

**Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов**

МАТЕМАТИКА 9

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для учителя по предмету «Математика» для 9-го класса
общеобразовательных школ**

*Утверждено Министерством образования
Азербайджанской Республики
(приказ № 369 от 03.06.2016)*

© Министерство образования Азербайджанской Республики – 2016

Авторские права защищены. Перепечатывать это издание или какую-либо его часть, копировать и распространять в электронных средствах информации без специального разрешения противозаконно.

Издательство «Radius»

Отзывы, замечания и предложения, связанные с методическим пособием для учителя, просим отправлять на электронные адреса:

radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az

Заранее благодарим за сотрудничество!



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin*,
sözləri *Əhməd Cavadındır*.

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadیرiz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

Содержание

I раздел	III раздел
Структура учебника5	Решение уравнений высших степеней101
Технологические инструменты, используемые в современном преподавании предмета “Математика” и информация о программном обеспечении9	Рациональные уравнения и решение задач108
Ссылки WEBSITE для обучения и занятий11	Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля115
Действительные числа15	Система уравнений120
Кубический корень числа17	Решение задач составлением системы уравнений. Обобщающие задания124
Корень n -ой степени и его свойства.21	Задания суммативного оценивания по разделу 3.1126
Степень с рациональным показателем и ее свойства.Обобщающие задания.26	Полугодовое суммативное оценивание128
Задания суммативного оценивания по разделу 1.1.36	Многоугольники130
Окружность. Центральный угол.	Внутренние и внешние углы многоугольника132
Дуга окружности37	Вписанные и описанные многоугольники135
Окружность. Хорда39	Радиусы окружностей описанной и вписанной в правильный многоугольник.
Угол, вписанный в окружность41	Площадь правильного многоугольника
Касательная к окружности46	Обобщающие задания141
Углы, образованные секущей и касательными50	Задания суммативного оценивания по разделу 3.2147
Отрезки, пересекающие окружность. Обобщающие задания53	
Задания суммативного оценивания по разделу 1.255	
II раздел	IV раздел
График квадратичной функции58	Система неравенств и совокупность неравенств151
Формы выражения квадратичной функции и ее график64	Неравенства с переменными под знаком модуля156
Нули квадратичной функции66	Линейные неравенства с двумя переменными161
Общий вид квадратичной функции ..69	Система неравенств с двумя переменными163
Решение задач с применением квадратичной функции75	Квадратные неравенства. Решение неравенств методом интервалов167
Функция $y = x $.	Обобщающие задания169
Обобщающие задания79	4.1 Суммативные оценочные задания по разделу171
Задания суммативного оценивания по разделу 2.183	Векторы173
Расстояния между двумя точками87	Векторы на координатной плоскости174
Уравнение окружности91	Направление вектора175
Сектор и сегмент.	Сложение и вычитание векторов179
Обобщающие задания92	
Задания суммативного оценивания по разделу 2.299	

Компоненты вектора и тригонометрические отношения ...	182
Решение задач на применение векторов	183
Умножение вектора на число.	
Обобщающие задания	186
Задания суммативного оценивания по разделу 4.2	188

V раздел

Числовые последовательности	190
Арифметическая прогрессия.	
Формула n -го члена арифметической прогрессии.	
Свойства членов арифметической прогрессии	194
Сумма n -первых членов арифметической прогрессии	198
Геометрическая прогрессия	
Формула n -го члена геометрической прогрессии.	
Свойства членов геометрической прогрессии	202
Сумма n -первых членов геометрической прогрессии	205
Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $ q < 1$.	
Обобщающие задания	208
Преобразование движений.	
Обобщающие задания	210
Задания суммативного оценивания по 5-му разделу	213

VI раздел

Представление и группировка информации	216
Представление информации	218
Анализ и представление информации.	
Обобщающие задания	223
Пермутации. Комбинезон	225
Решение задач на вычисление вероятности.	
Обобщающие задания	228
Задания суммативного оценивания по 6-му разделу	236
Обобщающие задания	237
Годовое суммативное оценивание	238

Используемые условные знаки

	Стандарты содержания		Моменты, требующие внимания
	Приобретенные навыки учеников		Вопросы на рефлексию
	Необходимый теоритический материал		Домашнее задание
	Необходимые начальные знания		Оценивающие задания
	Примерные задания для обучения		Решения некоторых заданий, данных в учебнике
	Дополнительные ресурсы		Словарь

Структура учебника

Учебник состоит из 6-ти разделов.

Стандарты содержания, охватывающие 1-ый раздел нижеследующие.

1.1. Применяет числа, запись чисел в различных формах и связь между ними.

1.1.1. Читает и записывает действительные числа.

1.1.2. Сравнивает и упорядочивает действительные числа.

1.1.3. Показывает, приблизительно, на числовой оси точку, соответствующую действительному числу.

1.1.4. Применяет свойства объединения и пересечения множеств при решении задач на множестве действительных чисел.

1.2. Применяет математические действия, математические процедуры и связь между ними.

1.2.1. Находит значения выражений, применяя свойства корня n -ой степени ($n > 2$).

1.2.2. Применяет свойство степеней с рациональным показателем.

1.2.3. Упрощает выражения содержащий корень n -ой степени ($n > 2$).

1.2.4. Применяет формулы сокращенного умножения в выражениях содержащих корень n -ой степени ($n > 2$).

1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (банковские операции, изменение цены продажи).

1.3. Производит вычисления и проверяет соответствие полученных результатов с действительностью.

1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни, и сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техники.

Навыкам чтения записи, сравнению действительных чисел в 8-ом классе было отведено достаточное место. В связи с этим повторению и обобщению этой темы выделен 1 учебный час, а основное внимание отведено навыкам формирования и применения свойств корня n -ой степени и степени с рациональным показателем. Каждое новое понятие - теоретическая информация, графическое

изображение, математическая запись сопровождается решениями примерных задач. Включенные в этот раздел уроки по содержательной линии геометрии - “3.1.3. Применяет свойства касательной и секущей”, охватывает уроки по стандартам содержания. На этих уроках последовательно исследованы свойства окружности и ее частей, соответственно возрастному уровню заданы задания, требующие соответственные обсуждения. Большая часть геометрических задач сопровождается графическими изображениями, что играет важную роль в визуальном представлении проблемы и в правильном формировании пространственных представлений.

Задания, требующие доказательство какого-либо предложения, даны с определением плана данных и доказательства. 2-ой раздел был выделен для формирования стандартов содержания по алгебре и геометрии - квадратичная функция, многочлены, функции. По применению квадратичной функции не были выделены особо выраженные стандарты содержания.

2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.

2.2.3. Решает квадратное неравенство.

2.3. Выражает зависимость между величинами, встречающимися в ежедневной жизни с помощью функции.

Приходится решать уравнения и неравенства предусмотренные основными стандартами и подстандартами содержания графическим методом, однако эти навыки невозможно применять без применения самой квадратичной функции. С учетом международного опыта, а также того, как в данных стандартах следующих классов эта тема больше не имеет места, то на исследование, применение квадратичной функции - решение финансовых задач в реальных жизненных ситуациях, выражение этой функцией задач на конструкции отводится широкое место. А также по содержательной линии геометрии во второй раздел были включены уроки соответственно стандартам “3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя точками, по координатам центра и радиусу пишет уравнение окружности”.

В третьем разделе “2.1. Проблемы разных ситуаций выражает в алгебраическом виде и исследует.”

2.1.1. Составляет уравнение с одной переменной или систему уравнений с двумя переменными, соответственно реальным жизненным ситуациям

2.2. Выполняет алгебраические процедуры.

2.2.1. Выполняет тождественные преобразования над алгебраическими выражениями.

2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.

В уроки были включены рациональные уравнения, а также уравнения с переменными под знаком модуля, системы уравнений (в которых одно уравнение первой, а другое второй степени, оба уравнения второй степени), решения примерных заданий, задачи на реальные жизненные ситуации и задачи по информации относящихся к различным областям науки. А также приводятся задачи,

связанные с финансовыми вопросами. Обучение решению уравнений разработано соответственно возрастным особенностям учащихся, на основе международных исследований.

В этом разделе даны уроки по следующим стандартам: “3.1. Исследует с помощью геометрических изображений, представлений и логическими обсуждениями свойства и признаки фигур”.

3.1.1. Знает понятия ломаной и многоугольника, изображает правильный многоугольник.

3.1.2. Вписывает окружность в треугольник и описывает окружность около него.

3.1.3. Применяет свойство касательной и секущей к окружности.

3.1.4. Применяет свойства четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около него при решении задач.“

В четвертом разделе представлены уроки по стандартам: “2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной. 2.3.1. Решает алгебраические неравенства методом интервалов. 2.2.3. Решает квадратное неравенство.” В этом разделе графическому решению неравенств отведено широкое место, отмечены веб-линки использованных графкалькуляторов. В решении неравенств графкалькуляторы являются незаменимыми инструментами. При решении задач, связанных с финансовыми вопросами, а также задач на конструкции, в реальных жизненных ситуациях применяются квадратные неравенства с очень большими или с очень малыми коэффициентами с составлением графика соответствующей функции. Здесь вспомогательным инструментом может быть только графкалькулятор. Решение неравенства алгебраическим способом ученик также может проверить с помощью графика, построенного на графкалькуляторе. В этом разделе по содержательной линии геометрии даны уроки по стандартам: “3.1.5. Применяет в математических и физических задачах понятие вектора на плоскости, правила сложения, вычитания и умножения вектора на число. 4.1.1. Преобразовывает производные единицы измерений друг в друга. 4.2.1. Проверяет соответствие полученных результатов при помощи практических измерений”. В обучении понятия вектора реализован новый подход, примененный в результате исследования опытов развитых стран. Ученик определяет абсолютное значение и направление вектора измерениями, определяет реальные измерения по принятому масштабу. Действия над векторами выполняются графическими изображениями, а эти действия формируют реальные жизненные навыки у учащихся, навыки выполнения задач и оценивания их результатов. Правильное обучение вектора имеет очень большое значение для формирования профессиональных и художественных навыков.

