტაბით.

ამოხსნა: Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით 150° -იანი კუთხის შემქმნელ სხივზე, მისი საწყისიდან 1 სმ : 100 მ მასშტაბის მიხედვით სახაზავით 2 სმ სიგრძის მონაკვეთი გაავლეთ.



ნამუში 2. განსაზღვრეთ $\vec{u} \langle 3; 4 \rangle$ ვექტორის სიგრძე და დახრის კუთხე.

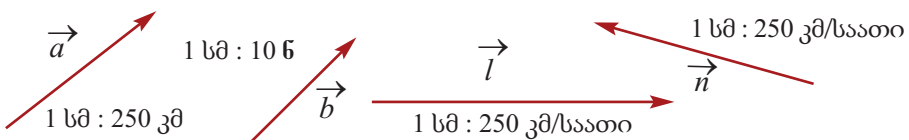
ამოხსნა: საკოორდინატო სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი მივიღოთ ვექტორის საწყისად. ამ წერტილიდან ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავდოთ 3 ერთეულის ტოლი u_x კომპონენტი, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე გადავდოთ 4 ერთეულის ტოლი u_y კომპონენტი და სურათზე ნაჩვენები წესით ავაგოთ $\vec{u}$ ვექტორი. თუ ტრანსპორტირით გავზომავთ კუთხე φ -ს, რომ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა 53° -ია. ამის გამოთვლებით შემოწმება შეიძლება.



ვექტორის სიგრძე: $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, დახრის კუთხე: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}$, $\varphi \approx 53^\circ$

სასწავლო დაფალებები

1 > აწარმოეთ გაზომვები ტრანსპორტირისა და სახაზავის დახმარებით, განსაზღვრეთ ვექტორების სიგრძე და მიმართულება.

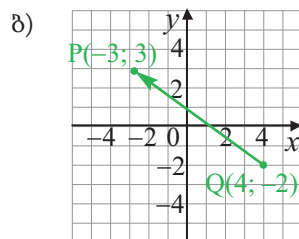
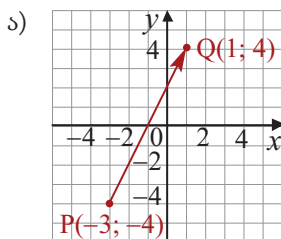
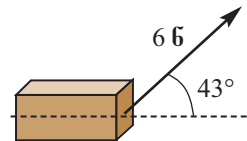


2 > სახაზავისა და ტრანსპორტირის დახმარებით დახაზეთ მოცემული ვექტორები.

სიგრძე:	დახრის კუთხე:	მასშტაბი:
5 კმ	20°	1 სმ : 1 კმ
200 კმ	170°	1 სმ : 50 კმ
1200 მ	150°	? სმ : ? კმ

ვექტორის მიმართულება

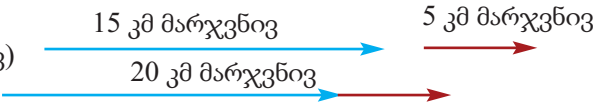
- 3 > დახაზეთ მოცემული ვექტორები, განსაზღვრეთ სიგრძე და მიმართულება.
 ა) $\langle 5; 5 \rangle$ ბ) $\langle 5; 1 \rangle$ გ) $\langle -1; 1 \rangle$ დ) $\langle -6; 8 \rangle$
- 4 > დახაზეთ შესაბამისი ვექტორები განსაზღვრული მასშტაბით.
 ა) გემის მოძრაობის სიჩქარე 60 კმ/სთ-ია, დახრის კუთხე 60° .
 ბ) ავტომობილის მოძრაობის სიჩქარე 80 კმ/სთ-ია, დახრის კუთხე 0° .
 გ) ცხენოსნის გადაადგილებაა 16 კმ, დახრის კუთხე 70° .
 დ) ობიექტზე 145° კუთხის ქვეშ გამოყენებული ძალა 100 ნ-ია.
- 5 > P ვექტორის საწყისი წერტილი, Q-ბოლო წერტილია. განსაზღვრეთ ვექტორების სიგრძე და მიმართულება.
 ა) P(0; 0), Q (-3; 2) ბ) P(1; -1), Q (-2; 3)
 გ) P(4; 2), Q (1; 3) დ) P(0; 4), Q (2; 6)
- 6 > ა) დახრის 15° -იანი კუთხით გასროლილი ყუმბარა 925 მ/წმ სიჩქარით მოძრაობდა. დაწერეთ ამ ვექტორის კომპონენტები.
 ბ) გემი 60° დახრის კუთხით, 75 კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობს. განსაზღვრეთ გემის Ox და Oy ღერძების მიმართულებით ანუ აღმოსავლეთით და ჩრდილოეთით მოძრაობის სიჩქარე.
 გ) ჩაწერეთ სურათზე მოცემული ძალის კომპონენტები.
- 7 > ქვემოთ მოცემული მოსაზრებებიდან რომელია სწორი და რომელია მცდარი?
 ა) თუ $\vec{a} = \vec{b}$, მაშინ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
 ბ) თუ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, მაშინ $\vec{a} = \vec{b}$
- 8 > **მათემატიკური ჩანაწერი.** ა) $\vec{d}$ ვექტორის საწყისი წერტილი (1; 2), ბოლო წერტილი კი (5; -1)-ია. $\vec{f}$ ვექტორის საწყისი წერტილი (5; -1), ბოლო წერტილი კი (1; 2)-ია. დაწერეთ ამ ვექტორების მსგავსი და განსხვავებული ნიშნები.
- 9 > კომპონენტებით ჩაწერეთ ის ვექტორი, რომლის სიგრძეც $\vec{KL} \langle 1; 3 \rangle$ ვექტორის ტოლია, მაგრამ მოპირდაპირე მიმართულებისაა. განმარტეთ როგორ განსაზღვრეთ ეს.
- 10 > განსაზღვრეთ ვექტორების მოდული და მიმართულება. ვექტორები რვეულში ჩაიხაზეთ.



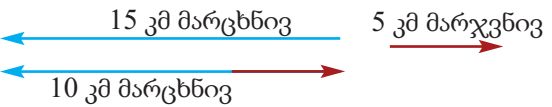
ვექტორების შეკრება და გამოკლება

კოლინეარული ვექტორების შეკრება და გამოკლება

ერთი და იგივე მიმართულების კოლინეარული ვექტორების ჯამის მაჩვენებელ ვექტორს მათი ჩამნაცვლებელი ეწოდება და მისი მოდული მოცემული ვექტორების მოდულების ჯამის ტოლია და მიმართულებაც მოცემულ ვექტორებთან იგივეა.

$$|15| + |5| = 20 \text{ კმ (მარჯვნივ)}$$


ორი მოპირდაპირე მიმართულების კოლინეარული ვექტორის ჩამნაცვლებელი ვექტორის მოდული ამ ვექტორების მოდულების სხვაობის ტოლია. მიმართულება კი დიდი მოდულის მქონე ვექტორის მიმართულებას ემთხვევა.

$$|15| - |-5| = 10 \text{ კმ (მარცხნივ)}$$


გრაფიკულად შევასრულოთ ვექტორების შეკრება რეალური ცხოვრებისეული სიტუაციების შესაბამისად.

ამოცანა 1. ჯემილემ ფინიშის ხაზზე მიღწევისათვის 3 ნიშანთან უნდა გაიაროს. მან 10 მ აღმოსავლეთით რომ გაიაროს, პირველ ნიშანს, შემდეგ 50 მ წინ რომ წავიდეს, მეორე ნიშანს და იგივე მიმართულებით კიდევ 20 მეტრი რომ გაიაროს ფინიშის ხაზს მიაღწევს. ვექტორით გამოსახეთ ჯემილეს მოძრაობის გრაფიკი. ავირჩიოთ მასშტაბი: 1 სმ : 10 მ. 1-ლი ვექტორი. 1-ლის ბოლო მეორის საწყისი წერტილია და ანალოგიური წესით მესამე ვექტორიც დავხაზოთ.



$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a} & & \vec{b} & & \vec{c} & & \\ 10 \text{ მ} & & 50 \text{ მ} & & 20 \text{ მ} & & 1 \text{ სმ} : 10 \text{ მ} \\ & \xrightarrow{\vec{d}} & & & & & \end{array}$$

ჩამნაცვლებელი ვექტორი $\vec{d}$ ავლნიშნოთ.

მისი სიგრძე $|\vec{d}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$ სახით შეიძლება გამოვსახოთ.

საერთო გადაადგილება: 10 მ + 50 მ + 20 მ = 80 მ (აღმოსავლეთით)

მიღებული მასშტაბის თანახმად 8 სმ სიგრძის $\vec{d}$ ვექტორი გაივლება.

ამოცანა 2. წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ 100 მ აღმოსავლეთის მიმართულებით, ხოლო შემდეგ 200 მ დასავლეთით იმოძრავეთ.

1 სმ : 50 მ მასშტაბით გავავლოთ მოცემული ვექტორები. როგორც ხედავთ, ჩამნაცვლებელი ვექტორის მოდული ვექტორების მოდულების სხვაობის ტოლია. მიმართულება კი დასავლეთი იქნება.

$$\begin{array}{ccc} 100 \text{ მ აღმოსავლეთით} & \vec{a} \\ 200 \text{ მ დასავლეთით} & \vec{b} \\ 100 \text{ მ დასავლეთით} & \vec{d} \\ \text{ჩამნაცვლებელი ვექტორი} & \end{array}$$

ამ შემთხვევაში $\vec{d}$ ჩამნაცვლებელი ვექტორის სიგრძეა $|\vec{d}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$.

$$200 \text{ მ} - 100 \text{ მ} = 100 \text{ მ (დასავლეთით)}$$

ვექტორების შეკრება და გამოკლება

კოლინეარული ვექტორების შეკრება და გამოკლება

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები მოპირდაპირე მიმართულების ვექტორებია, ჩამნაცვლებელი $\vec{r}$ ვექტორი:

თუ $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ მაშინ, $|\vec{r}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$, $\vec{r}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორთან ერთი მიმართულებისაა.

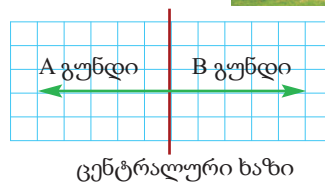
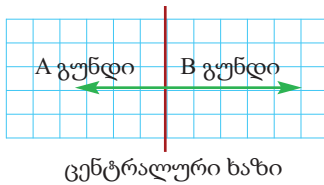
თუ $|\vec{a}| < |\vec{b}|$ მაშინ, $|\vec{r}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$, $\vec{r}$ ვექტორი $\vec{b}$ ვექტორთან ერთი მიმართულებისაა.

თუ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ მაშინ, $|\vec{r}| = 0$, ანუ მოპირდაპირე ვექტორების ჯამი $\vec{0}$ ვექტორის ტოლია.

$\vec{u} - \vec{v}$ სხვაობის მოძებნისათვის $\vec{u}$ -ზე $\vec{v}$ -ის მოპირდაპირე ვექტორის მიმატებაა საჭირო. ანუ $\vec{u} - \vec{v}$ გამოსახულება და $\vec{u} + (-\vec{v})$ გამოსახულება ეკვივალენტური გამოსახულებებია.

სასწავლო დაფალებები

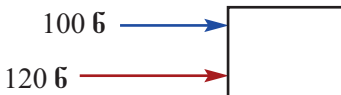
- სურათზე გამოსახულ თამაშში გამოყენებული ძალები ვექტორებით გამოისახება. ვექტორების მიმართულება თოკის გადაწევის მიმართულებებს უჩვენებს. სურათზე ორ რაუნდში თოკის გამოყენებით ძალებია ნაჩვენები.



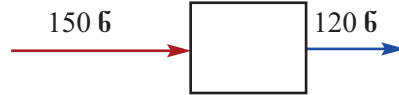
ვექტორების მიხედვით გამოთქვით მოსაზრებები 1-ელ და მე-2 რაუნდში გუნდების შედეგების შესახებ. ეს მოსაზრებები ვექტორებზე მოქმედებებით დაასაბუთეთ.

- განსაზღვრეთ ჩამნაცვლებელი ძალის მიმართულება და მოდული.

ა) კარადის ადგილის შეცვლისათვის ორი კაციდან ერთი 100 ნ, მეორე კი 120 ნ ძალის გამოყენებით ერთი მიმართულებით კარადას ეწეოდნენ.



ბ) კარადის ადგილის შეცვლისათვის ორი კაციდან ერთი 150 ნ ძალით კარადის წინ ექაჩებოდა, მეორე კი 120 ნ ძალით იგივე მიმართულებით ეწეოდა.

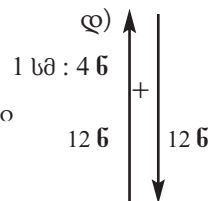


- დახაზეთ ვექტორების ჯამისა და სხვაობის მაჩვენებელი ჩამნაცვლებელი ვექტორები.

$$\text{ა) } \xrightarrow{2 \text{ კმ}} + \xrightarrow{2 \text{ კმ}} \quad 1 \text{ სმ} : 1 \text{ კმ}$$

$$\text{ბ) } \xrightarrow{40 \text{ კმ/საათი}} + \xleftarrow{60 \text{ კმ/საათი}} \quad 1 \text{ სმ} : 20 \text{ კმ/საათი}$$

$$\text{გ) } \xrightarrow{20 \text{ ნ}} - \xleftarrow{15 \text{ ნ}} \quad 1 \text{ სმ} : 5 \text{ ნ}$$

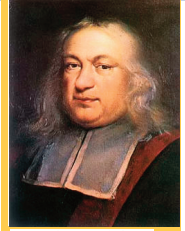


ვექტორების შეკრება და გამოკლება



რენე დეკარტი

XVII საუკუნეში მცხოვრებმა მათემატიკოსმა მეცნიერებმა რენე დეკარტმა და პიერ ფერმამ ალგებრისა და გეომეტრიის ერთმანეთთან დაკავშირებით შექმნეს ახალი მეცნიერული სფერო მათემატიკაში - ანალიტიკური გეომეტრია. ანალიტიკური გეომეტრია გეომეტრიის ამოცანების ამოხსნაში ალგებრული წესების გამოყენებას მოიცავს. ვექტორების მოქმედებების ალგებრული წესით შესრულებას შესაძლებლობები ამარტივებს ვექტორებზე ამოცანების ამოხსნას.



პიერ ფერმა

ბის ალგებრული წესით შესრულებას შესაძლებლობები ამარტივებს ვექტორებზე ამოცანების ამოხსნას.

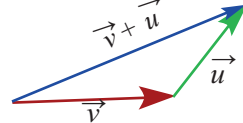
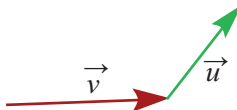
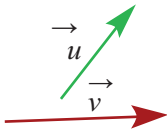
ვექტორების შეკრება და გამოკლება

არაკოლინეარული ვექტორების შეკრებისათვის არსებობს სხვადასხვა წესები. განვიხილოთ ორი გრაფიკული წესი: 1. სამკუთხედის წესი. 2. პარალელოგრამის წესი. გრაფიკული წესით ვექტორების შეკრებისას მოცემული ვექტორები და მათი ჯამის მაჩვენებელი ჩამნაცვლებელი ვექტორი განსაზღვრული მასშტაბის შერჩევით სახაზავის (აბსოლუტური მნიშვნელობა) და ტრანსპორტირის (მიმართულება) დახმარებით აიკვება.

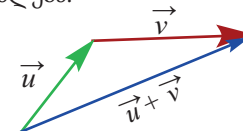
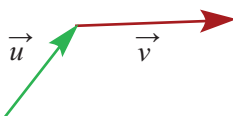
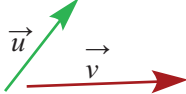
1) სამკუთხედის წესი:

1. მოცემულია:

$\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორები



$\vec{v}$ ვექტორის აგება $\vec{u} + \vec{v}$ ვექტორის მოცულობითა და მიმართულებით.

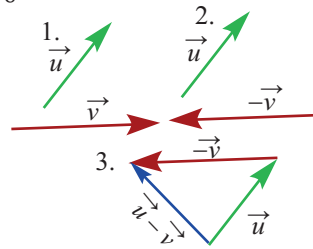


ვექტორები ნებისმიერი მიმდევრობით შეიძლება შეიკრიბოს. შეკრების მოქმედების გადანაცვლებადობის თვისება მართებულია ვექტორების შეკრებისათვისაც. ამ წესით სამი და უფრო მეტი ვექტორის შეკრებაც შეიძლება.

ვექტორების გამოკლება. განვიხილოთ გრაფიკული წესით $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ორი ვექტორის გამოკლება, ანუ განვსაზღვროთ $\vec{u} - \vec{v}$ ამისათვის: 1. გავავლოთ $\vec{v}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი ($-\vec{v}$);

2. $-\vec{v}$ ისე მოვაცუროთ, რომ $-\vec{v}$ ვექტორის საწყისი წერტილი და $\vec{u}$ ვექტორის ბოლო წერტილი დაემთხვეს ერთმანეთს.

3. $\vec{u}$ ვექტორის საწყისი წერტილი შევავერთოთ $-\vec{v}$ ვექტორის ბოლო წერტილთან. ეს $\vec{u} - \vec{v}$ ვექტორია.



ვექტორების შეკრება და გამოკლება

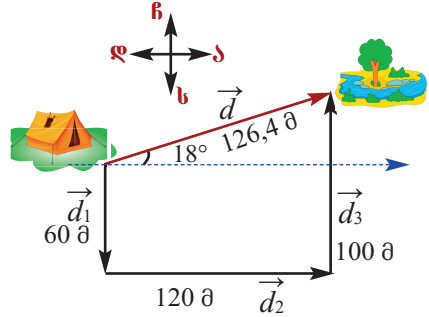
ნამუშაო 1. ჯემალმა ბანაკში დადგმული კარავიდან 60 მ სამხრეთით, 120 მ აღმოსავლეთით, შემდეგ 100 მ ჩრდილოეთით გაიარა და ტბას მიაღწია. რას უდრის უმოკლესი მანძილი კარავიდან ტბამდე?

ამოხსნა:

ავილოთ მასშტაბი 1 სმ : 40 მ.

ჯემალის მოძრაობა შესაბამისი ვექტორებით მასშტაბის მიხედვით მიმდევრობით ვუჩვენოთ.

ჯემალის მოძრაობის მაჩვენებელი პირველი ვექტორის საწყისი წერტილი შევაერთოთ მე-3 ვექტორის ბოლო წერტილთან.



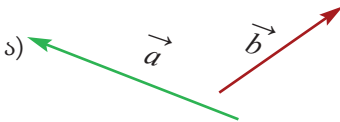
მიღებული $\vec{d}$ ჩანაცვლებელი ვექტორი $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ და $\vec{d}_3$ ვექტორების ჯამს გამოსახავს. სახაზავით გაზომვითა და მასშტაბის მხედველობაში მიღებით შეიძლება იმის განსაზღვრა, რომ ამ ვექტორის სიგრძე 126,5 მ-ია, ხოლო დახრის კუთხეს კი ტრანსპორტირით გაზომვით გავიგებთ 18° -ია.

პასუხი: ტბა კარავიდან 126,5 მ მანძილზეა.

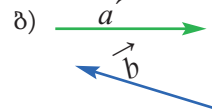
ამოხსენით ამოცანები ტრანსპორტირისა და სახაზავის გამოყენებით გაზომვისა და აგების გზით.

- 4 > 1) სურათზე მოცემული ვექტორები მოცემული მასშტაბით ჩაიხაზეთ რვეულში და ააგეთ $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორი, განსაზღვრეთ მოდული და მიმართულება.

მასშტაბი 1 სმ : 3 კმ

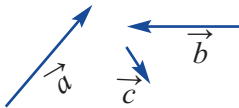


მასშტაბი 1 სმ : 1 კმ



- 5 > ჩრდილოეთის მიმართულებით 5 მ გადაადგილება გეგმაზე 3 სმ სიგრძის მონაკვეთითაა გამოსახული. გაავლეთ ამ მასშტაბით ჩრდილოეთის მიმართულებით 20 მ გადაადგილების მაჩვენებელი ვექტორი.

- 6 > სურათზე მოცემული $\vec{a}$, $\vec{b}$, და $\vec{c}$ ვექტორების გამოყენებით დახაზეთ ქვემოთ მოცემული გამოსახულებების შესაბამისი ვექტორები.



ა) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

ბ) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$

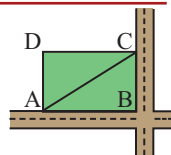
გ) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

- 7 > ელმარმა პარკში 4 კმ დასავლეთის მიმართულებით მოძრაობის შემდეგ, კიდევ 3 კმ ჩრდილოეთის მიმართულებით იმოძრავა. რამდენი კილომეტრით დაშორდა ელმარი მოძრაობის საწყის წერტილს? იპოვეთ გადაადგილების ვექტორის დახრის კუთხე.

- 8 > გემმა სამხრეთის მიმართულებით 25 კმ-ის მოძრაობის შემდეგ მიმართულება აღმოსავლეთისაკენ შეიცვალა და კიდევ 40 კმ გაიარა, შემდეგ კი 15 კმ ჩრდილოეთით გაიარა და ზღვის შუქურამდე მიაღწია. მიღებული მასშტაბით გამოსახეთ გემის გადაადგილების მაჩვენებელი ვექტორი.

ვექტორების შეკრება და გამოკლება

გამოკვლევა: წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ პარკში A წერტილიდან C წერტილში უნდა მიხვიდეთ. დაფიქრეთ, რომ თქვენ იქ მისვლისათვის სამი სხვადასხვა გზა შეგიძლიათ: 1) A წერტილიდან დაწყებით B წერტილში და იქიდან C წერტილში მისვლა; 2) A წერტილიდან D წერტილში და იქიდან C წერტილში მისვლა; 3) A წერტილიდან ერთბაშად C წერტილში მისვლა. დაწერეთ თითოეული გადანაცვლების შესაბამისი ვექტორები.

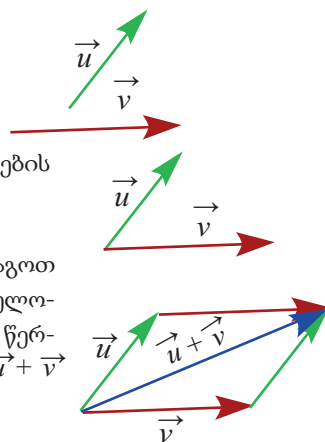


პარალელოგრამის წესი

1. მოცემულია: $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორები.

2. $\vec{v}$ ვექტორი ისე მოვაცუროთ, რომ $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორების საწყისი წერტილები დაემთხვეს ერთმანეთს.

3. $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორების პარალელური გადატანით ავაგოთ $\vec{u}$ და $\vec{v}$ გვერდებიანი პარალელოგრამი. ამ პარალელოგრამის $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორების საწყისი და ბოლო წერტილების შემაერთებელი დიაგონალი მათ ჯამს $\vec{u} + \vec{v}$ უჩვენებს.



სახაზავისა და ტრანსპორტირის დახმარებით განსაზღვრეთ აგებული ჩამნაცვლებელი ვექტორის სიგრძე და მიმართულება.

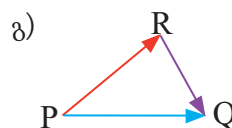
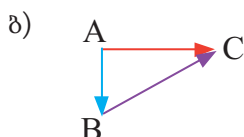
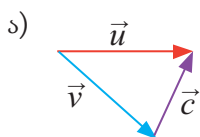
პარალელოგრამის წესით ტრანსპორტირისა და სახაზავის გამოყენებით, გაზომვებითა და აგებებით იპოვეთ ჩამნაცვლებელი ვექტორი.

9 > მოცემული სიგრძისა და დახრის კუთხის მქონე გადასანაცვლებელი ვექტორები დახაზეთ განსაზღვრული მასშტაბით და შეკრიბეთ პარალელოგრამის წესით:

- ა) 1,5 კმ, დახრის კუთხე 180° და 3 კმ, დახრის კუთხე 45° ;
- ბ) 2,5 კმ, დახრის კუთხე 80° და 5 კმ, დახრის კუთხე 15° ;
- გ) 4 კმ, დახრის კუთხე 120° და 2 კმ, დახრის კუთხე 30° .

10 > თვითმფრინავი 850 კმ/სთ სიჩქარით ჩრდილოეთის მიმართულებით მიფრინავს. 50 კმ/სთ სიჩქარით მქროლავი დასავლეთის ქარის გავლენით როგორ შეიცვლება თვითმფრინავის სიჩქარე და მიმართულება? დახაზეთ. უჩვენეთ.

11 > მოკლე სიგრძის ვექტორი გამოსახეთ დანარჩენი ორი ვექტორის ჯამის ან სხვაობის სახით.



ვექტორების შეკრება და გამოკლება

გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისება

ნებისმიერი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებისათვის მართებულია შეკრების ქვემოთ მოცემული თვისებები:

გადანაცვლებადობის თვისება: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

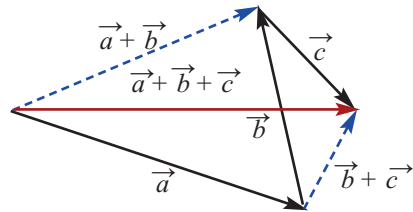
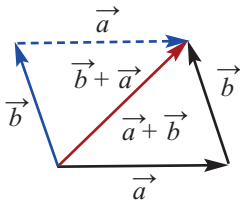
ჯუფთებადობის თვისება: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

იდენტურობის თვისება: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

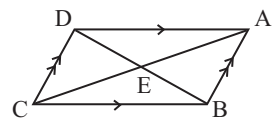
მოპირდაპირე ვექტორების ჯამი: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

ნიმუში 1. $(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} =$ *გადანაცვლებადობის თვისება*
 $= (\vec{v} + \vec{u}) + (-\vec{u}) =$ *მოპირდაპირესთან იკრიბება*
 $= \vec{v} + (\vec{u} + (-\vec{u})) =$ *ჯუფთებადობის თვისება*
 $= \vec{v} + \vec{0} =$ *მოპირდაპირე ვექტორების ჯამთან იკრიბება*
 $= \vec{v}$ *იდენტურობის თვისება*

- 12** > ქვემოთ მოცემული სურათები გაზომვებით ჩაიხაზეთ რვეულში:
- ა) ვექტორების შეკრებაში გამოიყენეთ გადანაცვლებადობისა და ჯუფთებადობის თვისებები.
- ბ) თითოეული თვისებისათვის თითო ნიმუში თქვენც დაწერეთ.



- 13** > ABCD პარალელოგრამია, E კი მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. დაწერეთ თითოეული გამოსახულების შესაბამისი ვექტორის სახელი.



ა) $\vec{AE} + \vec{EB}$

დ) $\vec{AB} - \vec{DB}$

ზ) $\vec{CE} + \vec{DC}$

ბ) $\vec{DE} + \vec{EB}$

ე) $\vec{AE} - \vec{EB} - \vec{BC}$

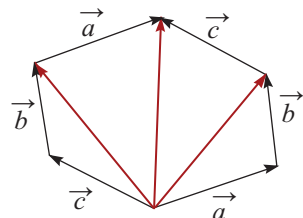
თ) $\vec{AD} + \vec{DB}$

გ) $\vec{BC} + \vec{BA}$

ვ) $\vec{BA} + \vec{AE} + \vec{ED} + \vec{DC}$

ი) $\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC}$

- 14** > წითელი ფერით დახაზული ვექტორები გამოსახეთ სხვადასხვა ხერხით $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორების ჯამის სახით. გამოიყენეთ ვექტორების შეკრების თვისებები.

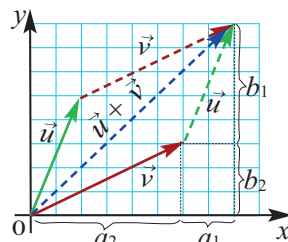


ვექტორების შეკრება და გამოკლება

ვექტორების შეკრება კომპონენტების გამოყენებით

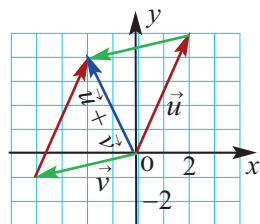
შევასრულოთ საკოორდინატო სისტემაში კომპონენტებით მოცემული ვექტორების შეკრება.

$\vec{u} = \langle a_1; b_1 \rangle$ და $\vec{v} = \langle a_2; b_2 \rangle$ ვექტორების ჯამი
 $\vec{u} + \vec{v} = \langle a_1 + a_2; b_1 + b_2 \rangle$ ვექტორია.

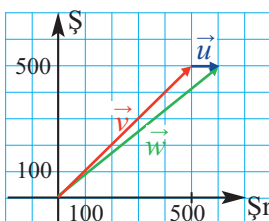


მაგალითი 1. თუ $\vec{u} = \langle 2; 5 \rangle$ და $\vec{v} = \langle -4; -1 \rangle$, მაშინ
 $\vec{u} + \vec{v}$ ვექტორი გამოსახებული კომპონენტებით.

ამოხსნა: $\vec{u} + \vec{v}$ ვექტორის კომპონენტების მოძებნისათვის $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორების შესაბამისი კომპონენტების ჰორიზონტალური (აბცისთა ღერძის) და ვერტიკალური (ორდინატა ღერძის) კომპონენტების შეკრებაა საჭირო.
 $\vec{u} + \vec{v} = \langle 2 + (-4); 5 + (-1) \rangle = \langle -2; 4 \rangle$



მაგალითი 2. თვითმფრინავი ჩრდილო-აღმოსავლეთი მიმართულებით საათში მიახლოებით 707 მილის სიჩქარით მიფრინავს. თვითმფრინავის სიჩქარეს $\vec{v} = \langle 500; 500 \rangle$ ვექტორი გამოსახავს. საათში 40 მილის სიჩქარით ქრის დასავლეთის ქარი. ქარის სიჩქარეს $\vec{u} = \langle 40; 0 \rangle$ ვექტორი გამოსახავს. როგორ შეიცვალა თვითმფრინავის სიჩქარე ქარის გავლენით? კომპონენტებით უჩვენეთ ამ სიჩქარის გამომსახველი ვექტორი.



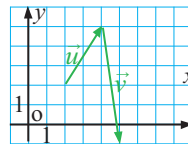
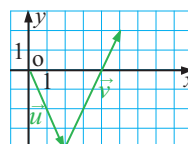
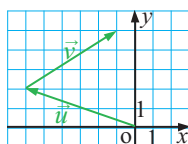
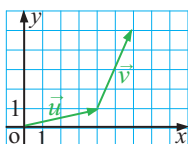
$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} = \langle 500 + 40; 500 + 0 \rangle = \langle 540; 500 \rangle$$

თვითმფრინავის საბოლოო სიჩქარე: $|\vec{w}| = \sqrt{540^2 + 500^2} \approx 736$ მილი/საათია.

მსგავსი წესით შეიძლება იმის ჩვენება, რომ $\vec{u} - \vec{v} = \langle a_1 - a_2; b_1 - b_2 \rangle$

მაგალითი 3. თუ $\vec{u} = \langle 2; 5 \rangle$ და $\vec{v} = \langle -5; -1 \rangle$, მაშინ
 $\vec{u} - \vec{v} = \langle 2 - (-5); 5 - (-1) \rangle = \langle 7; 6 \rangle$

- 15> $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორების გამოსახულება რვეულში გადაიხაზეთ. თითოეული ეს ვექტორი დაწერეთ კომპონენტებით. $\vec{u} + \vec{v}$ ჯამის გამომსახველი ვექტორი დაწერეთ კომპონენტებით.



- 16> თვითმფრინავი 650 კმ/სთ სიჩქარით აღმოსავლეთის მიმართულებით მიფრინავს. გარკვეული დროის შემდეგ 80 კმ სიჩქარით, 45° -იანი დახრის კუთხით სამხრეთ-აღმოსავლეთის ქარმა დაიწყო ქროლა. რამდენი კილომეტრით დააშორებს ქარი თვითმფრინავს აღმოსავლეთის მიმართულების გზიდან ყოველ საათში?

ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები და ვექტორების კომპონენტები

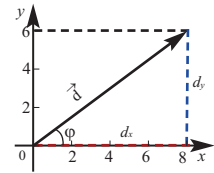
საკოორდინატო სისტემაზე მოცემული $\vec{d}$ ვექტორის კომპონენტებით $\vec{d} = \langle d_x; d_y \rangle$ ჩანაწერი გამოვსახოთ ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების დახმარებით. თუ $|\vec{d}| = d$ ავღნიშნავთ და

$$\cos \varphi = \frac{d_x}{d} \quad \sin \varphi = \frac{d_y}{d}$$

$$d_x = d \cos \varphi \quad d_y = d \sin \varphi \quad \text{გავითვალისწინებთ} \quad \vec{d} = \langle d \cos \varphi; d \sin \varphi \rangle$$

$\vec{d} = \langle d \cos \varphi; d \sin \varphi \rangle$ ჩანაწერიც ვექტორის კომპონენტებით გამოსახვის ფორმაა.

ვექტორის მიმართულების $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d_y}{d_x}$ სახით პოვნაც შეიძლება.

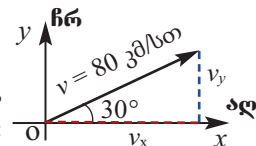


ნამუშაო 1. ავტომობილი 30° -იანი დახრის კუთხით 80 კმ/სთ სიჩქარით ჩრდილო-აღმოსავლეთის მიმართულებით მოძრაობს. დაწერეთ სიჩქარის ვექტორი კომპონენტებით.

ამოხსნა: მონაცემების თანახმად: $|\vec{v}| = 80$ (კმ/სთ), $\varphi = 30^\circ$

$$\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle = \langle v \cos \varphi; v \sin \varphi \rangle = \langle 80 \cos 30^\circ; 80 \sin 30^\circ \rangle$$

30° -იანი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობის გათვალისწინებით სიჩქარე აღმოსავლეთის მიმართულებით: $v_x = v \cos \varphi = 80 \cdot \cos 30^\circ \approx 80 \cdot 0,87 \approx 69,6$ (კმ/სთ) სიჩქარე ჩრდილოეთის მიმართულებით: $v_y = v \sin \varphi = 80 \cdot \sin 30^\circ = 80 \cdot 0,5 = 40$ (კმ/სთ).



ნამუშაო 2. ბურთის მოძრაობის მოდული 18 მ, დახრის კუთხე 40° -ის მქონე $\vec{d}_1$ და მოდული 10 მ, დახრის კუთხე 150° -ის მქონე $\vec{d}_2$, ორი ვექტორია გამოსახული. განსაზღვრეთ ბურთის გადაადგილების მაჩვენებელი ვექტორი (მოდული და დახრის კუთხე).

ამოხსნა: ბურთის გადაადგილება: $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$

$\vec{d}_1$ და $\vec{d}_2$ ვექტორები ჩაწეროთ კომპონენტებით:

$$\vec{d}_1 = \langle d_{1x}; d_{1y} \rangle = \langle 18 \cos 40^\circ; 18 \sin 40^\circ \rangle$$

$$\vec{d}_2 = \langle d_{2x}; d_{2y} \rangle = \langle 10 \cos 150^\circ; 10 \sin 150^\circ \rangle$$

$$\text{სადაც } d_{1x} = 18 \cos 40^\circ \approx 13,79; \quad d_{1y} = 18 \sin 40^\circ = 11,57;$$

$$d_{2x} = 10 \cos 150^\circ = -10 \cos 30^\circ \approx -8,66;$$

$$d_{2y} = 10 \sin 150^\circ = 10 \sin 30^\circ = 5$$

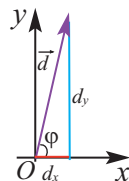
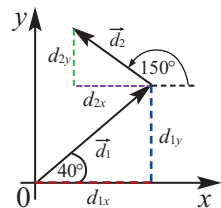
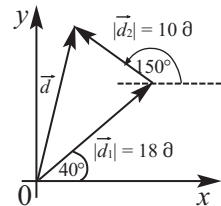
$\vec{d}$ ვექტორის კომპონენტებით ჩანაწერი იქნება: $\vec{d} = \langle d_x; d_y \rangle$.

კომპონენტებით მოცემული ვექტორების შეკრების თანახმად:

$$d_x = d_{1x} + d_{2x} \approx 13,79 + (-8,66) = 5,13; \quad d_y = d_{1y} + d_{2y} \approx 11,57 + 5 = 16,57$$

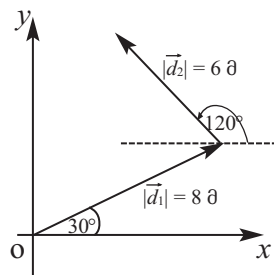
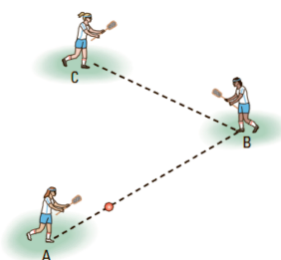
ბურთის Ox და Oy ღერძების მიხედვით გადაადგილება გადავიტანოთ ახალ კოორდინატა სისტემაში. ვიპოვოთ $\vec{d}$ ვექტორის სიგრძე და დახრის კუთხე: $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \approx \sqrt{5,13^2 + 16,57^2} \approx 17,35$ (მ)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d_y}{d_x} \approx \frac{16,57}{5,13} \approx 3,23; \quad \varphi \approx 73^\circ$$



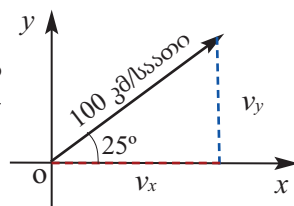
ვექტორების კომპონენტები და ტრიგონომეტრიული თანაფარდობები

- 1 > საკოორდინატო სისტემაზე ბურთის მოძრაობა ასახულია ვექტორებით. გამოსახულების მიხედვით ნიმუში 2-ის შესაბამისად დაწერეთ ამოცანის პირობა და ამოხსენით.



- 2 > ცხენოსანმა 40 მ დასავლეთით, შემდეგ კი 30 მ ჩრდილოეთის მიმართულებით იმოძრავა. განსაზღვრეთ ცხენოსნის გადაადგილების მაჩვენებელი ვექტორის მოდული და მიმართულება.

- 3 > სურათზე მოცემული $\vec{v}$ სიჩქარის ვექტორი დაწერეთ კომპონენტებით, ტრიგონომეტრიული თანაფარდობების გამოყენებით.



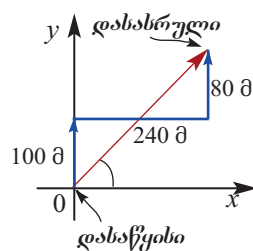
- 4 > თითოეული შემთხვევისათვის შესაბამისად $\vec{R}$ ვექტორი Ox და Oy ღერძების მიხედვით კომპონენტებით $\langle R_x; R_y \rangle$ სახით დაწერეთ.

ა) დახრის კუთხე 45° , საათში 20 კმ სიჩქარით ჩრდილო-აღმოსავლეთით მოძრავი გემის სიჩქარის მაჩვენებელი ვექტორის;

ბ) 300 კმ/სთ სიჩქარით დასავლეთის მიმართულებით მფრინავი თვითმფრინავის სიჩქარის მაჩვენებელი ვექტორის;

გ) 10 კმ/სთ სიჩქარით ჩრდილოეთის მიმართულებით მოძრავი ველოსიპედის სიჩქარის მაჩვენებელი ვექტორის.