Пятый раздел охватывает уроки по стандарту: “2.1.3. Применяет свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий при решении задач.” Числовые последовательности, арифметическая и геометрическая прогрессии были построены на заданиях разного типа - обучением и применением большого числа чередующихся прикладных заданий. В этом разделе получили место уроки по стандартам: “3.2.1. Знает понятия параллельного переноса на плоскости и применяет его для преобразования фигур. 3.2.2. Знает понятие

преобразование движения и получает две конгруэнтные фигуру преобразованием движения.” Преобразование движения даны в сравнительном виде заданиями, построенными на графических изображениях.

В шестом разделе реализованы стандарты:

“5.1. Собирает статистическую информацию, систематизирует, анализирует и представляет результат.

5.1.1. Читает и анализирует данные, представленные в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или графика.

5.1.2. Классифицирует статистические данные по определённым свойствам.

5.1.3. Определяет правильность статической информации.

5.1.4. Строит таблицу частот и диаграммы, на основе вариантов полученных данных.

5.2.1. Различает виды комбинаторных соединений и решает задачи.

5.2.2. Прогнозирует возможность событий на основе статической информации.

5.2.3. Решает простые задачи на вероятность с помощью комбинаторных соединений.”

В учебнике имеют место примеры решений, заданий, охватывающие распределение частоты статической информации таблицей, гистограммой, навыки представления полигоном частоты, а также по частоте распределения - навыки вычисления средней арифметической. Для изучения таких видов объединений как пермутации и комбинезон в учебнике приведены определения и решения задач, обучающие и прикладные задания.

Факторы, оказывающие положительное влияние на приобретение высоких результатов обучения.

1. В большинстве случаев ученик знакомится с новыми понятиями посредством задания на исследование с мотивированным характером Эти задания, несущие больше практический характер, создают условия для восприятия понятий учениками, для очного их представления. Поэтому в максимальной степени следует обеспечить организацию этих занятий и присутствие всех учеников на них;

2. Приготовление виртуальных или бумажных плакатов, отражающие объяснения новых понятий и их демонстрация в течении урока;

3. Будучи общеклассной деятельностью - теоретические информации представляются обсуждениями, объяснением примеров;

4. Обратит внимание на выполнение обучающих заданий всеми учениками и проведение формативного оценивания путем наблюдения;

5. Для отстоющих учеников необходимо приготовить простые задания посредством программ, изготавливающим рабочие листы;

6. Объяснение в классе прикладных и творческих заданий, одна часть которых дается как домашнее задание. Из-за долгосрочности некоторых прикладных и творческих заданий приготовление учениками этих заданий в более развернутом виде - в форме реферата.

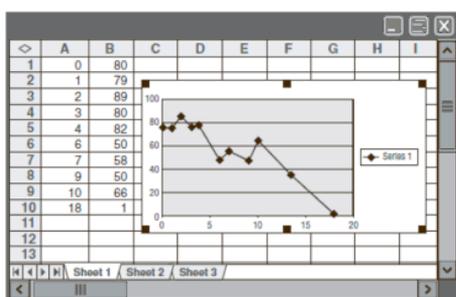
7. Обеспечение самостоятельного обучения учащихся и с целью близкого участия родителей в образовании своего ребенка - обеспечить доставку родителям интернет-адресов.

8. Обеспечение доставки всем ученикам особых заданий, данных в пособии для учителей и составленные по данным критериям.

Технологические инструменты, используемые в современном преподавании предмета “Математика” и информация о программном обеспечении

Результаты обучения и интернет-адреса

Электронная таблица и пример полигона частоты EXCEL.



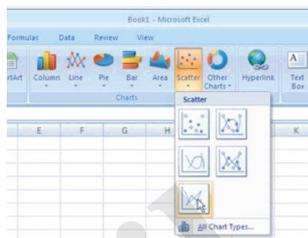
0	80
1	79
2	89
3	82
4	84
6	50
7	58
9	45
10	62
18	1

MICROSOFT EXCEL

Числа и действия. Производить вычисления по формуле.

Алгебра и функции. Составление электронных таблиц. Построение графических функций.

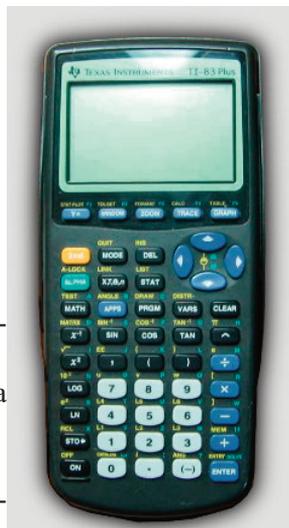
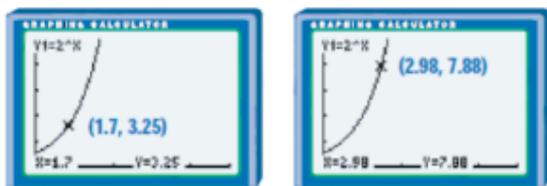
Статистика и вероятность. Составить электронные таблицы и представить информацию в разных графических формах.



В преподавании математики достижения современной технологии служат эффективной организации обучения. Среди инструментов обучения наряду с виртуальными инструментами, служащими реализации стандартов по всем содержательным линиям - интернет, графкалькуляторы, электронные таблицы, легко переносимые с помощью особых программ-производство малогабаритных графкалькуляторов, стало причиной положительных изменений в преподавании математики. Этими калькуляторами широко пользуются в развитых Европейских странах, Америки, Канаде. С помощью программы с графическим обеспечением Corel DRAW можно выполнить определенные работы. При обучении математике в определенной степени можно воспользоваться программой Microsoft Excel, имеющей возможности вычисления и подготовки статических информаций. Приготовлены отдельные программы для обучения математике с помощью интернета - Geometer's Sketchpad® Geometry Software, Fathom Dynamic Data Software. А также имеются программные обеспечения, широко используемые при обучении природоведения, математики, социальных наук и т.д.

Однако несмотря на постоянные обновления этих программ, с большой скоростью распространяется использование мобильных графкалькуляторов. Существуют объективные и субъективные причины невозможности использования вышеперечисленных программ - из-за компьютера, из-за связи с интернетом, не являющимся доступным для каждого ученика и т.д.

Наиболее используемые графкалькуляторы - это графкалькуляторы серии малого габарита, имеющие интерфейсную связь с большими компьютерами. Использование таких графкалькуляторов запланировано в старших классах при обучении математике и охватывает все содержательные линии. Использование технологии - одно из основных направлений деятельности. Для молодежи с современным мышлением использование этих технологий не создадут трудностей.



- С помощью этих графкалькуляторов возможно:
- построить график любой функции;
 - представить функцию с заданным графиком - таблицей, формулой;
 - определение области определения и множества значений функции;
 - нахождение максимума и минимума и .т.д.

Также есть возможность решения систем уравнений, решения неравенств, действий над матрицами, решения статических задач, решения задач по комбинаторике. Вредная сторона пользования технологией - мысли которые могут беспокоить: “Все работы выполняет калькулятор, а когда учит ученик”? Однако навыки систематизирования информации, введения в компьютер, обработки результатов играют важную роль в формировании творческого и аналитического мышления. В современном мире, в реальных жизненных ситуациях каждый все больше нуждается в этих навыках.

Виртуальные графкалькуляторы. В нужных местах учебника, а также в пособии для учителей даны веблинки графкалькуляторов. Виртуальные графкалькуляторы бывают разными в зависимости от используемой темы. Часть их имеют ограниченные возможности - предназначены только лишь для выполнения графических заданий. Однако удобны для использования. Например, такие как: <https://www.desmos.com/calculator>, <http://www.meta-calculator.com/online/>, http://my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html и др.

Обратите внимание, что запись $\sqrt[n]{a}$ можно записать в виде $a^{\frac{1}{n}}$.

Существуют виртуальные графкалькуляторы с более широкими возможностями, которые предназначены для построения графиков тригонометрических, рациональных функций, а также для решения статических, комбинаторных, алгебраических задач.

Например, такие как <https://mathway.com/graph>

Ссылки WEBSITE для обучения и занятий

1. http://algebra1lab.org/studyaids/studyaid.aspx?file=Algebra2_2-6.xml
2. <http://edhelper.com/LinearEquations.htm>
3. <http://www.kgsepg.com/project-id/6565-inequalities-two-variables>
4. <http://library.thinkquest.org/20991/alg/systems.html>
5. <http://math.tutorvista.com/algebra/linear-equations-in-two-variables.html>
6. <https://sites.google.com/site/savannaholive/mathed-308/algebra1>
7. <http://www.algebra-class.com/graphing-inequalities.html>
8. <http://www.beva.org/maen50980/Unit04/LI-2variables.htm>
9. www.classzone.com/books/algebra_1/page_build.cfm?id=lesson5&ch=6
10. http://www.mathchamber.com/algebra7/unit_06/unit_6.htm
11. http://www.mathwarehouse.com/algebra/linear_equation/linear-inequality.php
12. www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U05_L2_T1_text_final.html
13. <http://www.netplaces.com/algebra-guide/graphing-linear-relationships/graphinglinear-inequalities-in-two-variables.htm>
14. www.netplaces.com/search.htm?terms=linear+inequalities+in+two+variables
15. www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Algorithms/MyAlgorithms/MathAlgor/linear.html
16. <http://www.purplemath.com/modules/ineqgrph.html>
17. <http://www.saddleback.edu/faculty/lperez/algebra2go/begalgebra/index.html#systems>
18. http://www.tutorcircle.com/solving-systems-of-linear-equations-and-inequalityest71gp.html#close_iframe#close_iframe
19. http://www.wyzant.com/Help/Math/Algebra/Graphing_Linear_Inequalities.aspx
20. <https://www.khanacademy.org>
21. http://www.metmuseum.org/~media/Files/Learn/For%20Educators/Publications%20for%20Educators/Islamic_Art_and_Geometric_Design.pdf
22. http://www.learnalberta.ca/content/memg/3_A/index.html

Таблица планирования по 1-му разделу

Стандарты содержания	Урок №	Тема	Поурочный час	Учебник стр.	
<p>1.1.1. Читает и записывает действительные числа.</p> <p>1.1.2. Сравнивает и упорядочивает действительные числа.</p> <p>1.1.3. Показывает, приблизительно, на числовой оси точку, соответствующую действительному числу.</p> <p>1.1.4. Применяет свойства объединения и пересечения множеств при решении задач на множестве действительных чисел.</p> <p>1.2.1. Находит значения выражений, применяя свойства корня n-ой степени ($n > 2$).</p> <p>1.2.2. Применяет свойство степеней с рациональным показателем.</p> <p>1.2.3. Упрощает выражения содержащий корень n-ой степени ($n > 2$).</p> <p>1.2.4. Применяет формулы сокращенного умножения в выражениях содержащих корень n-ой степени ($n > 2$).</p> <p>1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни, и сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техники.</p> <p>3.1.1. Знает понятия ломаной и многоугольника, изображает правильный многоугольник.</p>	1, 2	Действительные числа	2	8-11	
	3-5	Кубический корень числа	3	12-15	
	6-9	Корень n -ой степени и его свойства	4	16-21	
	10-12	Степень с рациональным показателем и ее свойства	3	22-26	
	13, 14	Обобщающие задания	2	27	
	15	Задания суммативного оценивания по разделу 1.1	1		
	16, 17	Окружность. Центральный угол.	2	28-30	
	18-20	Окружность. Хорда	3	31-34	
	21, 22	Угол вписанной в окружность	2	35-36	
	23, 24	Касательная к окружности	2	37-39	
	25-27	Углы, образованные секущей и касательными	3	40-42	
	28, 29	Отрезки, пересекающие окружность	2	43, 44	
	30, 31	Обобщающие задания	2	45, 46	
	32	Задания суммативного оценивания по разделу 1.2	1		
			Всего	32	

Пример поурочного плана

Степень с рациональным показателем. Прикладные задания. 3 часа.