- 5 > წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ 100 მ დასავლეთით, 240 მ აღმოსავლეთით და ისევ 80 მ ჩრდილოეთით იმოდრავით. რამდენ მეტრ მანძილზე იმყოფებით მოძრაობის საწყისი წერტილიდან?

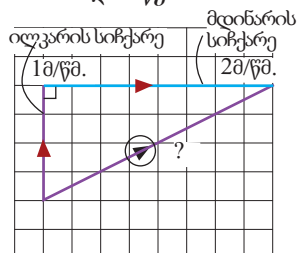


- 6 > ილკარი 1 მ/წმ სიჩქარით ნაპირის პერპენდიკულარულად მდინარეში მიცურავს. მდინარის დინების სიჩქარე 2 მ/წმ-ია, სიგანე კი 40 მ-ია. იპოვეთ:

ა) დრო რომლის განმავლობაშიც ილკარი გადაცურავს მდინარეს;

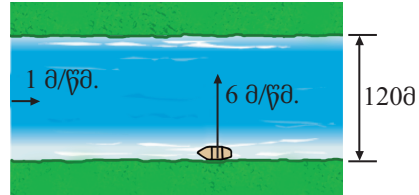
ბ) მანძილი რომელიც გადაცურა ილკარმა;

გ) ნაპირთან მიმართებაში რა კუთხით გადაცურავს ილკარი მდინარეს?



ამოცანების ამოხსნა ვექტორების გამოყენებით

- 1 > ნავი 120 მ სიგანის მდინარეში დინების მართობულად მოძრაობს. ნავის სიჩქარე მდგარ წყალში 6 მ/წმ-ია. მდინარის დინების სიჩქარე 1 მ/წმ-ია.

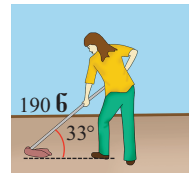


ა) რა დრო დასჭირდება ნავს მდინარის გადაცურვისათვის?

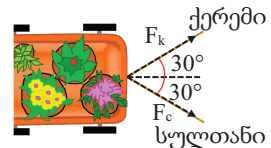
ბ) რამდენი მეტრით ქვევით გადაანაცვლებს ნავს მეორე ნაპირზე გასვლამდე დინების სიჩქარე?

გ) ნაპირთან მიმართებაში როგორი კუთხით იმოძრაავებს ნავი?

- 2 > გულნარი იატაკის გასუფთავებისას ცოცხს 33° -იანი კუთხით 190 ნ ძალის გამოყენებით ამოძრავებს. იპოვეთ გულნარის გამოყენებული ძალის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური კომპონენტები.



- 3 > ქერეში და სულთანის ურიკას სურათზე ნაჩვენებ მიმართულებით 30° -იანი კუთხით, ერთნაირი ძალით ეწევიან.

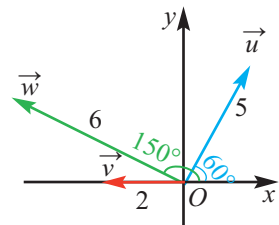


ა) რამდენ ნიუტონ ძალას იყენებდა თითოეული, თუ მათი ერთად გამოყენებული ძალა 170 ნ-ია?

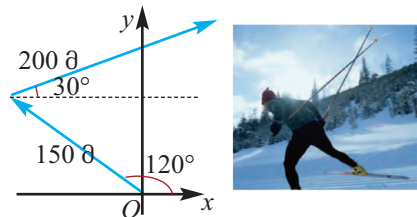
ბ) თუ თითოეულის გამოყენებული ძალა იქნება 70 ნ, რამდენი ნიუტონი იქნება ჩასანაცვლებელი ძალა?

გ) ქერეში და სულთანი ერთმანეთს უფრო თუ მიუახლოვდებიან, როგორ შეიცვლება გამოყენებული ჩასანაცვლებელი ძალა?

- 4 > მონაცემების მიხედვით დაწერეთ $\vec{u}$, $\vec{v}$ და $\vec{w}$ ვექტორები კომპონენტებით.



- 5 > მოთხილამურემ ჯერ გაიარა 150° მ 120° -იანი დახრის კუთხით, ხოლო შემდეგ 200 მ 30° -იანი დახრის კუთხით. განსაზღვრეთ მოთხილამურის გადაადგილების ვექტორი.



ვექტორის რიცხვზე გამრავლება

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება

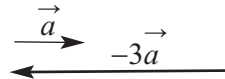
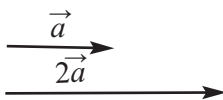
$\vec{a}$ ვექტორის k რიცხვზე ($k \in \mathbb{R}$) ნამრავლი აღინიშნება $k \cdot \vec{a}$ -თი და ამ ვექტორის სიგრძე $|k| \cdot |\vec{a}|$ -ს ტოლია.

როცა $k > 0$, მაშინ $k\vec{a}$ ვექტორსა და $\vec{a}$ ვექტორს ერთი მიმართულება აქვთ.

როცა $k < 0$, მაშინ $k\vec{a}$ ვექტორსა და $\vec{a}$ ვექტორს მოპირდაპირე მიმართულებები აქვთ.

1) $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძის 2-ჯერ გაზრდით მიღებული $2\vec{a}$ ვექტორია გამოსახული. მათ ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ.

2) სურათზე $\vec{a}$ ვექტორი და $-3\vec{a}$ ვექტორია გამოსახული. ამ ვექტორებს მოპირდაპირე მიმართულება აქვთ.



ნებისმიერი ვექტორი მისი (ნულისაგან განსხვავებული) რიცხვზე გამრავლებით მოცემული ვექტორის კოლინეარულია.

თუ $\vec{a} \neq \vec{0}$ და $\vec{b}$ ვექტორები კოლინეარულია, მაშინ არსებობს ისეთი ერთადერთი k რიცხვი, რომ $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების თვისებები.

1. ჯუფთებადობის თვისება.

ნებისმიერი k და n რიცხვებისათვის ($k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$)

$$(kn) \cdot \vec{a} = k(n \cdot \vec{a})$$

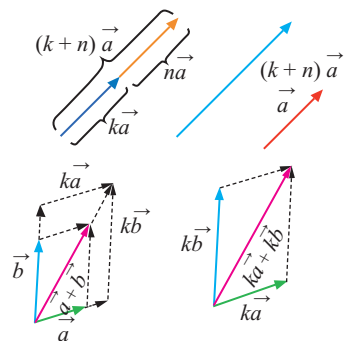
2. განრიგებადობის თვისება.

ნებისმიერი k და n რიცხვებისათვის ($k, n \in \mathbb{R}$)

$$(k+n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$$

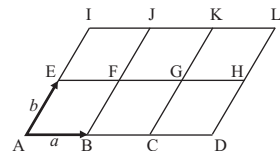
ნებისმიერი k რიცხვისათვის ($k \in \mathbb{R}$)

$$(\vec{a} + \vec{b})k = k\vec{a} + k\vec{b}$$



სასწავლო დაგეგმვა

- 1 > სურათზე მოცემული ფიგურა შედგება კონგრუენტული პარალელოგრამებისაგან. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები პარალელოგრამის გვერდებზეა. ამ ვექტორების დახმარებით გამოსახეთ მოთხოვნილი ვექტორები:



ა) $\vec{AC}$

ბ) $\vec{KC}$

გ) $\vec{AD} + \vec{DL}$

დ) $\vec{LI} + \vec{IE}$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება

- 2 > 2) სიჩქარის ვექტორის მნიშვნელობა $v = 400$ კმ/სთ, დახრის კუთხე 30° -ია. ამ პირობის მიხედვით განსაზღვრული მასშტაბით რვეულში ჩაიხაზეთ ქვემოთ მოცემული ვექტორები.

ა) $2\vec{v}$ ბ) $-3\vec{v}$ გ) $0,5\vec{v}$ დ) $-5\vec{v}$

- 3 > $\vec{a}$ ჩაიხაზეთ რვეულში სახაზავისა და ტრანსპორტირის დახმარებით $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ ტოლობის მართებულობა k -სა და m -ის მოცემული მნიშვნელობებისათვის გეომეტრიულად უჩვენეთ რვეულში ჩახაზვით.

ა) $k = 2$ და $m = 2$ ბ) $k = -3$ და $m = 2$ გ) $k = -2$ და $m = -1$

- 4 > ქვემოთ მოცემული ინფორმაციების მიხედვით $\vec{u}$ და $\vec{v}$ ვექტორების შესახებ რომელი მოსაზრების გამოთქმა შეიძლება?

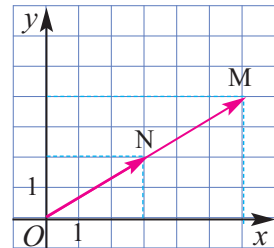
ა) $2\vec{u} = 4\vec{v}$ ბ) $\vec{u} - \vec{v} = 0$ გ) $4(\vec{u} + \vec{v}) - 3(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

- 5 > სურათის მიხედვით შეასრულეთ დავალებები.

1) $\vec{ON}$ ვექტორი ჩაწერეთ კომპონენტებით და გამოთვალეთ მისი სიგრძე.

2) $\vec{OM}$ ვექტორი ჩაწერეთ კომპონენტებით და გამოთვალეთ მისი სიგრძე.

3) შეადარეთ $\vec{ON}$ და $\vec{OM}$ ვექტორების სიგრძეები და შესაბამისი კომპონენტები.



მოქმედებები კომპონენტებით მოცემულ ვექტორებზე

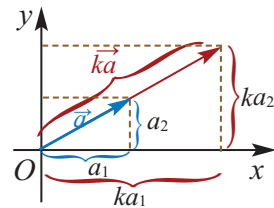
კომპონენტებით მოცემული $\vec{a} \langle a_1; a_2 \rangle$

ვექტორისათვის $k\vec{a} = \langle ka_1; ka_2 \rangle$

ნამუში 1: თუ $\vec{a} = \langle -2; 5 \rangle$, მაშინ $2\vec{a} = \langle -4; 10 \rangle$

ნამუში 2: თუ $\vec{a} = \langle 3; -2 \rangle$ და $\vec{b} = \langle -1; 4 \rangle$, მაშინ

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \cdot \langle 3; -2 \rangle + 3 \cdot \langle -1; 4 \rangle = \langle 6; -4 \rangle + \langle -3; 12 \rangle = \langle 6 + (-3); -4 + 12 \rangle = \langle 3; 8 \rangle$$



- კოლინეარული ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია.
- პირიქით, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები პროპორციულია, მაშინ ეს ვექტორები კოლინეარულია.

როცა $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, მაშინ $\vec{a} \langle a_1; a_2 \rangle$ და $\vec{b} \langle b_1; b_2 \rangle$ ვექტორები კოლინეარულობის პირობა:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

ნამუში 3: m -ის რა მნიშვნელობისთვისაა $\vec{b} \langle -1; 4 \rangle$ და $\vec{a} \langle 3; m \rangle$ ვექტორები კოლინეარული?

$$\frac{3}{-1} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = -12$$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება

- 6 > მოცემულია $\vec{a} = \langle 2; 3 \rangle$ და $\vec{b} = \langle -4; 5 \rangle$. კომპონენტებით ჩაწერეთ ვექტორები:

ა) $2\vec{a} + 3\vec{b}$

ბ) $\vec{a} + 2\vec{b}$

გ) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

- 7 > ა) იპოვეთ $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $\vec{a} = \langle -6; 2 \rangle$ და $\vec{b} = \langle 2; -4 \rangle$.

ბ) იპოვეთ $3\vec{c} - \vec{d}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $\vec{c} = \langle 2; 3 \rangle$ და $\vec{d} = \langle 1; -3 \rangle$.

- 8 > შეარჩიეთ $\vec{f} = \langle 2; -3 \rangle$ ვექტორის კოლინეარული ვექტორები.

ა) $\vec{a} = \langle 4; 6 \rangle$

ბ) $\vec{b} = \langle 1; -1,5 \rangle$

გ) $\vec{c} = \langle -4; 6 \rangle$

დ) $\vec{d} = \langle -2; -3 \rangle$

- 9 > k -ს რა მნიშვნელობისათვის არიან მოცემული ვექტორები კოლინეარული?

ა) $\vec{a} = \langle 2; -3 \rangle$ და $\vec{b} = \langle k; 9 \rangle$

ბ) $\vec{a} = \langle 3; k \rangle$ და $\vec{b} = \langle k; 12 \rangle$

- 10 > ABCD პარალელოგრამში $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. X წერტილი BC გვერდზე მდებარეობს. ისე, რომ $BX = 3 \cdot XC$, Y წერტილი კი CD გვერდს შუაზე ყოფს. მოთხოვნილი ვექტორები გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებით.

1) $\vec{BD}$

2) $\vec{AX}$

3) $\vec{BY}$

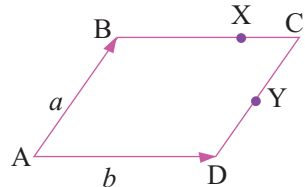
4) $\vec{DY}$

5) $\vec{AC}$

6) $\vec{AY}$

7) $\vec{DX}$

8) $\vec{XY}$



გამოყენებითი დავალებები

- 11 > ნიუტონის კანონის თანახმად, გრავიტაციის ძალა $\vec{F}_g$ (ნიუტონებში) სხეულის მასის (კილოგრამობით) და გრავიტაციის აჩქარების (მ/წმ²) ნამრავლის ტოლია. $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$, ამ ძალას სხეულის წონა ეწოდება და $\vec{P} = m\vec{g}$ სახით იწერება. გრავიტაციული აჩქარება დედამიწაზე 9,8 მ/წმ²-ია, ხოლო მთვარეზე 1,6 მ/წმ²-ია. იპოვეთ 60 კგ მასის მქონე ადამიანის წონა დედამიწაზე და მთვარეზე.



- 12 > **ღია ტიპის შეკითხვა.** საკოორდინატო სისტემაზე გაავლეთ $\vec{a}$, რომლის საწყისი წერტილი კოორდინატა სათავეა და აღნიშნეთ ბოლო წერტილის კოორდინატები. შეარჩიეთ რაიმე k რიცხვი და მისი $\vec{a}$ ვექტორზე გამრავლებისას მიღებული $k\vec{a}$ ვექტორი დახაზეთ. ჩაწერეთ ამ ვექტორის ბოლო წერტილის კოორდინატები. დავალბა იგივე k რიცხვისა და $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ვექტორებისთვისაც შეასრულეთ.

- 13 > მოცემულია A $(-3; 1)$ და B $(6; 7)$ წერტილები. იპოვეთ AB მონაკვეთის AC : CB = 1 : 2 შეფარდებით გამყოფი C წერტილის კოორდინატები.

მიითითება: მიიღეთ C(x; y)-ად, გამოიყენეთ ტოლობა $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{AC}$. ჩაწერეთ $\vec{AC}$ და $\vec{AB}$ ვექტორები კომპონენტებით.

- 14 > მოცემულია წერტილები: A $(1; 1)$, B $(1; 7)$, C $(7; 7)$. იპოვეთ $\triangle ABC$ -ს მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 1 > მოცემულია ვექტორები: $\vec{u} = \langle 6; 2 \rangle$, $\vec{v} = \langle 1; 4 \rangle$, $\vec{d} = \langle 2; 5 \rangle$ და $\vec{z} = \langle -2; -5 \rangle$. იპოვეთ ვექტორების ჯამი.

ა) $\vec{v} + \vec{d}$

დ) $\vec{v} + \vec{z}$

ბ) $\vec{u} + \vec{v}$

ე) $\vec{u} + \vec{z}$

გ) $\vec{u} + \vec{d}$

ვ) $\vec{d} + \vec{z}$

- 2 > მოცემული კოორდინატების მიხედვით დაასაბუთეთ, როგორები არიან $\vec{PQ}$ და $\vec{RS}$ ვექტორები: ტოლები, პარალელურები, მოპირდაპირეები ან არ წარმოადგენენ არც ერთ ჩამოთვლილთაგანს. $P(8; -7)$, $Q(-2; 5)$, $R(8; -7)$, $S(7; 0)$

- 3 > სხეულზე ვერტიკალური და ჰორიზონტალური მიმართულებით მოქმედი ორი ძალის ჩამნაცვლებელი მნიშვნელობა 40 ნ, დახრის კუთხე 22° -ია. იპოვეთ სხეულზე გამოყენებული ძალების მნიშვნელობა.

- 4 > მოცემულია წერტილები: $M(3; 5)$ და $C(9; 8)$. K წერტილი MC მონაკვეთს $MK : KC = 2 : 1$ შეფარდებით ყოფს. იპოვეთ MK მონაკვეთის სიგრძე.

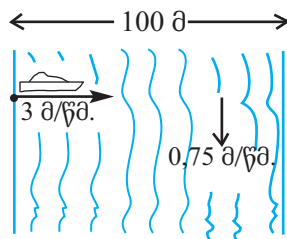
- 5 > კატერი მოძრაობს მდგარ წყალში 3 მ/წმ სიჩქარით. მდინარის სიგანე 100 მ-ია, დინების სიჩქარე კი 0,75 მ/წმ-ია. კატერი მდინარის დინების მიმართულების მართობულად მოძრაობის დაწყებით მდინარის ერთი ნაპირიდან მეორის მიმართულებით მიცურავს.

ა) რამდენი მეტრი წამში იქნება კატერის სიჩქარე?

ბ) რამდენ გრადუსიანი კუთხით გადაკვეთს კატერი მდინარეს?

გ) რა დროს მოანდომებს კატერი მდინარის გადაცურვას?

დ) დანიშნულების ადგილიდან რამდენი მეტრის მოშორებით მიაღწევს კატერი მეორე ნაპირს?



- 6 > მოდულისა და დახრის კუთხის მოცემული მნიშვნელობების მიხედვით ჩაწერეთ ვექტორები კომპონენტებით.

1) $|\vec{v}| = 12$; $\varphi = 60^\circ$

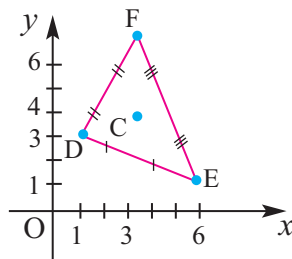
2) $|\vec{v}| = 16$; $\varphi = 120^\circ$

3) $|\vec{v}| = 28$; $\varphi = 150^\circ$

4) $|\vec{v}| = 4$; $\varphi = 135^\circ$

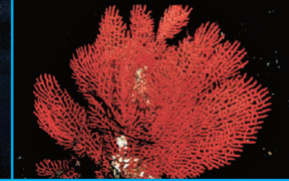
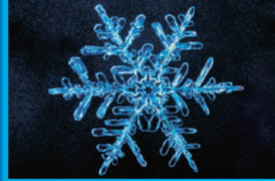
- 7 > განიხილეთ მოსაზრება $|\vec{a}| + |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$. ა) ჩაწერეთ მოსაზრება სიტყვებით; ბ) მცდარია თუ ჭეშმარიტი მოსაზრება? პასუხი დაასაბუთეთ.

- 8 > მედიანების გადაკვეთის წერტილს სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება. $D(1; 3)$ და $E(6; 1)$ წერტილები $\triangle DEF$ -ის წვეროს წერტილებია, $C(3; 4)$ კი სიმძიმის ცენტრს უჩვენებს. განსაზღვრეთ F წვეროს კოორდინატები.



1. რიცხვითი მიმდევრობები

2. გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა



რიცხვითი მიმდევრობები

არითმეტიკული პროგრესია

არითმეტიკული პროგრესიის

n -ური წევრის ფორმულა

არითმეტიკული პროგრესიის

პირველი n წევრის ჯამის

ფორმულა

გეომეტრიული პროგრესია

გეომეტრიული პროგრესიის n -ური

წევრის ფორმულა

გეომეტრიული პროგრესიის

წევრების თვისებები

გეომეტრიული პროგრესიის

პირველი n წევრის ჯამის

ფორმულა

უსასრულო გეომეტრიული

პროგრესიის ჯამი, როცა $|q| < 1$

გეომეტრიული გარდაქმნები
მოძრაობა

- პარალელური გადატანა

- პარალელური გადატანა და
ვექტორები

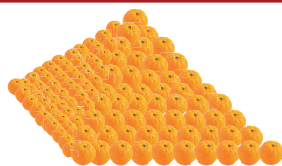
- მოძრაობა და კონგრუენტული
ფიგურები.



რიცხვითი მიმდევრობები

გამოკვლევა: სავაჭრო თაროზე ფორთოხლები დაწყობილია ისე, რომ 1-ელ რიგშია 1, მეორე რიგში - 4, მე-3 რიგში 9 და ა.შ. ისე, რომ კვადრატულფუძიანი პირამიდის სახით.

1) შეავსეთ პირველ 5 რიგში ფორთოხლების რაოდენობის მაჩვენებელი ცხრილი.



n	1	2	3		
					
a_n	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$		

2) დაწერეთ ნებისმიერ რიგში (n -ურ რიგში) ფორთოხლების რაოდენობის (a_n) მოძებნისათვის საჭირო ფორმულა.

3) ამ ფორმულით იპოვეთ ფორთოხლების რაოდენობა მე-4, მე-7 და მე-10 რიგში.

4) რვეულში გაავლეთ გრაფიკი, რომელიც უჩვენებს ფორთოხლების რაოდენობის დამოკიდებულებას ფენის ნომერზე.

რიცხვითი მიმდევრობები

♦ რიცხვთა სიმრავლეს, რომელშიც თითოეულ რიცხვს აქვს თავისი ნომერი ($n = 1, 2, 3, \dots$) რიცხვითი მიმდევრობა ეწოდება. ე.ი. რიცხვითი მიმდევრობა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაზღვრული ფუნქციაა. მაგალითად, 5, 10, 15, 20, 25, ...

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \dots$

♦ რიცხვებს, რომლებიც ქმნიან მიმდევრობას ეწოდება მიმდევრობის შესაბამისად, პირველი, მეორე, მესამე, მეოთხე და ა.შ. წევრი. მიმდევრობის წევრები, როგორც წესი, აღინიშნება ასოებით. ასოს ინდექსი უჩვენებს წევრის რიგით ნომერს. მაგალითად, პირველი წევრი a_1 , მეორე წევრი a_2 , n -ური წევრი a_n და ა.შ. თვით მიმდევრობა აღინიშნება: (a_n) ან (b_n) და ა.შ.

♦ მიმდევრობა შეიძლება იყოს სასრული და უსასრულო. მაგალითად, ორნიშნა რიცხვთა სიმრავლე შეიძლება იყოს სასრული სიმრავლის ნიმუში, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა უსასრულოა.

♦ როგორც წესი, მიმდევრობა მოიცემა ფორმულის დახმარებით, რომელიც განსაზღვრავს მიმდევრობის n -ური წევრის n -ის ნომერზე დამოკიდებულების ფუნქციას. ასეთ ფორმულას მიმდევრობის n -ური წევრის ფორმულა ეწოდება.

ნამუშა: 2, 4, 6, 8, ... ლუწ რიცხვთა მიმდევრობაა. ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი შეიძლება მოიძებნოს ფორმულით $a_n = 2n$ ამ მიმდევრობის მე-10 წევრი იქნება: $a_{10} = 2 \cdot 10 = 20$

სასწავლო დაფალებები

1 > დაწერეთ მიმდევრობის მომდევნო ორი წევრი.

ა) 1; 3; 5; 7; ...

ბ) 1; 10; 100; 1000; ...

გ) -5; 10; -15; 20; ...

დ) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \dots$

ე) $\frac{1}{10}; \frac{2}{20}; \frac{3}{30}; \frac{4}{40}; \dots$

ვ) 1,9; 2,7; 3,5; 4,3; ...

რიცხვითი მიმდევრობები

- 2 > მოცემული ფორმულის მიხედვით დაწერეთ მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი.

$a_n = n + 1$	$a_n = 3 - n$	$a_n = n^2 + 1$	$f_n = \frac{n-1}{n}$
$a_n = (n+1)^2$	$a_n = (n-1)^2$	$a_n = n(n-1)$	$f_n = \frac{n+2}{2n}$

- 3 > ა) დაწერეთ 3-ის ჯერადი ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობის პირველი შვიდი წევრი. უჩვენეთ მისი მე-5 და n -ური წევრები.

ბ) ზრდის რიგით დაწერეთ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობის პირველი 5 წევრი, რომელთა სამზე გაყოფისას ნაშთი რჩება 1.

- 4 > ა) (a_n) მიმდევრობის რომელი წევრია: 1) $a_7, a_{72}, a_k, a_{k+4}$ წევრების მომდევნო? 2) a_6, a_{50}, a_k, a_{2k} წევრების წინა წევრი?

ბ) ჩამოთვალეთ (b_n) მიმდევრობის მოცემულ ორ წევრს შორის მდებარე წევრები: 1) b_{11} და b_{15} ; 2) b_k და b_{k+3} ; 3) b_{n-3} და b_{n+2}

- 5 > 1) მიმდევრობა $b_n = 2n^2 + 1$ ფორმულითაა მოცემული. იპოვეთ მიმდევრობის წევრები, რომლის ნომერია:

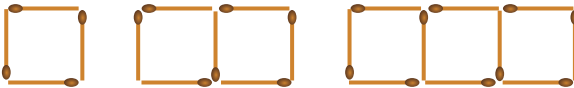
ა) 4; ბ) 5; გ) 7; დ) $k + 1$.

2) $c_n = 4n - 1$ ფორმულით მოცემულ მიმდევრობაში უჩვენეთ: ა) 27-ის; ბ) 35-ის; გ) 71-ის ტოლი წევრის ნომერი.

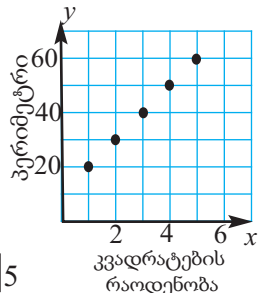
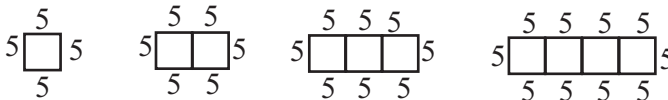
- 6 > 1) $a_n = n^2 - 8n$ ფორმულით მოცემულ მიმდევრობას აქვს თუ არა წევრი, რომელიც ტოლია: ა) 20-ის; ბ) 48-ის; გ) -15-ის; დ) 4-ის. თუ აქვს მაშინ იპოვეთ ამ წევრის ნომერი.

გამოყენებითი დავალებები

- 7 > სურათზე ნაჩვენები წესით მე-5 ნაბიჯზე ფიგურის აგებისათვის, რამდენი ასანთის ღერის გამოყენება იქნება საჭირო? დაწერეთ ფორმულა, რომელიც უჩვენებს ნებისმიერ ნაბიჯზე საჭირო ასანთის ღერების რაოდენობას.



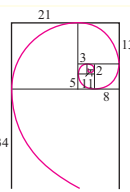
- 8 > 5 ერთეულ გვერდებიანი კვადრატები აგებული და განთავსებულია სურათზე ნაჩვენები წესით. ა) იპოვეთ ფიგურის პერიმეტრი, რომელსაც ქმნიან კვადრატები აგების ყოველ ნაბიჯზე. ბ) იპოვეთ ფიგურის პერიმეტრი, რომელიც წარმოიქმნება n -ურ ნაბიჯზე. გ) განმარტეთ, რომ სურათზე მოცემული გრაფიკი შეესაბამება მოცემულ მიმდევრობას.



- 9 > $a_n = 4^n - 1$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობის წევრები 3-ის, ხოლო $c_n = 5^n - 1$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობის წევრები კი 4-ის ჯერადებია. შეამოწმეთ ეს პირველი ხუთი წევრისათვის.



ბევრ ბუნებრივ მოვლენაში აღინიშნება ურთიერთკავშირი ფიბონაჩის მიმდევრობასთან.



ფიბონაჩი დაიბადა იტალიის ქალაქ პიზაში. მისმა ნაშრომმა “გამოთვლების წიგნი” (Liber Abaci) მოახდინა უზარმაზარი გავლენა მათემატიკური ცოდნის ევროპაში გავრცელებაზე, ემსახურებოდა ცნობარ - სახელმძღვა-

ნელოდ ევროპელ მეცნიერებს, განსაკუთრებით ვასდაუდებელია მისი როლი ინდურ-არაბული ათობითი სისტემის ევროპაში სწრაფ გავრცელებაში. იმ დროს ევროპაში ჩაწერებში და გამოთვლებში სარგებლობდნენ რომაული ციფრებით. ამ ნაწარმოებში ფიბონაჩიმ ასევე დიდი ადგილი დაუთმო კურდღლების გამრავლების მიმდევრობის შესახებ ამოცანის ამოხსნას, რომელიც იძლევა რიცხვების ასეთ მიმდევრობას: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... ამ რიცხის წევრებისათვის (როცა $n \geq 2$) მართებულია $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$. განაგრძეთ ფიბონაჩის რიგი შემდეგი სამი ნაბიჯისათვის.

მიმდევრობის მოცემის რეკურენტული და ექსპლიციტური ხერხები

ფორმულას, რომელიც მიმდევრობის ნებისმიერ წევრს, დაწყებული რაიმე წევრიდან, გამოსახავს წინა ერთი ან რამდენიმე წევრის მეშვეობით **რეკურენტულ ფორმულას** უწოდებენ (ლათინური სიტყვიდან rekurre-უკან მობრუნებას ნიშნავს.) მაგალითად, მიმდევრობაში 3; 6; 12; 24; ... სადაც $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ რეკურენტული ფორმულაა და ამ ფორმულით შეიძლება გავაგრძელოთ მიმდევრობა.

ხშირ შემთხვევაში მიმდევრობა მოიცემა ფორმულით, რომელიც გამოსახავს n -ურ წევრს ამ წევრის ნომერით. მიმდევრობის n -ური წევრის ფორმულით მოცემა **ექსპლიციტურის** ხერხია.

მაგალითად, $a_n = 2^n - 1$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობის პირველი 6 წევრია: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 15, a_5 = 31, a_6 = 63$.

10 > მოცემული მიმდევრობისათვის დაწერეთ რეკურენტული ფორმულა და n -ური წევრის ფორმულა. 1. კენტ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა; 2. ლუწ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა.

11 > დაწერეთ რეკურენტული ფორმულით მოცემული მიმდევრობის პირველი 5 წევრი.

$$\begin{array}{ll} \text{ა) } a_1 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 2 & \text{გ) } a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \\ \text{ბ) } a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + 1 & \text{დ) } a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{array}$$

12 > **გამოკვლევა. ჯგუფური სამუშაო.** ერთი მიმდევრობა, ორი რეკურენტული ფორმულა

ა) თუ $a_1 = 11$ ისარგებლეთ მოცემული პირობებით, ფორმულებით და დაწერეთ მიმდევრობის პირველი ოთხი წევრი.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{თუ } a_n \text{ ლუწი რიცხვია;} \\ 3a_n + 1 & \text{თუ } a_n \text{ კენტი რიცხვია.} \end{cases}$$

ბ) დაწერეთ ა) პუნქტის ფორმულებით მოცემული მიმდევრობის პირველი ოთხი წევრი, თუ $a_1 = 6$.

13 > დაადგინეთ კანონზომიერება მიმდევრობის წევრებისათვის და დაწერეთ მისი კიდევ ოთხი წევრი.

$$\text{ა) } 3; 6; 4; 8; 6; 12; 10; \dots \qquad \text{ბ) } 2; 4; 6; 12; 14; \dots$$

არითმეტიკული პროგრესია

გამოკვლევა: სახურავის კონსტრუირების დროს კრამიტები იწყობა განსაზღვრული წესით. სურათზე ნაჩვენებია სახურავი დაფარულია კრამიტებით იმ წესით, რომელიც ნაჩვენებია ცხრილში.



რიგი	1	2	3	4	5	6	7	8
კრამიტი	3	4	5	6	7	8	9	10

- 1) იპოვეთ სხვაობა თითოეულ რიგში კრამიტების რაოდენობასა და მის მომდევნო რიგში კრამიტების რაოდენობას შორის.
- 2) ამ სხვაობისა და პირველ რიგში კრამიტების რაოდენობის მიხედვით შესაძლებელია ნებისმიერ რიგში კრამიტის რაოდენობის მოძებნა?
- 3) კრამიტების რაოდენობის მიმდევრობა წარმოადგინეთ რეკურენტული და ექსპლიციტური ხერხებით.

არითმეტიკული პროგრესია, რეკურენტული წესი

განსაზღვრება. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან მიიღება წინა წევრისაგან ამ მიმდევრობისათვის ერთი და იმავე რიცხვის მიმატებით, **არითმეტიკული პროგრესია** ეწოდება. ე.ი. ნებისმიერი ნატურალური n -ისათვის თუ $a_{n+1} = a_n + d$, მაშინ (a_n) მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესია, სადაც d მოცემული მიმდევრობისათვის რაიმე მუდმივი რიცხვია. ამ d რიცხვს არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ეწოდება. განსაზღვრებიდან ასეთი დასკვნა გამოდის, რომ $d = a_{n+1} - a_n$ ტოლობა მართებულია ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის. კერძო შემთხვევებში $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$ პროგრესია, რომლის n -ური წევრი a_n -ია სიმბოლურად $\div (a_n)$ -ით აღინიშნება. არითმეტიკული პროგრესიის მოცემისათვის საკმარისია მისი პირველი წევრის და სხვაობის ჩვენება. არითმეტიკული პროგრესია $a_{n+1} = a_n + d$ რეკურენტული დამოკიდებულებით მოცემული მიმდევრობაა.

ნამუში 1. ქვემოთ მოცემულებიდან განსაზღვრეთ რომელია არითმეტიკული პროგრესია.

ა) $-6, 0, 6, 12, 18, 24, \dots$

ბ) $-1, -3, -6, -10, -15, -21, \dots$

მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესიაა, რადგან ორ მეზობელ წევრს შორის სხვაობა მუდმივი რჩება.

მიმდევრობა არ არის არითმეტიკული პროგრესია, რადგან ორი მეზობელი წევრის სხვაობა იცვლება.

არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა შეიძლება იყოს დადებითი რიცხვი, უარყოფითი რიცხვი და ნული. თუ $d > 0$, მეორედან დაწყებული თითოეული წევრი წინა წევრზე მეტია (ზრდადი მიმდევრობა), თუ $d < 0$, მაშინ კი ნაკლებია (კლებადი მიმდევრობა).

ნამუში 2. ა) $a_1 = 2, d = 3$ პირობის მიხედვით არითმეტიკული პროგრესია: 2; 5; 8; 11; 14; 17; ... იქნება. ამ პროგრესიის რეკურენტული ფორმულა: $a_{n+1} = a_n + 3$

ბ) $a_1 = 11, d = -4$ პირობის მიხედვით არითმეტიკული პროგრესია: 11; 7; 3; -1; -5; ... იქნება. ამ პროგრესიის რეკურენტული ფორმულა: $a_{n+1} = a_n - 4$

როცა $d = 0$ მიმდევრობის ყველა წევრი ერთი და იგივე რიცხვის (I წევრის) ტოლია. მაგალითად, 5; 5; 5; ...

არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > მოცემული მიმდევრობებიდან რომელია არითმეტიკული პროგრესია? იპოვეთ ამ პროგრესიის სხვაობა. პროგრესიისათვის დაწერეთ რეკურენტული ფორმულა.

ა) $-1, 9; -2, 1; -2, 5; -3, 1; -3, 9; \dots$

ბ) $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{2}; \dots$

გ) $-1, 6; -1, 3; -1, 0; -0, 7; -0, 4; \dots$

დ) $\frac{13}{2}; \frac{13}{3}; \frac{13}{4}; \frac{13}{5}; \frac{13}{6}; \dots$
- 2 > იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის უცნობი წევრები:

ა) $x_1; 5; x_3; -3; -7; \dots$

ბ) $x_1; x_2; 17; 23; \dots$
- 3 > პირველი წევრისა და პროგრესიის სხვაობის მიხედვით დაწერეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი ხუთი წევრი.

ა) $a_1 = -1, 2 \quad d = 2$

ბ) $a_1 = 3, \quad d = -2$
- 4 > იპოვეთ რეკურენტული ხერხით მოცემული მიმდევრობის პირველი ოთხი წევრი.

ა) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - 3$

ბ) $a_1 = 1 \frac{2}{3}, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}$

არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

არითმეტიკული პროგრესიის თითოეული წევრი (დაწყებული მეორედან) მიიღება წინა რიცხვისაგან ამ მიმდევრობისათვის ერთი და იგივე რიცხვის მიმატებით. ამ წესის თანახმად:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 + d \\
 a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\
 a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\
 a_5 &= a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

ამ წესის მიხედვით შეიძლება ჩავწეროთ: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ ფორმულა წარმოადგენს არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულას.

ნიმუში 1. არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1 = -2, d = 2, 5$ იპოვეთ a_6 და a_9 :

$$a_6 = a_1 + 5d = -2 + 5 \cdot 2, 5 = 10, 5$$

$$a_9 = a_1 + 8d = -2 + 8 \cdot 2, 5 = 18$$

აღვნიშნოთ, რომ a_9 შეიძლება გამოვცეთვალა ქვემოთ მოცემული ხერხითაც:

$$a_9 = a_1 + 8d = (a_1 + 5d) + 3d = a_6 + 3d = 10, 5 + 3 \cdot 2, 5 = 18$$

საერთოდ, $a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (k-1)d + (n-k)d = a_k + (n-k)d$

მაშასადამე, მართებულია ტოლობა $a_n = a_k + (n-k)d$.

აქედან მივიღებთ ფორმულას პროგრესიის სხვაობისათვის: $d = \frac{a_n - a_k}{n - k} \quad (n \neq k)$.

ნიმუში 2. არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_5 = 7, a_9 = 19$, მაშინ $d = ? \quad a_{12} = ?$

ამოხსნა: $d = \frac{a_9 - a_5}{9 - 5} = \frac{19 - 7}{4} = 3, \quad a_{12} = a_9 + 3d = 19 + 9 = 28$

შენიშვნა: გადაწეროთ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ფორმულა $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$ სახით. შეიძლება გავაკეთოთ დასკვნა: ნებისმიერი არითმეტიკული პროგრესია შეიძლება მოცემული იყოს ფორმულით $a_n = k \cdot n + b$ (სადაც k და b რაიმე რიცხვებია). მართებულია ამის შებრუნებულიც.

არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > დაწერეთ არითმეტიკული პროგრესიის კიდევ ხუთი წევრი. დაწერეთ რეკურენტული წესი და n -ური წევრის ფორმულა.

ა) 11; 17; 23; ...

ბ) $-6; -2; 2; \dots$

გ) $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}; \dots$

დ) 3,5; 4,3; 5,1; ...

ე) $\frac{17}{3}; \frac{15}{3}; \frac{13}{3}; \dots$

ვ) $-12; -10; -8; \dots$
- 2 > ა) a_n არითმეტიკული პროგრესიის $a_9, a_{12}, a_{21}, a_{k+2}, a_{2k}$ წევრები გამოსახეთ a_1 და d -ს საშუალებით.
 ბ) არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1 = -4, d = 3$ იპოვეთ a_6 და a_{15} .
- 3 > არითმეტიკულ პროგრესიაში მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი სიდიდეები:

ა) $a_{12} = -7, d = 3$
 a_1 და a_8

ბ) $a_5 = 6, d = -0,5$
 a_1 და a_7

გ) $c_1 = -\frac{4}{3}, c_6 = \frac{1}{3}$
 d და c_{11}

დ) $c_1 = 0,5, c_{15} = -2,3$
 d და c_{16}

ე) $a_5 = -10, a_8 = 8$
 a_1 და a_6

ვ) $a_4 = 7, a_7 = -2$
 a_1 და a_9

ზ) თუ $-20; -15; \dots$, მაშინ d და a_{10} თ) თუ $5; 4,5; \dots$, მაშინ d და a_9
- 4 > 4 და 40-ს შორის ჩაწერეთ ისეთი ოთხი რიცხვი, რომ მათ მოცემულ რიცხვებთან ერთად შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია.
- 5 > 1) თუ არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1 = -12, d = 3$, არსებობენ თუ არა წევრები, რომლებიც ტოლია: ა) 6-ის; ბ) 0-ის; გ) 9-ის.
 2) $-2; 5; \dots$ არითმეტიკულ პროგრესიაში არსებობენ თუ არა წევრები, რომლებიც ტოლია ა) 53-ის; ბ) 75-ის. თუ არსებობს, დაწერეთ ამ წევრის ნომერი.
- 6 > $-40; -37; \dots$ არითმეტიკული პროგრესიის რომელი წევრებისათვის სრულდება პირობა: ა) $a_n > 0$; ბ) $a_n < 0$?
- 7 > ა) იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი დადებითი წევრი, თუ $a_1 = -18; d = 1,5$ ამ პროგრესიის რამდენი წევრია უარყოფითი?
 ბ) 4,1; 3,9; არითმეტიკულ პროგრესიაში იპოვეთ პირველი უარყოფითი წევრი.
- 8 > თუ არითმეტიკულ პროგრესიაში $x_1 = -45; d = 4$, მაშინ რომელი წევრებისათვის მართებულია უტოლობა: ა) $x_n > 99$; ბ) $x_n < 160$?
- 9 > ა) უჩვენეთ, რომ $x_n = 2n - 5$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობა პროგრესიაა. იპოვეთ მისი პირველი წევრი და სხვაობა.
 ბ) $(n + 1)$ და n -ური წევრების სხვაობის მოძებნით უჩვენეთ, რომ $a_n = k \cdot n + b$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესიაა.
- 10 > ა) თუ არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_n = 2n + 3$, იპოვეთ a_8 და d .
 ბ) თუ არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_n = 1 - 4n$, იპოვეთ a_6 და d .
- 11 > ქარხანამ იანვარში დაამზადა 120 დეტალი, ყოველ მომდევნო თვეში წინა თვესთან შედარებით 8 დეტალით მეტი. რამდენი დეტალი დაამზადა ქარხანამ მაისში და დეკემბერში?
- 12 > პირველი ექვსი წევრის ჩვენებით დაწერეთ: ა) ზრდადი; ბ) კლებადი; გ) ყველა დადებითწევრიანი; დ) ყველა ლუწწევრიანი არითმეტიკული პროგრესიის ნიმუშები.

არითმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

გამოყენებითი დაგვალბები

- 13** > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა, მეექვსე და პირველი წევრები.

$$\text{ა) } \begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}$$

$$\text{ბ) } \begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 3 \\ a_2 \cdot a_3 = 8 \end{cases}$$

- 14** > სხეული პირველ წამში გადის 6 მ, ყოველ შემდეგ წამში 2 მ-ით მეტს ვიდრე წინაში. რა გზას გაივლის სხეული: ა) მეხუთე წამში; ბ) პირველ 5 წამში?

- 15** > ერთი არითმეტიკული პროგრესიის წევრებს სხვა არითმეტიკული პროგრესიის შესაბამის წევრებს (იგივე ნომრიანებს) თუ მივუმატებთ, მიღებული მიმდევრობა იქნება არითმეტიკული პროგრესია?

- 16** > თუ არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{12}$, ამ პროგრესიის მერამდენე წევრი იქნება $\sqrt{48}$ -ის ტოლი?

- 17** > **გეოგრაფია.** მეცნიერული კვლევების თანახმად ევროპის კონტინენტი ყოველწლიურად ჩრდილო-ამერიკის კონტინენტს შორდება 2.2 სმ-ით. ლითოსფეროს სფეროების დაშორება ყველაზე უკეთ შეიძლება ისლანდიაში. დაკვირვების ზონაში აგებულია 15 მ სიგრძის ხიდი. თუ ამ ორი კონტინენტის დაშორება ასე გაგრძელდება, მაშინ როგორი იქნება ამ ხიდის სიგრძე ა) 50, ბ) 100 წლის შემდეგ? ამოცანა ამოხსენით შესაბამისი პროგრესიის დაწერით.



- 18** > **არქიტექტურა.** ბაქოში, მეტროს სადგურებზე “იჩერიშეჰერ”, “ქოროღლუ”, “აეტოვაგზალ” გამოყენებული იქნა გამჭვირვალე პირამიდის ელემენტები. მაგალითად, სადგურ “იჩერიშეჰერის” დიზაინი შესრულებულია ისე, რომ ყველაზე ზემო რიგში არის 2 ფანჯარა, ყოველ ქვედა რიგში კი 2 ფანჯრით მეტი, ვიდრე წინაში. რამდენი ფანჯარაა მე-12 რიგში? მერამდენე რიგშია 18 ფანჯარა?



- 19** > მოცემულია a_n არითმეტიკული პროგრესია: ა) ჩაწერეთ პირველი 5 წევრი; ბ) იპოვეთ სხვაობა; გ) უჩვენეთ გრაფიკულად.

$$a_n = 4 + 2(n - 1) \quad \left| \quad a_n = \frac{5}{2} - (n - 1) \quad \left| \quad a_n = 4 - 3(n - 1) \quad \left| \quad a_n = \frac{1}{2}(n - 1) \right. \right.$$

- 20** > ა) სამი რიცხვი შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას. ამ რიცხვების ჯამი ტოლია 12-ის, ხოლო ნამრავლი 28-ის. იპოვეთ ეს რიცხვები.

ბ) სამი რიცხვი შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას. შუაწევრი არის 8. ამ რიცხვების კვადრატები ჯამია 264. იპოვეთ დანარჩენი ორი რიცხვი.

გ) რამდენი რიცხვია არითმეტიკულ პროგრესიაში 3; 8; 13; ... ; 58 ?

ართიმეტიკული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

- 21> გამოიკვლიეთ როგორ იცვლება სკამების რაოდენობა მაგიდების რაოდენობაზე დამოკიდებულებით. რამდენი სკამი იქნება: ა) 7 მაგიდის; ბ) 10 მაგიდის; გ) n მაგიდის გარშემო? **მითითება:** $a_n = a_1 + d(n - 1)$ ფორმულაში იპოვეთ a_1 და d .

1 მაგიდა



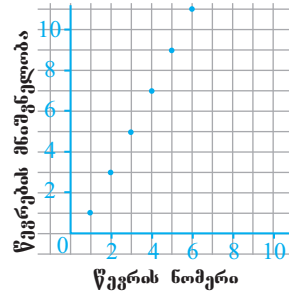
2 მაგიდა



3 მაგიდა



- 22> ა) გრაფიკზე ნაჩვენებია დამოკიდებულება $a_n = 2n - 1$ ართიმეტიკული პროგრესიის ნომრებსა და წევრების მნიშვნელობებს შორის. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის ფიქსირებულ წერტილებზე.



ბ) ააგეთ $f(x) = 2x - 1$ (x ნამდვილი რიცხვია) ფუნქციის გრაფიკი, უჩვენეთ სხვაობა ართიმეტიკული პროგრესიის გრაფიკსა და წრფივი ფუნქციის გრაფიკს შორის. წრფივი ფუნქციის ფორმულაში არსებული კუთხური კოეფიციენტი, რას გამოსახავს ართიმეტიკულ პროგრესიაში?

- 23> რამდენი წევრია ართიმეტიკულ პროგრესიაში, თუ პირველი წევრი ტოლია 6-ის, პროგრესიის სხვაობა 5-ის, ბოლო წევრი კი 66-ის?

- 24> შემნახველ სალაროში შეტანილი თანხის წლიური მოგება შეადგენს 5%-ს. რა თანხად იქცევა 40 000 მანეთი, შეტანილი 3 წლით, მარტივი პროცენტის ფორმულით გაანგარიშებისას?

- 25> მართკუთხა სამკუთხედის a , b , c გვერდები შეადგენენ ართიმეტიკული პროგრესიას. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ $c = 10$ სმ.

- 26> თუ რომელიმე მიმდევრობის წევრების შებრუნებული რიცხვები ქმნიან ართიმეტიკულ პროგრესიას, ასეთ მიმდევრობებს **ჰარმონიული მიმდევრობები** ეწოდება. განმარტეთ ქვემოთ მოცემული მიმდევრობის ჰარმონიულობა.

$$1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \dots$$

- 27> ართიმეტიკული პროგრესიის პირველი 6 წევრი საკოორდინატო სიბრტყეზეა აღნიშნული. ამ წერტილებიდან ორის კოორდინატებია $(3; 11)$ და $(6; 23)$. დაწერეთ ამ პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა.

- 28> ცხრილში მოცემულია ართიმეტიკული პროგრესიის ზოგიერთი წევრი. შეავსეთ ცხრილი რეგულში და წარმოადგინეთ პროგრესია რეკურენტული წესით. ($n \in \mathbb{N}$)

n	a_n
1	-3,5
2	1
4	

n	a_n
1	40
7	22
13	

n	a_n
1	
3	30
50	500
150	

არითმეტიკული პროგრესიის წევრების თვისებები

გამოკვლევა 1) დაწერეთ ნებისმიერი არითმეტიკული პროგრესიის პირველი 10 წევრი. მაგალითად, თუ $a_1 = 4, d = 3$, ეს წევრები იქნება შემდეგი:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

2) შუა წევრებიდან აიღეთ ნებისმიერი ერთ-ერთი და იგი მისი ორივე მხრიდან მეზობელი წევრების საშუალო არითმეტიკულთან შეადარეთ. მიიღეთ ტოლობა?

$$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$$

ტოლობები მართებულია?

არითმეტიკული პროგრესია და არითმეტიკული საშუალო

თვისება. არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორიდან, მისი მეზობელი წევრების არითმეტიკული საშუალოს ტოლია.

მართლაც $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ ტოლობიდან $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ მიიღება.

ზოგადად, რადგან $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ ამიტომ

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n \geq 2) \quad \text{ტოლობა მართებულია.}$$

ეს თვისება ასე შეიძლება განვაზოგადოთ: არითმეტიკული პროგრესიის თითოეული წევრი (დაწყებული მეორიდან) მისგან ტოლ მანძილზე მდგომი წევრების არითმეტიკული საშუალოს ტოლია: $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad (1 \leq k \leq n-1)$.

ეს თვისება არითმეტიკული პროგრესიის სახელის მინიჭების მიზეზს განმარტავს. ამის შებრუნებულიც სწორია: თუ რაიმე მიმდევრობის მეორიდან დაწყებული ნებისმიერი წევრი, მისი წინამდებარე და მომდევნო წევრების არითმეტიკული საშუალოა, მაშინ ეს მიმდევრობა არითმეტიკული პროგრესიაა.

სასრული არითმეტიკული პროგრესიის კიდურა წევრებიდან ერთი და იგივე მანძილზე მდგომი ორი წევრის ჯამი კიდურა წევრების ჯამის ტოლია

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$$

ზოგადად თუ $m + k = n + p$, მაშინ $a_m + a_k = a_n + a_p$

სასწავლო დაფალებები

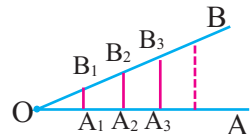
- 1 >** ა) არითმეტიკულ პროგრესიაში თუ $a_1 = 3, a_3 = 7$, იპოვეთ a_2 .
 ბ) არითმეტიკულ პროგრესიაში თუ $a_4 + a_{10} = 6$, იპოვეთ: 1) $a_5 + a_9$; 2) a_7
 გ) არითმეტიკულ პროგრესიაში თუ $a_8 = 5$, იპოვეთ $a_1 + a_{15}$.
- 2 >** იპოვეთ x , თუ ცნობილი, რომ მოცემული რიცხვები არითმეტიკული პროგრესიის მიმდევრობითი წევრებია.
 ა) $3x - 4; 6; x + 6$ ბ) $x - 2; x^2; 3x + 2$
- 3 >** $\div (x_n)$ არითმეტიკული პროგრესიის წევრებისათვის დაამტკიცეთ ტოლობა.
 ა) $x_1 + x_9 = x_4 + x_6$ ბ) $x_3 + x_{12} = x_8 + x_7$ გ) $x_4 + x_{n-4} = x_6 + x_{n-6}$

არითმეტიკული პროგრესიის წევრების თვისებები

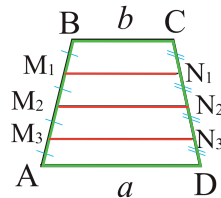
გამოყენებითი დავალებები

- 4 > სამკუთხედის კუთხეების გრადუსული ზომები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. დაამტკიცეთ, რომ ამ კუთხეებიდან ერთ-ერთის გრადუსული ზომა 60° -ია.
- 5 > სამკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია. ამ სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები არითმეტიკულ პროგრესიას შეადგენენ. იპოვეთ ზომით შუა გვერდის სიგრძე.

- 6 > $\angle AOB$ -ს OA გვერდზე წვეროდან დაწყებული ტოლი მონაკვეთებია გამოყოფილი და დაყოფის წერტილებიდან პარალელური წრფეებია გავლებული. იპოვეთ A_3B_3 მონაკვეთის სიგრძე, თუ $A_1B_1 = 2$ სმ.



- 7 > ABCD ტრაპეციის AB ფერდი ოთხ ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი და დაყოფის წერტილებიდან ფუძეების პარალელური წრფეებია გავლებული.
 ა) დაამტკიცეთ, რომ BC , M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 და AD მონაკვეთების სიგრძეები შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას.
 ბ) თუ $AD = 18$ სმ, $BC = 6$ სმ იპოვეთ M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 მონაკვეთების სიგრძეები.



- 8 > $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ რიცხვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. დაამტკიცეთ, $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$ ტოლობის სისწორე.

- 9 > მოცემულ რიცხვებს შორის ჩაწერეთ: 1) ერთი ისეთი რიცხვი; 2) ორი ისეთი რიცხვი, რომ მათ შეადგინონ არითმეტიკული პროგრესია.

ა) $-1; 5$ ბ) $30; 50$ გ) $12; 48$ დ) $0; 20$ ე) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$

- 10 > არითმეტიკული პროგრესიის მე-5 წევრი c -ს ტოლია. დაწერეთ გამოსახულება, რომელიც უჩვენებს ამ მიმდევრობის მე-2 და მე-8 წევრების ჯამს.

- 11 > ექიმს ავადმყოფის მისაღები წამლის 5 დღის განმავლობაში ტოლი დოზებით დღიურად 100 მგ-დან 300 მგ-მდე გაზრდა სურს. მიმდევრობით დაწერეთ ავადმყოფის მიერ 5 დღის განმავლობაში მისაღები წამლის ოდენობა.

- 12 > a, b, c რიცხვები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, დაამტკიცეთ, რომ $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ მიმდევრობაც არითმეტიკული პროგრესია.

არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

პრაქტიკული მცადინეობა. ვიპოვოთ 1-დან 100-ის ჩათვლით ნატურალური რიცხვების ჯამი. დავუშვათ, რომ ეს ჯამი x -ის ტოლია. I რიგში ამ ჯამის შესაკრებები ზრდის რიგით, II რიგში კი კლების რიგით ჩავწეროთ და ტოლობები წევრ-წევრ “ქვეშმიწერით” შევკრიბოთ.

$$\begin{array}{r}
 x = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\
 + \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 x = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\
 \hline
 2x = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \\
 x = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050
 \end{array}$$

მიღებული შედეგის $x = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$ სახით დაწერა შეიძლება.

არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

ნებისმიერი არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი ავლენიშნით S_n -ით.

$$\begin{array}{r}
 S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
 + \\
 S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1
 \end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

ვინაიდან სასრული არითმეტიკული პროგრესიის წევრებიდან თანაბარ მანძილზე დაშორებული წევრების ჯამი კიდურა წევრების ჯამის ტოლია, ფრჩხილებში მოცემული ჯამებიდან თითოეული $(a_1 + a_n)$ ტოლია. რადგან ფრჩხილებში მოცემული ჯამის რაოდენობა n -ის ტოლია.

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n, \text{ აქედან კი } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \text{ მიიღება.}$$

სასრული არითმეტიკული პროგრესიის ჯამი კიდურა წევრების ნახევარჯამისა და წევრთა რაოდენობის ნამრავლის ტოლია.

რადგან $a_n = a_1 + (n - 1)d$ პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1)d) \cdot n}{2} \text{ სახით შეიძლება დაიწეროს.}$$

ნამუშაო 1. ვიპოვოთ $a_n = 3n + 1$ ფორმულით მოცემული არითმეტიკული პროგრესიის პირველი თორმეტი წევრის ჯამი.

ამოხსნა: $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ $a_{12} = 3 \cdot 12 + 1 = 37$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = (4 + 37) \cdot 6 = 246$$

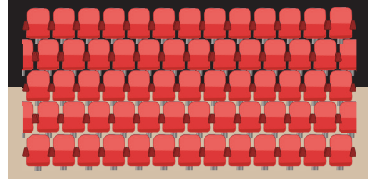
ნამუშაო 2. ვიპოვოთ $-3; 5; 13; \dots$ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი ათი წევრის ჯამი.

ამოხსნა: $a_1 = -3, a_2 = 5, d = 8, a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 72 = 69$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (-3 + 69) \cdot 5 = 330$$

არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

ნიმუში 3. დარბაზში 30 რიგია. პირველ რიგში 24 ადგილია. ყოველ მომდევნოში კი წინაზე 1-ით მეტი ადგილია. სულ რამდენი ადგილია სალონში?



ამოხსნა: $a_1 = 24, d = 1, n = 30$

ბოლო რიგში: $a_{30} = 24 + 29 \cdot 1 = 53$ ადგილია.

$$30 \text{ რიგში ადგილების რაოდენობა: } S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = 1155$$

ნიმუში 4. 5; 7; 9; ... არითმეტიკული პროგრესიის პირველი რამდენი რიცხვის შეკრებით მიიღება 320?

ამოხსნა: $320 = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}, \quad \frac{(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2} = 320,$

$$\frac{(8 + 2n) \cdot n}{2} = 320, \quad n^2 + 4n = 320, \quad n^2 + 4n - 320 = 0$$

$$(n - 16)(n + 20) = 0, \quad n_1 = 16, n = -20.$$

წევრების რაოდენობა არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, მაშასადამე, ამ პროგრესიის პირველი 16 წევრის ჯამი 320-ია. თუ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამს დავწერთ

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2} = \frac{(n \cdot d + (2a_1 - d)) \cdot n}{2} = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2a_1 - d}{2} \cdot n$$

სახით და $\frac{d}{2} = a, \frac{2a_1 - d}{2} = b$ ავღნიშნავთ, მივიღებთ, რომ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n$ სახისა იქნება. არითმეტიკული პროგრესია შეიძლება ჩაითვალოს მოცემულად, თუ ცნობილია S_n .

ნიმუში 5. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი და სხვაობა, თუ პირველი n წევრის ჯამი მოცემულია ფორმულით $S_n = 2n^2 - 3n$.

ამოხსნა:

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1$$

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = S_2 - S_1 = (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) - (-1) = 3$$

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 4$$

ყურადღება! ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას a_n -ის განსაზღვრისათვის ხელსაყრელია $a_n = S_n - S_{n-1}$ ფორმულის გამოყენება.

სასწავლო დაგეგმვები

1 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის შესაბამისი რაოდენობის წევრების ჯამი.

ა) $a_1 = 10, a_{20} = 48$

$n = 10, S_n = ?$

ბ) $a_1 = 6,5, a_{20} = 7,5$

$n = 20, S_n = ?$

გ) $a_1 = -13, d = 7,$

$n = 8, S_n = ?$

დ) $a_1 = 9, d = -4,$

$n = 12, S_n = ?$

ე) $-17, -11; \dots$

$n = 17, S_n = ?$

ვ) $14,2; 9,6; \dots$

$n = 11, S_n = ?$

2 > $a_n = 2n - 3$ ფორმულით მოცემული არითმეტიკული პროგრესიისათვის იპოვეთ:

ა) პირველი 15 წევრის ჯამი; ბ) პირველი n წევრის ჯამი.

ართიმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

- 3 > იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი 10 წევრის ჯამი.
- ა) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + \dots$ ბ) $3 + \frac{7}{2} + 4 + \frac{9}{2} + 5 + \dots$
- გ) $8 + 4 + 0 + (-4) + (-8) + \dots$ დ) $0,5 + 1,1 + 1,7 + 2,3 + \dots$
- 4 > იპოვეთ მოცემული რაოდენობის წევრების ჯამი და რამდენი წევრის ჯამია მოცემული რიცხვის ტოლი.

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \dots$$

ა) $n = 20$ ბ) $S_n = 210$
 $S_n = ?$ $n = ?$

$$30 + 24 + 18 + 12 + 6 + \dots$$

ა) $n = 15$ ბ) $S_n = -36$
 $S_n = ?$ $n = ?$

$$-10 + (-5) + 0 + 5 + 10 + \dots$$

ა) $n = 15$ ბ) $S_n = 315$
 $S_n = ?$ $n = ?$

$$45 + 42 + 39 + 36 + 33 + \dots$$

ა) $n = 68$ ბ) $S_n = -48$
 $S_n = ?$ $n = ?$

- 5 > იპოვეთ ჯამი:
- ა) $1 + 2 + 3 + \dots + n$; ბ) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$; გ) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.
- 6 > იპოვეთ ჯამი:
- ა) პირველი 80 ნატურალური რიცხვის; ბ) ყველა ორნიშნა რიცხვის;
- გ) 3-ის ჯერადი და 100-ზე ნაკლები ნატურალური რიცხვების;
- დ) 4-ის ჯერადი და 130-ზე ნაკლები ნატურალური რიცხვების.

გამოყენებითი დაფალებები

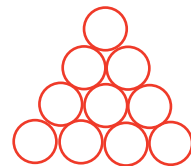
- 7 > არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი 7-ის, სხვაობა 1,5-ის ტოლია. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის მე-5-დან მე-11-მდე (ჩათვლით) წევრების ჯამი.
- 8 > შეავსეთ ცხრილი.

N	a_1	d	n	a_n	S_n
1	2		11	7	
2		-0,4	8	-5,2	
3	0,5			14	72,5
4			7	16	17,5

- 9 > ბირთვები აწყობილია სამკუთხედის ფორმით, ისე რომ პირველ რიგშია 1 ბირთვი, მეორეში 2 ბირთვი, მესამეში სამი ბირთვი და ა.შ.

ა) რამდენი რიგი მიიღება 36 ბირთვისაგან?

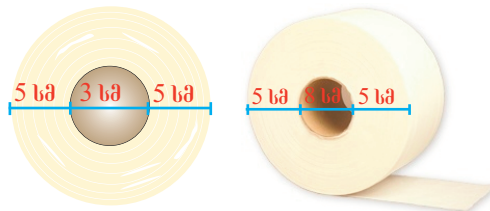
ბ) რამდენი ბირთვი იქნება საჭირო 12-რიგიანი სამკუთხედის შესადგენად?



არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

- 10 > გამოკვლევა:** 90 ფოტოსურათი განლაგეს 5 რიგად. ორ მეზობელ რიგში ფოტოსურათების რაოდენობის სხვაობა მუდმივია. ამ ფოტოსურათების ამ წესით რამდენ ვარიანტად განლაგება შეიძლება?
- 11 >** პირველ საათზე ზარი ერთხელ ირეკება, 2 საათზე ორჯერ 12-ზე თორმეტჯერ, სულ რამდენჯერ დარეკავს ზარი ამ დროის განმავლობაში?
- 12 >** ამოხსენით განტოლება, თუ ცნობილია, რომ შესაკრებები მარცხენა მხარეში არითმეტიკული პროგრესიის წევრებია.
- ა) $1 + 4 + 7 + \dots + x = 70$ ბ) $1 + 1,5 + 2 + \dots + x = 27$
- 13 >** გამოთვალეთ. $\frac{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{19}}{4 \cdot 4^4 \cdot 4^7 \cdot \dots \cdot 4^{16}}$
- 14 >** პირველი n წევრის ჯამის ფორმულის მიხედვით იპოვეთ უცნობი წევრები.
- ა) $S_n = 4n^2 - 3n$ ბ) $S_n = 2n^2 + n$ გ) $S_n = 2n^2 + 3n$
 $a_1 = ?$ და $a_2 = ?$ $a_5 = ?$ და $a_{11} = ?$ მერამდენე წევრია 21-ის ტოლია?
- 15 >** არითმეტიკული პროგრესიის მე-3 და მე-5 წევრების ჯამი 12-ის ტოლია. მე-2-დან მე-5-მდე (მე-5-ის ჩათვლით) წევრების ჯამი 8-ის ტოლია. დაწერეთ ამ მიმდევრობის პირველი 5 წევრი.
- 16 >** ა) არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_3 = 31$ და $a_7 = 79$. იპოვეთ a_{11} და S_{31} .
 ბ) არითმეტიკულ პროგრესიაში $S_7 = 203$, $a_5 = 38$. დაწერეთ a_n -ის ფორმულა და იპოვეთ S_{17} .
- 17 > შემოქმედების გამოყენება.** ქაღალდის ფაბრიკები აწარმოებენ სხვადასხვა დანიშნულების ქაღალდს გადახვეულს სპეციალურ ცილინდრულ მუყაოზე რულონის სახით. ქაღალდის სისქე - 0,01 სმ-ია. მუყაოს დიამეტრი 3 სმ-ია, მთელი რულონის დიამეტრი - 13 სმ.

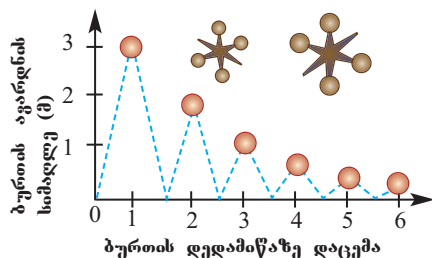
n	d_n (სმ)	l_n (სმ)
1	3	3π
2		
3		
4		



- ა) ქაღალდის ხვეულების რაოდენობა ჩავთვალოთ n -ად, რულონის დიამეტრი ყოველ n ხვეულზე d_n -ად, დახვევის ყოველ ნაბიჯზე ქაღალდის სიგრძე ხვეულში l_n -ად, შეავსეთ ცხრილი რვეულში.
- ბ) რას ფიქრობთ $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots$ მიმდევრობის შესახებ? ჩაწერეთ მიმდევრობის n -ური წევრის ფორმულა.
- გ) რამდენი ქაღალდის ხვეულია 13 სმ დიამეტრიან რულონში? დაახლოებით რამდენი მეტრი ქაღალდია ამ რულონში?
- დ) 13 სმ დიამეტრიანი ქაღალდის რულონი ღირს 5 მანეთი. დაახლოებით რამდენი მანეთი ეღირებოდა რულონი, თუ მისი დიამეტრი 18 სმ იქნებოდა?

გეომეტრიული პროგრესია

გამოკვლევა: ბურთი პირველ ჯერზე დედა-მიწაზე დაცემის შემდეგ 3 მ სიმაღლეზე ავარდა, ყოველ შემდეგ ჯერზე სიმაღლე წინა ჯერის 60%-ს შეადგენდა. გრაფიკი უჩვენებს კავშირს ბურთის მიწაზე დაცემის რაოდენობასა და ავარდნას შორის.



- 1) ბურთის ავარდნის სიმაღლეების $h_1, h_2, h_3, h_4, \dots$ აღნიშნეთ. ყოველ ჯერზე ბურთის ავარდნის სიმაღლე გამოსახეთ პირველად ბურთის დაცემის შემდეგ ავარდნის სიმაღლის მეშვეობით.
- 2) რა სიმაღლეზე აიწევა ბურთი მე-8 დაცემის შემდეგ?
- 3) განმარტეთ ბურთის n -ური დაცემის შემდეგ ავარდნის სიმაღლის განსაზღვრისათვის $h_n = 3 \cdot (0,6)^{n-1}$ ფორმულის გამოყენების შესაძლებლობა.

გეომეტრიული პროგრესიის წევრები, რეკურენტული წესი

განსაზღვრება: გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება რიცხვით მიმდევრობას, რომლის წევრებიც განსხვავდებიან წულისაგან, ხოლო ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან მიიღება წინა წევრისაგან წულის არატოლ ერთი და იმავე რიცხვზე გამრავლებით. ე.ი. თუ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის შესრულდება პირობა:

$$b_n \neq 0 \text{ და } b_{n+1} = b_n \cdot q,$$

მაშინ მიმდევრობა (b_n) იქნება გეომეტრიული პროგრესია. q რიცხვს გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი ეწოდება.

გეომეტრიული პროგრესია სიმბოლურად $\therefore (b_n)$ სახით აღინიშნება.

$b_{n+1} = b_n \cdot q$ ფორმულა გეომეტრიული პროგრესიის რეკურენტული წესის გამოსახვა. განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

კერძო შემთხვევაში $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots$

ნამუშაო 1. ა) თუ $b_1 = 2, q = 3$, მაშინ 2, 6, 18, 54, 162, ... გეომეტრიული პროგრესია, ბ) თუ $b_1 = 3, q = -2$, მაშინ 3, -6, 12, -24, 48, ... გეომეტრიული პროგრესია მიიღება. თუ $q > 0$, გეომეტრიული პროგრესიის წევრები ერთნაირ ნიშნიანები; თუ $q < 0$, გეომეტრიული პროგრესიის წევრების ნიშნები მონაცვლეობენ. თუ $q = 1$, მუდმივი მიმდევრობა მიიღება.

ნამუშაო 2. მოცემული რიცხვითი მიმდევრობიდან რომელია გეომეტრიული პროგრესია?

- ა) 4, 12, 22, 34, 48. ბ) 625, 125, 25, 5, 1.

გეომეტრიული პროგრესიის თითოეული წევრის მის წინა წევრთან შეფარდება ყოველთვის მუდმივი რჩება. შევამოწმოთ ეს პირობა ორივე მიმდევრობისათვის.

ა) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{4} = 3$ $\frac{b_3}{b_2} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$ პირობას არ აკმაყოფილებს, ეს მიმდევრობა არ არის გეომეტრიული პროგრესია.

ბ) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$ $\frac{b_3}{b_2} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$ $\frac{b_4}{b_3} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ $\frac{b_5}{b_4} = \frac{1}{5}$

პირობას აკმაყოფილებს, ეს მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესია.

გეომეტრიული პროგრესია

სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > დაწერეთ გეომეტრიული პროგრესიის მორიგი ორი წევრი.

500; 100; 20; ...	$\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots$	$7; \frac{14}{3}; \frac{28}{9}; \dots$
16; 24; 36; ...		$0,4; -0,16; 0,064; \dots$
1,25; 1,5; 1,8; ...	$\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{25}{12}; \dots$	$1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; \dots$

- 2 > დაწერეთ გეომეტრიული პროგრესიის მე-10 წევრი.

ა) 512; -256; 128; -64; ... ბ) $\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \frac{16}{5}; \dots$

- 3 > იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის უცნობი წევრები.

ა) $y_1; 1; \frac{1}{2}; y_4; \dots$ ბ) $y_1; y_2; 24; 36; 54; \dots$

- 4 > ა) ცნობილია, რომ $b_2 = 3$. $b_{n+1} = 0,3 \cdot b_n$ რეკურენტული წესის მიხედვით იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი 5 წევრი.

ბ) 2, 8, 32, 128, ... მიმდევრობისათვის დაწერეთ რეკურენტული წესი.

- 5 > **ღია ტიპის დაგეგმვა.** მონაცემების მიხედვით შეადგინეთ გეომეტრიული პროგრესია და დაწერეთ პირველი ოთხი წევრი.

ა) $q = \frac{1}{2}$ ბ) $b_1 = 0,5$ გ) $b_3 = 20$

- 6 > მოცემული მიმდევრობებიდან რომელი არითმეტიკული პროგრესიაა და რომელი გეომეტრიული პროგრესია? ამ პროგრესიებისათვის დაწერეთ რეკურენტული წესი.

ა) 7; 14; 28; 56; 112; ...	დ) 1; 2; 5; 26; ...
ბ) 1000; 500; 250; 125; ...	ე) 1; 5; 9; 13; ...
გ) 4; 8; 13; 19; ...	ვ) 200; 20; 2; 0,2; ...

- 7 > იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი.

1) 81; 27; 9; ...	2) 4; 8; 16; ...
3) $14; 7; \frac{7}{2}; \dots$	4) $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \dots$

- 8 > მიმდევრობებისათვის დაწერეთ რეკურენტული წესი და უჩვენეთ მორიგი ორი წევრი. მიმდევრობა შეიძლება იყოს არითმეტიკული პროგრესია, გეომეტრიული პროგრესია ან სხვა ლოგიკური მიმდევრობა.

ა) 1; 7; 13; 19; ...	ბ) 66; 33; 16,5; 8,25; ...	გ) 41; 32; 23; 14; ...
დ) 2; 3; 8; 63; ...	ე) 2; 5; 11; 23; 47; ...	ვ) 2; 5; 10; 50; 500; ...

გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

გამოკვლევა: დაწერეთ ცხრილში თავისუფალი უჯრების ადგილის შესაბამისი გამოსახულებები, თუ ცნობილია, რომ გეომეტრიული პროგრესია $b_{n+1} = b_n \cdot q$ რეკურენტული დამოკიდებულებითაა მოცემული.

b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$b_1 \cdot q$	$b_2 \cdot q = b_1 q^2$	$b_3 \cdot q = b_1 q^3$	$\square \cdot q = \square$	$\square \cdot q = \square$

რა დასკვნა გამოიტანეთ?

b_5 -ის მისაღებად b_1 , q -ს რომელ ხარისხზე უნდა გავამრავლოთ?

რა კავშირს ხედავთ q -ს ხარისხის მაჩვენებელსა და b_5 და b_1 -ის ინდექსებს შორის?

როგორ ფიქრობთ, q -ს რომელ ხარისხზე უნდა გავამრავლოთ b_1 , რომ მივიღოთ b_8 ?

გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

გეომეტრიულ პროგრესიაში b_n -ის პოვნისათვის b_1 უნდა გავამრავლოთ q^{n-1} -ზე, ე.ი.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

ეს, გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულაა.

გეომეტრიული პროგრესიის მოცემისათვის საკმარისია მისი პირველი წევრისა და მნიშვნელის მოცემა.

ნიმუში 1. გეომეტრიულ პროგრესიაში $b_1 = 3$, $q = 2$. ვიპოვოთ b_4 და b_7 .

ამოხსნა: $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$

შენიშვნა: $b_7 = b_1 \cdot q^6 = b_1 \cdot q^3 \cdot q^3 = b_4 \cdot q^3 = 24 \cdot 2^3 = 192$ ხერხით გაანგარიშებაც შეიძლება.

ზოგადად: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = b_k \cdot q^{n-k}$ ტოლობა მართებულია.

ნიმუში 2. გეომეტრიულ პროგრესიაში $b_2 = 4$; $b_5 = 32$ ვიპოვოთ b_7 .

ამოხსნა: რადგან $b_5 = b_2 \cdot q^3$, ამიტომ $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{32}{4} = 8$, $q = 2$ და $b_7 = b_5 \cdot q^2 = 32 \cdot 2^2 = 128$

დასკვნა: თუ ნებისმიერი ორი წევრი ცნობილია, გეომეტრიული პროგრესიის აგება შეიძლება. გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულის სხვა გზით მიღებაც შეიძლება. განსაზღვრების თანახმად

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 \cdot q \\ b_3 &= b_2 \cdot q \\ b_4 &= b_3 \cdot q \\ &\dots\dots\dots \\ b_n &= b_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

თუ გადავამრავლებთ წევრ-წევრ ამ $(n-1)$ ტოლობას, მივიღებთ:

$$b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

სადაც მარჯვენა და მარცხენა მხარეებში ერთი და იგივე წევრების შეკვეცით მივიღებთ ფორმულას. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

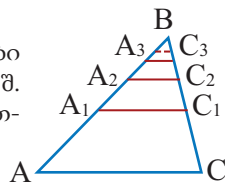
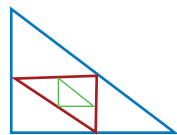
დასკვნა: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot \frac{q^n}{q} = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$ ჩაწერით, $\frac{b_1}{q} = c$ -თი თუ ავღნიშნავთ,

გასაგები იქნება, რომ ნებისმიერი გეომეტრიული პროგრესიის $b_n = c \cdot q^n$ ფორმულით მოცემა შეიძლება (სადაც c -ს ნულისგან განსხვავებული რაიმე რიცხვია, q -პროგრესიის მნიშვნელია).

გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

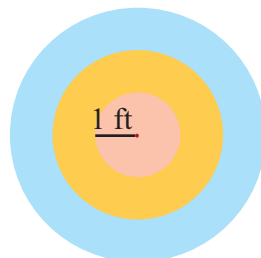
სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ უცნობები.
 - ა) თუ $b_1 = 3$; $q = 2$, მაშინ $b_4 = ?$ $b_5 = ?$
 - ბ) თუ $b_1 = 24$; $q = 0,5$, მაშინ $b_3 = ?$ $b_4 = ?$
 - გ) თუ $b_6 = 48$; $q = -2$, მაშინ $b_4 = ?$ $b_5 = ?$
 - დ) თუ $b_5 = 64$; $q = 2$, მაშინ $b_1 = ?$ $b_7 = ?$
 - ე) თუ $b_4 = 15$; $b_6 = 135$, მაშინ $q = ?$ $b_7 = ?$
 - ვ) თუ $b_1 = 3$; $b_5 = 48$, მაშინ $q = ?$ $b_7 = ?$
 - 2 > იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მეშვიდე წევრი.
 - ა) 2,5; 5; 10; 20; ...
 - ბ) $-0,25$; -1 ; -4 ; -16 ; ...
 - გ) $-\frac{64}{81}$; $\frac{32}{27}$; $-\frac{16}{9}$; $\frac{8}{3}$; ...
 - დ) 15 ; -5 ; $\frac{5}{3}$; $-\frac{5}{9}$; ...
 - 3 > მონაცემების მიხედვით დაწერეთ გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა.
 - ა) $b_1 = 4$, $q = 3$
 - ბ) $b_1 = 45$, $q = \frac{1}{3}$
 - გ) $b_3 = 72$, $q = 6$
 - დ) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{8}$
 - ე) $b_1 = -2$, $q = 2$
 - ვ) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_6 = -16$
 - 4 > ა) გეომეტრიულ პროგრესიაში $b_1 = 2$, $q = 3$. იპოვეთ იმ წევრის ნომერი, რომელიც 162-ის ტოლია.
 ბ) 0,1; 0,3; გეომეტრიულ პროგრესიაში იპოვეთ იმ წევრის ნომერი, რომელიც 24,3-ის ტოლია.
 - 5 > მონაცემების მიხედვით რეკურენტული წესით დაწერეთ გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრი.
 - 1) $b_1 = -4$, $q = 6$
 - 2) $b_1 = 4$, $q = 3$
 - 3) $b_1 = 2$, $q = -3$
 - 4) $b_1 = -4$, $q = 2$
 - 6 > მონაცემების მიხედვით დაწერეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი 5 წევრი. დაწერეთ პროგრესია რეკურენტული დამოკიდებულებათა და ესპილიტიკური ხერხით: 1) $b_4 = 25$, $q = -5$; 2) $b_1 = 4$, $q = 5$
- გამოყენებითი დაგეგმვები**
- 7 > მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტებიც 12 სმ და 16 სმ-ია ჩახაზულია სამკუთხედი, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებია. ანალოგიურად მეორე სამკუთხედში ჩახაზულია სამკუთხედი და ა.შ. იპოვეთ მე-6 სამკუთხედის პერიმეტრი.
 - 8 > $\triangle ABC$ -ში გაივლო A_1C_1 შუახაზი. $\triangle A_1BC_1$ -ში A_2C_2 შუახაზი გაივლო. ახლადმიღებულ $\triangle A_2BC_2$ -ში გაივლო A_3C_3 და ა.შ. იპოვეთ A_5BC_5 სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობი 3072 სმ²-ია.
 - 9 > **საფინანსო-საბუღალტრო.** რძის გადამამუშავებელმა საწარმომ იყიდა ახალი მოწყობილობა 200 ათას მანეთად. მოწყობილობაზე ყოველწლიურად 10% ამორტიზაცია (დაძველება) გამოითვლება. რა ეღირება ეს მოწყობილობა 3 წლის შემდეგ?