Цель урока - формирование нижеследующих навыков учащихся:

- применяет свойства степени с рациональным показателем;
- решает задачи с применением свойств степени с рациональным показателем.

Мотивация. Если цена какого либо продукта в течении n лет выросла с p_1 манат до p_2 маната,

тогда по этому продукту средняя годовая инфляция вычисляется как: $r = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$

Вычислите инфляцию для нижеследующих продуктов:

Продукт	1 кг в 2005- ом году цена (₸)	1 кг в 2005- ом году цена (₸).
Мясо	8	7
Сливочное масло	7	9

Как видно, в реальных жизненных ситуациях приходится решать задачи, в которых нужно упрощать выражения, содержащие степень с рациональным показателем и найти ее значение.

По формуле $r = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$ вычислим степень инфляции для мяса и масла:

$$\text{Мясо: } r = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 \approx -0,01 \quad \text{инфляции нет}$$

$$\text{Масло: } r = \left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 \approx 0,03$$

Как видно в цене масла средняя годовая инфляция составляет 0,03, то есть 3%. На этот этап урока отводится 5-6 минут.

Рекомендуется дать домашнее задание на самостоятельное исследование степени инфляции продуктов питания, бытовых предметов и.т.д

Выполняются прикладные задания данные в учебнике на стр 25.

Обсуждается задача **У.28** Вместо n ученики записывают одно значение и вычисляется количество кофеина оставшегося в организме человека за это время. Ученикам поручают провести исследование на вредность или полезность кофеина в организме человека. Кофеин оказывает положительное влияние на стимулирование центральной нервной системы. В маленьких дозах добавляется к различным напиткам. Принятие в больших дозах опасно. В качестве домашнего задания, задается выполнить письменно все пункты задачи.

4-5 минут. Как домашнее задание задается **У.29**

Задание **У.31** формирует навыки сравнения данных чисел со степенью с рациональным показателем. Задается вопрос: Который из чисел $2^{\frac{1}{3}}$ и $5^{\frac{1}{4}}$ больше? Как вы это определяете? Некоторые из учеников на доске приводя разные примеры отвечают на вопрос.

Ученикам поручают читать задачу. Некоторых учеников просят рассказать своими словами проблему поставленную в задаче.

Ученик: Должен найти объемы прямоугольного параллелепипеда с данными измерениями и куба с данным ребром и сравнить эти результаты. **6–7 мин.**
Полное выполнение задания задается домой.

Общеклассная деятельность. Разыгрывается игра с картами ... У меня, а ... у кого
Готовятся карты, число которых равно числу учеников в классе. Проверяется наличие начальной и конечной карты.

У кого начальная карта, тот читает информацию на карте. Все ученики записывают прочитанную информацию и вычисляют. На чьей карте 8 отвечает и читает свою карту.

Так как $4^{\frac{3}{2}} = 8$, то у кого карта с 8 отвечает:

Начальная карта у меня

А у кого $4^{\frac{3}{2}}$?

8 у меня

А у кого $125^{\frac{2}{3}}$?

Задания такого типа делают обучение более развлекательным, увеличивают мотивацию. Помогают формированию таких навыков как слушание, понимание, устное вычисление, направление внимания и т.д., а также развивают социальные навыки. Игральные карты в пособии даны на стр. 32. Игра - выгодное средство для проведения формативного оценивания. Могут быть включены и карты с отрицательным показателем степени. **7-8 мин.**

Работа в группах. Задание У.33 выполняется как работа в группах по 4 человека в каждом. **7-8 мин.** Каждый член группы рисует квадрат, на сторонах отмечает выбранную рациональную или иррациональную величину, вычисляет периметр квадрата. Таким же образом рисуется куб, отмечается длина ребра и вычисляется полная поверхность. Потом члены групп проверяют задания друг-друга, после нужных исправлений объявляют о готовности к презентации. После презентации всех групп ведется обобщение о том, какими математическими знаниями пользовались для выполнения этих заданий:

- Навык замены одной переменной через другую, например, $S = a^2$. Отсюда получается $a = \sqrt{S}$. А периметр квадрата $P = 4 \cdot a = 4\sqrt{S}$

Аналогично объем куба $V = a^3$, ребро $a = \sqrt[3]{V}$, полная поверхность $S_{\text{п}} = 6 \cdot a^2 = 6\sqrt[3]{V^2}$

- Навыки различать рациональные и иррациональные числа. Навыки применения свойств корней, проведение вычислений над рациональными числами и др.

Рефлекс. По работе в группах - согласно формативному оцениванию, учитель определяет слабую группу учеников.

Оценивание. Оценивание можно провести используя рабочие листы различной сложности. Выбираются рабочие листы, соответствующие уровню знаний учеников или же составляется заново. Рабочие листы могут быть использованы и как домашнее задание. **5 мин.**



Стандарты содержания

1.1.1. Читает и записывает действительные числа.

1.1.2. Сравнивает и упорядочивает действительные числа.

1.1.3. Показывает, приблизительно, на числовой оси точку, соответствующую действительному числу.

1.1.4. Применяет свойства объединения и пересечения множеств при решении задач на множестве действительных чисел.



Формирование навыков учеников

- классифицирует множество действительных чисел;
- изображает действительные числа на числовой оси;
- сравнивает действительные числа;
- Применяет свойства объединений и пересечений множеств на множестве действительных чисел.



Словарь

Действительные числа, натуральные числа, целые числа, рациональные числа, иррациональные числа



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы.

Мотивация. На доске записываются такие числа, как:

$$-\frac{7}{3} \quad \pi \quad \sqrt{3} \quad 0,1(3) \quad -3 \quad 5$$

Отвечающий ученик классифицирует показанные числа по соответствующим числовым множествам.

Например, $-\frac{7}{3}$ рациональное число.

-3 соответствует как множеству целых так и множеству рациональных чисел. Вспоминается определение рационального числа. Числа, записанные в виде $\frac{m}{n}$. ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) являются рациональными. А к каким множествам чисел можно отнести числа $\pi, \sqrt{3}, 5$?

Множество рациональных чисел - множество, в которое входят обыкновенные десятичные дроби, натуральные и целые числа. Числа, которые не могут быть выражены в виде отношения двух целых чисел (т.е. и виде $\frac{m}{n}$) называются иррациональными. А как называется множество чисел, в которое входят и рациональные и иррациональные числа?

На этом уроке будем выполнять задания на сравнения чисел, выражение их в различных формах, определение абсолютной величины.

Навыкам сравнения действительных чисел уже отведено место над рациональными и иррациональными числами. Примеры заданий для формирования этих навыков:

- Напишите два числа между дробями $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$. Как объясните мнение о том, что между этими числами можно написать бесконечное число чисел?

• Как определите числа, расположенные между числами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$? Обратите внимание на навыки определения целой и дробной частей числа.

• Выполняются задания на умение записывать множества действительных чисел неравенствами, интервалами. Отмечаются сходства и различия свойств объединения и пересечения множеств, этих свойств и свойств действий сложения и умножения над числами. Отслеживается - выполнение задания У.21 каждым учеником.

Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____ Число _____

1. Расположите действительные числа в порядке возрастания.

a) $\frac{11}{5}$; $-\pi$; $-2,98$; $-\sqrt{7}$ _____

b) $4,5$; $3\frac{5}{6}$; $\sqrt{16}$; $\frac{8}{3}$; 2π _____

c) $\sqrt{\frac{7}{2}}$; $\sqrt{11}$; $-\sqrt{16}$; $-3,3$; $-\sqrt{36}$ _____

d) $\sqrt{4}$; $1,8$; $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{\frac{36}{9}}$; 5 _____

2. Расположите на числовой оси.

a) $-\sqrt{1}$; $0,1$; $\sqrt{13}$; $-\frac{3}{5}$; $\sqrt{6}$



b) $-\sqrt{5}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$; $4\frac{5}{8}$; $\sqrt{18}$



c) $\frac{3}{7}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $0,46$; $\frac{\sqrt{5}}{6}$



Стандарты содержания



1.2.3. Упрощает выражения содержащий корень n -ой степени ($n > 2$).

1.2.4. Применяет формулы сокращенного умножения в выражениях содержащих корень n -ой степени ($n > 2$).

1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни, и сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техники.