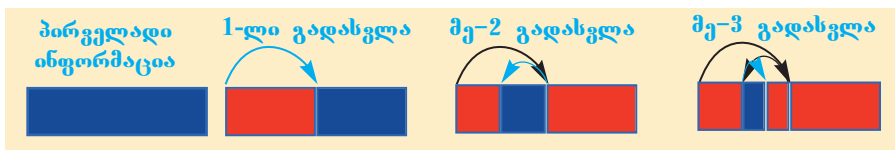


გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრის ფორმულა

- 10> ტყის ექსპერიმენტალურ მონაკვეთზე მასალა, რომელსაც შეშად იყენებდნენ, წლის განმავლობაში იზრდება 10%-ით. რისი ტოლი იქნება იგი 4 წლის შემდეგ, თუ ამჟამად მისი მოცულობა 20 000 მ³-ია?
- 11> გეომეტრიულ პროგრესიაში პირველი და მესამე წევრების ჯამი 15, მეორე და მეოთხე წევრების ჯამი კი 30-ია. იპოვეთ პირველი ოთხი წევრი.
- 12> ნასოსი ერთ ჯერზე ავზში არსებული საწვავის $\frac{1}{10}$ ნაწილს ექაჩება. რამდენი პროცენტი საწვავი დარჩება ავზში, ნასოსის 3-ჯერ გამოყენების შემდეგ?
- 13> სამიზნე შედგება წრეებისაგან, რომელთა რადიუსი ყოველ ჯერზე იზრდება 1 ft-ით (feet (ფუტი)-სიგრძის საზომი ერთეულია, 1 ft $\approx$ 30,48 სმ).
- ა) დაწერეთ ფორმულა, რომელიც უჩვენებს სამიზნის n -ური რგოლის ფართობს.
- ბ) გამოსახეთ მე-10 რგოლის ფართობი კვადრატულ სანტიმეტრებში.
- გ) დაწერეთ ფორმულა, რომელიც უჩვენებს n რგოლიან სამიზნის ფართობს.
- დ) სამიზნის ფართობის მიღებული ფორმულის მიხედვით გამოთვალეთ იგი $n = 1; 2; 4; 8$ მნიშვნელობებისათვის. როგორ იცვლება ფართობი n -ის მნიშვნელობის 2-ჯერ გაზრდით?



- 14> **კომპიუტერული მეცნიერება.** კომპიუტერში ელემენტის ძიება ხდება ბინარული ხერხით. ჯერ ელემენტს ეძებენ სიის პირველ ნახევარში. ასე განისაზღვრება, რომელ ნახევარში იმყოფება საძიებო ელემენტი და იხსნება აუცილებლობა მეორე ნახევრის შემოწმებისა. შემდეგ ეს ნახევარი ნაწილი იყოფა შუაზე და განისაზღვრება ელემენტის ადგილი. პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ არ იქნება ნაპოვნი აუცილებელი ელემენტი.



- ა) დაწერეთ გამოსახულება, რომელიც უჩვენებს 2048 ელემენტისაგან შემდგარ სიაში დარჩენილი ელემენტების რაოდენობას n -ური გადასვლის შემდეგ.
- ბ) საძიებელი ელემენტი ყველაზე უარეს შემთხვევაში შეიძლება იყოს ნაპოვნი ყველაზე ბოლო გადასვლაში: ამ შემთხვევაში 2048 ელემენტიანი ინფორმაციის ერთობლიობაში n -ის რა მნიშვნელობისათვის იქნება საძიებელი ელემენტი ნაპოვნი?

გომეტრიული პროგრესიის წევრების თვისებები

გამოკვლევა: დავწეროთ რომელიმე გომეტრიული პროგრესიის პირველი რვა წევრი. მაგალითად თუ, $b_1 = 3$, $q = 2$ ეს წევრები იქნება ცხრილში ჩაწერილები.

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
3	6	12	24	48	96	192	384

$\sqrt{3 \cdot 12} = 6$

$\sqrt{12 \cdot 48} = 24$

გომეტრიული პროგრესიის წევრები და გომეტრიული საშუალო

დადებით წევრებიან გომეტრიულ პროგრესიაში მეორიდან დაწყებული თითოეული წევრი, მისი მეზობელი წევრების გომეტრიული საშუალოს ტოლია. ეს თვისება განმარტავს გომეტრიული პროგრესიის სახელდების მიზეზს.

მაგალითად, 2, 6, 18, 54, 162,... მიმდევრობაში რიცხვი 18 წარმოადგენს 6 და 54-ის გომეტრიულ საშუალოს. საშუალო გომეტრიული ნათლად შეიძლება დავინახოთ, თუ დავწერთ დამოკიდებულებას, რომელიც გამოსახავს პროგრესიის მნიშვნელს. გომეტრიული პროგრესიის განსაზღვრებიდან მიიღება ტოლობა:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

თუ ამ ტოლობებს წყვილ-წყვილად ავიღებთ, მივიღებთ:

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3, \quad b_3^2 = b_2 \cdot b_4, \quad \dots, \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

ეს თვისება უფრო ზოგადად ქვემოთ მოცემულივით ყალიბდება:

გომეტრიულ პროგრესიაში მეორე წევრიდან დაწყებული თითოეული წევრის კვადრატი, მისგან ტოლ მანძილზე დაშორებული წევრების ნამრავლის ტოლია, ანუ

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$$

დადებითწევრებიანი გომეტრიული პროგრესიისათვის ეს თვისება

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad \text{სახით შეიძლება ჩაიწეროს.}$$

გომეტრიული პროგრესიის წევრების კიდევ ერთი თვისება: თუ $n + m = k + l$, მაშინ მართებულია ტოლობა: $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$.

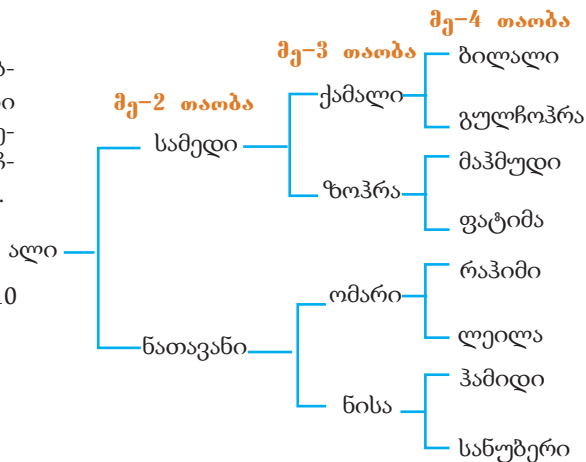
სასწავლო დაგეგმვები

- 1 > (b_n) გომეტრიული პროგრესიაში უჩვენეთ ტოლობის მართებულობა:
 - ა) $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$; ბ) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$; გ) $b_5 \cdot b_9 = b_6 \cdot b_8$; დ) $b_3 \cdot b_7 = b_4 \cdot b_6$;
 - ე) $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ ($n+m = k+l$).
- 2 > $x - 1$; 8; $x + 11$ რიცხვები გომეტრიული პროგრესიის ერთმანეთის მომდევნო წევრებია, იპოვეთ x .
- 3 > $x - 1$; $x + 2$; $x + 8$ რიცხვები გომეტრიული პროგრესიის მიმდევრობითი წევრებია. იპოვეთ x .
- 4 > უჩვენეთ, რომ $c_n = 3 \cdot 2^n$ ფორმულით მოცემული მიმდევრობა გომეტრიული პროგრესიაა. დაწერეთ პროგრესიის მნიშვნელი.
- 5 > დაწერეთ $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n \cdot 3$ რეკურენტული დამოკიდებულებით მოცემული მიმდევრობის n -ური წევრის ფორმულა.
- 6 > თუ $\div (b_n)$ გომეტრიული პროგრესიაა, მაშინ ა) b_1 ; b_3 ; b_5 ; b_7 ; ...
 ბ) b_1^2 ; b_2^2 ; b_3^2 ; ... მიმდევრობა გომეტრიული პროგრესია?

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

გამოკვლევა: ალიმ თავის მშობლების, 4 პაპა-ბებუის, 8 დიდი პაპა-ბებუის სახელების ჩამოწერით უშუალოდ მშობლების მაჩვენებელი თაობათა ხე შეადგინა.

რამდენი ადამიანი იქნება მე-10 თაობის მშობლების სიაში?



გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი ავლნიშნოთ S_n -ით:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \quad (1)$$

თუ $q = 1$, ყველა წევრი b_1 -ის ტოლია და $S_n = n \cdot b_1$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $q \neq 1$.

(1) უტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ q -ზე:

$$q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + \dots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q \quad (2)$$

(2) ტოლობას გამოვაკლოთ (1) ტოლობა. მივიღებთ:

$$q \cdot S_n - S_n = b_n \cdot q - b_1.$$

აქედან კი
$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}, \quad (q \neq 1) \quad (3)$$

(3) ფორმულას გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა ეწოდება. თუ გავითვალისწინებთ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ იგი

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1) \quad \text{სახით შეიძლება ჩავწეროთ.}$$

ნიმუში: გეომეტრიულ პროგრესიაში $b_2 = 6$, $b_5 = 48$ ვიპოვოთ პირველი 6 წევრის ჯამი.

ამოხსნა: რადგან $b_5 = b_2 \cdot q^3$, ამიტომ $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{48}{6} = 8$, $q = 2$

$b_2 = b_1 \cdot q$ ფორმულის თანახმად $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$

მაშინ $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

სასწავლო დაფალებები

- 1 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის მოთხოვნილი რაოდენობის წევრების ჯამი.

ა) $b_1 = 16, q = \frac{1}{2} \quad S_6 = ?$

ბ) $b_1 = 1, q = -2 \quad S_5 = ?$

გ) $3; 6; \dots, S_{10} = ?$

დ) $1; -2; 4; \dots, S_8 = ?$

- 2 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი სიდიდეები.

1) $-4 + 12 + (-36) + 108 + \dots$

2) $160 + (-80) + 40 + (-20) + \dots$

ა) $n = 6, S_n = -244$
 $S_6 = ? \quad n = ?$

ბ) $n = 7, S_n = 105$
 $S_7 = ? \quad n = ?$

- 3 > გეომეტრიულ პროგრესიაში მონაცემების მიხედვით იპოვეთ მოთხოვნილი სიდიდეები.

ა) $S_4 = 45, q = 2, b_1 = ?$

ბ) $S_4 = 130, q = \frac{2}{3}, b_4 = ?$

გ) $b_1 = 2, b_5 = 162, \text{ მაშინ } S_6 = ?$

დ) $b_2 = \frac{1}{5}, b_5 = \frac{1}{625}, \text{ მაშინ } S_5 = ?$

- 4 > $a_n = 3 \cdot 2^n$ მიმდევრობა გეომეტრიული პროგრესიაა. იპოვეთ: ა) პირველი 5 წევრის; ბ) პირველი n წევრის ჯამი.

- 5 > დაწერეთ მოცემული გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი.

ა) $1, y, y^2, y^3, y^4, \dots$

ბ) $3z, 6z^3, 12z^5, 24z^7, \dots$

- 6 > გეომეტრიული პროგრესიის მეოთხე და პირველი წევრების სხვაობა 26-ია. მეხუთე და მესამე წევრების სხვაობა კი 78-ია. იპოვეთ ამ პროგრესიის პირველი ექვსი წევრის ჯამი.

გამოყენებითი დაფალებები

- 7 > ცოცხალ ორგანიზმში მოხვედრილი ბაქტერია მე-20 წუთის ბოლოს ორად იყოს. მათგან თითოეული მომდევნო 20 წუთის ბოლოს კვლავ ორად იყოფა და ა.შ. იპოვეთ ერთი დღის ბოლოს ერთი ბაქტერიისაგან წარმოქმნილი ბაქტერიების რაოდენობა.

- 8 > უსაფრთხოებისათვის სიგნალიზაციის მოწყობილობის მწარმოებელი კომპანია მუშაობის დაწყებისას წელიწადში 10 000 მოწყობილობას ამზადებდა. წარმოების ზრდა წელიწადში 20%-ს შეადგენდა.

ა) რამდენი მოწყობილობა აწარმოა კომპანიამ საქმიანობის მე-5 წელს?

ბ) სულ რამდენი მოწყობილობა იქნა წარმოებული პირველ 5 წელიწადში?

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა

9 > გამარტივით გამოსახულება, როცა $x \neq 1$.

ა) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

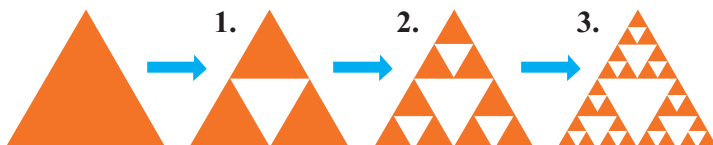
ბ) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

10 > გამარტივით გამოსახულება ($n \neq 1$).

ა) $\frac{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5}{1 + n + n^2}$

ბ) $\frac{1 + n + n^2 + n^3}{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7}$

11 > პოლონელმა მეცნიერმა ვაცლავ სერპინსკიმ ტოლგვერდა სამკუთხედების გვერდების შუა წერტილების შეერთებით მიღებული ტოლგვერდა სამკუთხედების ამოჭრა-ამოღებით “სერპინსკის ცხავის” სახელით ცნობილი მოზაიკა შექმნა. წარმოიდგინეთ, რომ პირველი სამკუთხედის გვერდები ერთეულოვანი სიგრძის ტოლგვერდა სამკუთხედი.



ა) პირველ ნაბიჯზე ამოჭრილ-ამოღებული სამკუთხედის რაოდენობა 1, მეორე ნაბიჯზე-3, მესამე ნაბიჯზე 9 და ა.შ. დაწერეთ n -ურ ნაბიჯზე ამოჭრილი სამკუთხედების რაოდენობის მაჩვენებელი ფორმულა.

ბ) ამ წესით რამდენი ტოლგვერდა სამკუთხედი ამოიჭრება მე-4; მე-5 ნაბიჯზე?

გ) გამოთვალეთ მე-3 ნაბიჯზე მოცემული სამკუთხედიდან გაუყოფლად დარჩენილი (ფერადი) ფართობი.

12 > წყვილი რაოდენობის წევრების მქონე სასრულ გეომეტრიულ პროგრესიაში წყვილ-ნომრიანი წევრების ჯამის, კენტნომრიანი წევრების ჯამთან შეფარდება პროგრესიის მნიშვნელის ტოლია. დაამტკიცეთ ეს მოსაზრება.

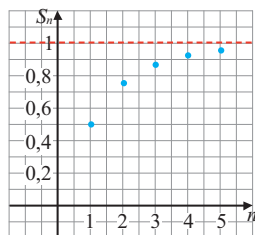
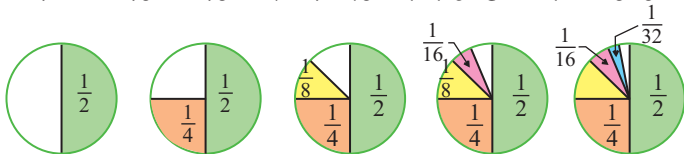
13 > ფერუხი ერთ სურათს ათვალიერებდა. სურათზე ერთი ძაღლია გამოსახული, ძაღლის უკან 4 ლეკვი იყო. თითოეული ლეკვის უკან 4 კატა მიდიოდა. თითოეული კატის უკან 4 კნუტი იყო. თითოეული კნუტის უკან 4 თაგვი მიდიოდა. სულ რამდენი ფეხის დათვლა შეეძლო ფერუხს ამ სურათზე?

14 > პროგრამული უზრუნველყოფით დასაქმებული კომპანია თამაშის სრულყოფისათვის 100 000 მანეთის დახარჯვას გეგმავს. კომპანიის ფინანსური მენეჯერები ამ საქმისათვის პირველ კვირაში 4000 მანეთის, ყოველ მომდევნო კვირაში წინასთან შედარებით 20%-ით მეტი ფულის დახარჯვას გეგმავენ. რა თანხა იქნება დახარჯული: ა) მე-5 კვირაში? ბ) პირველ ხუთ კვირაში? გ) მერამდენე კვირაში აღარ დარჩება დასახარჯი ფული?

15 > თითოეულმა 10 თაობისათვის მშობლების, პაპა-ბებიების, დიდი პაპა-ბებიების და ა.შ. რაოდენობა გამოთვალეთ. მერამდენე თაობაში იქნება ამ ადამიანების რაოდენობა 1 000 000-ზე მეტი?

უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, როცა $|q| < 1$

პრაქტიკული მეცადინეობა. სურათზე ერთი წრის განსაზღვრული წესით ნაწილებად დაყოფის ნაბიჯებია მოცემული: ა) წარმოადგინეთ ეს წესი სიტყვიერად. ბ) წრის ამ წესით წვრილ ნაწილებად დაყოფით დამთავრება შესაძლებელია?



გ) გამოსახეთ წრე ნაწილების ჯამის სახით. გამოიყენეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულის გამოყენება.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \approx 0,88$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \approx 0,94$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 0,97$$

$$S_n = b_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

დ) n -ის ზრდის კვალობაზე $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ -ის მნიშვნელობა შეადარეთ 0-თან.

ე) განმარტეთ მოცემული გრაფიკი სიტუაციის შესაბამისად. $n \rightarrow \infty$, და $S_n \rightarrow 1$ მოსაზრება წარმოადგინეთ გრაფიკის მიხედვით.

უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, როცა $|q| < 1$

თუ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა რაოდენობა უსასრულოა, მაშინ მას უსასრულო გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება. გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის ფორმულა გარდავქმნათ ქვემოთ მოცემული სახით.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$$

თუ $|q| < 1$, მაშინ n -ის უსასრულოდ გაზრდისას q^n მამრავლი, მაშასადამე $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$

ნამრავლიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. ამიტომაც n -ის უსაზღვროდ გაზრდისას S_n ჯამი $\frac{b_1}{1 - q}$ რიცხვისაკენ მიისწრაფვის. $\frac{b_1}{1 - q}$ რიცხვს ეწოდება იმ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, რომლისათვისაც $|q| < 1$.

თუ ამ ჯამს S -ით ავლნიშნავთ, შეგვიძლია ჩავწეროთ: $S = \frac{b_1}{1 - q}$ ($|q| < 1$)

ნამუშა: უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ფორმულის გამოყენებით პერიოდული ათწილადი 0,(3) გადააქციეთ ჩვეულებრივ წილადად.

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots \text{ ვინაიდან } q = \frac{1}{10}, b = \frac{3}{10} \text{ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულის}$$

$$\text{თანახმად } 0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

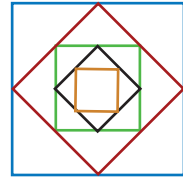
უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი, როცა $|q| < 1$

სასწავლო დაგვლებები

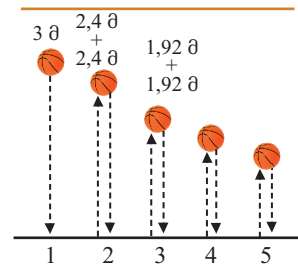
- 1 > გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელობისათვის შეამოწმეთ $|q| < 1$ პირობა და იპოვეთ პროგრესიის ჯამი.
 - ა) 18; 6; 2;
 - ბ) 0,3; 0,03; 0,003;
- 2 > იპოვეთ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი.
 - ა) $-\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; -\frac{1}{32}; \dots$
 - ბ) $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots$
- 3 > იპოვეთ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი, თუ ცნობილია ჯამი და პირველი წევრი.
 - ა) $S = 4, b_1 = 1$
 - ბ) $S = 12, b_1 = 3$
 - გ) $S = -\frac{1}{9}, b_1 = -\frac{1}{6}$
 - დ) $S = 8; b_1 = \frac{1}{2}$
 - ე) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}; b_1 = \sqrt{3}$
 - ვ) $S = \frac{11}{13}, b_1 = 1$
- 4 > იპოვეთ ჯამი, რომლის შესაკრებებიც წარმოადგენენ უსასრულო გეომეტრიული პროგრესიის წევრებს ($|a| < 1$).
 - ა) $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$
 - ბ) $1 - a + a^2 - a^3 + \dots$
 - გ) $1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots$
 - დ) $1 - a^3 + a^6 - a^9 + \dots$
- 5 > გარდაქმენით პერიოდული ათწილადები ჩვეულებრივ წილადებად.
 - ა) 0,(2)
 - ბ) 0,(15)
 - გ) 2,(6)
 - დ) 0,2(7)

გამოყენებითი დაგვლებები

- 6 > მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდი 6 სმ-ია, მისი გვერდების შუაწერტილები მეორე კვადრატის წვეროებია. მეორე კვადრატის გვერდების შუაწერტილები მესამე კვადრატის წვეროებია და ა.შ. ვიპოვოთ ამ წესით აგებული ყველა კვადრატის ფართობის ჯამი.
- 7 > 6 სმ რადიუსიან წრეწირში წესიერი სამკუთხედი ჩახაზული. სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი, ამ წრეწირში ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი და ა.შ. იპოვეთ ამ წრეწირების სიგრძეების ჯამი.



- 8 > ბურთი ეცემა 3 მეტრის სიმაღლიდან და ზევით ავარდება. ყოველ ჯერზე მიწაზე დაცემის შემდეგ ბურთის ავარდნის სიმაღლე შეადგენს წინა სიმაღლის 80%-ს. იპოვეთ იმ მანძილის საერთო სიგრძე, რომელსაც გაივლის ბურთი.



განმარტოგადებელი დაცალეებები

- 1 > იპოვეთ მიმდევრობის პირველი ხუთი წევრი.

ა) $a_1 = 5$

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

ბ) $a_1 = 1$

$$a_n = 4a_{n-1}$$

გ) $a_1 = 17$

$$a_n = a_{n-1} + n$$

დ) $a_1 = 1, a_2 = 2$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

- 2 > $\therefore (b_n)$ გეომეტრიულ პროგრესიაში პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება $S_n = 2 \cdot (5^n - 1)$ ფორმულით. იპოვეთ S_3 , b_1 და b_4 .

- 3 > განსაზღვრეთ მიმდევრობის სახე და დაწერეთ მორიგი ორი წევრი.

ა) $5; -3; 5; -3; \dots$

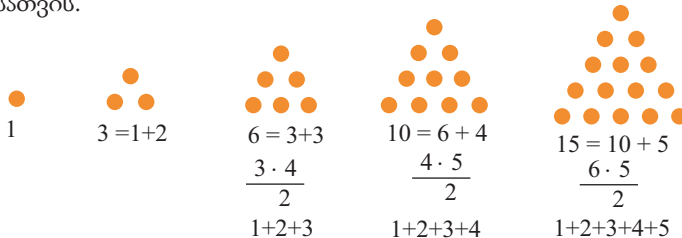
ბ) $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \dots$

გ) $\sqrt{3}; 3; 3\sqrt{3}; 9; \dots$

დ) $1; -1; 1; -1; \dots$

- 4 > სამშენებლო კომპანია 500 000 მანეთად შეიძინა ბუღდოზერი. ბუღდოზერის ფასი ყოველწლიურად 20%-ით კლებულობს წინასთან შედარებით. დაწერეთ ფორმულა ბუღდოზერის ფასის ნებისმიერი n -ური წლისათვის გამოსათვლელად. რამდენი წლის შემდეგ იქნება ბუღდოზერის ფასი 256 ათასი მანეთი?

- 5 > გამოიკვლიეთ ქვემოთ მოცემული სურათი. დაწერეთ მიმდევრობის კიდე 5 წევრი. დაწერეთ ფორმულა ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრის გამოთვლისათვის.



- 6 > იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი 21 წევრის ჯამი თუ $a_3 + a_6 + a_{24} = 12$.

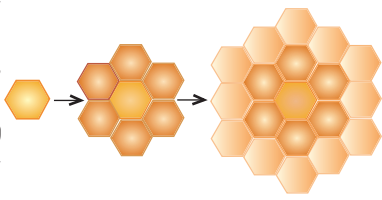
- 7 > არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_4 = 9$, და $a_9 = -6$. პირველი რამდენი წევრის ჯამია 54?

- 8 > 1, 2, 5, 10, a , 12, b , c ზრდად მიმდევრობაში (a , b , c ნატურალური რიცხვებია) წევრების არითმეტიკული საშუალო 12-ის ტოლია. რას უდრის b -ს უდიდესი შესაძლო მნიშვნელობა?

- 9 > არითმეტიკული პროგრესიის შემდგენი სამი რიცხვის ჯამი 45-ის ტოლია. თუ პირველ რიცხვს გამოვაკელით 2, მეორეს 9 და მესამეს 8, ეს რიცხვები შეადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის წევრები.

- 10 > (ძველებური ამოცანა) ვაჭარს 14 ვერცხლის ფული აქვს. ვერცხლის ფულების წონა შეადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის სხვაობაც 4-ის ტოლია. ბოლო ვერცხლის ფულის წონა 59 ლოტია. (ლოტი - ძველებური საზომი ერთეულია და 12.8 გრამის ტოლია). რას უდრის ფულის საერთო წონა?

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 11 > იპოვეთ 6,6; 5,8; არითმეტიკული პროგრესიის დადებით წევრთა ჯამი.
- 12 > არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი მოცემულია ფორმულით: $S_n = 2n^2 + 3n$. იპოვეთ პირველი წევრი და სხვაობა.
- 13 > არითმეტიკულ პროგრესიაში, რომლის წევრები მთელი რიცხვებია $a_3 = 11$, პირველი 8 წევრის ჯამი კი 72-ზე მეტი, 80-ზე ნაკლებია. იპოვეთ a_2 .
- 14 > გეომეტრიული პროგრესიის პირველი ოთხი წევრის ჯამია 8. მომდევნო ოთხი წევრის ჯამი კი 4-ის ტოლია. იპოვეთ პირველი 12 წევრის ჯამი.
- 15 > იპოვეთ a და b რიცხვები თუ a , b , 12 რიცხვები შეადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, ხოლო a , b , 9 რიცხვები კი არითმეტიკულ პროგრესიას.
- 16 > მუშა ფუტკრები ჯერ ერთ წესიერ ექვსკუთხა უჯრას, მერე ეტაპზე ამ ექვსკუთხედის გვერდებზე ახალ უჯრებს ქმნიან და ქმნიან თავ-ლოვან ბადეს.
- ა) რამდენ ექვსკუთხედს ქმნიან ფუტკრები მე-4, მე-5 ეტაპზე?
- ბ) დაწერეთ ფორმულა ნებისმიერი n -ურ ეტაპზე აგებული ექვსკუთხედების რაოდენობის გამოთვლისათვის.
- 
- 17 > პირველ წამში სხეული გადის 6 მ-ს, ყოველ შემდეგ წამში კი 4 მ-ით მეტს ვიდრე წინაში.
- ა) რა მანძილს გაივლის სხეული 20 წამში?
- ბ) რამდენ წამში გაივლის სხეული 4800 მ-ს?
- 18 > ტაპირი და ორხანი ოცნებობენ ველოსიპედის შეძენაზე. ველოსიპედი ღირს 120 მანეთი. ტაპირი ფიქრობს, რომ თუ მამა მისცემს მას პირველ დღეს 4 მანათს, ხოლო ყოველ მომდევნო დღეს 4 მანათით მეტს, ვიდრე წინა დღეს, მაშინ 7 დღეში შეძლებს შეაგროვოს საჭირო თანხა. ორხანი კი თვლის, რომ თუ მამა მას პირველ დღეს მისცემს 1 მანეთს, ხოლო ყოველ მომდევნო დღეს 2-ჯერ მეტს წინასთან შედარებით, მაშინ 7 დღეში შეძლებს შეაგროვოს საჭირო თანხა, ვინ არის მათ შორის მართალი?
- 19 > კომპიუტერის მწარმოებელმა A და B ფირმებმა დაიწყეს თავისი საქმიანობა 2000 წელს და მათმა შემოსავალმა ამ წელს შეადგინა შესაბამისად 2 მილიონი მანეთი და 25 ათასი მანეთი. 2010 წლამდე A ფირმის შემოსავალი იცვლებოდა არითმეტიკული პროგრესიით, ხოლო B ფირმის კი გეომეტრიული პროგრესიით. A ფირმის შემოსავლები ყოველწლიურად იზრდებოდა 100 ათასი მანეთით. B ფირმისა კი 2-ჯერ. დაწერეთ ფორმულები n -ური წლისათვის კომპანიებს ფულადი შემოსავლების გამოსათვლელად. გამოთვალეთ და შეადარეთ ამ კომპანიების შემოსავლები 2007 წლისათვის. 2000 წლის შემოსავალი ჩათვალეთ როგორც პირველი წევრი.

- 20 > იპოვეთ ჯამი.

ა) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$ ბ) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \frac{7}{2^7} + \dots$

გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა

პარალელური გადატანა

პარალელური გადატანისას წერტილები პარალელური (ან თანხვედრილი) წრფეების გასწვრივ ერთი და იმავე მანძილით გადაადგილდება და ფიგურა თავის კონგრუენტულ ფიგურად გარდაიქმნება.

სურათზე მოცემული $A'B'C'$ სამკუთხედი ABC სამკუთხედის პარალელური გადატანის შედეგადაა მიღებული. სადაც $AA' = BB' = CC'$,

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

საკოორდინატო სისტემაზე მოცემული DEF სამკუთხედის თითოეული წერტილი 4 ერთეულით მარჯვნივ, 5 ერთეულით ქვევითაა გადატანილი.

$$D(1; 2) \rightarrow D'(5; -3)$$

$$E(4; 2) \rightarrow E'(8; -3)$$

$$F(1; 6) \rightarrow F'(5; 1)$$

ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ: $DE = 3$, $D'E' = 3$; $DF = 4$, $D'F' = 4$; $FE = 5$, $F'E' = 5$ სამკუთხედების კონგრუენტულობის ნიშნის თანახმად $\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$

ფიგურების პარალელური გადატანისას ნებისმიერი $A(x; y)$ წერტილი $A'(x'; y')$ წერტილად გარდაიქმნება და ამ წერტილების კოორდინატებს შორის $x' = x + a$, $y' = y + b$ ტოლობები მართებულია.

საკოორდინატო სისტემაზე პარალელური გადატანისას გადაადგილება საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ მარჯვნივ და ზევით გამოიხატება დადებითი, მარცხნივ და ქვევით კი უარყოფითი ერთეულებით. ეს განისაზღვრება a და b რიცხვებით.

პარალელური გადატანის დროს ორ წერტილს შორის მანძილი არ იცვლება.

მართლაც, პარალელური გადატანისას ნებისმიერი ორი $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილები $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ და $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ წერტილებად გარდაიქმნება.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad A'B' = \sqrt{((x_2 + a) - (x_1 + a))^2 + ((y_2 + b) - (y_1 + b))^2}$$

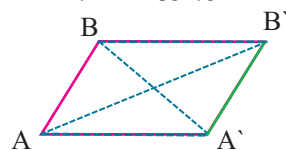
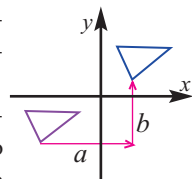
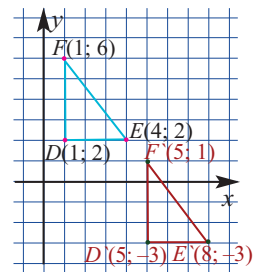
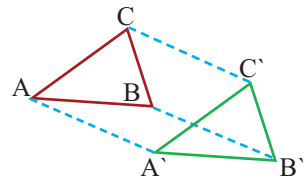
სადაც $AB = A'B'$. მაშასადამე პარალელური გადატანისას მანძილი არ იცვლება.

AB' მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებია:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + a}{2} \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}$$

$A'B$ მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებიც იგივე იქნება (თვითონ შემოწმეთ). მაშასადამე, $ABB'A'$ ოთხკუთხედის დიაგონალები იკვეთებიან და გადაკვეთის წერტილით ორივე მათგანი შუაზე იყოფა ანუ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები კი პარალელურია. პარალელური გადატანისას წრფე პარალელურ წრფეში (ან თავის თავში) გადადის.

ერთი ფიგურის მეორედ გარდაქმნისას, თუ წერტილებს შორის მანძილი შენარჩუნებული იქნება, ასეთ გარდაქმნას მოძრაობა ეწოდება. პარალელური გადატანა მოძრაობაა.



გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა

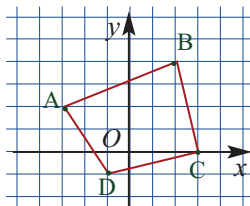
- 1 > დაწერეთ პარალელური გადატანა $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$ სახით:
 ა) 4 ერთეულით მარცხნივ, 2 ერთეულით ქვევით;
 ბ) 2 ერთეულით მარჯვნივ, 2 ერთეულით ზევით;
 გ) 3 ერთეულით მარჯვნივ, 5 ერთეულით ზევით;
 დ) 3 ერთეულით მარცხნივ, 1 ერთეულით ზევით.
- 2 > რვეულში ჩაიხაზეთ სურათზე მოცემული ოთხკუთხედის მოცემული პარალელური გადატანა.

ა) $(x; y) \rightarrow (x - 1; y + 2)$

ბ) $(x; y) \rightarrow (x + 3; y - 2)$

გ) $(x; y) \rightarrow (x - 3; y - 1)$

დ) $(x; y) \rightarrow (x + 1; y + 2)$

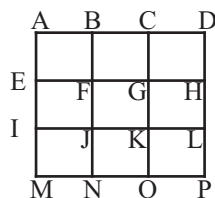


- 3 > $\triangle ABC$, რომლის წვეროებია $A(3; -4)$, $B(3; 2)$, $C(5; 1)$, პარალელური $(x; y) \rightarrow (x - 2; y + 1)$ გადატანისას გადადის $\triangle A'B'C'$ -ში. განსაზღვრეთ $\triangle A'B'C'$ -ის წვეროს წერტილების კოორდინატები და დახაზეთ სამკუთხედები.

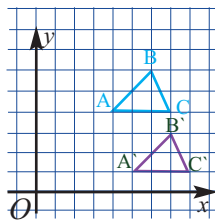
- 4 > მოცემულია $\triangle ABC$, რომლის წვეროს წერტილებია $A(2; -1)$, $B(4; 2)$, $C(-3; 3)$ პარალელური გადატანისას A წერტილი $A'(-1; -1)$ წერტილში გადავიდა. იგივე პარალელური გადატანით B წერტილი B' წერტილში და C წერტილი C' წერტილში გადავიდა. იპოვეთ B' და C' წერტილების კოორდინატები. დაწერეთ ეს პარალელური გადატანა $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$ სახით.

- 5 > სურათზე 9 კონგრუენტული მართკუთხედია ნაჩვენები. აქ A წერტილი პარალელური გადატანით G წერტილში გადავიდა. განსაზღვრეთ იგივე პარალელური გადატანით ქვემოთ მოცემული წერტილებიდან თითოეულის გადასვლის წერტილი.

ა) F ბ) E გ) B დ) J ე) I



- 6 > $\triangle ABC$ -ს წვეროს წერტილებია $A(4, 4)$, $B(6, 6)$ და $C(7, 4)$, ამასთან $(x, y) \rightarrow (x + 1, y - 3)$ განსაზღვრავს $\triangle ABC$ -ს გარდაქმნას $\triangle A'B'C'$ -ში. დაამტკიცეთ, რომ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



დამტკიცების გეგმა:

- 1) გამოიყენეთ პარალელური გადატანა, იპოვეთ A' , B' და C' წერტილების კოორდინატები.
- 2) გამოიყენეთ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულა.
- 3) ისარგებლეთ კონგრუენტული სამკუთხედების თვისებებით.

გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა

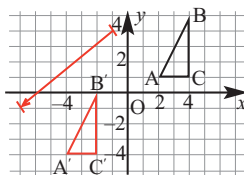
7 > ჩაწერეთ პარალელური გადატანისას წერტილების ახალი კოორდინატები:

- | | |
|--|---|
| ა) 3 ერთეულით Ox ღერძისა და -2 ერთეულით Oy ღერძის გასწვრივ | ბ) -4 ერთეულით Ox ღერძისა და -3 ერთეულით Oy ღერძის გასწვრივ |
| $F(-4; 1), A(-2; 5), S(-1; 4), N(-1; 2)$ | $D(-4; -3), E(-2; -2), F(-2; -4)$ |

პარალელური გადატანა და ვექტორები

თითოეული პარალელური გადატანა განსაზღვრავს ერთ ვექტორს. ე.ი. პარალელური გადატანისას ფიგურის ყველა წერტილის გადანაცვლება სრულდება ერთი ვექტორით. პარალელური გადატანის ვექტორით გამოსახვა ამარტივებს ჩანაწერს. ვექტორის კომპონენტები $\vec{u} \langle a; b \rangle$ უჩვენებენ წერტილის კოორდინატების ცვლილებას Ox და Oy ღერძების მიმართ. სურათზე გამოსახულია $\triangle ABC$ -ს $\vec{u} \langle -6; -5 \rangle$ პარალელური გადატანა.

ვექტორის კომპონენტების გამოყენებით შეიძლება განისაზღვროს ფიგურის გადაადგილება. ABC სამკუთხედის ყველა წერტილი გადანაცვლებს $\vec{u} \langle -6; -5 \rangle$ ვექტორის სიგრძეზე და $\triangle A'B'C'$ -ად გარდაიქმნება.



ვექტორის სიგრძე $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} \approx 7,8$ (ერთეული).