Формирование навыков учеников

- строит график функции $y = x^3$;
- выполняет задания на нахождение точного и приблизительного значений квадратного и кубического корней;

Словарь



кубическая парабола, кубический корень, корень n -ой степени, степень с рациональным показателем



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Адреса интернета:

<https://mathway.com/graph>

<https://go.hrw.com/math/midma/grade-content/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html>

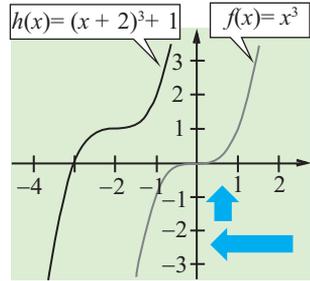
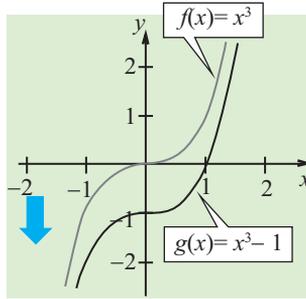
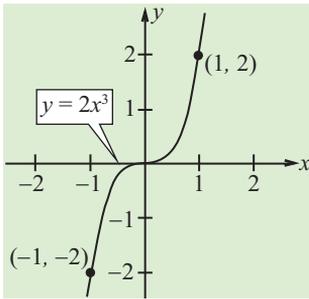
1-ый час.

График функции $y = x^3$. Практическая работа, данная в учебнике, может быть выполнена исследованием графика функции $y = x^3$, согласно уровню знаний учеников в два подхода - в ограниченном виде или в развернутом виде. 1-ый подход имеет в виду построение графика функции $y = x^3$, распознавание его формы, формирование умений определения приближенного значения кубического корня и куба числа по координатам точек. В учебнике график функции $y = x^3$ дан таким подходом.

2-ой подход имеет в виду построение графика графкалькулятором и может в более широком аспекте охватить исследовательские задания. 1. Строится график функции $y = x^3$. Используя этот график строятся графики функций $y = ax^3$ и $y = ax^3 + n$, $y = a(x - m)^3 + n$. 2. Строится график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и используя этот график строятся графики функций в виде $y = a\sqrt[3]{x}$ и $y = a\sqrt[3]{x - m} + n$.

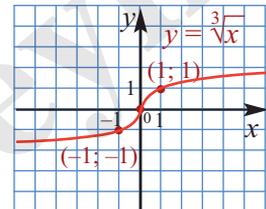
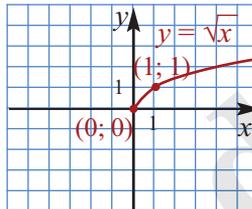
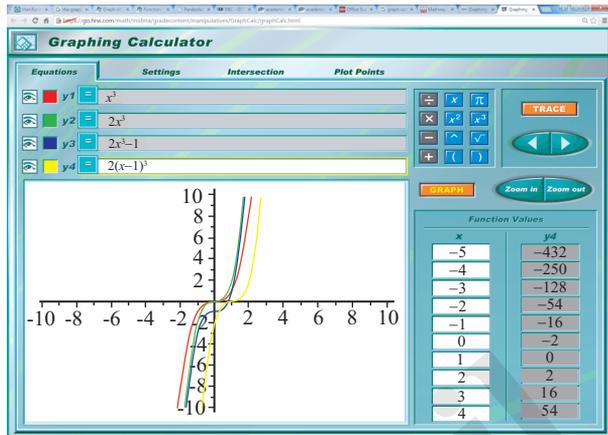
Рекомендуется также произвести сравнительный анализ этих графиков с графиком функции $y = x^3$. Будучи первым уроком это задание может показаться трудным. Однако знакомство с технологическими ресурсами и их применение устраняют эти трудности и облегчают обучение.

Примеры графиков функции $y = x^3$ и функций $y = ax^3$, $y = a(x - m)^3$, $y = a(x - m)^3 + n$ даны на рисунках в сравнительном виде.

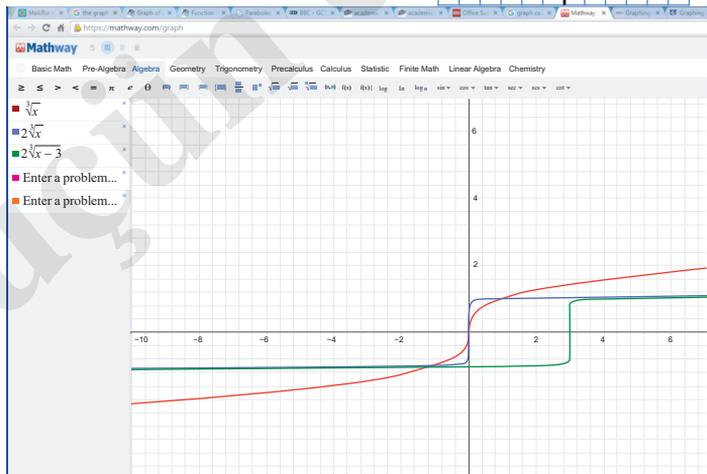


Примеры построений с графкалькулятором:
<https://go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html>

Позволяет также понять графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt{x}$, область определения и множество значений.



Графкалькулятор <https://mathway.com/graph> имеет еще большие возможности. Возможно построение графиков функций корней n -ой степени (включительно корень кубический) Ученик видит симметричность графиков функций относительно начала координат и исследует как отличаются по форме.



2-ой, 3-ий урок. Включает формирование вычислительных навыков кубического корня. Эти навыки могут быть оценены нижеследующими навыками-критериями. Выражение списком более детальных навыков, другими словами - правильное определение критерий оценивания оказывает положительное влияние на организацию обучения. Формативное оценивание проводится наблюдениями по этим критериям.



- Письменно точно вычисляет куб и корень кубический некоторого числа;
- Вычисляет калькулятором куб и корень кубический чисел;
- Определяет корень кубический чисел;
- Для вычисления корня кубического чисел, применяет некоторые методы вычислений данные в учебнике.

Применяемые основные первоначальные навыки: Свойства степеней

Разложение числа на простые множители.

Геометрические знания: формулы периметров, площадей и объемов фигур.

Методические рекомендации по некоторым заданиям данным в учебнике



У.12. 64 это число, являющееся и квадратом и кубом некоторого числа : $64 = 8^2$, $64 = 4^3$. И вы придумайте такие числа. Как поможет вам нижеследующая последовательность в нахождении таких чисел?

$$0 = 0^3 = 0^2; 1 = 1^3 = 1^2; 64 = 4^3 = 8^2; 729 = 9^3 = 27^2; 4096 = 16^3 = 64^2$$

Рассматривая данное задание ученики вспоминают свойства степеней. Выражая запись

$64 = 4^3 = 8^2$, записью $4^3 = (2^2)^3$ и $8^2 = (2^3)^2$ или же $64 = 2^6$ понимают, что все записи-различные эквивалентные записи одного числа. Задание может быть выполнено как работа с маленькими группами. Объявляется, кто напишет больше примеров в течении 3-х минут. Ученики понимают, что в этих примерах стратегия составления связано со свойствами степеней. Например, $(5^2)^3 = (5^3)^2$, $(7^2)^3 = (7^3)^2$. Рекомендуется решение задания **У.16** показать в таблице. Для принятия решения, проанализировав информацию необходимо в ясном виде его систематизировать.

Холодильник	Размер	Цена	Цена 1 см ³ или 1м ³
1.	40 см	96 ман.	
2.	60 см	192 ман.	
3.	50 см	150 ман.	

У.21. Биология. Чтобы определить высоту дерева, применяется формула $h \approx 35\sqrt[3]{d^2}$. Здесь d - диаметр ствола дерева, h - высота. Сколько метров-приблизительно будет высота дерева с диаметром ствола в 1,1 метров? Дается проверить формулу в заданной задаче.

Ученики вычисляют высоту какого-либо дерева в школьном дворе, в садах, в парках используя эту формулу. Эту работу можно выполнить как работу в группах. Каждая группа выбирает одно дерево. Произведя различные измерения (по длине окружности) определяют диаметр дерева.

Рабочий лист № 2

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



• Определяет и вычисляет кубический корень числа.

1. Вычислите куб чисел:

$$4^3 = \quad 5^3 = \quad 6^3 = \quad 7^3 = \quad 8^3 = \quad 9^3 = \quad 10^3 =$$

2. Воспользовавшись первым заданием найдите устно кубические корни чисел:

$$\sqrt[3]{125} = \quad \sqrt[3]{1000} = \quad \sqrt[3]{64} = \quad \sqrt[3]{216} =$$

$$\sqrt[3]{8} = \quad \sqrt[3]{512} = \quad \sqrt[3]{343} = \quad \sqrt[3]{8000} =$$

$$\sqrt[3]{2744} = \quad \sqrt[3]{64000} = \quad \sqrt[3]{216000} = \quad \sqrt[3]{6859} =$$

3. Определите между какими последовательными целыми числами будет кубический корень.

$$\sqrt[3]{200} \longrightarrow \text{ между 5 и 6, } 5^3 = 125; 6^3 = 216$$

$$\sqrt[3]{4} \longrightarrow \text{ между } _ \text{ и } _, _{}^3 = _; _{}^3 = _$$

$$\sqrt[3]{1,65} \longrightarrow \text{ между } _ \text{ и } _, _{}^3 = _; _{}^3 = _$$

$$\sqrt[3]{100} \longrightarrow \text{ между } _ \text{ и } _, _{}^3 = _; _{}^3 = _$$

$$\sqrt[3]{2,02} \longrightarrow \text{ между } _ \text{ и } _, _{}^3 = _; _{}^3 = _$$

4. Вычислите, воспользуясь калькулятором.

$$\sqrt[3]{200} =$$

$$\sqrt[3]{4} =$$

$$\sqrt[3]{1,65} =$$

$$\sqrt[3]{100} =$$

$$\sqrt[3]{2,02} =$$

Урок 6-9. Учебник стр. 16-21.

Корень n -ой степени и его свойства. 4 часа.

На этом уроке планируется формировать навыки применения корня n -ой степени и его свойств.

Основные критерии навыков применения свойств корня n -ой степени :



• Знает определение арифметического корня и результат исходящий из этого определения, решает уравнение n -ой степени: $x^n = a$.

• Объясняет на примерах равенства: $\sqrt[n]{a^n} = a$, если n -нечетное; $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, если n -нечетное

• Применяет свойство корня n -ой степени из произведения для $a \geq 0$ и $b \geq 0$ при упрощении числовых и содержащих переменную выражений;

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

• Применяет свойство корня n -ой степени из дроби для $a \geq 0$ и $b > 0$ при упрощении числовых выражений и содержащих переменную: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

• Применяет свойство корня n -ой степени из корня k -той степени если n, k - натуральные числа и $a \geq 0$ при упрощении числовых выражений и выражений с переменными: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

• Если n, k, m - натуральные числа и $a \geq 0$, упрощает, сокращая общие множители в показателе подкоренного выражения и в показателе корня:

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$$

• Выполняет задания на вынесение множителя из-под знака корня.