ვექტორის პარალელური გადატანა: $\langle -6; -5 \rangle$

8 > პარალელური გადატანის შესაბამისი ვექტორები ჩაწერეთ კომპონენტებით:

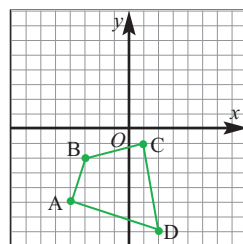
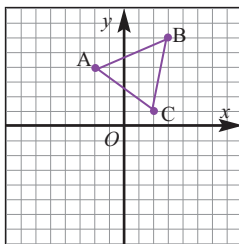
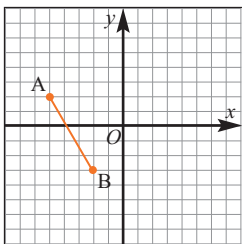
- ა) 5 ერთეული მარჯვნივ, 8 ერთეული ზევით;
 ბ) 2 ერთეული მარცხნივ, 5 ერთეული ზევით;
 გ) 3 ერთეული მაცხნივ, 5 ერთეული ქვევით;
 დ) 4 ერთეული მარცხნივ, 5 ერთეული ქვევით.

9 > მოცემული ვექტორების მიხედვით პარალელურად გადაიტანეთ ფიგურები.

ა) $\langle -2; 5 \rangle$

ბ) $\langle 1; -4 \rangle$

გ) $\langle 3; 2 \rangle$



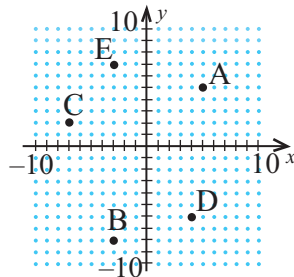
10 > $A(-3; -2)$ წერტილი $(x; y) \rightarrow (x + 5; y + 3)$ წესით პარალელურადაა გადატანილი და გარდაიქმნა A' წერტილად. 1) დაწერეთ ვექტორი, რომელიც განსაზღვრავს პარალელურ გადატანას; 2) ჩაიწერეთ A' წერტილის კოორდინატები.

11 > დაწერეთ ვექტორი, რომელიც განსაზღვრავს პარალელურ გადატანას.

ა) $B \rightarrow D$

ბ) $A \rightarrow C$

გ) $A \rightarrow B$



გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა

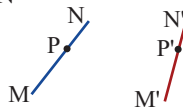
მოძრაობა და კონგრუენტული ფიგურები

დავუშვათ, რომ F ფიგურის თითოეულ წერტილს სიბრტყის განსაზღვრული წერტილი აქვს შეპირისპირებული. ასეთ წერტილთა ერთობლიობა მთლიანობაში F -ისაგან განსხვავებულ F' ფიგურას ქმნის. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ F' ფიგურა F ფიგურის გარდაქმნიტაა მიღებული. სიბრტყეც გეომეტრიული ფიგურაა. სიბრტყის თავისთავში გადასვლისას მისი ნებისმიერი წერტილი ამ სიბრტყის წერტილში გადადის, თანაც ამ გარდაქმნაში სიბრტყის თითოეულ წერტილში გარდაქმნილი წერტილი არსებობს. თუ ერთი ფიგურის მეორე ფიგურად გარდაქმნის დროს, მანძილი წერტილებს შორის შენარჩუნებულია, მაშინ ფიგურის ყველა გეომეტრიული თვისებები შენარჩუნდება და ფიგურა კონგრუენტულ ფიგურად გარდაიქმნება, ასეთ გარდაქმნას მოძრაობა ეწოდება.

ორი მიმდევრობით შესრულებული მოძრაობის შედეგიც მოძრაობაა.

თეორემა. მოძრაობისას მონაკვეთი მონაკვეთში გადადის.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ მოცემულ მოძრაობაში MN მონაკვეთის ბოლოები შესაბამისად M' და N' წერტილებში გადადის. დამტკიცეთ, რომ MN მონაკვეთი $M'N'$ მონაკვეთში გადადის. MN მონაკვეთზე ავიღოთ ნებისმიერი P წერტილი: $MP + PN = MN$. P წერტილის გარდაქმნილი წერტილი იყოს P' . იმდენად, რამდენადაც მოძრაობის დროს



წერტილებს შორის მანძილი შენარჩუნდება $M'N' = MN$, $M'P' = MP$, $N'P' = NP$.

აქედან $M'P' + P'N' = M'N'$. ეს იმას ნიშნავს, რომ P' წერტილი $M'N'$ მონაკვეთზეა, ანუ MN მონაკვეთის P წერტილი $M'N'$ მონაკვეთის P' წერტილში გადადის.

$M'N'$ მონაკვეთის თითოეული P' წერტილისათვის MN მონაკვეთს აქვს ისეთი P წერტილი, რომ იგი მოძრაობისას P' წერტილში გადავიდეს? დიახ, MN -ზე თუ ავიღებთ $MP = M'P'$ პირობის დამაკმაყოფილებელ P წერტილს, ეს წერტილი P' -ში გადავა. თეორემა დამტკიცებულია.

დასკვნა: რადგან მოძრაობისას სამკუთხედის თითოეული გვერდი გადადის კონგრუენტულ მონაკვეთში, სამკუთხედიც (ზმზ ნიშნის მიხედვით) კონგრუენტულ სამკუთხედად გარდაიქმნება. მოძრაობისას წრფეები წრფეებში გადადის, სხივები - სხივებში, კუთხეები - თავის ტოლ კუთხეებში.

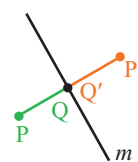
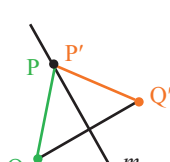
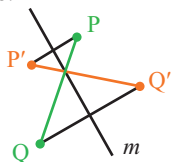
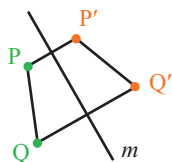
გამოვიკვლიოთ ეს საკითხი სიმეტრიის ღერძზე (ასახვა).

თეორემა. წრფის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა (ასახვა) მოძრაობაა.

სურათზე PQ მონაკვეთის m წრფის მიმართ მოძრაობაა ასახული.

PQ მონაკვეთისა და m წრფის მდგომარეობის მიხედვით განვიხილოთ 4 შემთხვევა.

1. P და Q წერტილები m წრფის მიმართ ერთ მხარეს მდებარეობენ.
2. P და Q წერტილები m წრფის მიმართ სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ.
3. ერთ-ერთი წერტილი წრფეზე მდებარეობს, PQ არ არის m წრფის მართობული.
4. Q წერტილი m წრფეზე მდებარეობს. $PQ \perp m$



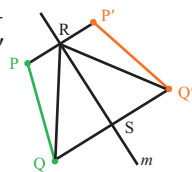
დავამტკიცოთ თეორემა პირველი შემთხვევისათვის.

დამტკიცება ტექსტით. ამ შემთხვევაში P და Q წერტილები m წრფის მიმართ ერთ მხარეს მდებარეობენ.

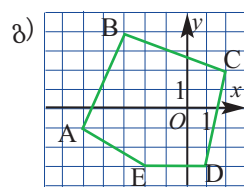
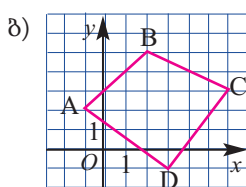
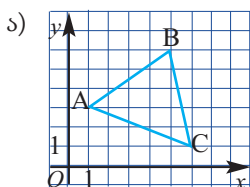
გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა

ასახვითი მოძრაობის განსაზღვრების თანახმად რადგან RS მონაკვეთი PP' და QQ' მონაკვეთების შუამართობია, ამიტომ $RQ \cong R'Q'$ და $\angle QRS \cong \angle Q'RS'$.

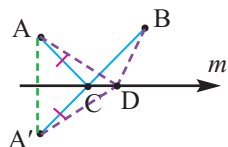
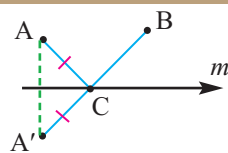
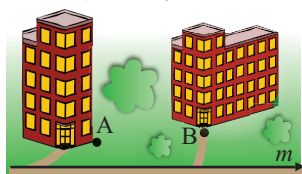
რადგან $PR \cong RP'$, $\angle PRQ \cong \angle P'RQ'$ ბმპ ნიშნის თანახმად $\Delta RQP \cong \Delta RQ'P'$. თეორემა დამტკიცებულია.



12 > გამოსახეთ მრავალკუთხედების Ox და Oy ღერძების მიმართ ასახვა.



13 > წრფივი m გზის ნაპირას მდებარე A და B შენობებში ტელეფონების გაყვანისათვის გამანაწილებელი მოწყობილობის ისეთ C წერტილში განთავსება საჭირო, რომ $AC + BC$ იყოს მინიმუმი და შეძლებისდაგვარად ნაკლები კაბელი გახდეს საჭირო. როგორ შეიძლება განისაზღვროს გამანაწილებელი მოწყობილობის განთავსების C წერტილი?



ამოხსნა: ავლნიშნოთ A წერტილის m წრფის მიმართ ასახვით გარდაქმნილი A' წერტილი და გავავლოთ A'B მონაკვეთი, ავლნიშნოთ m წრფესთან გადაკვეთის C წერტილი. A'B მონაკვეთი A' და B წერტილებს შორის უმოკლესი მანძილია და რადგან $AC = A'C$, C წერტილი ამ მიზნით არჩეული ყველაზე ხელსაყრელი წერტილია. მართლაც, m წრფის სხვა D წერტილისათვის სამკუთხედის უტოლობიდან:

$$AD + DB = A'D + DB > A'B = A'C + CB = AC + CB$$

14 > ახსცისთა ღერძზე იპოვეთ ისეთი C წერტილი, რომ $AC + BC$ იყოს მინიმალური.

ა) A(1, 5), B(7, 1)

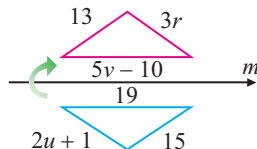
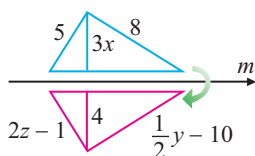
ბ) A(2, -2), B(11, -4)

გ) A(-1, 4), B(6, 3)

დ) A(-4, 6), B(3, 9)

ნიმუში: Ox ღერძზე ვიპოვოთ ისეთი C წერტილი, რომ $AC + CB$ მანძილი იყოს უმოკლესი. A(1; 5) წერტილი Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიულად გადავითანოთ: A'(1; -5). A'(1; -5) და B(7; 1) წერტილებზე გავავალი წრფის განტოლება $y = x - 6$ სახისაა. ამ წრფის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი C (6; 0) იქნება.

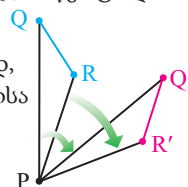
15 > სურათზე m წრფის მიმართ ასახვითი მოძრაობაა ნაჩვენები. იპოვეთ ცვლადების მნიშვნელობები.



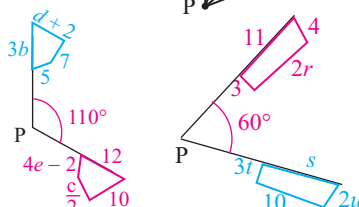
გეომეტრიული გარდაქმნები. მოძრაობა

- 16 > სურათი მოზრუნებითი მოძრაობის შედეგად Q წერტილის Q', R წერტილის R' წერტილად გარდაქმნას ასახავს. **დაამტკიცეთ:** $PQ \cong P'Q'$

დამტკიცების გეგმა: მოზრუნების განსაზღვრების თანახმად, $PQ \cong PQ'$, $PR = PR'$ და $\angle QPQ' \cong \angle RPR'$. კუთხეების შერებისა და სამკუთხედების კონგრუენტულობის ნიშნების გამოყენებით დაასრულეთ დამტკიცება.



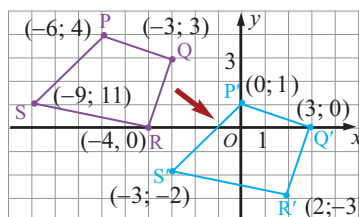
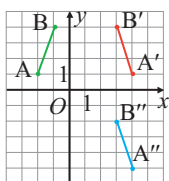
- 17 > სურათზე მრავალკუთხედის P წერტილის გარშემო მოზრუნების მოძრაობაა ასახული. მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადები.



- 18 > სამკუთხედის წვეროები A(-1, 0), B(2, 3) და C(3, -3) წერტილებშია. ეს სამკუთხედი $\vec{u} \langle 4; -2 \rangle$ პარალელურადაა გადატანილი. დაწერეთ მიღებული სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები.

- 19 > რომელი ორი მიმდევრობითი მოძრაობის შედეგად გარდაიქმნება AB მონაკვეთი A'B'' მონაკვეთად?

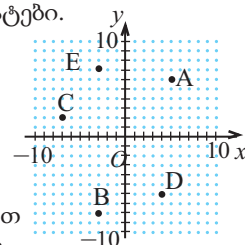
- 20 > სურათის მიხედვით დაწერეთ პარალელური გადატანის შესრულების ვექტორი.



- 21 > ა) $(x; y) \rightarrow (x + 3; y + 2)$ კოორდინატების ცვლილება დაწერეთ სიტყვებით.
 ბ) A(-3; 5) წერტილი Ox ღერძის მიმართ ასახვითი მოძრაობის შედეგად A' წერტილად გარდაიქმნა. დაწერეთ A' წერტილის კოორდინატები.
 გ) D(3; 4) წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ 180° -ითაა მოზრუნებული. იპოვეთ D' წერტილის კოორდინატები.
 დ) E(-3; 4) წერტილზე $\vec{u} \langle 4; 5 \rangle$ ვექტორის მიმართ პარალელური გადატანით E' წერტილად გარდაიქმნა. დაწერეთ E' წერტილის კოორდინატები.

- 22 > უჩვენეთ მოცემული ვექტორის მიმართ პარალელური გადატანისას C წერტილის გარდაქმნის წერტილი.

ა) $\langle 4; 5 \rangle$ ბ) $\langle 11; -8 \rangle$ გ) $\langle 4; -10 \rangle$

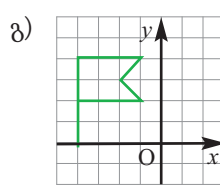
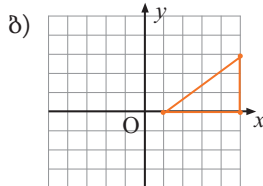
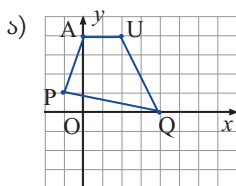


- 23 > საკოორდინატო სისტემაზე კოორდინატთა სათავის მიმართ თითოეული მოზრუნებით (სათავის ისრისა და მის საწინააღმდეგო მიმართულებით) დაასრულეთ კოორდინატების შეცვლის წესი. სურათზე უჩვენეთ.

ა) $90^\circ (x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$ ბ) $180^\circ (x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$
 გ) $270^\circ (x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$ დ) $360^\circ (x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$

განმაზოგადებელი დაგალებები

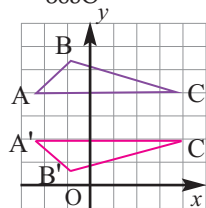
- 1> სურათები რვეულში ჩაიხაზეთ. თითოეული მოცემული ვექტორის მიმართ პარალელურად გადაიტანეთ. $\langle 3; 0 \rangle$ $\langle -4; -1 \rangle$ $\langle 2; -2 \rangle$



- 2> პარალელური გადატანისას $P(6; -2)$ წერტილი გადადის P' წერტილში. თითოეული შემთხვევისათვის განსაზღვრეთ პარალელური გადატანის ვექტორი.

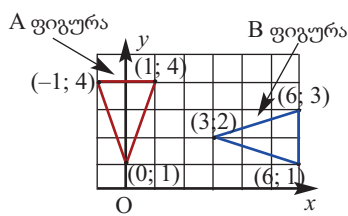
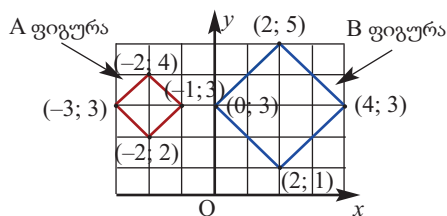
- ა) $P'(2; 0)$ ბ) $P'(-3; 1)$ გ) $P'(8; -3)$

- 3> $\triangle ABC$ ასახვის მოძრაობით $\triangle A'B'C'$ -ად გარდაიქმნა. განსაზღვრეთ ასახვის ხაზი.



4>

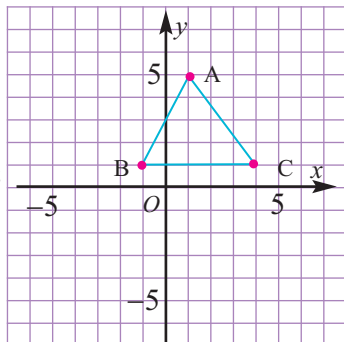
წარმოადგინეთ ორი ისეთი მიმდევრობითი გარდაქმნა, რომ A ფიგურიდან შესაძლებელი იყოს B ფიგურის მიღება.



- 5> A $(2, -2)$, B $(2, 3)$, C $(-4, -2)$ $\triangle ABC$ -ს წვეროს წერტილებია. სამკუთხედი ასახული. Ox ღერძის მიმართ და მობრუნებულია კოორდინატთა სათავის გარშემო, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით 90° -ით, შემდეგ კი გადატანილია 3 ერთეულით ქვევით და 2 ერთეულით მარცხნივ. დახაზეთ ყოველი მოძრაობის შესაბამისი სურათი და დაწერეთ სამკუთხედის წვეროების კოორდინატები: ა) ასახვის შემდეგ; ბ) მობრუნების შემდეგ; გ) პარალელური გადატანის შემდეგ.

- 6> დაწერეთ A' , B' , C' წვეროს წერტილების კოორდინატები თითოეული მოძრაობის შემდეგ:

- 1) $\langle 3; 0 \rangle$ ვექტორის მიმართ პარალელური გადატანა;
- 2) $\langle -4; 2 \rangle$ ვექტორის მიმართ პარალელური გადატანა;
- 3) Oy ღერძის მიმართ ასახვა;
- 4) $x = -2$ წრფის მიმართ ასახვა;
- 5) C წერტილის გარშემო საათის ისრის მიმართულებით 90° -ით მობრუნება;
- 6) კოორდინატთა სათავის გარშემო 180° -ით მობრუნება;
- 7) A წერტილში ცენტრით $k = 2$ კოეფიციენტიანი ჰომოთეტია;
- 8) ცენტრით კოორდინატთა სათავეში $k = 2$ კოეფიციენტიანი ჰომოთეტია.



ინფორმაციის დაჯგუფება და წარდგენა

- ინფორმაციის დაჯგუფება
- ინფორმაციის სიხშირე (გაბნევა)
- ფარდობითი სიხშირე

ინფორმაციის წარდგენა

- ინფორმაციის დანაწილების გრაფიკები

ინფორმაციის ანალიზი და წარდგენა

- საშუალო არითმეტიკული დანაწილების სიხშირის მიხედვით
- სიხშირის განაწილების სახე

შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი

- პერმუტაცია
- პერმუტაციის რიცხვი განმეორებად-ელემენტებიან სიმრავლეში
- კომბინეზონი

პერმუტაცია, კომბინეზონი და ალბათობა



ინფორმაციის დაჯგუფება. ინფორმაციის სიხშირე

მონაცემთა ბაზის მიხედვით ინფორმაციის კლასებში დაჯგუფება, სიხშირის განსაზღვრა და სიხშირის ცხრილის აგება შევასრულოთ ქვემოთ მოცემულ ნიმუშზე.

ნიმუში: ქვემოთ წარმოდგენილი მონაცემები ასახავენ ინფორმაციას 50 ინტერნეტ-მომხმარებლის ასაკის შესახებ. წარმოადგინეთ ინფორმაცია სიხშირეთა ცხრილის სახითაც.

50 40 41 17 11 7 22 44 28 21 19 23 37 51 54 42 88
41 78 56 72 56 17 7 69 30 80 56 29 33 46 31 39 20
18 29 34 59 73 77 36 39 30 62 54 67 39 31 53 44

1. დავყოთ ინფორმაცია 7 კლასად, განსაზღვრულ ინტერვალებში დაჯგუფებით.
2. განვსაზღვროთ თითოეული კლასის ინტერვალის ზომა. ამისათვის უდიდეს რიცხვს (88) გამოვაკლოთ უმცირესი (7) და გავყოთ კლასების რიცხვზე:

$$(88 - 7) : 7 \approx 11,57 \approx 12$$

3. როგორც ხედავთ, უმცირესი მნიშვნელობა 7-ია და ეს პირველი კლასის უმცირესი საზღვრის მნიშვნელობაა, უდიდესი კი იქნება 18, მე-2 კლასის უმცირესი მნიშვნელობა 19, უდიდესი მნიშვნელობა 30-ია, მე-3 კლასის საზღვრები 31 და 42 და ა.შ. (არ დაგავიწყდეთ საზღვრის ინფორმაციის ჩართვა ინტერვალში და მაიქცით ყურადღება, რომ ინფორმაციები არ დაემთხვეს ერთმანეთს).

4. ავაგოთ სიხშირის ცხრილი.

კლასი (ასაკი)	7-18	19-30	31-42	43-54	55-66	67-78	79-90	
ხაზი	###	### ###	### ###	###	###	###		
სიხშირე	6	10	13	8	5	6	2	სულ: 50

ინფორმაციის ბაზის სისტემატიზაცია და წარდგენა შეიძლება განზოგადდეს ქვემოთ მოცემული წესით.

1. მონაცემთა ბაზაში რიცხვითი მნიშვნელობების მიხედვით (ან კატეგორიების - ფერი, სახე და ა.შ.) ინფორმაცია ჯგუფდება კლასებში - ინტერვალებში. რეკომენდირებულია, რომ კლასების რაოდენობა იყოს 5-სა და 20 შორის.
2. განისაზღვრება კლასების - ინტერვალების ზომა. ამისათვის ინფორმაციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების სხვაობა იყოფა კლასების რაოდენობაზე. განაყოფის მთელი ნაწილი მიიღება კლასის ზომად.
3. განისაზღვრება საზღვრის მნიშვნელობები - თითოეული კლასის ინტერვალის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. პირველი ინტერვალის უმცირესი მნიშვნელობა მოიცემა ინფორმაციის ბაზაში, ხოლო უდიდესის მოძებნა ხდება კლასის ზომის დახმარებით.
4. აიგება სიხშირეთა ცხრილი. იგი შედგება კლასებისა და სიხშირეების საზღვრითი მნიშვნელობებისაგან, რომლებშიც მოიცემა ხაზებისა და ჩაწერილი რიცხვების სახით.

ფარდობითი სიხშირე

ინფორმაციის ანალიზისა და წარდგენისათვის გამოიყენება ისეთი მაჩვენებლები, როგორიცაა - **კლასის საშუალო შეფასება და ფარდობითი სიხშირე**.

კლასის საშუალო შეფასება (ინტერვალის შუა წერტილი) ტოლია უმცირესი და უდიდესი საზღვრის მნიშვნელობების ნახევარჯამისა. ეს არის მაჩვენებელი რომელსაც **კლასის მნიშვნელობასაც** უწოდებენ.

ფარდობითი სიხშირე განისაზღვრება როგორც კლასის სიხშირის მნიშვნელობის შეფარდება ინფორმაციის საერთო რაოდენობასთან.

განვსაზღვროთ ეს მაჩვენებლები მოცემულ მაგალითზე.

კლასი	სიხშირე	კლასის საშუალო შეფასება	ფარდობითი სიხშირე
7-18	6	$\frac{7+18}{2} = 12,5$	$\frac{6}{50} = 0,12$
19-30	10	$\frac{19+30}{2} = 24,5$	$\frac{10}{50} = 0,2$
31-42	13	$\frac{31+42}{2} = 36,5$	$\frac{13}{50} = 0,26$
...	...	...	...

12,5; 24,5; 36,5 მიმდევრობიდან ჩანს, რომ პირველი კლასის საშუალო მნიშვნელობის პოვნის შემდეგ, ყოველი მომდევნო კლასის საშუალო მნიშვნელობა ტოლია წინა კლასისა და კლასის ზომის (ამ შემთხვევაში 12-ის) ჯამისა. წარმოვადგინოთ მონაცემთა ბაზა ამ მაჩვენებლების შემცველი ქვემოთ მოცემული ცხრილით.

მომხმარებელთა ასაკი და მოხმარების ვადები			
კლასი (ასაკი)	სიხშირე	კლასის საშუალო მნიშვნელობა (საშუალო ასაკი)	ფარდობითი სიხშირე
7-18	6	12,5	0,12
19-30	10	24,5	0,2
31-42	13	36,5	0,26
43-54	8	48,5	0,16
55-66	5	60,5	0,1
67-78	6	72,5	0,12
79-90	2	84,5	0,04
	სულ: 50		სულ: 1

ფარდობითი სიხშირე გამოსახავს (წილადის ან პროცენტის სახით) იმას, თუ გარკვეული (მოცემული) ინფორმაცია მთლიანი ინფორმაციის რა ნაწილს შეადგენს. მაგალითად, ცხრილიდან ჩანს, რომ ინტერნეტმომხმარებელთა 26% არიან 31 წლიდან 42 წლამდე ასაკის ადამიანები.

ინფორმაციის დაჯგუფება და წარდგენა

- 1 > ქვემოთ მოცემული ინფორმაციები დააჯგუფეთ კლასებად.
- ა) **რეალიზაცია.** კლასების რაოდენობა: 6
ინფორმაცია: თანხა (მანეთობით), მიღებული აგვისტოში გაყიდვებიდან:
2114, 2468, 7119, 1876, 4105, 3183, 1932, 1355, 4278, 1030, 2000,
1077, 5835, 1512, 1697, 2478, 3981, 1643, 1858, 1500, 4608, 1000
- ბ) **რეაქციის დრო.** კლასების რაოდენობა: 8
ინფორმაცია: 30 ქალის ხმოვან გაფრთხილებებზე რეაქციის დრო (მილიწამებში).
507, 389, 305, 291, 336, 310, 514, 382, 320, 450, 309, 416, 359, 442, 307,
337, 373, 469, 351, 411, 388, 422, 413, 428, 387, 454, 323, 441, 388, 426
- 2 > ინფორმაციის შემდეგ რიგი ასახავს 50 მოსწავლის შეფასების შედეგს საგან მათემატიკაში 100 ბალიანი სისტემით.
43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35, 25,
77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 49, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61, 45, 68,
41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 28.
- ა) დაყავით ინფორმაცია კლასებად;
ბ) შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი;
გ) ცხრილში დაამატეთ სვეტი, რომელიც გამოსახავს ფარდობით სიხშირეს. ხელახლა დახაზეთ ცხრილი.
- 3 > ინფორმაციის სიმრავლე მოიცავს 45 შერჩეულ ნიმუშს. უმცირესი მნიშვნელობა ტოლია 0-ის, ხოლო უდიდესი - 28-ის. კლასის რა ზომას შესთავაზებდით თქვენ ამ ინფორმაციისათვის. ჩაწერეთ კლასების შესაბამისი რიცხვითი ინტერვალები.
- 4 > კლასის 26 მოსწავლემ შეასრულა შეფასებითი დავალებები მათემატიკაში. მოსწავლეების მიერ მიღებული შეფასებები ჩაწერილია ცხრილში. წარმოადგინეთ ინფორმაცია ცხრილით, რომელიც შეიცავს ისეთ მაჩვენებლებს, როგორიცაა: სიხშირე და ფარდობითი სიხშირე.
- 3 2 3 3 4 3 3 2 5 4
5 4 2 4 4 3 3 4 3 2
1 4 5 4 5 2
- 5 > 1) ქვემოთ ნაჩვენებია სპორტსმენების აწონვის შედეგები. ინფორმაცია წარმოადგინეთ ცხრილის სახით.
50, 50, 53, 53, 54, 55, 55, 55, 56, 60, 62, 62, 62, 64, 64, 64, 65, 65, 65, 66, 66,
66, 70, 72, 72, 72, 75, 75, 76, 80, 80, 81, 81, 82, 82, 83, 84, 85, 85, 85, 86,
87, 93, 94, 97, 98, 98, 100, 100
- 2) შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი, რომელიც ასახავს თქვენი კლასის მოსწავლეების წონას. წარმოადგინეთ შედარებითი ინფორმაციები ფარდობითი სიხშირით.
- 6 > შეასრულეთ დავალებები ცხრილი გამოყენებით:
- ა) განსაზღვრეთ თითოეული კლასის ზომა;
ბ) განსაზღვრეთ თითოეული კლასის საშუალო მნიშვნელობა;
გ) გამოთვალეთ ფარდობითი სიხშირე.

კლასი	სიხშირე
10-19	8
20-29	120
30-39	230
40-49	310
50-59	140
60-69	72
70-79	20

ინფორმაციის დანაწილების გრაფიკები

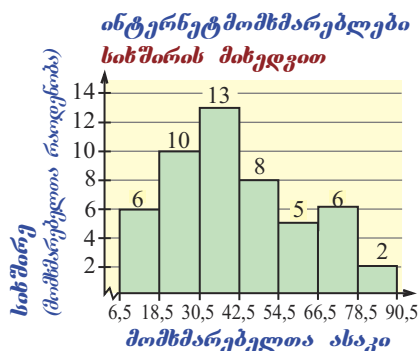
სიხშირის ჰისტოგრამა. ინფორმაციის დანაწილების წარდგენისათვის ერთ-ერთი ყველაზე ხელსაყრელი ფორმაა ჰისტოგრამა. ავსაგოთ განხილული ინტერნეტმომხმარებლების შესახებ ინფორმაციის სიხშირის ჰისტოგრამა.

1. კლასების ზომა საზღვრის მნიშვნელობებით ან კლასის საშუალო მნიშვნელობით მოთავსდება ჰორიზონტალურ ღერძზე, ხოლო სიხშირეთა მნიშვნელობა ვერტიკალურ ღერძზე. 2. ჰისტოგრამის მეზობელი სვეტები უნდა ეხებოდნენ ერთმანეთს. ე.ი. კლასის საზღვრის წერტილები უნდა განისაზღვროს ისე, რომ არ წარმოქმნას სივრცეები. მაგალითად, 1-ლი კლასის უდიდესი მნიშვნელობა არის 18, მეორე კლასის უმცირესი მნიშვნელობა 19-ია. მათ შორის მანძილი

$19 - 18 = 1$. ეს მანძილი ორ მეზობელ კლასს შორის იყოფა. ნახევარი იქნება 0,5.

1-ლი კლასის საზღვრის მნიშვნელობები იქნება 6,5 - 18,5 და ა.შ.

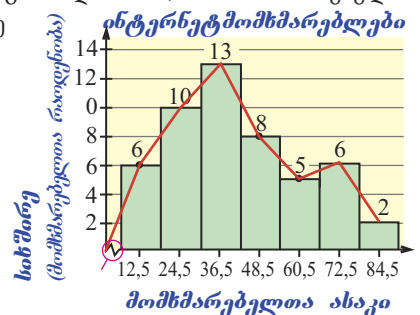
კლასი (ასაკი)	საზღვრები	სიხშირე
7-18	6,5-18,5	6
19-30	18,5-30,5	10
31-42	30,5-42,5	13
43-54	42,5-54,5	8
55-66	54,5-66,5	5
67-78	66,5-78,5	6
79-90	78,5-90,5	2



ინფორმაციის წარდგენა. სიხშირის ჰისტოგრამიდან ჩანს, რომ მომხმარებელთა ნახევარზე მეტის ასაკი 42-ზე ნაკლების მქონე პიროვნებებია.

სიხშირის პოლიგონი ინფორმაციის დანაწილების სიხშირეს ასახავს გრაფიკულად. სიხშირის პოლიგონის აგება შეიძლება ორი ხერხით: 1. ჰისტოგრამის გამოყენებით:

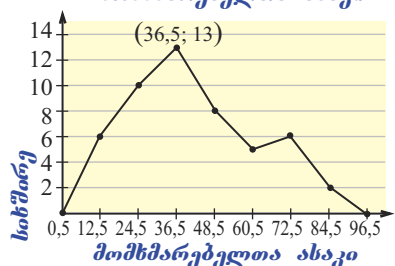
- აიკვია ჰისტოგრამა;
- აღინიშნება ინტერვალების შუაწერტილი (ჰისტოგრამის სვეტებზე);
- ეს წერტილები შეერთდება.



სიხშირის ცხრილის გამოყენებით: • აზვისთა ღერძზე შესაბამისი მასშტაბით კლასის საშუალო მნიშვნელობა, ორდინატა ღერძზე კლასების შესაბამისი სიხშირეები აღინიშნება.

• აღნიშნული წერტილები შეერთდება. მიღებულ გრაფიკს ინფორმაციის დანაწილების ამ სახეული სიხშირის პოლიგონი ეწოდება.

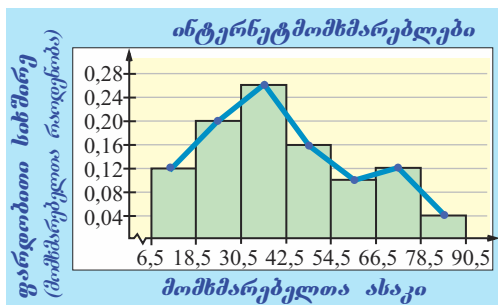
სიხშირის პოლიგონის მიხედვით ინფორმაციის გაანალიზება და ახალი ინფორმაციების მოპოვება შესაძლებელი. მაგალითად, სიხშირის პოლიგონიდან (36,5; 13) წერტილის კოორდინატების მიხედვით შეიძლება განსაზღვრა, რომ ინტერნეტმომხმარებელთა შორის საშუალო ასაკი 36,5 მქონე კლასში ყველაზე მეტი მონაწილეა.



ინფორმაციის წარდგენა. ინფორმაციის დანაწილების გრაფიკები

ფარდობითი სიხშირის ჰისტოგრამა

შეგროვებული ინფორმაციის შედარების თვალსაჩინოებისათვის, ბევრ შემთხვევაში უფრო ხელსაყრელია ინფორმაციის წარმოდგენა ფარდობითი სიხშირის ჰისტოგრამის ანუ ფარდობითი სიხშირის პოლიგონის გამოყენებით.



სიხშირის ჰისტოგრამიდან ჩანს, რომ მომხმარებელთა 25%-ის ასაკი არის 30 და 42 წლებს შორის.

1 > მოცემული ინფორმაცია ასახავს გამოკითხვის შედეგებს, ჩატარებულს სხვადასხვა ოჯახებში კვების პროდუქტებზე ყოველთვიური დანახარჯების შესახებ.

ა) ინფორმაციის შესაბამისად შეადგინეთ სიხშირეთა ცხრილი.

ბ) წარმოადგინეთ ინფორმაცია სიხშირეთა პოლიგონით.

279	205	279	266	199	177	162	232	303
192	181	321	309	246	278	50	41	335
116	100	151	240	474	297	170	188	320
429	294	570	342	279	235	434	123	325

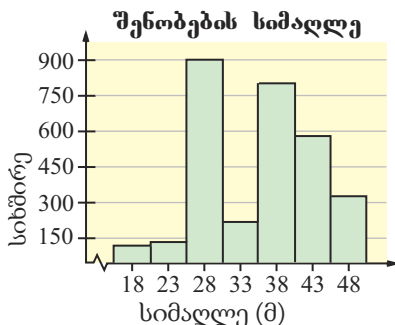
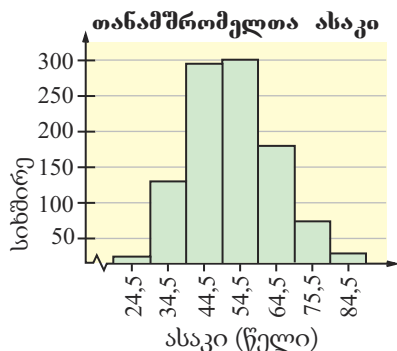
2 > 1) ჰისტოგრამების მიხედვით განსაზღვრეთ:

ა) კლასების რაოდენობა;

ბ) კლასების ზომა;

გ) ყველაზე მაღალ და ყველაზე დაბალსიხშირიანი კლასები და ამ კლასების სიხშირეების მიახლოებითი მნიშვნელობები;

2) ააგეთ თითოეული ჰისტოგრამის შესაბამისი სიხშირის პოლიგონი.

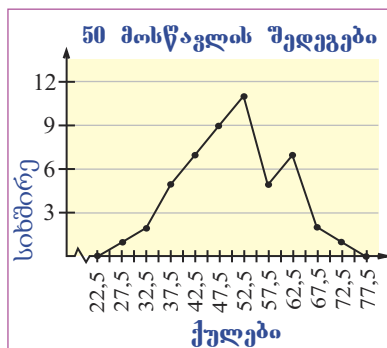


ინფორმაციის წარდგენა. ინფორმაციის დანაწილების გრაფიკები

- 3 > შეასრულეთ დავალებები სიხშირის პოლიგონს მიხედვით.

ა) განსაზღვრეთ უდიდესი და უმცირესი სიხშირის მქონე კლასები.

ბ) შეიძლება ითქვას, დაახლოებით რამდენმა ადამიანმა მოაგროვა 50 ქულაზე ნაკლები?



- 4 > ცხრილი ასახავს ინფორმაციას ტყეში ხეების სიმაღლის შესახებ.

ა) ფარდობითი სიხშირის სვეტის დამატებით ცხრილი რვეულში ჩაიხაზეთ.

ბ) ააგეთ შესაბამისი სიხშირის ჰისტოგრამა და პოლიგონი.

კლასი (ხეების სიმაღლე, მ)	10-13	14-17	18-21	22-25	26-29	30-33	34-37	38-41
სიხშირე (ხეების რაოდენობა)	10	15	20	30	30	20	25	15

- 5 > მოცემული ინფორმაციების 5 კლასში დაჯგუფებით განსაზღვრეთ:

ა) სიხშირის ჰისტოგრამა;

ბ) ფარდობითი სიხშირის ჰისტოგრამა;

გ) ააგეთ სიხშირის პოლიგონი;

დ) უდიდესი და უმცირესი ფარდობითი სიხშირის კლასები.

1) თამაშის შედეგები. (ქულების რაოდენობა)

ინფორმაცია: 154 257 195 220 182 240 177 228 235 146 174 192 165 207

185 180 264 169 225 239 148 190 182 205 148 188

2) სოფელში ფერმერების ფართობები (ჰექტარებით)

ინფორმაცია: 12 7 9 8 9 8 12 10 9 10 6 8 13

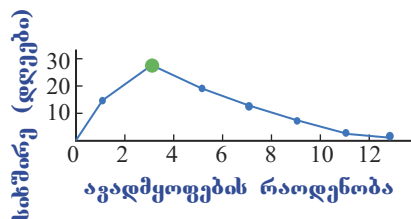
12 10 11 7 14 12 9 8 10 9 11 13 8

- 6 > სიხშირის პოლიგონი უჩვენებს საავადმყოფოში ყოველდღიურად სასწრაფო დახმარების საშუალებით შემოსული ავადმყოფების რაოდენობას.

ა) წარმოადგინეთ მწვანე ფერის წერტილის შესაბამისი ინფორმაცია.

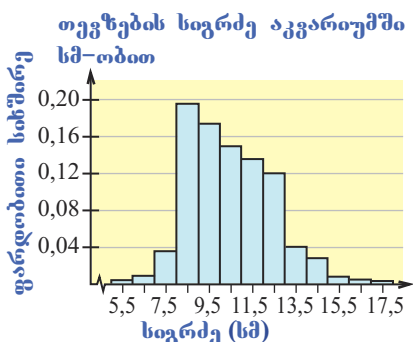
ბ) რამდენ დღეს მოიცავს დაკვირვება?

გ) გრაფიკის შესაბამისად შეადგინეთ სიხშირის ცხრილი.