• Выполняет задания на внесение множителя под знак корня.

• Выполняет задание на освобождение знаменателя дроби от иррациональности.

Для формирования этих навыков в учебнике приведено определенное количество упражнений. Однако, чтобы проверить отдельные способности и еще больше развить их, наряду с использованием рабочих листов данных в учебнике, рекомендуется также и учителям приготовить дополнительные листы. Эту работу могут выполнить сами же ученики на уроке информатики - как интегративное задание.

! Моменты требующие внимания, наиболее часто встречающиеся ошибки учащихся:

• При сравнении $4\sqrt{2}$ и $\sqrt{32}$ ученик думает, что $4\sqrt{2}$ меньше $\sqrt{32}$. Выражая $\sqrt{32}$ -х эквивалентными выражениями $\sqrt{4 \cdot 8}$ и $\sqrt{16 \cdot 2}$ понимает равенство их $4\sqrt{2}$. При сравнении смешанных радикалов $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$ понимает внесение множителя под знак корня.

• Задание “В выражении $3\sqrt[5]{2}$ внесите множитель под знак корня” выполняют как $\sqrt[5]{3 \cdot 2}$. Ученик понимает, что множитель под знаком корня записывается в степени равном показателю корня : $3\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{(3^5) \cdot 2}$

• Выражение $-2\sqrt[3]{5}$ может записаться как $-\sqrt[3]{40}$ или же $\sqrt[3]{-40}$. Однако число $-2\sqrt{5}$ не эквивалентно числу $\sqrt{-20}$.

Рабочий лист № 3

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



• Применяет свойства корня n -ой степени.

1. Вычислите.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} =$$

$$\sqrt[3]{0,5} \cdot \sqrt[3]{16} =$$

$$\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} =$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} =$$

$$(\sqrt{18} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} =$$

$$(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4} =$$

$$\frac{\sqrt[5]{486} - \sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} =$$

2. Вычислите.

$$\sqrt[4]{81} =$$

$$\sqrt[3]{729} =$$

$$\sqrt[4]{256} =$$

$$\sqrt[4]{256} =$$

$$(\sqrt{7})^4 =$$

$$(\sqrt[6]{5})^{12} =$$

$$(2\sqrt[3]{3})^6 =$$

$$(-2\sqrt[6]{4})^3 =$$

3. Упростите.

$$(\sqrt[4]{b^2})^4 =$$

$$\sqrt[9]{z^3} =$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[3]{n^{18}}} =$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt[2n]{a^{4m}} =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{u^2}} =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[8]{z^6}} =$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[5]{u}} =$$

4. Упростите.

$$(\sqrt{ab})^3 \cdot \sqrt{a^3b^3} =$$

$$\sqrt{x^n} \cdot (\sqrt{x})^n =$$

5. Упростите.

$$\frac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{x^2y^4}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^7}}{\sqrt[3]{a^2b^6}} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{u^5v}}{\sqrt[4]{uv^5}} =$$

$$\frac{\sqrt[5]{16 \cdot r^6 \cdot z^3}}{\sqrt[5]{0,5 \cdot r \cdot z^2}} =$$

Рабочий лист № 4

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



• Применяет свойства произведения и частного корня n -ой степени при упрощении числовых выражений и выражений с переменными.

1. Вынесите множитель из-под корня.

$$\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{7 \cdot 8} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{7} \qquad \sqrt{\frac{75}{64}} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}\sqrt{3}$$

$$\sqrt{32} = \qquad \sqrt{\frac{125}{16}} =$$

$$\sqrt[3]{24} = \qquad \sqrt{\frac{90}{16}} =$$

$$\sqrt{180} =$$

2. Упростите.

$$\sqrt{y^7} = \qquad \sqrt[3]{81a^5bc^8} =$$

$$\sqrt[3]{8x^{10}} = \qquad \sqrt[3]{24x^7y^8} =$$

$$\sqrt{49a^3} = \qquad \sqrt[3]{x^6y^7z^4} =$$

3. Упростите выражения.

$$\sqrt{a^2b^3} \cdot \sqrt{ab} = \qquad \sqrt[3]{m^2n} \cdot \sqrt[3]{m^4n^5} =$$

$$\sqrt{u^3v^{-2}} \cdot \sqrt{u^5v^3} = \qquad \sqrt[5]{x^3y^4} \cdot \sqrt[5]{x^{-3}y} =$$

$$\frac{\sqrt{a^{11}b^7}}{\sqrt{a^6b^5}} = \qquad \frac{\sqrt{8u^2v^3t^4}}{2uvt} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{u^7v^8}}{\sqrt[3]{u^6v^3}} = \qquad \frac{\sqrt{a^3b^2}}{\sqrt{ab}} =$$

4. Упростите выражения при положительных значениях переменных.

$$\sqrt[4]{u^3v^2} \cdot \frac{\sqrt[4]{16u^3v^3}}{\sqrt[4]{u^2v}} =$$

$$\frac{5 \cdot \sqrt[5]{m^4n^{-1}}}{6 \cdot \sqrt[5]{mn^2}} \cdot \sqrt[5]{m^2n^3} =$$

$$\frac{2(m\sqrt{n} + n\sqrt{m})}{\sqrt{m^2n} + \sqrt{mn^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{a^2b^3c} - \sqrt{4bc}}{\sqrt{bc} \cdot (ab - 2)} =$$

Рабочий лист № 5

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



• Внося множителя под знак корня записывает выражение под одним корнем.

1. Упростите.

$$a^3\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$$

$$\frac{u}{z}\sqrt[3]{\frac{z^2}{u}} = \sqrt[3]{\left(\frac{u}{z}\right)^3 \cdot \frac{z^2}{u}} = \sqrt[3]{\frac{u^3z^2}{z^3u}} = \sqrt[3]{\frac{u^2}{z}}$$

$$b^3\sqrt[3]{a^2b} =$$

$$\frac{u}{z}\sqrt[3]{\frac{z^4}{u^7}} =$$

$$b^4\sqrt[4]{a^2bc^2} =$$

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} =$$

$$ab\sqrt[5]{a^6b^2c^{10}} =$$

2. Упростите.

$$\sqrt{x}\sqrt{x} =$$

$$\sqrt[3]{z}\sqrt[3]{z} =$$

$$v \cdot \sqrt{v} \cdot \sqrt{2v^2} =$$

$$\sqrt[3]{y}\sqrt{y} =$$

$$\sqrt[4]{u}\sqrt{u} =$$

$$\sqrt{w}\sqrt{w}\sqrt[3]{w} =$$



• Упростите выражения сведя корни с разными показателями к корням с одинаковыми показателями.

1. Упростите.

$$2\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = 2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}} = 2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} = 2\sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3} = 2 \cdot \sqrt[6]{3^2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt[6]{3^3} = 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$4\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} =$$

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8} =$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} =$$

$$8\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{8} =$$

2. Упростите.

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{4}{27}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{100}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2a}}{3a} =$$

Рабочий лист № 6

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



• Освобождает знаменатель от корня.

1. Освободите знаменатель от иррациональности.

Пример:

$$\frac{3a}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3a \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt[3]{2}}} = \frac{3a \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3a \sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{9}} =$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$\frac{4}{\sqrt[4]{8}} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{72}}{\sqrt[4]{2}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} =$$

$$\frac{5\sqrt[4]{18}}{\sqrt[4]{2}} =$$

2. Освободите знаменатель от иррациональности.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}} =$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2}} =$$

$$\frac{8}{\sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{2}} =$$

$$\frac{10}{\sqrt[4]{32} + 3\sqrt[4]{2}} =$$

3. Освободите знаменатель от иррациональности.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt[4]{2}} =$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{16}} =$$

Урок 10-12. Учебник стр. 22-26. Степень с рациональным показателем. Урок 13, 14. Обобщающие задания. 2 часа.



На этом уроке планируется формировать навыки применения свойств степени с рациональным показателем.

Запланированные критерии оценивания навыков:

- Применяет запись степени с дробным показателем, числитель которой равен единице: $x^n = \sqrt[n]{x}$. (n - натуральное, x - любое отрицательное действительное число)
- Применяет равенства $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ или же $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$,

в которых m целое, n натуральное, x - любое положительное число.

- Применяет свойство произведения степеней при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство произведения степеней с рациональным показателем при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени произведения и степени в степень при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени с отрицательным показателем при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени частного при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет степень с нулевым показателем при упрощении выражений содержащих переменную.

Известные нам свойства степеней с целым показателем справедливы и для любой степени с рациональным показателем при положительном основании. Ученики выполняют эти свойства, рассказывают устно; а один из учеников каждое рассказанное свойство записывает на доске математической записью. Рекомендуется свойства степеней с рациональным показателем продемонстрировать в виде плаката или с помощью проектора.



Моменты, требующие внимания:

Нужно обратить внимание на то, что значение степени с рациональным показателем a^p не зависит от формы записи дроби p . Например $8^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{2}{6}}$

В степени с рациональным показателем в основном делается акцент на важность условия поставленного на основании степени. В противном случае нарушается однозначность степени с дробным показателем.

Например, целесообразно провести сравнение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ и $(-8)^{\frac{2}{6}}$ при нарушении условия положительности основания, и показать, что несмотря на равенстве $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, указанные выражения различны. Обсуждается задание У.4.

Ученики должны усвоить основную идею: любое положительное число “ a ” можно представить в виде $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$.

Наиболее часто встречающиеся ошибки учеников можно сгруппировать как показано ниже. Рекомендуется заранее информировать учеников об ошибках.

	ошибка 1.	ошибка 2.	ошибка 3.
1.	$\frac{1}{x^2} = x^{1/2}$	$\frac{2}{x^{1/2}} = 2x^2$	$\sqrt[3]{x^2} = x^{-2/3}$

2. Еще раз объясняет на данном примере понимание разности между произведением степеней с рациональным показателем и возведением степени в степень. Аналогично, степени с целым показателем, при вычислении произведения степеней с рациональным показателем - показатели степеней складываются; при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются.

a) $x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ b) $(27x^2)^{\frac{2}{3}}$

Рекомендуется проверить правильность применения этого свойства на смешанных примерах.

 1. Упростите.

$9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} =$	$2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} =$	$8^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} =$	$5^{-\frac{1}{18}} \cdot 5^{-\frac{1}{18}} =$
$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} =$	$y^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} =$	$b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} =$	$m^{-\frac{1}{12}} \cdot m^{-\frac{1}{12}} =$

2. Упростите.

$(6^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}} =$	$(2^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{8}} =$	$(9^{\frac{1}{3}})^2 =$	$(27^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} =$
$(p^{\frac{5}{2}})^{\frac{4}{15}} =$	$(h^{\frac{4}{7}})^{\frac{7}{4}} =$	$(c^{\frac{1}{16}})^{-\frac{8}{11}} =$	$(z^{-\frac{6}{25}})^{-\frac{5}{2}} =$

3. Упростите.

$(36k)^{\frac{1}{2}} =$	$(27x)^{\frac{1}{3}} =$	$(3n^2)^{\frac{1}{8}} =$	$(64x^9)^{\frac{1}{3}} =$
-------------------------	-------------------------	--------------------------	---------------------------

3. Как по вашему относится правило о сумме и разности целых чисел к сумме степеней с положительным и отрицательным показателем? Ученики могут дать следующее объяснение: Сумма двух положительных чисел - положительное число, сумма двух отрицательных чисел - отрицательное число. А также применение правил - произведение 2-х чисел с одинаковыми знаками положительно, а произведение 2-х чисел с разными знаками отрицательно напоминают для степени с рациональным показателем. Для формирования, оценивания и развития каждого навыка можно воспользоваться данными рабочими листами.

 Рекомендуется как домашнее задание выучить каждое свойство, произвести математическую запись, придумать новые примеры.

Из-за большого числа примеров на рабочих листах, рекомендуется выполнение части заданий с рабочих листов как домашняя работа.

Обобщающие задания данные в учебниках создают условия для укрепления знаний данного раздела учениками. Обобщающие задания учитель может использовать и для суммативного оценивания.

Рабочий лист № 7

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



• Применяет запись степени с дробным показателем, числитель которого равен единице $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. n -натуральное, x -любое неотрицательное число.

• Применяет равенства $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ или же $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ где m - целое, n натуральное, x любое положительное число.

1. Вычислите не пользуясь калькулятором.

$$16^{\frac{1}{4}} = \quad 49^{0,5} = \quad 64^{\frac{2}{3}} = \quad \left(\frac{49}{9}\right)^{1,5} = \quad \frac{5}{8^{\frac{2}{3}}} =$$

2. Замените корнем - степень с рациональным показателем.

$$27^{\frac{2}{3}} = \quad 32^{\frac{3}{2}} = \quad 32^{\frac{2}{5}} = \quad 400^{1,5} = \quad \left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

3. Каждое выражение запишите в виде степени с рациональным показателем.

$$\sqrt[3]{4} = \quad \sqrt{9} = \quad \sqrt{18} = \quad (\sqrt{10})^3 = \quad (\sqrt[3]{10})^2 =$$

4. Эквивалентные выражения отметьте одинаковым номером или закрасьте одинаковым цветом.

$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$	$9^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[6]{y^3}$
$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$	$(\sqrt{9})^3$	$y^{\frac{2}{4}}$
$x^{\frac{8}{12}} \cdot x^{\frac{9}{12}}$	3^3	$y^{\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{17}{12}}$	27	\sqrt{y}
$\sqrt[12]{x^{17}}$	$4x^{\frac{1}{4}}$	$4\sqrt[4]{x}$

$m^{-\frac{1}{3}}$	$4^{-\frac{1}{2}}$	$-(32)^{\frac{1}{5}}$
$\frac{1}{m^3}$	$\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}$	$-\sqrt[5]{32}$
$\sqrt[3]{m}$	$\frac{1}{\sqrt{4}}$	-2
$\frac{\sqrt[3]{m^2}}{m}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{4}$

Рабочий лист № 8

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



- Применяет свойство произведения степеней в упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени отношения в упрощении числовых и содержащих переменную выражений.

1. Упростите используя определение и свойства степени с рациональным показателем.

$$\frac{\sqrt[9]{y^3}}{\sqrt[3]{y^9}} =$$

$$\sqrt[7]{7} \cdot \sqrt[3]{7} =$$

$$\sqrt[4]{18} \cdot \sqrt{12} =$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{5} =$$

$$\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{4}} =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{36}} =$$

2. Упростите используя свойства степени с рациональным показателем.

$$x^{1/4} x^{1/4} =$$

$$n^{1/4} n^{-1/4} =$$

$$\frac{x^2}{x^{1/2}} =$$

$$\frac{8t^{1/2}}{4t^{1/4}} =$$

$$x^{-3/2} : x^{-1/4} =$$

$$\frac{-9a^{-4}b^{\frac{3}{4}}}{3ab^{\frac{3}{4}}} =$$

$$yx^{1/3} \cdot xy^{3/2} =$$

$$(a^2b^{1/2})(a^{1/3}b^{-1/2}) =$$

3. Упростите используя степени с рациональным показателем.

$$\sqrt[5]{n} \cdot \sqrt{n} =$$

$$\sqrt[7]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} =$$

$$\sqrt{\frac{16x^5}{y^3}} =$$

Рабочий лист № 9

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



• Упростите выражения содержащие степень с рациональным показателем.

1. Упростите выражение по данным математическим шагам.

	Математическая работа	
1.	Переменные и коэффициенты, с не записанными степенями напишите со степенью "1".	$\left(\frac{25x^{-5}y(z^{-11})^2}{5(x^{-2})^5y^5z^2}\right)^{-2}$
2.	Выразите степень с положительным показателем, записав обратной дробью.	
3.	Раскройте в выражении внутренние скобки.	
4.	Освободите коэффициент от дроби.	
5.	Дробь запишите на обратную ей дробь с положительным показателем.	
6.	Степени с одинаковыми основаниями приведите к одному основанию.	
7.	Степень дроби напишите в виде отношения степеней.	

2. Упростите выражения.

$$(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}})^{-1} =$$

$$\frac{7^{\frac{3}{4}} m^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{4}} m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{4}}} =$$

$$\frac{(a^{-\frac{4}{3}} b^{-\frac{1}{3}})^{-1}}{a^{\frac{1}{3}} b^{-2}} =$$

$$\frac{ab \cdot 2b^{\frac{5}{4}}}{4a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}} =$$

Рабочий лист № 10

Имя _____ Фамилия _____ Число _____



- Применяет свойства степени произведения и степени в степень при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени с отрицательным показателем при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени с нулевым показателем при упрощении выражений с переменными.

Упростите.

$$\left(\frac{100a}{25a^5b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(25a^4b^2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\left(\frac{50x^2y^4}{2x^4y^7}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(5^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{-1})(5^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^3) =$$

$$\frac{2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{5}}y^3} =$$

$$\frac{10x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}}{10^{-1}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}} =$$

$$\frac{5^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y}{5^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}y^5} =$$

$$(a^0b^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}x^0 =$$

$$\frac{y^0}{(x^{\frac{3}{4}}y^{-1})^{\frac{1}{3}}} =$$

$$\left(\frac{x^6y^3}{z^9}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\left(\frac{m^2n^{-2}}{(m^4n^{\frac{4}{3}})^{-1}}\right)^{\frac{7}{4}} =$$

$$(8a^3b^6)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\frac{3y^{-\frac{3}{4}}}{y^{-1} \cdot 2y^{-\frac{1}{3}}} =$$

$$\frac{2x^{-2}y^{\frac{5}{3}}}{x^{-\frac{5}{4}}y^{-\frac{5}{3}} \cdot xy^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{(a^{\frac{1}{2}}b^0)^{-\frac{4}{3}}}{b^4a^{-2}b^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{(y^{-\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y}{y^{\frac{1}{2}}}\right)^3 =$$

$$\frac{(m^2n^2)^{\frac{1}{0}}}{n^{\frac{3}{4}}} =$$

Степень с рациональным показателем

Карты игры “ У меня, а ... у кого?”

<p>Старт карта у меня</p> <p>У кого?</p> $4^{\frac{3}{2}} ?$	<p>У меня</p> 8 <p>У кого?</p> $125^{\frac{2}{3}} ?$
<p>У меня</p> 25 <p>У кого?</p> $\sqrt[3]{32} ?$	<p>У меня</p> $2^3\sqrt{4}$ <p>У кого?</p> $\sqrt{72} ?$
<p>У меня</p> $6\sqrt{2}$ <p>У кого?</p> $\sqrt{a^6b^4} ?$	<p>У меня</p> a^3b^2 <p>У кого?</p> $\sqrt{27} ?$
<p>У меня</p> $3\sqrt{3}$ <p>У кого?</p> $\frac{10}{\sqrt{2}} ?$	<p>У меня</p> $5\sqrt{2}$ <p>У кого?</p> $\sqrt{a^5b^3} ?$

Карты игры “ У меня, а ... у кого?”

Старт карта у меня

<p>У меня</p> $a^2b\sqrt{ab}$ <p>У кого?</p> $\sqrt{\frac{25}{2}} ?$	<p>У меня</p> $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ <p>У кого?</p> $3\sqrt{48} ?$
<p>У меня</p> $12\sqrt{3}$ <p>У кого?</p> $(3 - \sqrt{2})^2 ?$	<p>У меня</p> $11 - 6\sqrt{2}$ <p>У кого?</p> $(a^2b^2)^3 ?$
<p>У меня</p> a^6b^6 <p>У кого?</p> $2(a^2b)^3 ?$	<p>У меня</p> $2a^6b^3$ <p>У кого?</p> $2b(2a^3b)^2 ?$
<p>У меня</p> $8a^6b^3$ <p>У кого?</p> $\sqrt[3]{54} ?$	<p>У меня</p> $3\sqrt[3]{2}$ <p>У кого?</p> $(ab^2)^2 ?$

Карты игры “ У меня, а ... у кого?”