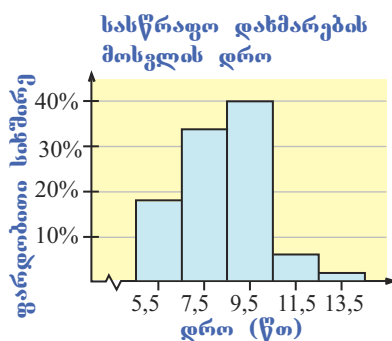


ინფორმაციის წარდგენა. ინფორმაციის დანაწილების გრაფიკები

- 7 > ა) განსაზღვრეთ ყველაზე მაღალი და ყველაზე დაბალი ფარდობით სიხშირის კლასი;
 ბ) საშუალოდ 12,5 სმ-იანი თევზები მთელი თევზების რამდენ პროცენტს შეადგენენ?



- 8 > ა) ჰისტოგრამის მიხედვით “ყოველი 100 გამოძახებიდან 50-ში სასწრაფო დახმარება 10 წუთზე ნაკლებ დროში მოვიდა” მოსაზრება სწორია?
 ბ) წარმოადგინეთ უდიდესი ფარდობითი სიხშირის მნიშვნელობის შემთხვევის შესაბამისი ინფორმაცია.



- 9 > ქვემოთ 40 პატარა კომპანიის წლიური ფინანსური ბრუნვის შესახებ ინფორმაციაა მოცემული.

წლიური ბრუნვის თანხა (ათას მანეთობით)	კომპანიის რაოდენობა
45–დან 55–მდე	5
55–დან 65–მდე	7
65–დან 75–მდე	14
75–დან 85–მდე	8
85–დან 95–მდე	6

- ა) ინფორმაციის შესაბამისად განსაზღვრეთ სიხშირეები.
 ბ) ააგეთ სიხშირის გრაფიკი.
 გ) გრაფიკის თანახმად, რამდენი ისეთი კომპანიაა, რომლის ბრუნვა ნაკლებია 85 ათას მანეთზე?
 დ) ყველა კომპანიის რა ნაწილს შეადგენენ კომპანიები, რომელთა ბრუნვა ნაკლებია 55 ათას მანეთზე?

- 10 > ცხრილში სენანის კომპიუტერულ თამაშებში მოგროვილი ქულებია მოცემული ამ ინფორმაციებიდან თუ არ გავითვალისწინებთ უმცირეს ქულას, მაშინ ცენტრისკენული ტენდენციის რომელი მაჩვენებელი შეიცვლება მეტად: არითმეტიკული საშუალო თუ მედიანა?

სენანის მოპოვებული ქულები			
164	128	151	138
158	162	130	162
109	134	157	137

ხშირ შემთხვევაში დაგროვილი ინფორმაციის გაანალიზებისათვის შესაბამისი არითმეტიკული საშუალოს გაანგარიშება ხდება საჭირო. ქვემოთ მოცემულ ნიმუშზე გამოვიკვლიოთ ასეთი არითმეტიკული საშუალოს პოვნის წესი.

ნიმუში: ცხრილი უჩვენებს ერთი დღის განმავლობაში ტელეფონით საუბრის ხანგრძლივობის მიხედვით კომპანიის თანამშრომელთა რაოდენობას. ამ კომპანიაში 1 ადამიანი საშუალოდ რამდენ წუთს საუბრობს ტელეფონით?

კლასი (საუბრის დრო)	სიხშირე (მუშათა რიცხვი)
1–5	12
6–10	26
11–15	20
16–20	7
21–25	11

ამ ამოცანაში დაჯგუფებული ინფორმაციის შესაბამისად არითმეტიკული საშუალოს გაანგარიშება საჭირო. ამ შემთხვევაში არითმეტიკული საშუალო გამოითვლება ქვემოთ მოცემული წესით.

1. გამოითვლება თითოეული კლასის საშუალო მნიშვნელობა.

2. გამოითვლება თითოეული კლასის საშუალო შეფასებისა და სიხშირის ნამრავლების ჯამი.

3. გამოითვლება სიხშირეების ჯამი.

4. მეორე შედეგი იყოფა მესამე შედეგზე.

$$\text{არითმეტიკული საშუალო} = \frac{883}{76} \approx 11,6$$

არითმეტიკული საშუალოს მიხედვით შეიძლება ითქვას, რომ საშუალოდ ამ ფირმის თითოეული მუშაკი დღეში 11,6 წუთს საუბრობს ტელეფონით:

კლასი	სიხშირე	კლასის საშუალო შეფასება	სიხშირე × საშუალო შეფასებაზე
1–5	12	3	36
6–10	26	8	208
11–15	20	13	260
16–20	7	18	126
21–25	11	23	253
	76		883

არითმეტიკული საშუალო სიხშირის დანაწილების მიხედვით

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{n} \quad x \text{ კლასის არითმეტიკული საშუალო, } f \text{ სიხშირე, } n \text{ ნიშანი აღნიშნავს ჯამს და იკითხება როგორც "სიმა".}$$

$$\text{მიაქციეთ ყურადღება } n = \sum f.$$

1. გამოითვლება თითოეული კლასის საშუალო მნიშვნელობა

2. გამოითვლება თითოეული კლასის საშუალო მნიშვნელობისა და სიხშირის ნამრავლის ჯამი.

3. გამოითვლება სიხშირეთა ჯამი.

4. საერთო ინფორმაციის შესაბამისად გამოითვლება არითმეტიკული საშუალო.

$$x = \frac{\text{უდიდესი მნიშვნელობა} + \text{უმცირესი მნიშვნელობა}}{2}$$

$$\sum(x \cdot f)$$

$$n = \sum f$$

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{n}$$

ინფორმაციის ანალიზი

- 1 > კომპანიაში 30 მუშაკიდან 8-ის ხელფასი 120 მანეთია, 22-ის ხელფასი 330 მანეთია. იპოვეთ კომპანიის მუშაკთა საშუალო ხელფასი.

- 2 > ერთი კომპანიის დამზადებული ნამცხვრები ქალაქის სხვადასხვა მაღაზიებში სხვადასხვა ფასად იყიდება. ერთ დღეს გაყიდული ნამცხვრის რაოდენობა და ერთი ცალის ფასი ცხრილშია მოცემული. საშუალოდ რამდენ მანეთად ყიდის ერთ ცალ ნამცხვარს კომპანია?

ნამცხვრის გაყიდვა		
მაღაზია	ფასი (ლ)	რაოდენობა
A	1,20	120
B	1,50	70
C	1,60	110
D	1,10	200

- 3 > ცხრილში მოცემული ინფორმაციების მიხედვით იპოვეთ არითმეტიკული საშუალო.

ა) კომპიუტერულ თამაშებში მოპოვებული ქულების მიხედვით იპოვეთ საშუალო ქულა.

მოპოვებული ქულა	მოთამაშეთა რაოდენობა
1–5	2
6–10	5
11–15	9
16–20	8
21–25	3

ბ) ერთი კვირის განმავლობაში ჩვილთა მასის შესახებ ინფორმაციის მიხედვით იპოვეთ ერთი ჩვილის მასის საშუალო მნიშვნელობა.

მასა	რაოდენობა
1–1,5	1
1,5–2	3
2–2,5	8
2,5–3	15
3–3,5	10
4–4,5	9
4,5–5	0

- 4 > ინფორმაციები დააჯგუფეთ კლასებში, ააგეთ ცხრილი და გამოთვალეთ არითმეტიკული საშუალო.

ა) ინფორმაციის ბაზა: 30 ბუჩქის სიმაღლე (სმ-ობით)

კლასების რაოდენობა: 5

67 76 69 68 72 68 65 63 75 69

66 72 67 66 69 73 64 62 71 73

68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

ბ) ინფორმაციის ბაზა: 20 ავადმყოფის საავადმყოფოში დარჩენის ვადა (დღე)

კლასების რაოდენობა: 4

6 9 7 14 4 5 6 8 4 11

10 6 8 6 5 7 6 6 3 11

- 5 > დაჯგუფებული ინფორმაციის შესაბამისად, არითმეტიკული საშუალოს გაანგარიშებისათვის რატომ პოულობენ კლასის საშუალო მნიშვნელობას? მოსაზრება განმარტეთ ქვემოთ მოცემულ ნიმუშზე. ერთი ინფორმაციის ბაზაც თქვენ მოიფიქრეთ და დაწერეთ.

ტბაში დაჭერილი თევზების მასა (კგ)	თევზების რაოდენობა
1–5	2
6–10	5
11–15	9
16–20	8
21–25	3

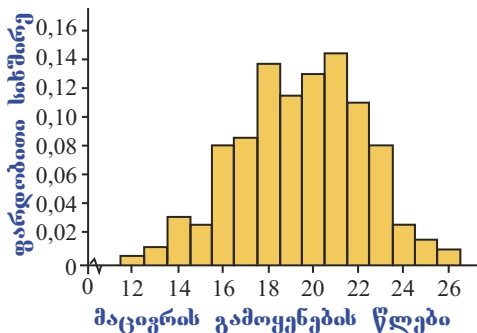
განზოგადებული დაგალებები

- 1 > ელექტრონული საქონლის მწარმოებელმა კომპანიამ მოსახლეობაში ჩაატარა გამოკითხვა იმაზე, თუ რამდენი წლის წინ შეიძინეს მაცივარი. გამოკითხვა ჩატარდა 200 ოჯახში და შედეგები ჰისტოგრამითაა მოცემული.

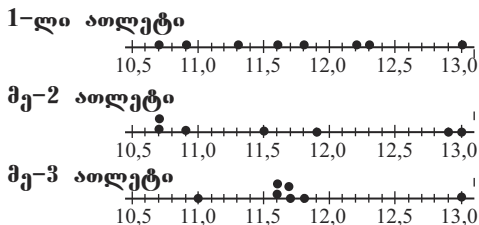
ა) ჰისტოგრამის მიხედვით ააგეთ კლასები, კლასის მნიშვნელობა, სიხშირის ინფორმაციის მომცველი ცხრილი.

ბ) გამოთვლების გარეშე ივარაუდეთ არითმეტიკული საშუალო, არითმეტიკული საშუალო რომელთან უფრო ახლოსაა, 15-თან, 20-თან თუ 25-თან?

გ) გამოთვალეთ არითმეტიკული საშუალო, ვარაუდი შეამოწმეთ.



- 2 > დიაგრამაზე 3 ათლეტის სირბილის შედეგებია ნაჩვენები, თითოეული-სათვის განსაზღვრეთ საშუალო შედეგი. შეიძლება ითქვას, რომელ სპორტსმენსა აქვს უფრო სტაბილური შედეგები? მოსაზრება განმარტეთ.



- 3 > მოცემული ინფორმაციების მიხედვით ააგეთ სიხშირის ცხრილი.

ბავშვების სიმაღლე. კლასების რაოდენობა: 5. ინფორმაცია: 30 ბავშვის სიმაღლე
67 76 69 68 72 68 65 63 75 69 66 72 67 66 69 73 64 62 71 73
68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

- 4 > მოცემული ინფორმაციების მიხედვით ააგეთ სიხშირის პოლიგონი და ფარდობითი სიხშირის პოლიგონი.

ა)

გოგონების სიმაღლე	რაოდენობა
140-145	3
146-151	7
152-157	12
158-163	6
164-169	2

ბ)

ბიჭების სიმაღლე	რაოდენობა
145-150	2
151-156	3
157-162	8
163-168	11
169-174	6

- 5 > მოცემული ინფორმაციების მიხედვით ააგეთ ფარდობითი სიხშირის ჰისტოგრამა. გამოთვალეთ არითმეტიკული საშუალო.

სასტუმროში დარჩენის ხანგრძლივობა. კლასების რაოდენობა 6

ინფორმაცია: 20 ადამიანის სასტუმროში დარჩენის ხანგრძლივობა:

6 9 10 6 11 7 14 6 5 7 6 4 5 6 8 4 11 8 6 3

პერმუტაცია

პერმუტაცია – გადანაცვლება. nP_n

ნამუშაო 1. დავუშვათ, რომ ავტომობილის ნომერი შედგება მიმდევრობით მოცემული სამი ლათინური ასოსა და სამი ციფრისაგან. რამდენი სხვადასხვა ავტომობილის ნომრის შედგენაა შესაძლებელი? ა) ასოების გამოორება ნებადართულია. ბ) ასოების გამოორება არ არის ნებადართული.

	ასოები			ციფრები			შერჩევების საერთო რიცხვი
ა)	26	26	26	10	10	10	$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$
ბ)	26	25	24	10	10	10	$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 15\,600\,000$

გამრავლების პრინციპი. თუ a ელემენტი შეიძლება შეირჩეს n ხერხით და ნებისმიერი ელემენტის შერჩევის შემთხვევაში b შეიძლება შეირჩეს m ხერხით, მაშინ წყვილი (a, b) შეიძლება შეირჩეს $m \times n$ ხერხით.

პერმუტაცია. ზოგიერთ შემთხვევაში მოითხოვება ვიპოვოთ შესაძლო ვარიანტების რიცხვი სიმრავლეში შემავალი ელემენტების განლაგების რიგის მიხედვით. ამ ტიპის ამოცანებს ჩვენ ვხსნიდით განტოტვითი დიაგრამის დახმარებით ან სიის შედგენით. მაგალითად, რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრებით 1, 2 და 3 ისე, რომ ციფრები არ გამოვრდეს? 123, 132, 213, 231, 312, 321. ამას **პერმუტაცია** (გადანაცვლება) ეწოდება. ახლა კი პერმუტაციის ცნების გამოყენებით შესაძლო ვარიანტები გამოვთვალოთ ფორმულით. პირველი ელემენტი შეიძლება შევარჩიოთ 3 ელემენტიანი სიმრავლიდან სამი ხერხით; მე-2 ელემენტი დარჩენილი 2-ელემენტიანი სიმრავლიდან 2 ხერხით; მე-3 ელემენტი შეიძლება შევარჩიოთ ერთელემენტიანი სიმრავლიდან ერთი ხერხით. მაშინ ყველა შესაძლო გადაადგილების რიცხვი იქნება $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. $3 \cdot 2 \cdot 1$ ნამრავლი მოკლედ ასე იწერება: $3!$ და იკითხება როგორც “სამის ფაქტორიალი”. $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$... და სხვა. მიღებულია, რომ $0! = 1$.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

გამოთვლებში $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ და $(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!$

ჩანაწერების გამოყენება სასარგებლოა. მაგალითად: $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$

მხოლოდ ელემენტების წყობით განსხვავებულ (ანუ ამ სიმრავლიდან შესაძლო მისაღებ) სხვადასხვა მოწესრიგებულ სიმრავლეებს, მოცემული სიმრავლის პერმუტაცია (გადანაცვლება) ეწოდება.

პერმუტაციის I ელემენტის n ელემენტიანი სიმრავლიდან n ხერხით, II ელემენტის დანარჩენი $(n-1)$ ელემენტიდან $(n-1)$ ხერხით, III ელემენტის დანარჩენი $(n-2)$ ელემენტიდან $(n-2)$ ხერხით და ა.შ. ბოლოს n -ური (ბოლო) ელემენტის 1 ხერხით შერჩევა შეიძლება. მაშინ ყველა პერმუტაციების რაოდენობა გამრავლების პრინციპის თანახმად

$$nP_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ იქნება.}$$

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო პერმუტაციების nP_n -ით აღინიშნება და $nP_n = n!$ ფორმულით გამოითვლება.

ნამუშაო 2. 5 მოსწავლის ერთ რიგში მოწყობის რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?

აქ $n = 5$, ${}_5P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

პერმუტაცია

- 1 > 1234 რიცხვის ციფრების გადანაცვლებით, რამდენი სხვადასხვა რიცხვის დაწერა შეიძლება?
- 2 > ტურნირში 6 ადამიანი მონაწილეობს. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება განაწილდეს ადგილები სატურნირო ცხრილში?
- 3 > 0, 1, 2, 3, 4 ციფრებისაგან, ციფრების გაუმეორებლად რამდენი ხუთნიშნა რიცხვის დაწერაა შესაძლებელი?
- 4 > გამოთვალეთ:
 ა) $\frac{8!}{6!}$ ბ) $\frac{18! - 2 \cdot 17!}{16! + 15!}$ გ) $\frac{9! \cdot 5!}{8! \cdot 6!}$ დ) $\frac{{}_5P_5 - 2 \cdot {}_3P_3}{{}_4P_4 + 5 \cdot {}_3P_3}$
- 5 > “სიტყვა” სიტყვაში ასოების ადგილების შეცვლით რამდენი სხვადასხვა “სიტყვა” შეიძლება აიწყოს?
- 6 > ჯგუფში მყოფი 8 მოსწავლე რამდენი სხვადასხვა წესით შეიძლება მოეწყოს რიგში ლაღესა და ელმირის გვერდიგვერდ დგომის პირობის დაცვით?
- 7 > რამდენი სხვადასხვა წესით შეიძლება დასხდნენ მაგიდის გარშემო 6 კაცი?
- 8 > “მოხიშნა” სიტყვაში ასოების გადანაცვლებით სხვადასხვა “სიტყვები” მიიღება. რამდენში დაიწერება ხმოვნები გვერდიგვერდ?
- 9 > კლასში 8 მოსწავლეა - 5 ბიჭი და 3 გოგონა. მათი კარებში გასვლის მიმდევრობის რამდენი შესაძლო შემთხვევა არსებობს? ა) კარებში ჯერ გოგონები გადიან; ბ) კარებში ჯერ ბიჭები გადიან; გ) ნებისმიერი მიმდევრობით შეიძლება გავიდნენ.

პერმუტაციების რიცხვი განმეორებადელმენტებიან სიმრავლეში

ნამუშაუ 1. რამდენი სხვადასხვა “სიტყვა” მიიღება სხვადასხვანაირად წაკითხვადი თუ გადავანაცვლებთ ასოებს “ალმანი” სიტყვაში?

ამოხსნა: თუ ასოები სხვადასხვა იქნება 5! გადანაცვლებით სხვადასხვა სიტყვების აგება შეგვიძლია. თუმცა თითოეულ ასეთ გადანაცვლებაში ორ ა-ს შორის ადგილების შეცვლით წასაკითხი სიტყვა არ შეიცვლება.

ამიტომ, სხვადასხვა გადანაცვლებათა რაოდენობა 2!-ჯერ ნაკლები იქნება და $\frac{5!}{2!} = 60$ შეადგენს.

ნამუშაუ 2. რამდენი ხერხით შეიძლება შეიცვალოს ასოები (აზერბაიჯანულ ენაზე) სიტყვაში “BANAN”? მაგალითად, AABNN, ANABN, BAANN და ა.შ.

ამოხსნა: სიტყვაში BANAN არის ორი A ასო, ორი N და ერთი ასო B.

5 ელემენტი 5! სხვადასხვანაირად დალაგება შეიძლება, თუმცა აქ არის ორი ასო, რომელიც მეორდება, 3 სხვადასხვა ელემენტი. შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვია:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{2 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{60}{2} = 30$$

თუ n ელემენტიან განმეორებად სიმრავლეში არის k სახის ელემენტები, მათ შორის n_1 რაოდენობის 1-ლი სახის, n_2 რაოდენობის მე-2 სახის, n_3 რაოდენობის მე-3 სახის, და ბოლოს n_k რაოდენობის k სახის, მაშინ პერმუტაციების შესაძლო რიცხვი:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n \quad \text{პირობით} \quad \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad \text{იქნება.}$$

პერმუტაცია

- 10> სხვადასხვა გამოთქმის რამდენი სიტყვის მიღება შეიძლება ასოების გადანაცვლებით შემდეგ სიტყვებში: ა) მამა; ბ) ხილი; გ) მანანა; დ) ზანზარა.
- 11> მიმდევრობით დაწყობილი 5 ზურთულიდან 2 წითელია, 3 ყვითელი. ზურთულების შესახედავად სხვადასხვანაირად დაწყობის რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?
- 
- 12> მოცემული გამოსახულებების მიხედვით დაწერეთ ელემენტების რაოდენობა, რამდენი ელემენტი მეორდება და რამდენჯერ მეორდება. უჩვენეთ ფერადი წრეებით.
- ა) $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ ბ) $\frac{12!}{7! \cdot 3! \cdot 2!}$ გ) $\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$

მოწესრიგებული შერჩევა და მოუწესრიგებელი შერჩევა

ამოცანა. ჯგუფში 8 მოსწავლეა. ა) რამდენნაირად შეიძლება ჯგუფის ორგანიზატორისა და რედაქტორის არჩევა? ბ) რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება ორი მორიგის შერჩევა?

ამოხსნა: ა) 8 მოსწავლიდან ჯგუფის ორგანიზატორი შეიძლება აირჩეს 8 სხვადასხვა ხერხით; ჯგუფის ორგანიზატორის არჩევის შემდეგ, რედაქტორს ირჩევენ დარჩენილი 7 მოსწავლიდან 7 ხერხით. გამრავლების წესის თანახმად სხვადასხვა არჩევის რიცხვია $8 \cdot 7 = 56$.

თუ მოვახდენთ მოსწავლეთა 1, 2, ..., 8 კოდირებას, 3; 5 მიმდევრობითი არჩევა განსხვავდება 5; 3 მიმდევრობითი არჩევისაგან. პირველ შემთხვევაში მე-3 მოსწავლე არჩეულია ჯგუფის ხელმძღვანელად, მე-5 კი რედაქტორად. მეორე შემთხვევაში კი პირიქით, მე-5 მოსწავლე ჯგუფის ხელმძღვანელია, მე-3 მოსწავლე კი რედაქტორადაა არჩეული.

ბ) ეს ამოცანა ერთი შეხედვით წინა ამოცანის მსგავსია. აქაც მორიგეებიდან პირველის 8 მოსწავლიდან 8 ხერხით, მეორისა კი 7 მოსწავლიდან 7 ხერხით შერჩევა შეიძლება. თუმცა ამ შემთხვევაში მაგალითად, 3; 5 და 5; 3 ჩანაწერები განსხვავებული არაა და ერთი და იგივე წყვილს უჩვენებს. ერთნაირი შემადგენლობის მხედველობაში მიღებით ვწერთ:

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ ხერხი.}$$

მსგავს ამოცანებში განსაკუთრებული ყურადღება საჭიროა მიექცეს ელემენტების არჩევის თანამიმდევრობის მნიშვნელობას.

სასწავლო დაგეგმვა

- 13> 1; 2; 3; 4; 5; 6 ციფრებისაგან რამდენი სხვადასხვა ისეთი ორნიშნა რიცხვის დაწერა შეიძლება, რომლებშიც ციფრები არ მეორდება?
- 14> წრეწირზე აღნიშნეთ A, B, C, D, E წერტილები. ამ წერტილებიდან ნებისმიერ ორ წერტილზე გავლით რამდენი სხვადასხვა წრფის გავლება შეიძლება?
- 15> ალიმ, ვუგარმა, იაშარამ, ლეილამ, ილაჰემ და თოდრულმა ურთიერთშორის საჭადრაკო შეჯიბრში სხვადასხვა ქულა მოაგროვეს.
- ა) იპოვეთ I და II ადგილების განაწილების ყველა შესაძლო ვარიანტების რიცხვი.
- ბ) მოჭადრაკეებმა, რომლებმაც დაიკავეს პირველი ორი ადგილი, მოიპოვეს ზონალურ ტურში მონაწილეობის უფლება. იპოვეთ შესაძლო ვარიანტების რიცხვი.

პერმუტაცია

პერმუტაცია – გადანაცვლება. ${}_nP_r$

ნიმუში: რამდენი ხერხით შეიძლება არჩეულ იქნას სასკოლო ორგანიზაციაში შვიდიდან სამი მოსწავლე - თავჯდომარედ, მოადგილედ და მდივნად?

ამოხსნა: თავჯდომარე შეიძლება შეირჩეს 7 მოსწავლიდან 7 ხერხით, მოადგილე დარჩენილი 6 მოსწავლიდან 6 ხერხით, ხოლო მდივანი კი 5 ხერხით. შვიდიდან სამი მოსწავლის შერჩევის ხერხების რიცხვი იქნება $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

განვიხილოთ პერმუტაციები, რომლებსაც აქვთ k ელემენტი, არჩეული მოცემული n ელემენტიდან და განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ან ელემენტების შემადგენლობით ან მათი განლაგების წესით. n ელემენტის სიმრავლიდან k რაოდენობის ელემენტების შერჩევით ავაგოთ მოწესრიგებული რიგი. დალაგებული 1-ლი ელემენტი n ელემენტის სიმრავლიდან n ხერხით, მე-2 ელემენტი დანარჩენი $(n-1)$ ელემენტიდან $(n-1)$ ხერხით და ა.შ. და ბოლოს k -ური ელემენტი $(n-k+1)$ ხერხით შეიძლება შეირჩეს. გამრავლების წესის თანახმად პერმუტაციათა რიცხვი

$${}_nP_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad 0 \leq k \leq n. \quad \text{ფორმულით გამოითვლება.}$$

მაშრავლთა რიცხვი k -ს ტოლია

ნიმუში: ${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$, ${}_8P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

$(n-k)!$ ფაქტორიალის გამოყენებით ეს ფორმულა შეიძლება მოკლედ ჩავწეროთ:

$${}_nP_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ამ ტოლობის სისწორე შევამოწმოთ მოცემულ ნიმუშზე:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

- 16 > “პარი” სიტყვის ასოები თითოეული თითო ბარათზე აწერია. იპოვეთ ამ ბარათებიდან ნებისმიერი ორის გვერდიგვერდ დადებით მიღებული სხვადასხვა “სიტყვების” რაოდენობა.
- 17 > გამოთვალეთ. ა) ${}_{10}P_3$ ბ) ${}_7P_2$ გ) ${}_8P_3$ დ) ${}_5P_4$ ე) ${}_7P_4$
- 18 > რომელია მეტი? ა) ${}_8P_2$, თუ ${}_6P_3$ ბ) ${}_{10}P_3$, თუ ${}_7P_5$ გ) ${}_9P_6$, თუ ${}_8P_7$
- 19 > გაამარტივეთ. ა) $\frac{{}_5P_3}{{}_5P_2}$ ბ) $\frac{{}_8P_5}{{}_8P_4}$ გ) $\frac{{}_7P_3 + {}_6P_3}{{}_{11}P_2}$ დ) $\frac{{}_6P_5 + {}_6P_4}{{}_6P_3}$
- 20 > ფიდანს 6 სამუშაო კოსტუმი აქვს. მან ორშაბათს, სამშაბათს და ოთხშაბათს სემინარში უნდა მიიღოს მონაწილეობა. ფიდანს თითოეულ ამ დღეს სხვადასხვა კოსტუმს თუ ჩაიცმევს, რამდენი სხვადასხვა არჩევანი ექნება მას?
- 21 > 4 წერილის 6 კონვერტში, თითოეულ კონვერტში არაუმეტეს ერთი წერილისა რამდენი სხვადასხვა ხერხით მოთავსება შეიძლება?
- 22 > კლასში 20 მოსწავლეა. კლასის კრების ჩატარებისათვის თავჯდომარისა და მდივნის რამდენი ხერხით შერჩევა შეიძლება?
- 23 > სამი მგზავრის 5 გაჩერებაზე, თითო გაჩერებაზე არაუმეტეს ერთის ჩამოსვლის პირობით, რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება ავტობუსიდან ჩამოსვლა?
- 24 > 1, 2, 3, 4, 5, 6 ციფრებიდან, ციფრების გამეორების გარეშე რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება? რამდენია მათ შორის 200-ზე მეტი?

კომბინეზონი

ნამუშაუ: 7-წევრიანმა ჯგუფმა საპროექტო სამუშაოს წარდგენისათვის 3 წევრი უნდა შეარჩიოს. რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეუძლიათ ამის გაკეთება ჯგუფის წევრებს?

ამოხსნა: სამ წევრს რომელი მიმდევრობით აირჩევენ მნიშვნელობა არა აქვს. მოსწავლეებიდან ნებისმიერი სამის გამოძახება, მათი გამოძახების თანმიმდევრობით რიგში თუ დავალაგებთ, ყველა შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი 7P_3 იქნება შერჩეული 3 მოსწავლის რიგში ადგილების 3! ხერხით შეცვლით მიღებული სხვადასხვა პერმუტაციები, რადგან მოსწავლეთა ერთნაირ შემადგენლობას სხვადასხვა შერჩევების

რიცხვი იქნება 3!-ჯერ ნაკლები ანუ
$$\frac{{}^7P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

შერჩევებს, რომლის დროსაც არ მოითხოვება თუ რომელი მიმდევრობით, წყობით მოხდეს შერჩევა, **კომბინეზონი** ეწოდება. კომბინეზონები ერთმანეთისაგან მხოლოდ ელემენტებით განსხვავდებიან ანუ კომბინეზონი n ელემენტის სიმრავლის k ელემენტის ქვესიმრავლეა. n ელემენტის სიმრავლის k ელემენტის ქვესიმრავლე ${}_nC_k$ -თი აღინიშნება და იკითხება, როგორც “კომბინეზონი n ელემენტიდან k ”. თუ თითოეული k ელემენტის კომბინეზონიდან წარმოიქმნება $k!$ პერმუტაცია, მაშინ პერმუტაციების საერთო რაოდენობა იქნება ${}_nP_k$. გამრავლების პრინციპის თანახმად იქნება: ${}_nP_k = {}_nC_k \cdot k!$ მაშასადამე,

$${}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

ნამუშაუ: ${}^7C_3 = \frac{{}^7P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ *მამრავლთა რაოდენობა ტოლია k-სი*

კომბინეზონების რაოდენობის ფორმულა შეიძლება დაიწეროს ასეთი სახით:

$${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

მიაქციეთ ყურადღება ამ ფორმულის თავისებურ სიმეტრიას. თუ შევცვლით k -ს $(n-k)$ -თი, მაშინ მიიღება იგივე ფორმულა მხოლოდ მნიშვნელში ფაქტორიალები შეიცვლიან ადგილებს ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$. ადვილია იმის ჩვენება, რომ ${}_nC_0 = 1$, ${}_nC_n = 1$, ${}_nC_1 = n$.

გაერთიანებების შესახებ ზოგიერთ გამოთვლებში აუცილებელი ხდება Microsoft EXCEL პროგრამისა და გრაფკალკულატორის გამოყენება.

- 1 > წრეწირზე აღნიშნეთ A, B, C, D, E, F წერტილები და შეაერთეთ ისინი მონაკვეთებით. რამდენი მონაკვეთი მიიღეთ?
- 2 > გამოთვალეთ. ა) 4C_3 ბ) 4C_4 გ) 5C_2 დ) 6C_3 ე) 6C_1 ვ) 7C_3
- 3 > შეადარეთ.
ა) 8P_2 და ${}^{11}C_2$ ბ) 7P_3 და 7C_3 გ) ${}^{11}P_2$ და ${}^{11}C_2$ დ) 7C_3 და 7C_4
- 4 > ა) 12 სახის გამაგრილებელი სასმელიდან 3 სხვადასხვა სასმელის შერჩევის რამდენი სხვადასხვა ვარიანტი არსებობს?
ბ) 20 სპორტსმენს შორის 2 ფინალისტის განსაზღვრის რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?
გ) კომპანიის მენეჯერმა ვაკანტურ სამუშაო ადგილებზე 8 შემოთავაზება მიიღო. იგი დღეს მათ შორის 3-ს მოიწვევს გასაუბრებზე. იპოვეთ შესაძლო ვარიანტების რიცხვი.

კომბინეზონი, პერმუტაცია

- 5 > თუ $n = 6$, $k = 2$ გამოთვალეთ: ${}_nP_k$ და ${}_nC_k$. რომელია უფრო მეტი?
- 6 > დაწერეთ მოცემული თითოეული კომბინეზონის შესაბამისი თითო ამოცანა.
 ა) ${}_{10}C_3$ ბ) ${}_5C_2$ გ) ${}_7C_4$
- 7 > გამარტივეთ გამოსახულება.
 ა) $\frac{6!}{5!} - \frac{5!}{4!} + \frac{7!}{6!}$ ბ) $\frac{7! + 6!}{7! - 6!}$ გ) $\frac{{}_7C_3}{{}_6P_3}$ დ) ${}_7C_3 : {}_8P_5$

გამოყენებითი დავალებები

- 8 > განსაზღვრეთ რომელ შემთხვევაში პერმუტაციების და რომელ შემთხვევაში კომბინეზონების მოძებნაა საჭირო და გამოთვალეთ.
 ა) 20 სახის ყვავილიდან ირჩევენ 3 სახეს.
 ბ) საკრედიტო ბარათის სამნიშნა კოდი.
 გ) 12 წიგნიდან წაკითხული 9 წიგნის აღნიშვნა.
 დ) 9 თანამშრომლიდან 2-ის შერჩევა სემინარში მონაწილეობის მისაღებად.
 ე) 10 სპორტსმენს შორის ფინიშთან მივა 1-ლი, მე-2, მე-3.
- 9 > სპორტული საქონლის მაღაზია ემზადება შეიძინოს საქონელი ახალი სეზონისათვის. არის 6 ფერის სპორტული კოსტუმების 4 სტილში შემოთავაზება. მაღაზიის პატრონმა გადაწყვიტა შეარჩიოს 4 ფერის და 2 სტილის კოსტუმები. რამდენი შესაძლო არჩევანი აქვს მფლობელს?

მიითითება: ა) შერჩევის შესაძლებლობა = ფერების რიცხვი $\times$ სტილის რიცხვი;

ბ) 6 ფერისაგან 4-ის შერჩევის რიცხვი: ${}_6C_4$; 4 სტილიდან 2-ის შერჩევის რიცხვი: ${}_4C_2$

- 10 > სამირეს სურს თავისი სახელის ასოებისაგან შექმნას პაროლი e-mail-სათვის 6 პატარა ასოსაგან. რამდენნაირად შეუძლია მას ამის გაკეთება?
- 11 > 10 სარეკლამო ბანერიდან 3 თეთრია, 2 ნაცრისფერი, 5 ცისფერი. რამდენ სხვადასხვა ვარიანტად შეიძლება მათი განლაგება ერთ რიგად?
- 12 > რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება დასხდნენ მრგვალი მაგიდის გარშემო აზერი, ანარი, ალი, ველი, ვიდადი და არაზი იმ პირობით, რომ ალი და ველი არ იქნებიან ერთმანეთის გვერდიგვერდ?
- 13 > წრეწირზე აღნიშნულია 8 წერტილი. რამდენი ისეთი სამკუთხედის აგება შეიძლება, რომლის წვეროებიც ამ წერტილებშია?
- 14 > რამდენი პარალელოგრამის დათვლა შეიძლება სურათზე?



- 15 > რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება პასუხის გაცემა 10 შეკითხვაზე თუ თითოეულზე უნდა დაიწეროს ორი პასუხიდან ერთ-ერთი: *მკდარია* და *ჭკუშპარიტია*?
- 16 > რამდენი 3 კაციანი ჯგუფის შექმნა შეიძლება 5 ბიჭისა და 4 გოგონასაგან იმ პირობით, რომ თითოეულ ჯგუფში 1 გოგონა მაინც იქნება?
- 17 > ყუთში 5 თეთრი და 3 წითელი ბურთულაა. რამდენი ვარიანტი არსებობს იმისა, რომ ყუთიდან ამოღებული 3 ბურთულიდან 2 იქნება თეთრი, ხოლო 1 წითელი?
- 18 > 4 ბიჭი და 4 გოგონა ერთ რიგად რამდენ შესაძლო ვარიანტად შეიძლება დასხდნენ?
 ა) ყველა ბიჭი ერთად და ყველა გოგონა ერთად თუ ისხდებიან; ბ) თუ თითოეული ბიჭის გვერდით ზის ერთი გოგონა; გ) დასხდებიან ნებისმიერი მიმდევრობით.

ამოცანების ამოხსნა ალბათობის გამოთვლის შესახებ

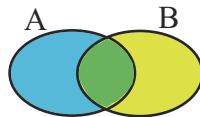
- 1> განიხილეთ ხდომილობების სახეები, აღბათობის გამოთვლის წესი და ამოხსენით ამოცანები. თითოეული შემთხვევისათვის თითო ნიმუშიც თქვენ დაამატეთ.

აღბათობის გამოთვლის წესი: $P(A) = \frac{\text{ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი}}{\text{შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი}}$

1. არათავსებადი A ან B ხდომილობის აღბათობა:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ნამუში 1. სიტყვა “მამუშაობა” დაიჭრა ასოებად და მოთავსდა ყუთში. ფარეჰი მოიგებს პრიზს თუ ყუთიდან ამოღებული პირველი ასო იქნება ა ან მ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ფარეჰი მოიგებს პრიზს.



2. თავსებადი A და B ნდომილობის აღბათობა:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ნამუშაო 2. სემინარის 20 მონაწილიდან 12 ინგლისურ, 10 გერმანულ ენაზე, ამათგან 4 თან ინგლისურ, თან გერმანულ ენაზე საუბრობს. თუ სემინარის მონაწილეებიდან შემთხვევით ერთი პიროვნება შეირჩევა, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ის ინგლისურ ან გერმანულ ენაზე მოსაუბრეა?

3. დამოუკიდებელ A და B ხდომილობათა ალბათობა:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B)$$

ნამუშაო 3. კამათელისა და მეტალის ფული ერთდროულად გააგორეს, თუ კამათელზე 6 ქულა მოვა, ფული კი რუკიან მხარეს დაეცემა აფაკი პრიზს მოიგებს. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ აფაკი პრიზს მიიღებს?

4. დამოკიდებულ A და B ხდომილობათა აღბათობა:

$$P(A\text{-ს შედეგს } B) = P(A) \cdot P(B \text{ ხდომილობა } A\text{-ს შედეგს})$$

ნამუშაი 4. ყუთში 5 წითელი და 3 ყვითელი ბურთულაა. ყუთში დაბრუნების გარეშე იქიდან მიმდევრობით იღებენ ორ ბურთულას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა იქნება წითელი.

- 2** > განსაზღვრეთ ხდომილობები თავსებადი თუ არათავსებადი, შემდეგ გამოთვალეთ ალბათობა.

1) აზერბაიჯანული ანბანის ასოები დაწერილია ცალკეულ ბარათებზე და მოთავსებულია ყუთში. შემთხვევით ამოღებული ბარათი: ა) იქნება A ასო ან ნებისმიერი ხმოვანი; ბ) იქნება L, M ან N ასოებიდან ერთ-ერთი.

2) ერთი კამათელის გაგორებისას: ა) $P(1 \text{ ან } 5)$; ბ) $P(\text{კენტი რიცხვი ან } 5\text{-ზე ნაკლები რიცხვი})$.

- 3** > ჯერ განსაზღვრეთ ხდომილობა დამოკიდებულია თუ დამოუკიდებელი, შემდეგ გამოთვალეთ ალბათობა.

1) ერთი კამათელი ზედიზედ 2-ჯერ გააგორეს

ა) P(2, შემდეგ 3); ბ) P(ორჯერ 6); გ) P(3, ნებისმიერი ქულა).

2) ყუთში A, B, G, N, L, Θ , M წარწერებიანი ასოითი ბარათი აქვთ. ზედიზედ ამოიღება 2 ბარათი. იპოვეთ ხდომილობის ალბათობა:

ა) ბარათის უკან დაუბრუნებლობის შემთხვევაში: $P(A, \text{შემდეგ } \Theta)$;

ბ) ბარათის უკან დაბრუნებით: $P(L, \text{შემდეგ } N)$.