<p>У меня a^2b^4</p> <p>У кого? $\frac{7}{3 + \sqrt{2}}?$</p>	<p>У меня $3 - \sqrt{2}$</p> <p>У кого? $81^{\frac{2}{3}}?$</p>
<p>У меня $9^{\sqrt[3]{9}}$</p> <p>У кого? $\frac{8}{\sqrt{3}}?$</p>	<p>У меня $\frac{8\sqrt{3}}{3}$</p> <p>У кого? $(5 - \sqrt{6})^2?$</p>
<p>У меня $31 - 10\sqrt{6}$</p> <p>У кого? $\frac{2 - \sqrt{3}}{5 - \sqrt{7}}?$</p>	<p>У меня $\frac{10 + 2\sqrt{7} - 5\sqrt{3} - \sqrt{21}}{18}$</p> <p>У кого? $2(a^4b)^4?$</p>
<p>У меня $2a^{16}b^4$</p> <p>У кого? $\frac{8}{\sqrt{2}}?$</p>	<p>У меня $4\sqrt{2}$</p> <p>Последняя карта</p>

Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 1.1

№	Критерии	Замечания об ученике
1.	Вычисляет разными способами точно или приближенно корень кубический из некоторых чисел.	
2.	Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, применяет свойство корня n -ой степени из произведения при упрощении числовых и с переменными выражений.	
3.	Если $a \geq 0$ и $b > 0$, применяет свойство корня n -ой степени из частного при упрощении числовых и с переменными выражений.	
4.	Если n, k, m - натуральные числа и $a \geq 0$, то применяет свойство корня из корня при упрощении числовых и с переменными выражений.	
5.	Если n, k, m - натуральные числа и $a \geq 0$, упрощает по общему множителю подкоренного выражения и показателя корня.	
6.	Упрощает выражения содержащие корни.	
7.	Применяет свойство произведения степеней при упрощении числовых и выражений с переменными.	
8.	Применяет свойство произведения степеней с рациональными показателями при упрощении числовых и с переменными выражений.	
9.	Применяет свойство степени произведения и степень степени при упрощении числовых и с переменными выражений.	
10.	Применяет свойство степени частного при упрощении числовых и с переменными выражений.	
11.	Применяет свойство степени с отрицательным рациональным показателем при упрощении числовых и с переменными выражений.	

Урок 15. Задания суммативного оценивания по разделу 1.1.

1. Расположите числа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{4}$ в порядке возрастания.
2. Вычислите: $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})$.
3. Покажите отрицательные числа:
A) $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$ B) $\sqrt[4]{4} - \sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{3}$ D) $\sqrt[6]{2} - \sqrt[18]{10}$
4. Определите знак разности: $3 \cdot \sqrt{2} - 2 \sqrt[3]{2}$.
5. Сравните значения выражений: $0,2 \cdot \sqrt[3]{(-5)^6}$ и $2 \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt[4]{625}}$.
6. Множество квадратных корней натуральных чисел от 1 до 9-ти обозначено через А, а множество кубических корней - В. Найдите $A \cap B$.
7. Какое из равенств верно?
A) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = 4$ B) $\sqrt[15]{(-2)^5} = \sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[8]{(-3)^4} = \sqrt{3}$ D) $\sqrt[3]{(-2)^6} = -4$
8. Покажите число $\sqrt[3]{2} \sqrt{2} \sqrt{2}$ в виде степени с рациональным показателем.
9. Для натуральных чисел m и n справедливо равенство $(m + n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} (m - n)^{\frac{1}{2}}$. Найдите значения выражения $m^2 + n^2$.
A) 25 B) 20 C) 12 D) 7
10. Одной банки краски хватает на покраску 12 м^2 площади.
а) Сколько банок краски хватит для покраски поверхности трех железных кубов с ребрами равными 3 м, 4 м и 5 м?
б) Если эти три куба расплавить и изготовить один куб, то сколько банок краски понадобится для покраски поверхности этого куба?
11. Покажите любую пару x и y удовлетворяющую уравнению $x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = 6$.
12. Упростите выражение: $\frac{x - x^{\frac{1}{2}} - 2}{x - 2x^{\frac{1}{2}}}$.
13. Найдите значение выражения $(1 - \frac{1}{x}) \cdot (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$, при $x = \sqrt[3]{2}$.
14. Установите соответствие:
1. $\sqrt[4]{a^4} = |a|$ A) верно при любых значениях a ;
2. $\sqrt[3]{a^3} = -a$ B) верно только при $a = 0$;
3. $\sqrt[6]{a^6} = -a$ C) верно при $a \leq 0$;
D) верно только при $a \geq 0$;
15. Вычислите значение выражения.
 $(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}) : \sqrt[3]{4}$
16. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $\sqrt[3]{2}$ см, $\sqrt[3]{2}$ см, $\sqrt[3]{18}$ см. Сравните объем этого параллелепипеда с объемом куба, ребро которого равно $\sqrt[4]{4}$.
17. Временем циркуляции крови называется среднее время, при котором кровь в теле делая один оборот возвращается к сердцу. Для млекопитающих время циркуляции можно вычислить (секундами) по формуле $T = 17,4 m^{1/4}$, m - показывает массу (в килограммах). Найдите приближенное значение времени циркуляции крови - в секундах с массой а) коровы в 120 кг; б) слона в 4000 кг.
18. Расположите числа $\frac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt{3}}$, $2^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$, $(4^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{2}}$ в порядке возрастания.



Стандарты содержания

3.1.3. Применяет свойство касательной и секущей к окружности.



Формирующие навыки учеников

- Центральный угол, минор, решает задачи на градусные меры мажорных углов;
- Решает задачи на нахождение длины дуги;
- Применяет свойство хорд в решении задач;
- Знает свойство углов вписанных в окружность, представляет геометрически и применяет в решении задач;
- Изображает касательную к окружности, знает свойства и применяет в решении задач;
- Знает словесно свойства углов, образованных секущими и касательными, изображает геометрически и применяет в решении задач;
- Изображает отрезки секущих окружность, применяет свойства их длин в решении задач.



Математический словарь

- | | |
|---------------|--------------------|
| ● Окружность | ● Хорда |
| ● Круг | ● Центральный угол |
| ● Касательная | ● Сектор |
| ● Секущая | ● Сегмент |
| ● Радиус | ● Дуга |
| ● Диаметр | |



Дополнительные ресурсы

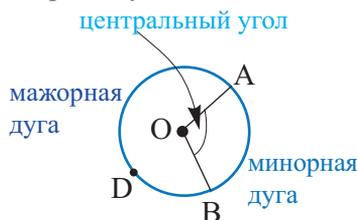
Рабочие листы

Адреса интернета:

www.mathopenref.com/polygonconcave.html
[//www.learnalberta.ca/content/memg/Division03/Tangent/index.html](http://www.learnalberta.ca/content/memg/Division03/Tangent/index.html)

Урок 16, 17. Учебник стр. 28-30. Окружность. Центральный угол. Дуга окружности. 2 часа

На данном рабочем листе геометрическими изображениями повторяется окружность и его части. Расширив понятия центрального угла, дуги вводятся понятия меньшая дуга - минор и большая дуга - мажорная дуга.



Геометрические изображения отражающие эти понятия изготавливается заранее в виде плаката или на Смарт досках. Факты об измерениях дуг окружности исследуются совместными обсуждениями и на изображениях. Ученики понимают, что геометрические изображения показывают ясно эти факты.

1. Градусная мера минорной дуги меньше 180° и равна градусной мере соответствующего центрального угла : $\sphericalangle AB = \sphericalangle AOB$

2. Градусная мера мажорной дуги больше 180° и его значение равна разности 360° и значение соответствующей минорной дуги:
 $\sphericalangle ADB = 360^\circ - (\sphericalangle AB)$

3. Градусная мера полуокружности равна 180° .

Решение задач на конгруэнтные дуги.

Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____

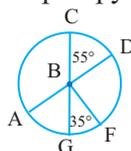
Число _____



- Решение задач на центральный угол, минор, градусные меры минорных и мажорных дуг.
- Решение задач на нахождение длины дуги (в единицах измерения).

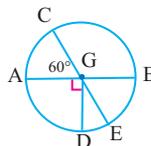
1. Отметьте, чем является каждый - мажорной дугой, минорной дугой или же полуокружностью и найдите градусные меры (B - центр окружности).

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> CD | <input type="checkbox"/> AC | <input type="checkbox"/> CG |
| <input type="checkbox"/> CGD | <input type="checkbox"/> GCF | <input type="checkbox"/> ACD |
| <input type="checkbox"/> AG | <input type="checkbox"/> ACF | |



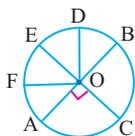
2. Найдите градусные меры каждого из углов (G - центр окружности).

- | | |
|--------------|--------------|
| \angle CGB | \angle BGE |
| \angle AGD | \angle DGE |
| \angle CGD | \angle AGE |



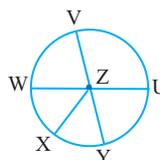
3. Если EC и AB диаметры и $\angle BOD \cong \angle DOE \cong \angle EOF \cong \angle FOA$. Найдите градусную меру каждой дуги.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> BC | <input type="checkbox"/> AC |
| <input type="checkbox"/> AFE | <input type="checkbox"/> EB |
| <input type="checkbox"/> ACB | <input type="checkbox"/> AD |
| <input type="checkbox"/> CBF | <input type="checkbox"/> ADC |



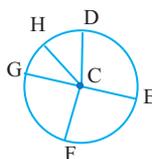
4. WU и VY - диаметры $\angle WZX \cong \angle XZY \cong \angle VZU = 4x$, $\angle UZY = 2x + 24$. Найдите градусную меру каждой дуги.

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> UY | <input type="checkbox"/> WV |
| <input type="checkbox"/> WX | <input type="checkbox"/> XY |
| <input type="checkbox"/> WUY | <input type="checkbox"/> YVW |
| <input type="checkbox"/> XVY | <input type="checkbox"/> WUX |



5. Диаметр окружности равен 24 единицам. По данному углу, найдите длину соответствующей дуги. GE - диаметр (C - центр окружности).

- Если $\angle DCE = 100^\circ$, найдите длину $\cup DE$;
 Если $\angle GCF = 90^\circ$, найдите длину $\cup DHF$;
 Если $\angle HCF = 125^\circ$, найдите длину $\cup HDF$;
 Если $\angle DCH = 45^\circ$, найдите длину $\cup HD$.



Урок 18-20. Учебник стр. 31-34. Окружность. Хорда. 3 часа.

В следующие три часа имеется в виду исследование трех основных теорем о хордах, обратные теоремы и их следствия.

Во время объяснения урока обращается внимание на понимание учащимся приведенного полного или незаконченного доказательства теоремы. С целью формативного оценивания рекомендуется завершение этих доказательств некоторыми учениками устно или же объяснение на каком основании выдвинуто вперед то или иное предложение.

Навыки. Знает теоремы о хордах, изображает геометрически и применяет при решении задач.

Рабочий лист № 2

Имя _____ Фамилия _____

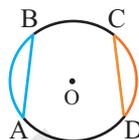
Число _____



- Знает теорему о конгруэнтных хордах, изображает геометрически.

Теорема 1.

Обратная теорема 1.

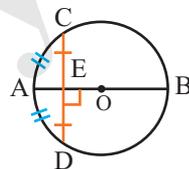


- Знает теорему о среднем перпендикуляре хорды.

Теорема 2.

Следствие 1.

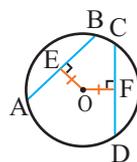
Следствие 2.



- Знает теорему о хордах расположенных на одинаковом расстоянии от центра, изображает геометрически.

Теорема 3.

Обратная теорема 3.



Рабочий лист № 3

Имя _____ Фамилия _____

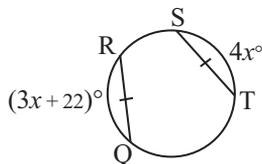
Число _____



• Применяет теоремы о хордах в решении задач.

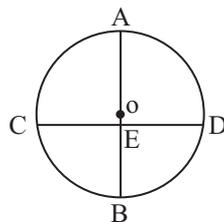
1. Дано: $ST \cong QR$

Найдите: Градусную меру $\sphericalangle QR$



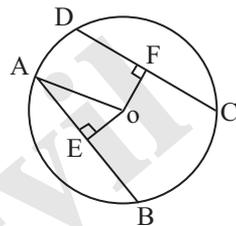
2. Дано: В окружности с центром O диаметр AB пересекается с хордой CD в точке E . Если $AB \perp CD$, то какое утверждение всегда верно?

- 1) $\sphericalangle AC \cong \sphericalangle BD$
- 2) $\sphericalangle BD \cong \sphericalangle DA$
- 3) $\sphericalangle AD \cong \sphericalangle BC$
- 4) $\sphericalangle CB \cong \sphericalangle BD$



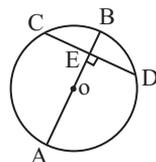
3. Дано: В окружности с центром O , $AB \cong CD$, OA - радиус и $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, $OF = 15$, $CF = y + 10$
 $AB = 4y - 20$.

Найдите: DF и AO .

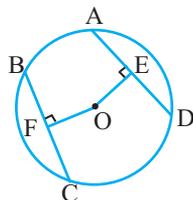


4. Дано: Точка O - центр окружности. $AB \perp CD$, $AO = 10$ и $BE = 4$.

Найдите: CE .



5. Дано: В окружности с центром O , хорды BC и AD находятся на одинаковом расстоянии от центра. Если $OF = 18$, $ED = 24$ единицам, то найдите радиус окружности.

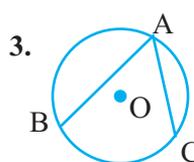
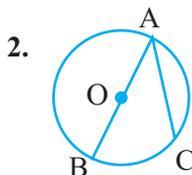
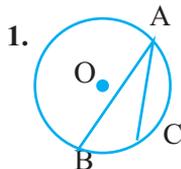


Урок 21, 22. Учебник стр. 35, 36. Угол вписанной в окружность. 2 часа



- Знает свойство угла вписанного в окружность, изображает геометрически и применяет в решении задач.
- Знает теорему о вписанных конгруэнтных углах, изображает геометрически и применяет в решении задач.

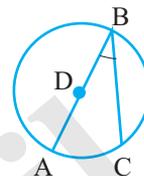
Изображаются различные положения углов вписанных в окружность относительно центра окружности. Для каждого случая выражаются мнения о виде угла. Результаты сравниваются.



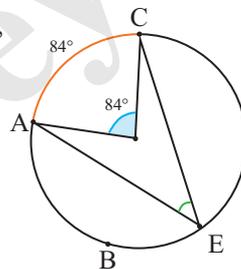
Объясняется связь между градусной мерой угла вписанного в окружность, с градусными мерами дуги, на которую он опирается и соответствующего центрального угла.

Теорема 1. Градусная мера вписанного угла равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

$$\angle ABC = \frac{\sphericalangle AC}{2}$$



Обращается внимание на навыки учеников выражать эту связь на примере словами, геометрическим изображением, математической записью. Например, ученик показывая теорему изображениями на рисунке, на примере демонстрирует понимание свойств вписанных углов. Чтобы наблюдать наглядно эту зависимость рекомендуется воспользоваться программой геогebra и <http://www.mathopenref.com/circleinscribed.html>.



Ученики должны уметь доказывать следствие, что вписанный угол опирающийся на диаметр окружности прямой.

Действительно, вписанный угол опирающийся на диаметр, опирается на полуокружность, то есть на дугу равную 180° . По теореме о вписанном угле, значение рассматриваемого угла равен 90° , то есть угол-прямой.

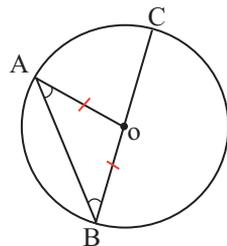
Доказательство теоремы для каждого из 3-х случаев может быть задано ученикам как самостоятельная работа. В также данные доказательства в пособии для учителей могут быть рассмотрены в классе. Эту работу можно записать заново в системном виде и дать как домашнее задание.

Предложение

Основа

1. Соединим А и О
2. $\triangle AOB$ равнобедренный
3. $\angle BAO = \angle ABO = x$
4. $\angle AOC = \angle BAO + \angle ABO$
5. $\angle AOC = x + x = 2x$
6. $\overset{\frown}{AC} = \angle AOC = 2x$
7. $\angle BAO + \angle ABO = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$
8. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

- 1.-----
2. OA и OB радиусы
3. Углы при основании равнобедренного треугольника $\triangle AOB$
4. $\angle AOC$ - внешний угол треугольника $\triangle AOB$.
5. По свойству равенства
6. По свойству центрального угла
7. По свойству равенству
8. По свойству равенства.



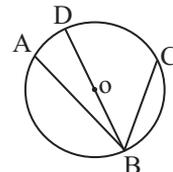
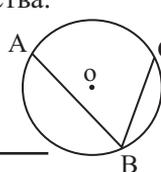
2-ой случай. Воспользуемся доказанным 1-ым случаем

Предложение

Основа

1. Проведем диаметр через точку В
2. $\angle ABD = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$
 $\angle DBC = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$
3. $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$
4. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$
5. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{2}$
6. $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AC}$
7. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

- 1.-----
2. Вписанный угол со стороной на диаметре окружности.
3. Аксиома сложения углов
4. Свойства равенства
5. Алгебраическое преобразование, распределительное свойство умножения.
6. Правило сложения дуг
7. Свойства равенства



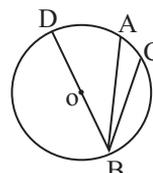
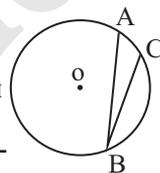
3-ий случай. Воспользуемся доказанным первым случаем

Предложение

Основа

1. Проведем диаметр через точку В
2. $\angle ABD = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$
 $\angle DBC = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$
3. $\angle ABC = \angle DBC - \angle ABD$
4. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DA}}{2}$
5. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{CAD} - \overset{\frown}{DC}}{2}$
6. $\overset{\frown}{DAC} - \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{AC}$
7. $\angle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

- 1.-----
2. Вписанный угол со стороной на диаметре.
3. Аксиома сложения углов
4. Признак равенства
5. Алгебраическое преобразование, распределительное свойства умножения
6. Правило сложения дуг
7. Свойства равенства



Рабочий лист № 4

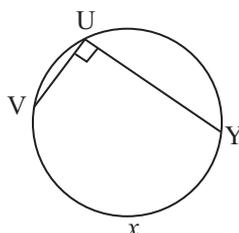
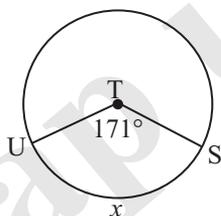
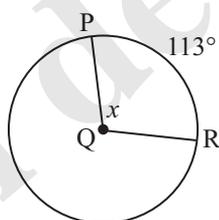
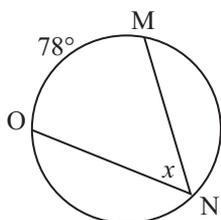
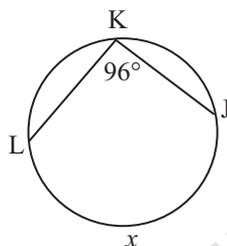
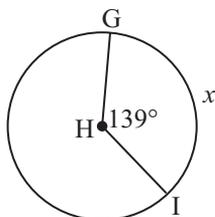
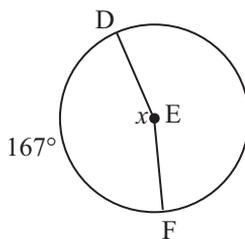
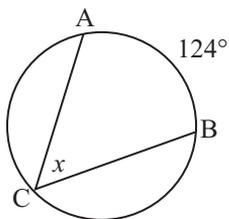
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Решает задачи применяя свойства вписанных в окружность углов.

По данным найдите x .

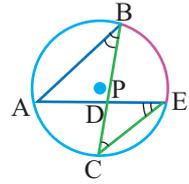


2-ой час. Объясняются результаты полученные из теоремы о вписанных конгруэнтных углах. Отмечается широкое применение этих результатов при решении задач.

<http://www.learnalberta.ca/content/memg/Division03/Inscribed%20Angle%20Property/Explanation/index.html>

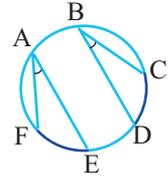
Конгруэнтные углы вписанные в окружность

Следствие 3. Углы опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны. $\angle EAB \cong \angle BCE$, $\angle ABC \cong \angle AEC$.