ამოცანების ამოხსნა ალბათობის გამოთვლის შესახებ

პერმუტაცია და ალბათობა

ნამუში 1. ყუთზე რაიმე ინფორმაციის არ მქონე 6 ცალი CD-დან 2-ზე ხალხური მუსიკაა, 2-ზე ჯაზი და 2-ზე საესტრადო მუსიკა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ორი დისკიდან პირველი იქნება ჯაზის, ხოლო მეორე საესტრადო მუსიკის.

$$P(\text{ჯაზი, ესტრადა}) = \frac{\text{ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი}}{\text{შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი}}$$

ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი გამრავლების პრინციპის თანახმად $2 \cdot 2$ რადგან 2 ესტრადისა და 2 ჯაზის დისკია.

6 CD-დან ორის შერჩევის შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი: ${}_6P_2$

$$P(\text{ჯაზი, ესტრადა}) = \frac{2 \cdot 2}{{}_6P_2} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{4}{6 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

პასუხი: 1-ლი ჯაზი და მე-2 საესტრადო მუსიკის მოსვლის ალბათობა $\frac{2}{15}$ -ია.

კომბინეზონი და ალბათობა

ნამუში 2. ყუთში 12 ჩოგბურთის ბურთია. მათ შორის 4 წუნდებულია. პარკიდან იღებთ 2 ბურთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, თუ ორ ბურთს ამოვიღებთ, ორივე წუნდებული იქნება?

ამოხსნა: ტოლშესაძლებელი ყველა ხდომილობის რაოდენობა 12 ელემენტიდან თითოეულში 2 ელემენტის მქონე კომბინეზონების რაოდენობის ტოლია ${}_{12}C_2$. მოცემულ ხდომილობაში ხელსაყრელ ხდომილობათა რიცხვი 4 ელემენტიდან თითოეულში 2 ელემენტით კომბინეზონების n რაოდენობაა: ${}_4C_2$.

$$P(2 \text{ წუნდებული}) = \frac{\text{ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი}}{\text{შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი}} = \frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}$$

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \quad {}_{12}C_2 = \frac{{}_{12}P_2}{2!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$P(2 \text{ წუნდებული}) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

ნამუში 3. პარკში 5 წითელი, 3 ცისფერი ბირთვია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პარკიდან 2 ბირთვის ამოღებისას თუნდაც ერთი მაინც იქნება წითელი?



ამოხსნა: ორი ბირთვის ამოღებისას ერთი რომ წითელი იყოს ხდომილობა ავლნიშნოთ E-თი. თუმცა ერთი წითელი ბურთულის ამოსვლის ვარიანტების შესაძლო რაოდენობის პოვნა იქნება დამძლეული. ჩვენ ჯერ ამ ხდომილობის შემავსებელი ორი ბირთვიდან არცერთი წითელი ფერისარყოფნის ხდომილობის (E') ალბათობა ვიპოვოთ. სასურველი ხდომილობა ორივე ბირთვის ცისფერის ყოფნაა. ამ შემთხვევაში ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი: ${}_3C_2$ შესაძლო შემთხვევათა რიცხვი ${}_8C_2$ -ია.

$$P(E') = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}}{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}} = \frac{3}{28}$$

E ხდომილობის ალბათობა:

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28} \approx 0,89$$

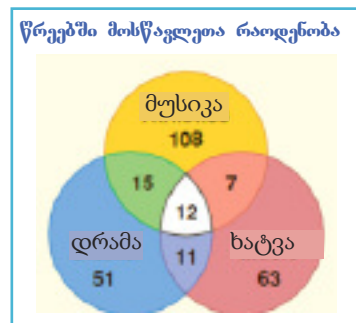
ამოცანების ამოხსნა ალბათობის გამოთვლის შესახებ

- 4 > კლასში 12 გოგონა და 10 ბიჭია. სკოლის მოსწავლეთა ორგანიზაციაში 5 წარმომადგენელი უნდა გაიგზავნოს ა) რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს, რომ შემთხვევითი შერჩევით წარმომადგენლებიდან 3 გოგონა იქნება და 2 ბიჭი? ბ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი შერჩევისას ხუთივე ბიჭი იქნება? გ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი შერჩევისას ხუთივე გოგო იქნება?
- 5 > 2, 3, 5 და 7 ციფრებიდან განუმეორებლობის პირობის დაცვით, რამდენი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება?
თუ ამ რიცხვებიდან შემთხვევით ერთი შეირჩევა, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ის ლუწი იქნება.
- 6 > ყუთში 5 ლურჯი და 4 წითელი ბურთულიდან ნებისმიერი სამი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება ავიღოთ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აღებული ბურთულებიდან სულ მცირე ერთი მაინც იქნება ლურჯი.
- 7 > ცნობილია, რომ კონვეიერი ერთ გამოშვებაზე აწარმოებს 100 ბატარეას და მათ შორის ორს დეფექტით. ბატარეების შეფუთვა ხდება შემთხვევითი წესით, თითოეულ ყუთში 4 ცალის ოდენობით. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ერთ შემთხვევით შერჩეულ ყუთში ყველა ბატარეა იქნება უდეფექტო? ბ) რომელია ამ ხდომილობის შემავსებელი ხდომილობა და რას უდრის მისი ალბათობა? გ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ყუთში 2 ბატარეა იქნება დეფექტიანი? დ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთში 2 ბატარეა იქნება უდეფექტო? ე) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ყუთში თუნდაც ერთი ბატარეა იქნება დეფექტიანი?
- 8 > 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12 და 13 რიცხვები დაიწერა და ყუთში მოთავსდა. შემთხვევით სამი რიცხვი თუ ამოიღება, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვები პითაგორას სამეული იქნება?
- 9 > რენა, მისი მეგობარი ლეილა და კიდეც ხუთი მოსწავლე მონაწილეობენ მოსწავლეთა სასკოლო ორგანიზაციის თავჯდომარისა და მოადგილის არჩევნებში. ა) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ რენა არჩეული იქნება თავჯდომარედ, ხოლო ლეილა მოადგილედ? ბ) რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ თანამდებობებზე აირჩევენ მეგობრებს?
- 10 > სამ გოგონასა და 5 ბიჭს შორის კლასის ხელმძღვანელმა უნდა აირჩიოს სამი წარმომადგენელი სასკოლო ორგანიზაციაში:
ა) რამდენი სხვადასხვა ხერხით შეუძლია მას ამის გაკეთება?
ბ) მათ შორის რამდენ შემთხვევაში იქნება სამივე წარმომადგენელი ბიჭი?
გ) იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სამივე წარმომადგენელი ბიჭი იქნება.
- 11 > 3 გოგონა და 2 ბიჭი სხვადასხვა მიმდევრობით რიგს ქმნიან. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბიჭები იდგებიან ერთმანეთის გვერდიგვერდ.
- 12 > ყუთში 4 თეთრი და 3 შავი ბირთვია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული 2 ბირთვიდან:
ა) ორივე იქნება თეთრი;
ბ) ორივე იქნება შავი;
გ) ერთი იქნება თეთრი და ერთი შავი.

ამოცანების ამოხსნა ალბათობის გამოთვლის შესახებ

- 13** > პარკში 8 წითელი და 5 ყვითელი ბირთვია. უკან დაუბრუნებლად ზედიზედ ორ ბურთულას თუ ამოიღებენ გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის პირველი იქნება წითელი, მეორე კი ყვითელი.
- 14** > მონეტას ააგდებენ ზედიზედ 3-ჯერ. რას უდრის ალბათობა იმისა, სამივე ჯერზე მონეტა დაეცემა რუკიან მხარეს?
- 15** > 9^o კლასიდან 12 მოსწავლეს და 9^o კლასიდან 8 მოსწავლეს სურთ ნებაყოფლობით მიიღონ მონაწილეობა ოლიმპიადის ორგანიზაციულ სამუშაოებში. თუ ზედიზედ აირჩევენ ორ მოსწავლეს, მაშინ როგორია ალბათობა იმისა, რომ: ა) ორივე მათგანი იქნება 9^o-დან; ბ) ერთი 9^o-დან, მეორე - 9^o-დან; გ) ორივე იქნება 9^o კლასიდან?
- 16** > ა) გამოთვალეთ ერთი კამათელის გაგორებისას კენტი რიცხვის ან მარტივი რიცხვის მოსვლის ალბათობა.
ბ) ორი კამათელი ერთდროულად გააგორეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოსული ქულების ჯამი იქნება 7 ან 11.
- 17** > გამოკითხვამ იმის შესახებ თუ საიდან იღებენ ადამიანები უკანასკნელ ამბებს გამოავლინა: 85% ინტერნეტიდან, 35% კითხულობს გაზეთებში, 25% ორივეში კითხულობს. წარმოადგინეთ ინფორმაცია ვენის დიაგრამით. რესპოდენტებს შორის თუ ერთი შემთხვევით შეირჩევა, იპოვეთ შესაბამისი ალბათობა: ა) ინფორმაციას გაზეთიდან კი არა, ინტერნეტიდან იღებს; ბ) ინფორმაციას იღებს ორივე წყაროდან.
- 18** > ყუთში შეგროვებულია ბარათები რიცხვებით 1-დან 30-მდე. თუ ყუთიდან ერთ ბარათს ამოიღებენ, იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ბარათზე მოცემული რიცხვი: ა) 2-ზე ან 3-ზე იყოფა; ბ) 2-ზე იყოფა, 3-ზე არ იყოფა; გ) ერთდროულად 2-ზეც იყოფა და 3-ზეც.
- 19** > ყუთში ყვითელი და მწვანე 45 ბურთულაა. ბირთვების რაოდენობის შეფარდება შესაბამისად არის 5 : 4. თუ ყუთიდან ორ ბურთულას ამოიღებენ, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე იქნება ყვითელი?

- 20** > ამოხსენით ამოცანები ვენის დიაგრამის მიხედვით.
თუ ერთი მოსწავლე შეირჩევა, გამოთვალეთ მოცემული პირობების ალბათობა:
ა) P (მუსიკა ან ხატვა);
ბ) P (დრამა ან ხატვა);
გ) P (დრამა და მუსიკა ან დრამა და ხატვა).



- 21** > ყუთში 3 ოცმანეთიანი, 2 ათმანეთიანი, 5 ხუთმანეთიანია. უკან დაუბრუნებლად 3 ბანკნოტი თუ ამოიღება, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პირველი ხუთმანეთიანი, მეორე ათმანეთიანი და მესამე ოცმანეთიანი იქნება?
- 22** > “ანარა” სიტყვის ასოები სათითაოდ დაიჭრა და ყუთში მოთავსდა. ბარათები ამოაქვთ თითო-თითო და აწყობენ გვერდი-გვერდ. იპოვეთ “ანარა” სიტყვის მიღების ალბათობა.

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 1 > 1. ინფორმაცია უჩვენებს კომპანიაში მომუშავეთა ხელ-
ფასებსა და მათ რაოდენობას.
- | | ხელფასი | რაოდენობა |
|---|-----------|-----------|
| ა) ინფორმაციის მიხედვით ააგეთ ფარდობითი სიხ-
შირის ცხრილი. | 280 - 330 | 5 |
| ბ) რამდენი მუშაკის ხელფასია 382 მანეთზე ნაკლები? | 331 - 381 | 6 |
| გ) რამდენ მანეთზე ნაკლებ ხელფასს იღებს მუშაკთა
72%? | 382 - 412 | 4 |
| | 413 - 443 | 3 |
| დ) თუ შემთხვევით ავირჩევთ ერთ მუშაკს, რას უდრის
აღბათობა იმისა, რომ მისი ხელფასი ნაკლებია 413 მანეთზე? | 444 - 474 | 7 |
2. ფორმა სადღესასწაულოდ საჩუქარი-პრიზის სახით ათამაშებს 3 მაცივარს:
ა) რას უდრის აღბათობა იმისა, რომ სამივე მაცივარს მოიგებენ მუშაკები, რომელ-
თა ხელფასი ნაკლებია 331 მანეთზე; ბ) რას უდრის აღბათობა იმისა, რომ თუნდაც
ერთ მაცივარს მოიგებენ მუშაკები, რომლებიც იღებენ 331 მანეთზე ნაკლებს?
- 2 > დაბის მაცხოვრებლებს შორის ჩატარდა გამოკითხვა იმის შესახებ, თუ რამდენი
ტელევიზორი აქვთ სახლში. შერჩეული ნიმუშების პასუხების მიხედვით
შედეგები ქვემოთ მოცემულის მსგავსია. საშუალოდ რამდენი ტელევიზორია
თითოეულ სახლში?
- | ტელევიზორების რაოდენობა: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|--------------------------|---|---|---|----|----|---|---|
| სახლების რაოდენობა: | | 1 | 8 | 13 | 10 | 5 | 3 |
- 3 > სკოლაში მოსწავლეების 56% გოგონაა. მათი ნახევარი სპორტითაა დაკავებული.
ამ გოგონების რაოდენობა 140-ია, მოსწავლე ბიჭების 65% სპორტითაა დაკავე-
ბული. ა) რამდენი მოსწავლეა ამ სკოლაში? ბ) რამდენი ბიჭი და რამდენი გოგონა
სწავლობს სკოლაში? გ) რას უდრის აღბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული
ერთი მოსწავლე იქნება სპორტით დაკავებული?
- 4 > სკოლის 3 მეექვსე, 5 მეშვიდე და 4 მერვე კლასელს შორის სამორიგოდ უნდა
მოხდეს 3 მოსწავლის შერჩევა. იპოვეთ აღბათობა იმისა, რომ:
ა) ყველა მორიგე მეშვიდე კლასის მოსწავლე იქნება;
ბ) მორიგეთა შორის არ იქნება არცერთი მეშვიდეკლასელი.
- 5 > იპოვეთ ყუთიდან მოცემული ასოებიდან ერთდროულად 3-ის ამოღების შესაძლო
ვარიანტთა რაოდენობა. იპოვეთ აღბათობა იმისა, რომ ყუთიდან 3 ასოს ამო-
ღებისას თუნდაც ერთი იქნება ხმოვანი.
- ა)

A	B	C	D	E
---	---	---	---	---

 ბ)

E	F	G	H	I	J	K
---	---	---	---	---	---	---

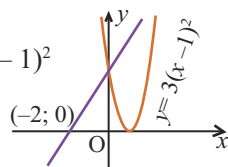
 გ)

M	N	O	P
---	---	---	---
- 6 > ყუთში 6 ყვითელი და 8 თეთრი ბურთულაა.
ა) ერთდროულად 3 ბურთულის ამოღების რამდენი შესაძლო ვარიანტი არსებობს?
ბ) იპოვეთ აღბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულებიდან სამივე თეთრი
იქნება.
- 7 > “ქორღა” სიტყვაში ასოების გადანაცვლების შედეგად მიიღება სხვადასხვა
“სიტყვები”. მათ შორის რამდენში: ა) თანხმოვნები დაიწერება მიმდევრობით;
ბ) ხმოვნები არ დაიწერება მიმდევრობით?
- 8 > ამოხსენით განტოლებები.
ა) $(n + 2)! = 20 \cdot {}_n P_n$ ბ) ${}_n P_2 = 90$ გ) ${}_n C_2 - {}_n C_1 = 9$

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 1 > როდესაც ჭურჭელი მთლიანად სავსეა შაქრის ფხვნილით, მისი მასა 14,5 კგ, როცა ნახევრად სავსეა, მაშინ კი 7,7 კგ-ია. იპოვეთ ჭურჭლის მასა.

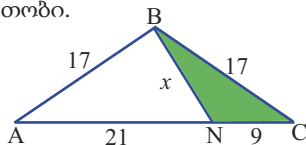
- 2 > $y = kx + b$ წრფე აბცისთა ღერძს $(-2; 0)$ წერტილში, $y = 3(x - 1)^2$ პარაბოლას ორდინატთა ღერძზე გადაკვეთს. კიდეც რომელ წერტილში გადაიკვეთებიან წრფე და პარაბოლა?



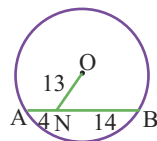
იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

- 3 > ა) $x^2 - 8x + 15$, როცა $x = 4 - \sqrt{5}$;
ბ) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$, როცა $x = \sqrt[3]{7}$

- 4 > სურათის მონაცემების მიხედვით იპოვეთ გაფერადებული ნაწილის პერიმეტრი და ფართობი.



- 5 > იპოვეთ წრეწირის რადიუსი. O წერტილი წრეწირის ცენტრია.



- 6 > 56 ტურისტის მოსათვასებლად დაიდგა სამადგილიანი და ხუთადგილიანი კარავები. რამდენი არის მათ შორის სამადგილიანი, თუ სულ დაიდგა 16 კარავი?

- 7 > არითმეტიკულ პროგრესიაში $a_1 = -2$, $a_5 = 18$. იპოვეთ მეათე წევრი. იპოვეთ ამ პროგრესიის იმ წევრების ჯამი, რომელთა მნიშვნელობა 50-ზე ნაკლებია.

- 8 > დაწერეთ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრიც არის კოორდინატთა სათავეზე და გადის მოცემულ წერტილზე. იპოვეთ შესაბამისი წრის 45° -იანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი სექტორის ფართობი.

ა) $(0; -10)$ ბ) $(-3; -1)$ გ) $(-4; -4)$ დ) $(-6; 4)$

- 9 > 4 კუბი, რომელთა წიბოებიც 4 სმ-ია ერთმანეთზე ისეა დაწყობილი, რომ მართკუთხა პარალელებიპედიცა აგებული. იპოვეთ მისი მოცულობა და სრული ზედაპირის ფართობი.

- 10 > ცარიელ უჯრებში ჩაწერეთ შედარების შესაბამისი ნიშანი ($>$, $<$, $=$).

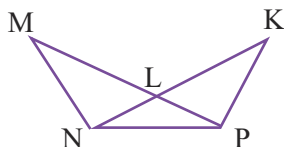
ა) როცა $a > b$, მაშინ $(-a) + b \square 0$ ბ) როცა $a > b$, მაშინ $(-a) - (-b) \square 0$

- 11 > თუ სეიმური 32 წუთში წიგნის 24 გვერდს კითხულობს: ა) რამდენ გვერდს წაიკითხავს 40 წუთში? ბ) რა დროში წაიკითხავს 264 გვერდიან წიგნს?

- 12 > ამოხსენით უტოლობები:

ა) $2(x - 3) < 5x$; ბ) $\frac{x - 3}{1 - \sqrt{2}} > \sqrt{2} + 1$; გ) $1 < 3 - 2x \leq 7$; დ) $2|x - 3| - 1 < 3$

- 13 > მოცემულია: $\triangle MLN \cong \triangle KLP$
დაამტკიცეთ: $\triangle MNP \cong \triangle KPN$



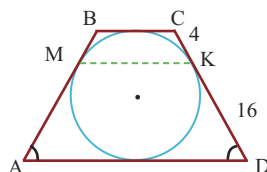
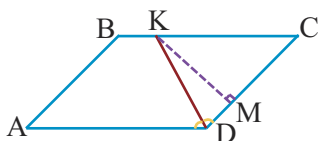
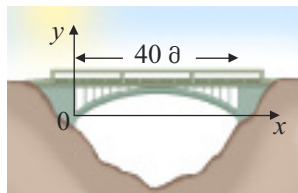
$$14 > \begin{cases} \frac{S}{x+y} = 3 \\ \frac{S}{x-y} = 5 \end{cases}$$

განტოლებათა სისტემიდან იპოვეთ

$$\frac{S}{x} + \frac{S}{y} \text{ ჯამი.}$$

განმაზოგადებელი დაგალები

- 15 > სასვე აუზიდან წყლის $\frac{2}{7}$ შუადღემდე, $\frac{1}{2}$ შუადღის შემდეგ გამოიყენეს. იპოვეთ ავზის ტევადობა, თუ სადილის შემდეგ დახარჯეს 15 ლ-ით მეტი წყალი, ვიდრე სადილამდე.
- 16 > გამოთვალეთ. ა) $\frac{\text{შსჯ (72; 90)}}{\text{შსბ (72; 90)}}$ ბ) $\frac{\text{შსჯ (36; 45)}}{\text{შსბ (36; 45)}}$
- 17 > მარცვლეულის წარმოებაში მოსავლიანობა 25 ც-დან 30 ც-მდე გაიზარდა. რამდენი პროცენტით გაიზარდა მოსავლიანობა?
- 18 > წესიერი მრავალკუთხედის გვერდი 8 მ-ია, პერიმეტრი - 64 მ. ა) იპოვეთ თითოეული შიგა კუთხის გრადუსული ზომა; ბ) რამდენი დიაგონალის გავლება შეიძლება ერთი წვეროდან? გ) იპოვეთ ყველა დიაგონალის რაოდენობა.
- 19 > 40 მ სიგრძის ხიდი, რომელიც გადებულია ხრამზე დამაგრებულია პარაბოლის ფორმის თაღზე ვერტიკალური მეტალის სამაგრების დახმარებით. კოორდინატთა სისტემის ისეთი შერჩევით, როგორც სურათზე ნაჩვენებია თაღის მოდელირება შეიძლება ფუნქციით $f(x) = -0,08(x - 20)^2 + 32$, $0 \leq x \leq 40$. იპოვეთ მეტალის სამაგრების სიგრძეები ხიდის შუა წერტილიდან 5 მ; 10 მ; 20 მ-ის მოშორებით.
- 20 > ა) უჩვენეთ, რომ კვადრატული ფესვი $(3 + 2\sqrt{2})$ -დან არის $(1 + \sqrt{2})$.
ბ) გამოთვალეთ: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:
- 21 > ა) $(7x - y)^2 - 2(7x - y)(x - y) + (x - y)^2$, როცა $x = \sqrt{2}$
ბ) $\frac{2\sqrt{2} - ab^2}{2 + b^2} + \frac{\sqrt{2}b^2 - 2a}{2 + b^2}$, როცა $a = \sqrt{2} - 1$.
- 22 > 3 საათში ავტომობილმა გაიარა 240 კმ. ა) რა მანძილს გაივლის იგივე სიჩქარით ავტომობილი 5 საათში? ბ) რამდენ საათში გაივლის იგივე სიჩქარით ავტომობილი 560 კმ-ს?
- 23 > ყუთში ყვითელი და მწვანე ბურთულებია. ყვითელი ბურთულების მწვანე ბურთულებთან თანაფარდობა 4 : 1. თუ ყვითელი ბურთულების ნახევარს ამოვიღებთ ყუთში დარჩენილი ყვითელი ბურთულების რაოდენობა მწვანე ბურთულებზე ორით მეტი იქნება. 1) რამდენი ბურთულა იყო ყუთში თავდაპირველად? 2) თუ ყუთში ჩაუხედავად ამოვიღებთ ორ ბურთულას, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა იქნება: ა) ყვითელი ფერის; ბ) სხვადასხვა ფერის?
- 24 > თუ ABCD პარალელოგრამში DK ბისექტრისაა, $KM \perp CD$, $KM = 3$ სმ, $BK = 2$ სმ და $S_{\Delta CKD} = 9$ სმ². იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი და ფართობი.
- 25 > სურათზე მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის პერიმეტრი, ფართობი და ფერდების წრეწირთან შეხების წერტილების შემაერთებული MK მონაკვეთის სიგრძე.



განმაზოგადებელი დაგალებები

- 26** > ა) სამკუთხედის გვერდების სიგრძეების შეფარდებაა $2 : 3 : 4$. იპოვეთ გვერდების სიგრძეები, თუ სამკუთხედის პერიმეტრი 54 სმ-ია.
 ბ) ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 10 სმ, ფერდზე დაშვებული სიმაღლე 8 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი, ფართობი, ჩახაზული და შემოხაზული წრეების რადიუსები.

- 27** > l წრფის განტოლებაა $3x - 2y = 6$. m წრფე l წრფეს კვეთს $x = 2$ წერტილში. თუ $(-1; 6)$ და $(x; 2)$ წერტილები m წრფეზე მდებარეობენ, მაშინ იპოვეთ x კოორდინატი.

- 28** > ა) იპოვეთ რომბის ფართობი, პერიმეტრი, სიმაღლე და მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი თუ რომბის დიაგონალებია 6 სმ და 8 სმ.

ბ) იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი პერიმეტრი 28 სმ-ია, ხოლო სიმაღლეები 3 სმ და 4 სმ-ია.

- 29** > გამოთვალეთ.

ა) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ ბ) $(\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28}$ გ) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$

- 30** > $x^2 - 2x + y^2 + 1 = 4$ წრეწირში:

ა) იპოვეთ ცენტრის კოორდინატები;

ბ) იპოვეთ რადიუსი;

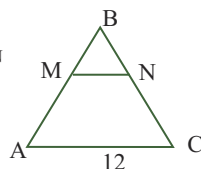
გ) გამოთვალეთ შესაბამისი წრის ფართობი.

- 31** > $MN \parallel AC$

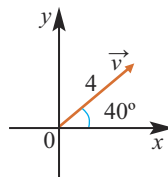
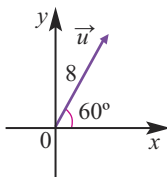
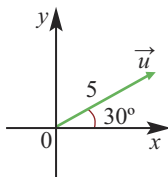
$$S_{\triangle MNC} = 8 \cdot S_{\triangle MBN}$$

$$AC = 12$$

იპოვეთ MN .

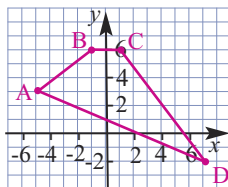


- 32** > დაწერეთ თითოეული ვექტორი კომპონენტებით.



- 33** > მასწავლებელმა 30 მოსწავლის ტესტური გამოცდის საშუალო ქულის გამოთვლისას ერთ-ერთი მოსწავლის ქულა 50-ის ნაცვლად შეცდომით ჩაწერა 350 და საშუალო ქულა გახდა 70. რისი ტოლი იქნება მოსწავლეების საშუალო ქულა, თუ გასწორდება დაშვებული შეცდომა?

- 34** > გამოთვალეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე გამოსახული ოთხკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი.



- 35** > გამოთვალეთ.

ა) $\frac{9^5 \cdot 2^9}{36^4}$ ბ) $\frac{4^{-3} \cdot 9^{-2}}{6^{-5}}$

გ) $2^{\frac{7}{3}} \cdot 32^{\frac{5}{6}} : 8^{\frac{3}{2}}$

- 36** > ა) იპოვეთ $2x^2 - 3x - 1 = 0$ განტოლების ფესვების ჯამი და ნამრავლი.

ბ) $x^2 + (1 - 2m)x + m - 3 = 0$ განტოლების ფესვების ჯამი მათ ნამრავლზე 3 ერთეულით მეტია. იპოვეთ m და ამოხსენით განტოლება.

- 37** > ა) თუ რიცხვს 300-ს გავზრდით 20%-ით, ხოლო შემდეგ მიღებულ რიცხვს შევამცირებთ 20%-ით, რა რიცხვს მივიღებთ?

ბ) საქონლის ფასი შემცირდა 10%-ით, ხოლო შემდეგ ახალი ფასი გაიზარდა 10%-ით. როგორ შეიცვალა ფასი?

განმაზოგადებელი დაგალებები

- 38 > 1) მოცემულია ტოლფერდა სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძე: 8,4 მ და 3,2 მ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის პერიმეტრი. რამდენი ამონახსენი აქვს ამოცანას?
2) რომელი მთელი რიცხვებით შეიძლება გამოისახოს სამკუთხედის მესამე გვერდის სიგრძე, თუ 6 და 8 ერთეული სიგრძის გვერდებს შორის კუთხე ა) ნაკლებია 90° -ზე; ბ) მეტია 90° -ზე.

- 39 > ამოხსენით განტოლებები:

ა) $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ ბ) $\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{x}$ გ) $\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

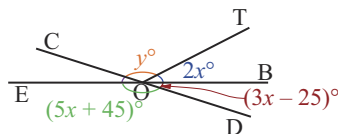
- 40 > ა) როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს მართკუთხედს, რომლის პერიმეტრიც არის 64 სმ, რათა მისი ფართობი იყოს უდიდესი?

ბ) როგორი ზომები უნდა ჰქონდეს მართკუთხედს, რომლის ფართობიცაა 25 მ^2 , რომ მისი პერიმეტრი იყოს უმცირესი?

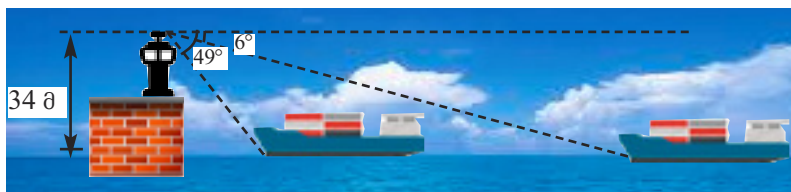
- 41 > 16 იის, 32 გვირილის და 24 ნარგიზისაგან ერთნაირშემადგენლობიანი ყველაზე მეტი რამდენი თაიგულის დამზადება შეიძლება? იპოვეთ ამ შემთხვევაში თაიგულში თითოეული სახის ყვავილის რაოდენობა.

- 42 > თუ ბაქტერიების მატებისათვის იქნება ხელსაყრელი პირობები, თითოეული მათგანი 20 წუთში 2 ახალ ბაქტერიად იყოფა. ამ პირობებში 4 საათში ერთი ბაქტერიიდან რამდენი ბაქტერია წარმოიშვება?

- 43 > იპოვეთ სურათზე ნაჩვენები კუთხეების გრადუსული ზომები.



- 44 > სამეთვალყურეო კოშკიდან დამკვირვებელმა დაინახა კატერი, რომელიც მოძრაობდა შუქურის მიმართულებით 6° -იანი კუთხით. 5 წუთის შემდეგ კატერი ჩანდა 49° -იანი კუთხით. გამოთვალეთ კატერის სიჩქარე, (მ/წთ) თუ დამკვირვებელი იმყოფება ზღვის დონიდან 34 მ-ის სიმაღლეზე.



- 45 > საბინეს ფული გულერის ფულის $\frac{4}{5}$ ნაწილს შეადგენს. ქენანის ფული შეადგენს საბინეს ფულის $\frac{7}{8}$ ნაწილს. რა თანხა აქვთ საბინესა და გულერს, თუ ქენანს აქვს 28 მანეთი?

- 46 > 1) წრის რადიუსი 15 სმ-ია. იპოვეთ 60° -იანი ცენტრული კუთხის მომჭიმავი რკალის სიგრძე. პასუხები დაამრგვალეთ მეათედებამდე.
2) იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ 60° -იანი ცენტრული კუთხის მომჭიმავი რკალის სიგრძეა: ა) 3π ; ბ) 5π .

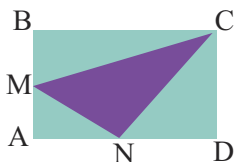
- 47 > იპოვეთ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის - პარაბოლის წვეროს წერტილი და საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები და ააგეთ პარაბოლა. დაწერეთ კვადრატული ფუნქციები $y = a(x-m)^2 + n$ სახით.

ა) $y = x^2 + 8x + 1$ ბ) $x^2 + 4x - 2$ გ) $2x^2 + 4x + 6$ დ) $3x^2 + 12x + 9$

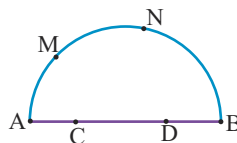
განმაზოგადებელი დავალებები

- 48 > გამოთვალეთ. ა) $\frac{7,1^2 - 1,5^2 + 8,6 \cdot 2,4}{6,3^2 - 2,3^2}$ ბ) $\frac{2,1^3 - 0,9^3}{1,2} + 0,9 \cdot 2,1$
- 49 > გაათავისუფლეთ მნიშვნელი ა) $\frac{8}{3\sqrt{5}}$ ბ) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ გ) $\frac{4}{\sqrt[3]{36}}$
ირაციონალურობისაგან.
- 50 > 120 მ სიგრძისა და 25 მ სიგანის ფართობზე უნდა დაისხას 20 სმ სისქის ბეტონი. ბეტონში მანქანას ერთ რეისზე მიაქვს 12 მ³ ბეტონი. რამდენი რეისი უნდა შეასრულოს ბეტონშიდმა მანქანამ ამ ფართობის დაბეტონებისათვის?
- 51 > დაწერეთ რიცხვები სტანდარტული სახით.
ა) 3560 ბ) 0,000204 გ) 21 020 000 დ) $0,32 \cdot 10^7$ ე) $3580 \cdot 10^9$
- 52 > თუ ღონისძიების მონაწილეები მაგიდას გარშემო 5-5 დასხდებიან, 3 კაცი ფეხზე დარჩება, ხოლო თუ 8-8 დასხდებიან, მაშინ 3 მაგიდა თავისუფალი დარჩება. რამდენი კაცი მონაწილეობს ამ ღონისძიებაში?

- 53 > ABCD მართკუთხედში M და N გვერდების შუაწერტილებია. იპოვეთ S_{MNC} , თუ $S_{ABCD} = 64$ სმ².



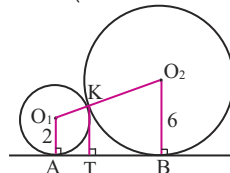
- 54 > აღნიშნულ წერტილებში წვეროებით რამდენი სამკუთხედის აგებაა შესაძლებელი?



- 55 > მოცემულია წერტილები: A (1 ; 3), B (-2 ; 1) და C (4 ; 2). $\vec{AB} - 2 \cdot \vec{CA}$ ვექტორი დაწერეთ კომპონენტებით და გამოთვალეთ სიგრძე.
- 56 > ლათივის წლის განმავლობაში მათემატიკის საგნის შემაჯამებელ შეფასებებში მიღებული ნიშნები შემდეგია: ერთი “2”, ოთხი “3”, სამი “4” და ორი “5”. ამ მონაცემების მიხედვით იპოვეთ საშუალო არითმეტიკული, მოდა და მედიანა.
- 57 > ორი მიმდევრობითი ნატურალური რიცხვის ჯამის კვადრატი მათი კვადრატების ჯამზე 24 ერთეულით მეტია. იპოვეთ ეს რიცხვები.
- 58 > ამოხსენით განტოლებათა სისტემა.

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = \frac{1}{2} \\ 4y - x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad c) \begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x+5xy+y=4 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x^2+xy=15 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$$

- 59 > 2 სმ და 6 სმ რადიუსიან ორ წრეწირს K წერტილში აქვთ გარე შეხება. იპოვეთ მანძილი K წერტილიდან წრეწირების საერთო AB მხებამდე.



- 60 > პარალელური გადატანისას A(-2; 1) წერტილი A'(-1; 3) წერტილში გადადის. ამ პარალელურ გადატანაში: ა) რომელ წერტილში გადადის B(-1; 1) წერტილი? ბ) რომელი წერტილი გადადის C'(-3; 1) წერტილში?
- 61 > სამირი გარკვეულ სამუშაოს მარტო 9 საათში ასრულებს, ხოლო ნადირთან ერთად - 6 საათში. რამდენ საათში შეასრულებს ამ სამუშაოს მარტო ნადირი?

განმაზოგადებელი დაგალებები

62 > დალაგეთ რიცხვები ზრდის რიგის მიხედვით: $a = \frac{71}{72}$, $b = \frac{72}{73}$, $c = \frac{75}{74}$, $d = \frac{76}{75}$

63 > პირველი ავტობუსი გაჩერებასთან მოდის ყოველი 30 წუთის შემდეგ, მეორე ყოველი 36 წუთის შემდეგ, მესამე - ყოველი 45 წუთის შემდეგ. თუ სამივე ავტობუსი პირველი გაჩერებიდან გადის ერთდროულად, მაშინ რა დროის შემდეგ შეხვდებიან ისინი ერთმანეთს ამ გაჩერებაზე?

64 > ამოხსენით განტოლებები.

ა) $4x = x^3$

ბ) $x^3 - x^2 - 2x = 0$

გ) $x^3 + x^2 = 4x + 4$

დ) $(5x + 1)^2 + 6(5x - 7) = 0$

ე) $(x^2 + 2x + 4)^2 - 7(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$

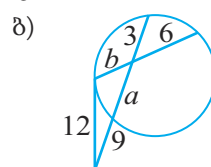
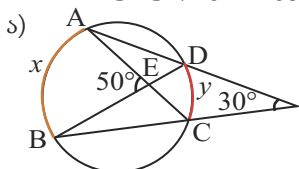
65 > ორი ნასოსიდან ერთი აუზს ავსებს 15 საათში, მეორე კი 10 საათში, მესამე ნასოსი სავსე აუზს დაცლის 18 საათში. რამდენ საათში გაივსება აუზი, თუ სამივე ნასოსი ერთდროულად იმუშავებს?

66 > ერთი ტომარა შაქრიდან ჯერ გაყიდეს $\frac{1}{3}$ ნაწილი, შემდეგ კი დარჩენილის $\frac{3}{5}$ ნაწილი.

ა) მთელი შაქრის რა ნაწილს შეადგენს გაყიდული შაქარი?

ბ) რამდენი შაქარი დარჩა ტომარაში, თუ სულ იყო 45 კგ შაქარი?

67 > მონაცემების მიხედვით იპოვეთ ცვლადები.



68 > დაადგინეთ შესაბამისობა (c_n - მიმდევრობის n -ური წევრია, S_n - პირველი n წევრის ჯამია).

1. $S_n = n^2 + n$

ა) $c_3 = 12$

ბ) $c_3 = 5$

გ) $c_3 = 6$

2. $S_n = n^2$

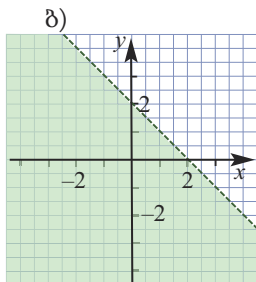
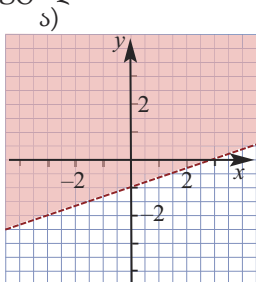
დ) გეომეტრიული პროგრესიაა

ე) $c_n = 2n - 1$

3. $S_n = 3(2^n - 1)$

69 > კალათაში მყოფი ვაშლების თევზებზე ოთხ-ოთხად, ექვს-ექვსად, რვა-რვად დაწყობისას ყოველთვის 3 ვაშლი ზედმეტი რჩება. სულ მცირე რამდენი ვაშლია კალათაში?

70 > დაწერეთ თითოეული გრაფიკის შესაბამისი უტოლობა.



71 > რომელ $N(x; y)$ წერტილად გარდაიქმნება $A(3; 5)$ წერტილი $C(-1; 2)$ ცენტრითა და $k = 2$ ჰომოთეტიის კოეფიციენტით. გამოთვალეთ CA და CN მონაკვეთების სიგრძეები და შეადარეთ.

72 > წვეროს წერტილი $(1; -5)$ მქონე და $(0; -3)$ წერტილზე გამავალი კვადრატული ფუნქციის განტოლება დაწერეთ $y = a(x - m)^2 + n$ სახით და ააგეთ გრაფიკი.

73 > $(2ab^2)^3 \cdot (3a^2b)^2$ უჩვენეთ ერთწევრის კოეფიციენტი და ხარისხი.

74 > 60%-იანი 400 გრ მარილის ხსნარიდან 25% აიღეს და სამაგიეროდ იგივე ოდენობის წყალი დაამატეს. რამდენ პროცენტიანი ხსნარი მიიღეს?

განმაზოგადებელი დაგალებები

75 > იპოვეთ ჯამი $a + b$, თუ $a, b \in \mathbb{N}$, $a : b = 2 : 5$, $\text{შსჯ}(a; b) - \text{შსბ}(a; b) = 45$.

76 > სამკუთხედის გარე კუთხეების გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც $3 : 4 : 5$. იპოვეთ ამ სამკუთხედის შიგა კუთხეები.

77 > მოტორიანმა ნავმა, რომლის სიჩქარე მდგარ წყალში 20 კმ/სთ-ია, გაცურა 18 კმ დინების საწინააღმდეგოდ და 11 კმ დინების მიმართულებით. მთელ გზას მონადგომა 1,5 საათი. იპოვეთ მდინარის დინების სიჩქარე.

78 > ამოხსენით უტოლობა ინტერვალთა მეთოდით.

ა) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$

გ) $3x^2 - 16x + 5 \leq 0$

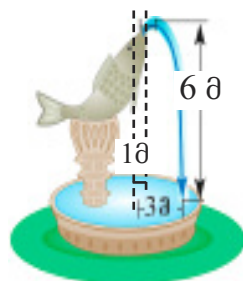
ე) $4x^2 < 25$

ბ) $-x^2 - 12x < 32$

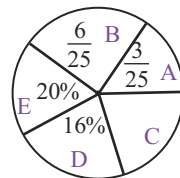
დ) $2x^2 - 4x - 5 > 0$

ვ) $0,5x^2 + 3x \leq -6$

79 > შადრევანის მოდელირება შეიძლება კვადრატული ფუნქციით. სურათზე 6 მ წყლის სიმაღლის წვერო 1 მ-ით არის დაშორებული წყლის ამოსვლის წერტილიდან და აღწევს აუზის ზედაპირს ამ წერტილიდან 3 მ-ის დაშორებით. გამოსახეთ სიმაღლის (H) დამოკიდებულება წყლის ამოსვლის წერტილიდან (d) მანძილზე $H(d)$ ფუნქციით.



80 > წრიულ დიაგრამაზე ნაჩვენებია 125 კითხვიან საცდელ გამოცდაზე სწორი პასუხების განაწილება რომელ ნაწილზე მოდის ყველაზე მეტი სწორი პასუხი? რამდენი სწორი პასუხი შეესაბამება ამ ნაწილს?



81 > განსაზღვრეთ მოცემული წრეწირების გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები.

ა) $x^2 + (y + 2)^2 = 13$

ბ) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$

გ) $x^2 + y^2 = 25$

და $x^2 + (y - 3)^2 = 8$

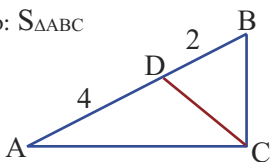
და $(x - 4)^2 + y^2 = 10$

და $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 25$

82 > ბაქოსა და გენჯას შორის მანძილი 350 კმ-ია. რუკაზე ეს მანძილი 7 სმ-ია. როგორი მასშტაბითაა რუკა შედგენილი?

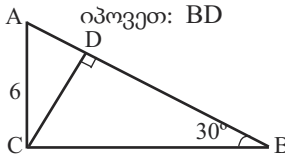
83 > მოცემულია: $\angle ACB = 90^\circ$, CD ბისექტრისაა, $AD = 4$ სმ, $BD = 2$ სმ.

იპოვეთ: $S_{\triangle ABC}$



84 > მოცემულია: $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 6$.

იპოვეთ: BD



85 > საწყობიდან ხორბალს 6 სატვირთო მანქანით 80 დღე ეზიდებოდნენ. რამდენ დღეში გადაზიდავდა ამ ხორბალს 8 ასეთი სატვირთო ავტომობილი? საწყობში არსებული ხორბლის 30 დღეში გადაზიდვისათვის რამდენი სატვირთო მანქანა იქნება საჭირო?

86 > 1) c -ს რა მნიშვნელობისათვის $(c^2 - 1)x = c - 1$ განტოლებას: ა) აქვს ერთი ამონახსენი; ბ) აქვს უამრავი ამონახსენი; გ) არა აქვს ამონახსენი?
2) c -ს რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებათა სისტემას ერთი ამონახსენი?

$$\begin{cases} 4x + y = c \\ y = x^2 \end{cases}$$

I განყოფილება

- პპ-8-11 №8 ბ) $\frac{8}{9}$ №13 დ) -3 და $\frac{2}{3}$; გ) 1 და $\sqrt{3}-1$ №14 ა) 2 №23 2) $A \cap (B \cup C)$
- პპ-13-15 №1 ა) B, C და D წერტილები ბ) $m = -2$ №3 $V = 64$ სმ³ ა) 512 სმ³ ბ) 61 სმ³ გაიზრდება
 №4 გ) 2; გ) 3; გ) 4; გ) 5. №10 ა) $\sqrt[3]{1,2} < \sqrt[3]{7} < 2 < \sqrt[3]{9}$ №11 ა) $x = 2$; გ) $x = 3$ №14 1) $a = 2^2 \cdot 3 = 12$;
 2) 96 სმ² №16 მე-2 მაგივარი №21 $h \approx 37,3$ მ №22 ბ) ≈ 342 გრ №24 ბ) $\approx 4,5$ სმ
- პპ-16-21 №3 ა) 2 და 3; ბ) 2 და 3; გ) 1 და 2; დ) 0 და 1; ე) 1 და 2 №6 ა) 2; გ) 3; დ) 2 №7 გ) 48;
 გ) 0; ზ) 2; თ) -8 №9 ა) $2x$; ბ) 0 №10 ბ) 0 №11 1 №14 დ) ± 2 ; ე) -2 №19 ა) 2; დ) 40;
 ე) 1 №20 ა) 12 ბ) 6 №21 ა) 1; გ) 2; გ) 6 №22 ა) 4; გ) 2 №25 ა) x ; ბ) a ; თ) xy №26 2 მ²
 №30 ა) $\frac{y}{x}$, დ) $|x|$ №31 ა) $a^2 + 4a + 4$; გ) $x^2 - 1$ №32 ა) $4\sqrt{2}$; ბ) $2\sqrt[3]{3}$ №33 ა) $4x\sqrt{x}$;
 ბ) $3a\sqrt{a^2x}$ №34 თ) $x\sqrt[4]{2y}$ $x \geq 0, y > 0$ №35 ა) $9\sqrt[5]{y}$ ბ) $x\sqrt[5]{2x^3}$ №36 ა) $\sqrt[3]{54}$; დ) $-\sqrt[4]{48}$
 №37 დ) $\sqrt[4]{2x}$, $x > 0$; ე) $-\sqrt[4]{-3c^3}$, $c < 0$ №41 ა) 3. №42 ა) $\sqrt[4]{b}$ №43 ა) 2; ბ) 4; გ) $1,5\sqrt{3}$
 №47 ა) $3\sqrt[4]{3}$; გ) $2\sqrt[4]{4}$ №48 ა) 1 №49 ბ) $x = 16$, $x > 16$, $0 \leq x < 16$
- პპ-22-26 №3 ა) 10; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) 10; თ) 1 №5 ბ) 6 №9 დ) a^3 №11 ა) a ; გ) $m^{0,5}$; დ) $c^{0,5}$ №12 ბ) 2
 №13 ა) 6 №14 ბ) 3x №17 ა) 0,1a; გ) 10a №18 ა) $x = a^2$; ბ) $x = a^{-3}$ №19 გ) 3 №20 გ) $x^{\frac{11}{24}}$
 №21 გ) $x^{0,5}$ №22 ა) $2x$; ბ) $x - y$; გ) $y - 1$ №23 გ) $c^{\frac{4}{3}} - 1$ №24 ა) $b^{0,5}$ ($b^{0,5} + 1$);
 გ) $(c - 3^{0,5})(c + 3^{0,5})$; ზ) $(x^{\frac{1}{3}} - 3)(x^{\frac{1}{3}} + 3)$ №25 ა) $a^{0,5} + b^{0,5}$; დ) $b^{\frac{1}{5}}$ №26 ა) 5 №28 2) 5 საათი
 №30 ბ) $h = 12$ სმ №31 პარალელები პედალის მოცულობა მეტია №34 დ) $b = \frac{a}{\sqrt{A^2 - 1}}$
- პპ-27 №1 ა) 6; ბ) 1; გ) -1 ; ე) 1 №3 ა) $4\sqrt[3]{9}$ გ) $\sqrt[4]{8}$ №4 ბ) $\approx 1,9$ მ №5 ა) 1 №6 დ) $-\sqrt[4]{3a^4}$;
 ე) $\sqrt[4]{2c^3}$; გ) $-\sqrt[4]{-2c^3}$ №7 ბ) $\sqrt[5]{b}$; გ) $\sqrt[6]{a}$ №10 ა) ± 2 ; გ) -1 №11 $2a^3$ №12 $\frac{2}{a}$ №13 ა) $x \geq 3$;
 ბ) $x \in R$; გ) $x \leq 2$; დ) $x \leq 0$
- პპ-29-30 №4 დ) $\approx 4,18$ მმ №5 ა) $\approx 2,36$ სმ №6 $\approx 62,8$ სმ №9 ა) 150° , 90° , 120°
- პპ-31-34 №3 ა) 4 ბ) 93° №5 ა) 16; ბ) 30 №7 25 №9 ბ) 48; 26 №10 ა) 10 ბ) 3 №11 21
 №13 I შემთხვევა-1სმ, II შემთხვევა-7სმ №14 144 მ №15 ა) 12 სმ; ბ) 10 სმ; გ) 48 სმ.
- პპ-35-36 №1 40° , 180° , 210° . №2 95° , 60° , 120° . №5 1) 63° ; 2) 110° ; 3) 36° , 30°
- პპ-37-39 №4 ბ) 8; გ) 9; დ) 15. №6 გ) 3,9 მ; დ) 36° №8 ბ) 2; დ) 12 №9 ა) $AD = 14$ სმ, $AB = 16$ სმ,
 $DC = 17$ სმ, $BC = 19$ სმ, $P = 66$ სმ №10 3) 12 №11 ა) $15\sqrt{3}$; ბ) 36 №12 $9\sqrt{7}$ სმ
- პპ-40-42 №5 ა) 19° ; ბ) 17° №6 დ) 14° ; ე) 26° №7 ა) 30° ბ) 44° №9 40° №10 1) $\approx 58^\circ$, 122° №11 გ) 55°
- პპ-43-44 №4 ა) 2; ბ) 25; გ) 2 №5 6,5 მ №6 5,8 კმ №7 ა) 2; ე) 8 №9 ბ) $c = 5$, $d = 6$; გ) $x = 11$
- პპ-45-46 №1 130° №2 50° №5 ბ) 8 №7 89° ; 41° №8 ე) 154° ; 76° №10 ა) $\approx 13,4$ კმ; ბ) ≈ 67 მმ.

II განყოფილება

- პპ-49-55 №2 ბ) 9 №3 ა) -1 ; 2 №7 1) $a = \frac{1}{4}$ №16 ბ) $y = \frac{1}{2}$ ($x - 3$)² + 2, $y = 2(x - 3)$ ² + 2
 №20 ა) $x = 5$ №21 გ) $y = -4(x - 2)$ ² + 5; დ) $y = \frac{1}{5}(x + 3)$ ² - 10 №23 ა) $y = -(x - 2)$ ² - 1;
- პპ-56-57 №1 1) ა) 2; ბ) 1; გ) 2; №2 ა) 1) ზევით; 2) $m = 15$, $n = -100$; 3) $x = 15$; 4) 2;
 ბ) 1) ქვევით; 2) $m = 0$, $n = 14$; 3) $x = 0$; 4) 2; გ) 1) ზევით; 2) $m = -18$, $n = -8$;
 3) $x = -18$; 4) 2; №3 ა) $f(x) = (x - 8)(x + 3)$; $g(x) = (x - 1)^2$; $p(x) = 4(x - 2)(x - 3)$
 ბ) $f(x)$: (8; 0), (-3; 0), (0; -24); $g(x)$: (1; 0), (0; 1); $p(x)$: (2; 0), (3; 0), (0; 24)
 №4 ა) $y = (x - 10)(x - 4)$ №6 ა) 2; $x = 2$; გ) $2\sqrt[3]{3}$; $x = 2$; დ) 4; $x = 1$
 №7 ა) $m = 1$, $n = -8$; ბ) $m = -2,5$ $n = -\frac{1}{6}$; გ) $m = -1$, $n = 4$
- პპ-58-61 №2 1) ა) (3; 0), (-1; 0); ბ) (0; -3); გ) (1; -4); დ) $y = (x - 1)^2 - 4$. 3) ა) (-1; 0),
 (-5; 0); ბ) (0; 5); გ) (-3; -4); დ) $y = (x + 3)^2 - 4$. №6 ა) აბცისთა ღერძს (2; 0); (6; 0),
 ორდინატთა ღერძს (0; 12) წერტილში კვეთს. წვეროს წერტილია (4; -4). შუამ = -4. განსაზ-
 ზერის არე $(-\infty; +\infty)$, მნიშვნელობათა სიმრავლე $[-4; +\infty]$. №7 ა) შუამ = 8; ბ) შუამ = 4;
 გ) შუამ = 0,5 №9 $y = -\frac{1}{20}(x - 5)^2 + 20$ №10 დ) (1; 14); გ) (2; 48) №15 ა) $b = -2$,
 $c = -3$; ბ) $b = -4$, $c = 3$; გ) $b = -4$, $c = 4$;

- პპ.64-65 №1** გ) $S = 12x - x^2$; დ) თუ $x = 6$ სმ, მაშინ $S_{max} = 36$ სმ² **№2** ა) ყოველ ჯერზე 50 კაპიკით 5-ჯერ გადვირებისას ბ) 1125 მანეთი **№4** ა) $t_1 = 1$ წმ, $t_2 = 3$ წმ; ბ) $t = 2$ წმ, $h_{max} = 21$ მ გ) $\approx 4,05$ წმ. **№5** მე-3 დღე; 290 ბილეთი **№6** 20 მ **№7** 1) $y = 2,24 - \frac{8}{7}x^2$ (x და y მეტრობით) 2) ა) 1,68 მ **№8** 1) $y = \frac{1}{40}x^2$
- პპ.67-68 №4** ა) $y = 2|x|$; ბ) $y = 1 - |x - 3|$ გ) $y = 0,5|x + 2|$ **№6** ბ) მე-10 კვირა 4000 ალბომი
- პპ.69 №1** $b = -3$; $c = 2$ **№2** (5; 0), (-3; 0), (0; -15) **№3** $y = (x + 3)^2 - 2$ **№4** $k = 10$ **№5** [2; + ∞) **№7** $y = x^2 - x - 2$ **№8** 20 მ **№12** $a = 4$, $b = -6$ ან $a = -4$, $b = 6$
- პპ.70-73 №3** ა) 1) 10; 2) 5; 3) 13 ბ) $RQ = \sqrt{68}$, $PT = 5$ **№4** ა) $P = 18$; ბ) $P = 4\sqrt{17}$ **№5** 5 **№7** (-2; -2) **№8** 5 **№9** 1) ა) $x=10$, $y=10$; ბ) $2\sqrt{13}$ **№11** $k = -1$; $k = -7$, ორი წერტილი **№12** (6; 0) **№13** ა) $y = 2x + 4$ და $y = 2x - 1$; გ) $\sqrt{5}$ **№15** 15 მ **№16** ა) $P = 12$ **№17** 10 კმ **№20** ა) ტოლფერდაა; ბ) სხვადასხვაგვარაა.
- პპ.74-81 №1** ბ) $x^2 + y^2 = 12$; გ) $x^2 + y^2 = 15$ **№2** ბ) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$; გ) $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 20$ **№3** ა) ± 12 ; ბ) ± 13 **№4** ბ) $M(1; 2)$, $r = 4$ **№5** ბ) $M(-8; -20)$, $r = 22$; დ) $M(2; -1)$, $r = 1$ გ) $M(1; -3)$, $r = 5$ **№7** ა) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 17$, (-1; 2), (-1; 4) **№9** ა) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$ ბ) (10; -2), (-4; -2) **№12** ბ) $y = -\frac{4}{5}x - \frac{41}{5}$ **№15** 10 **№16** 5 **№17** ა) მხეობი დ) მკვეთი **№18** $(x - 12)^2 + y^2 = 64$ **№21** ა) 10; ბ) 7 **№27** $13\sqrt[7]{3}$ **№29** ა) $9\sqrt{3}$
- პპ.82-83 №1** ა) $\approx 39,3$ სმ² ბ) $\approx 37,7$ სმ² **№2** ა) $\approx 1,14$ მ² **№3** ბ) $\approx 8,94$ მ **№4** $9\sqrt{3} - 1,5\pi \approx 10,87$ სმ² **№8** $\approx 0,61$ მ² **№10** ა) $12,5(\pi - 1)$; ბ) $6,25\pi - 12$ **№11** $8\pi - 16$
- პპ.84 №3** ა) (4; 3); გ) 5π ; დ) $y = -\frac{4}{3}x$ **№4** ბ) (-6; 0), (2; 0) **№6** $12,5\pi$ **№7** $16\sqrt{3} - 8\pi$

III განყოფილება

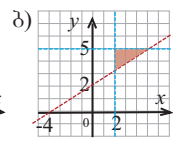
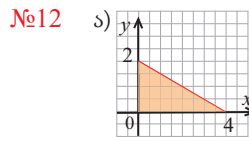
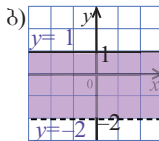
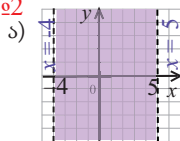
- პპ. 86-88 №1** ა) 3; ე) ± 1 **№2** ბ) 0; 2 გ) 0; ± 2 ; ე) 0; ± 4 ; **№3** 1) 0; 4; -5, 3) -2; $\pm 0,5$ 10) ± 3 ; 1,5 **№4** ა) ორი ნამდვილი რიცხვი; ბ) ერთი ნამდვილი ფესვი აქვს; გ) სამი ნამდვილი ფესვი აქვს **№5** გ) ± 2 დ) ± 2 ; ± 3 **№6** -2; 1; 3; $a = -2$ **№7** ა) 5; ბ) 1; ± 3 **№8** 10 წელი **№9** ა) ± 3 ; დ) ± 2 ; ± 1 ე) 1; 2 ო) 4; -0,5 **№10** ა) ± 1 ; ± 2 ბ) ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 4 ; ე) ± 1 ; ზ) 1; 2; 3; 6 **№11** ბ) 12; 4 **№12** ა) $k = 2$ ბ) $k = -1$ **№13** ა) 56; ბ) ბოლო 4 კვირაში საშუალო ქულა 52,5 პირობით **№14** ა) $r = \frac{A - P}{Pt}$; დ) $v_0 = \frac{s}{t} - \frac{gt}{2}$ **№15** ბ) $\approx 31,25$ მ
- პპ. 89-90 №1** ა) $\emptyset$; ბ) -4; 3 ზ) ± 4 ; დ) -2,5 **№2** ა) 3 გ) ± 4 ე) $\emptyset$; თ) 6; -1 **№3** ა) $\emptyset$; დ) 0; ე) -1 **№4** ბ) $a = \frac{b}{3b + 2}$; გ) $a = \frac{b(x + 1)}{x - 1}$ **№5** რაჰიმი-6 სთ, ჯემილი-3 სთ. **№6** 4 სთ, 12 სთ. **№7** 9000 **№8** 40 გგ. **№9** 10 მან, 12,25 მან. **№10** ა) 4 კგ **№12** 20 თამაში **№13** 36; 37
- პპ. 92-94 №4** ბ) ± 4 ; ზ) ± 3 ; დ) -4; 3; მ) 1 **№5** ზ) -0,6; 3; მ) 1 **№9** $|x - 110| = 15$ **№12** $|x - 48| = 2,4$
- პპ. 95-101 №7** ბ) (2; 2), (1; 3); გ) (4; 2), დ) (-1; 3), (-3; 1) **№8** ა) (3; 9), (-1; 1); ბ) (1; 2), (-2; 5); ე) (6; -1), (3; 5) **№12** ა) $b > 7$; ბ) $b = -5$ **№13** $k = -2$ და $k = 10$ **№14** $b < 0$ **№15** ა) (-2; -4) (4; 2) **№16** 2) $y = 4 - (x + 3)^2$, $y = -x - 1$ **№19** $t_1 = 1$ წმ. და $t_2 = 3$ წმ. **№20** 8მ $\times$ 8მ **№22** ბ) ≈ 14 წმ. **№23** ა) 7,5 **№28** ა) (1; -2), (-1; 2) **№29** დ) ერთი ამონახსნი აქვს; ე) ამონახსნი არ აქვს.
- პპ. 102-103 №1** 430 **№2** 0,8 მან; 1,1 მან. **№3** 1000 მან, 3000 მან. **№4** 2350 მან, 3050 მან. **№5** 6 ლ, 4 ლ **№6** 88 კგ წმინდა აბრეშუმი, 32 კგ კი 85%-იანი აბრეშუმი **№9** 60 სმ² **№10** 20 წთ, 30 წთ. **№11** 96 კმ/საათი, 64 კმ/საათი **№12** 56 წმ.
- პპ. 104-105 №11** (1; -4), (2; -1); 2) (3; 3), (-3; -3); 5) (1; -2), (-1; 2); 10) (0; -1), (-1; 0) **№3** გ) 1; 2 ე) 0; ± 5 **№4** 4 კმ/საათი, 5 კმ/საათი **№5** ა) 100 პირი **№7** ბ) (-2; 5), (2; 1); გ) (3; 2) **№9** 6; 8; 10 **№10** ე) -1 **№11** 4 მ/წმ, 3 მ/წმ. **№14** ა) $a = 0$; ბ) $a = \pm 6$
- პპ. 107-109 №5** ა) 7; ბ) 12; **№7** 1) ა) 12; ბ) 54; 2) ა) 120° ; 60° ; ბ) 144° ; 36° **№9** 1260° **№10** $n = 10$ **№11** ა) 127° **№12** 140° **№14** 1) 6; 2) 12; 3) 9; 4) 18 **№15** 3) $n = 10$ 4) $n = 12$
- პპ. 111-117 №1** ა) 30° ; ბ) 7,5 **№3** ა) $x = 90^\circ$, $y = 60^\circ$; ბ) $x = 90^\circ$, $y = 50^\circ$; გ) $x = 32^\circ$, $y = 90^\circ$ **№4** 96 სმ² **№8** 24 სმ **№12** I-შემთხვევა-22 სმ; II-შემთხვევა 20 სმ **№14** ა) 40; 80 **№15** დ) 130 სმ² **№16** ბ) $R = 5$, $r = 2$; **№18** 10 სმ **№19** $R = 8$ სმ **№20** 2) 12 სმ **№21** $R = 6$ სმ $S = 27\sqrt{3}$ სმ²

- №23 ა) $r=4$ სმ, $R=8,125$ სმ; №25 ა) $r_1=1$; $r_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; ბ) $r=\frac{\sqrt{3}}{6}$; $r_1=\frac{\sqrt{3}}{18}$ ბ) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$
 №27 4,8 სმ №28 $2,4\pi$ სმ №30 ბ) $P=6R$, $d_b=2R$, $d_k=\sqrt{3}R$
 პპ.119-122 №2 ა) $9\sqrt{3}$ №4 ა) 48 სმ²; ბ) 24 სმ² გ) 20 სმ² №5 ა) 256 ; გ) $288\sqrt{3}$ №6 გ) $54\sqrt{3}$
 №7 ა) $P=42$; $S=\frac{147\sqrt{3}}{2}$; გ) $P\approx 56$; $S=243$ №8 ბ) $24\sqrt{3}$ მ² №12 ბ) $3\sqrt{3}$ სმ
 №16 ბ) 1) $x=105^\circ$; 2) $x=54^\circ$; 3) $x=84^\circ$
 პპ. 123 №1 36 სმ №2 $72\sqrt{3}$ სმ² №3 126° №4 $\sqrt{5}$ №8 ≈ 226 მ²

IV განყოფილება

- პპ.125-127 №2 ა) $[-4; 2]$; ბ) $(1; 10)$ გ) $\emptyset$ №3 ა) $[2; 4)$ ბ) $(-\infty; 4)$ №4 $(4; 8)$ №5 ა) $(-4; 1)$
 გ) $(-10; 2)$ №6 ა) $(-1; 8)$; გ) $(-0,5; +\infty)$ №7 ა) $[5; 7]$; გ) $[-2; +\infty)$ №8 36
 №9 არანაკლებ 10,8 კგ და არაუმეტეს 32,4 კგ პირობით №10 3 მ-ზე მეტი, 9 მ-ზე ნაკლები №11 ა) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$; გ) $(1; +\infty)$ №12 ბ) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
 დ) $[-3; 6]$ №13 ა) $(1; 3)$ ბ) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ №14 15 №15 ბ) როცა $a < 10$
 პპ.128-129 №1 ა) $(-\infty; -3,6] \cup [2; +\infty)$ ბ) $[2; 3]$; გ) $(-6; 0)$; თ) $(-\infty; -2)$; ი) $(1,5; +\infty)$; №3 $|x - 45| \leq 30$
 №4 $|x - 150| \leq 20$ №5 ა) -5 ; 3 ბ) $(-5; 3)$ გ) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$ №7 ბ) ცისფერი გმწვანე
 პპ.131-132 №3 ა) $2x+y \leq 4$; ბ) $2x-y \geq 4$; გ) $-2x-y < 4$ №5 $2x+5y \geq 300$ №6 ა) $5x+8y \leq 80$

პპ.133-136 №2



- №3 ა) $y \geq x + 1$; $y \leq x + 3$ ბ) $y \leq 4$; $y \geq 2$ გ) $x \geq -2$; $y \leq 2$ №4 ა) $y > 5 - x$; $x \leq 30$;
 ბ) $y < 5 - x$; $y \leq 4$ №6 $x + y \leq 15$; $2x + y \geq 20$

- პპ.139-144 №2 ა) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; ბ) $(1; 3)$; გ) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ №3 ა) $(-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$
 დ) $[-2,5; -1]$; ე) $(-1,5; 1)$ №5 ა) $(-\infty; +\infty)$; გ) $\emptyset$ №7 ბ) $x=7$; გ) $\emptyset$; დ) $(-\infty; +\infty)$
 №8 ა) $(1; 8)$; ბ) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; დ) $[-4; 6]$; ი) $x \neq 2$ №10 ა) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$
 ბ) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ №11 ა) $(-2,5; 2)$; ბ) $(1; 7)$ №12 $(-1; 6)$ №13 ა) $(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$
 ბ) $[1; 5]$; ე) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ №14 ბ) $[-5; -1]$ გ) $(-\infty; 2,5] \cup [3; +\infty)$; დ) $(2,5; 4)$
 ე) $(-\infty; -12) \cup (2; +\infty)$ №17 ა) 5სმ; ბ) 4სმ, 5სმ №19 7სმ-ზე მეტი, 12სმ-ზე ნაკლები
 №21 გ) > 58 წელი №23 მარცხენა საყრდენიდან 50მ-დან 480მ-მდე მანძილი №24 ა) $t \in (1; 3)$
 №26 ა) ვერ გაივლის ბ) 2მ გ) $\approx 3,439$ მ №30 თუ იქნება 15მ-ზე მეტი, 20-ზე ნაკლები.

- პპ.145-148 №1 ა) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; გ) $[-4; 7]$; დ) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; თ) $[-3; 0] \cup [3; +\infty)$
 №2 გ) $[-4; -3] \cup [3; 5]$; ე) $[0; 2] \cup \{-5\}$; ზ) $(0; 4) \cup (4; 8)$; ი) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$
 ე) $\{-4\} \cup [5; +\infty)$ №3 ა) 7; $(-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$; $(5; 7)$ №4 ბ) $[2; 6]$ №5 ა) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$
 №6 $\approx 27,9$ სმ-ზე მეტი, 28,6 სმ-ზე ნაკლები №8 ა) $(-7; 3)$; ბ) $(-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$ ე) $[-5\frac{1}{3}; -2\frac{1}{2}]$

- პპ.149-150 №1 გ) $x \neq 0,5$; ზ) $\emptyset$; თ) $(-\infty; +\infty)$ №2 დ) $(-2; -1) \cup (1; 3)$; ე) $[-3; 0] \cup [20; +\infty)$
 ე) $[-1; 3) \cup (3; +\infty)$ თ) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2)$; ი) $(-\infty; -4) \cup [-2; 5]$; №9 ბ) $(-2; -0,5) \cup (1; +\infty)$
 გ) $(-\infty; -1,5) \cup (-1; 11)$ №13 9 და 11; 10 და 10. №16 $a \in (-3; 0)$ №18 $a \in [0; 4)$

- პპ.152 №3 ა) $\vec{f}, \vec{h}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{k}$; ბ) $\vec{b}, \vec{f}, \vec{h}$; გ) $\vec{f}, \vec{h}$; დ) $\vec{d}$

- პპ.154,155 №1 5) $\langle -8; -2 \rangle$, $|\vec{PQ}| = \sqrt{68}$ №4 ა) $\vec{OP} = \langle 2; 4 \rangle$; გ) $\vec{QP} = \langle 2; -4 \rangle$ №7 $\vec{PQ} = \langle 3; 4 \rangle$ |

$\vec{PQ} = 5$, $v = 50$ კმ/საათი №8 ა) $\vec{OP} = \langle 3; 2 \rangle$, $\vec{RS} = \langle 3; 2 \rangle \Rightarrow \vec{OP} = \vec{RS}$ №10 ა) $-0,5$

- პპ.156,157 №3 ა) $|\vec{a}| \approx 7,2$ $\varphi = 45^\circ$ №5 ა) $\vec{PQ} = \langle -3; 2 \rangle$ $|\vec{PQ}| = \sqrt{13}$ $\varphi \approx 144^\circ$

- პპ.159-164 №2 ა) 220 გ; ბ) 270 გ №7 $\approx 143^\circ$, 5 კმ №13 ა) $\vec{AB}$; ბ) $\vec{DB}$; დ) $\vec{AD}$; ე) $\vec{BC}$; ი) $\vec{AD}$

- პპ.166 №4 ა) $\langle 10\sqrt{2}; 10\sqrt{2} \rangle$; ბ) $\langle -300; 0 \rangle$ №5 300 მ №6 ა) 40 წმ; ბ) ≈ 89 მ
 პპ.167 №1 გ) $\approx 81^\circ$ №2 $F_3 \approx 159$ ნ, $F_4 \approx 103,5$ ნ №4 $\vec{w} = \langle -3\sqrt{3}; 3 \rangle$ №5 $|\vec{u}| = 250$ (მ), $\varphi \approx 67^\circ$
 პპ.168,170 №1 $\vec{AC} = 2\vec{a}$; ბ) $\vec{KC} = -2\vec{b}$ №6 ა) $\langle -8; 21 \rangle$ გ) $\langle 14; -1 \rangle$ №7 ა) 10 ბ) 13 №9 ბ) $k = \pm 6$
 №10 2) $\vec{AX} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{BY} = \vec{b} - 0,5\vec{a}$ №13 C(0; 3) №14 (3; 5)

V განყოფილება

- პპ.173-175 №3 ა) 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21. $a_5 = 15$, $a_n = 3n$, $n \in N$ №5 1) ა) $b_4 = 33$; ბ) $b_5 = 51$;
 გ) $b_7 = 99$; დ) $b_{k+1} = 2k^2 + 4k + 3$, $k \in N$ 2) ა) $c_n = 27$ $n=7$; ბ) $c_n = 35$ $n=9$ №6 ა) $a_n = 20$
 $n=10$; დ) $a_n = 0$ $n=8$ №7 $a_n = 3n+1$ №10 1) $a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 1$, $n \in N$
 და $a_n = 2n-1$, $n \in N$; 2) $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 2$, $n \in N$ და $a_n = 2n$, $n \in N$
 №11 ა) 1; 5; 17; 53; 161 №12 ა) $a_1 = 11$, $a_2 = 34$, $a_3 = 17$, $a_4 = 52$
 პპ.177 №1 ბ) $a_{n+1} = a_n + 0,5$; $a_1 = 0,5$ გ) $a_{n+1} = a_n + 0,3$; $a_1 = -1,6$ №2 ა) $x_1 = 9$, $x_3 = 1$
 პპ.178-180 №1 ბ) $a_n = 4n - 10$ და $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = -6$. №3 ა) $a_1 = -40$, $a_8 = -19$
 №4 11,2; 18,4; 25,6; 32,8 №6 ა) $n \geq 5$, $a_n > 0$ №10 ბ) $a_6 = -23$, $d = -4$
 №11 152; 208 №13 ა) $d = 3$, $a_1 = 12$, $a_6 = 27$. №16 $a_4 = \sqrt{48}$ №20 ა) 1; 4; 7 და 7; 4; 1
 გ) 12 წევრი №23 13 წევრი №24 46000 მანეთი №25 24 სმ² №27 $a_n = 4n - 1$
 პპ.181,182 №1 ბ) 1) $a_5 + a_9 = 6$; 2) $a_7 = 3$ №2 ბ) $x = 0$, $x = 2$. №5 8 სმ №6 10 სმ
 №7 ბ) 9სმ; 12სმ; 15სმ №9 1) ა) -1; 2; 5. გ) $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{3}$. №10 $a_2 + a_8 = 2a_5 = 2c$
 პპ.184-186 №1 გ) 92 №2 ა) 195; ბ) $n^2 - 2n$ №5 ა) $\frac{n(n+1)}{2}$; ბ) $n(n+1)$; გ) n^2 №6 გ) 1683
 №7 122,5 №9 ა) 8 ბ) 78 №12 ა) 19 №13 0,25 №14 ა) $a_1 = 1$; $a_2 = 9$ გ) მე-5 წევრი
 პპ.188 №3 ა) $y_1 = 2$, $y_4 = 0,25$. №4 ა) 10; 3; 0,9; 0,27; 0,081 №7 1) $q = \frac{1}{3}$; 3) $q = 0,5$
 პპ.190-191 №1 გ) $b_4 = 12$, $b_5 = -24$ №4 ა) $n = 5$ ბ) $n = 6$ №5 2) $b_{n+1} = 3b_n$, $b_1 = 4$ №7 $P_6 = 1,5$ სმ
 №8 3სმ^2 №12 72,9% №13 დ) 4-ჯერ გაიზარდება №14 ა) $b_n = 2^{11-n}$ ბ) $n = 11$
 პპ.192 №2 $x = 5$, $x = -15$ №3 $x = 4$ №4 $q = 2$ №5 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ №6 ბ) დიხა.
 პპ.194-195 №1 ა) 31,5; გ) 3069 №3 ა) $b_1 = 3$ №5 ა) $\frac{y^n - 1}{y - 1}$, ($y \neq 1$) №7 2^{72} №10 ა) $n^3 + 1$ №13 1364
 პპ.197 №1 ა) $S = 27$ №3 გ) $q = \frac{1}{3}$ №4 ა) $\frac{1}{1-a}$ ბ) $\frac{1}{1+a}$ გ) $\frac{1}{1-a^2}$ დ) $\frac{1}{1+a^3}$ №6 72 სმ²
 პპ.198-199 №2 $S_3 = 248$, $b_1 = 8$, $b_4 = 1000$ №6 84 №7 $S_4 = S_9 = 54$ №10 462 ლოტი ან 5913,6 გრ
 №11 30,6 №12 $a_1 = 5$, $d = 4$ №13 12 №15 $a = 3$, $b = 6$ ან $a = 27$, $b = 18$ №20 ა) $\frac{3}{4}$
 პპ.201-205 №7 ა) $F(-4; 1) \rightarrow F'(-1; -1)$; $A(-2; 5) \rightarrow A'(1; 3)$, $S(-1; 4) \rightarrow S'(2; 2)$, $N(-1; 2) \rightarrow N'(2; 0)$
 №8 ა) $\vec{u}(5; 8)$, დ) $\vec{u}(-4; -5)$ №10 1) $\langle 5; 3 \rangle$ 2) $A(2; 1)$ №14 გ) C(3; 0)
 პპ.206 №2 ა) $u = \langle -4; 2 \rangle$ №5 გ) $A'(-4; -1)$, $B'(1; -1)$, $C'(-4; -7)$

VI განყოფილება

- პპ.219-221 №2 720 №3 96 №4 დ) 2 №5 24 №7 5! · 3! №9 ა) 3! · 5! ბ) 5! · 3!
 გ) 8! №10 ა) 6, ბ) 12, გ) 180, დ) 840 №11 10 №12 ა) 6 ელემენტი, 3 ელემენტიდან
 თითოეული 2-ჯერ მეორდება №13 30 №14 10 №15 ა) 30 ბ) 15 №17 ა) 720
 №18 ა) ${}_8P_2 < {}_6P_3$ №19 ბ) 4 №20 120 №21 360 №22 380 №23 60 №24 120; 100
 პპ.222-223 №2 ა) 4; დ) 20 №4 ა) 220 №5 ${}_nP_k > {}_nC_k$ №8 ა) კომბინეზონი; ბ) პერმუტაცია;
 №10 6! №11 1260 №13 56 №14 60 №15 2^{10} №16 74 №18 ბ) $2! \cdot 4! \cdot 4!$; გ) 8!
 პპ.224-227 №4 ა) 9900 №5 24, $P = \frac{1}{4}$ №6 $\frac{20}{21}$ №8 $P = \frac{1}{28}$ №9 ა) $\frac{1}{42}$ №10 ა) 56; ბ) 10; გ) $\frac{5}{28}$
 №11 $\frac{2}{5}$ №12 ა) $P = \frac{2}{7}$; ბ) $\frac{1}{7}$; გ) $\frac{4}{7}$ №13 $\frac{10}{39}$ №14 $\frac{1}{8}$ №16 ა) $\frac{2}{3}$; ბ) $\frac{2}{9}$
 №18 ა) $\frac{2}{3}$; ბ) $\frac{1}{3}$; გ) $\frac{1}{6}$ №19 $\frac{10}{33}$ №21 $\frac{1}{24}$ №22 $\frac{1}{20}$
 პპ.228 №4 ა) $\frac{1}{22}$ ბ) $\frac{21}{22}$ №5 ა) 10; 0,9 №6 ა) 364; ბ) $\frac{2}{13}$ №7 ა) 36; ბ) 72 №8 გ) 6
 პპ.229-236 №24 28 სმ, 24 სმ² №31 4 №33 60 №37 შემცირდა 1%-ით №54 16 №65 9 საათი
 №69 27 №74 45% №79 ა) $H(d) = 6 - 1,5(d-1)^2$ №81 გ) (5; 0), (4; 3) №83 7,2 სმ²

RİYAZİYYAT 9

Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün
«Riyaziyyat» fənni üzrə dərslik
(Gürcü dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov İlham Heydər oğlu Hüseynov
Elmi Məsləhətçi:	Çingiz Qacar
Elmi redaktor:	İlham Hüseynov
Tərcüməçi:	Çalabi Abdurahmanov
Korrektor:	İlahiyə Musayeva
Bədii tərtibat:	Leyla Bəşirova
Kompüter tərtibatı:	Rəşad Musayev

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi – 2017

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, sürətini çıxartmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Kağız formatı: $70 \times 100^{1/16}$. Fiziki çap vərəqi 15,0.

Ofset kağızı. Times New Roman şrifti

Səhifə sayı 240. Tiraj: 200. Pulsuz.

Bakı 2017

“Radius” nəşriyyatı

Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ

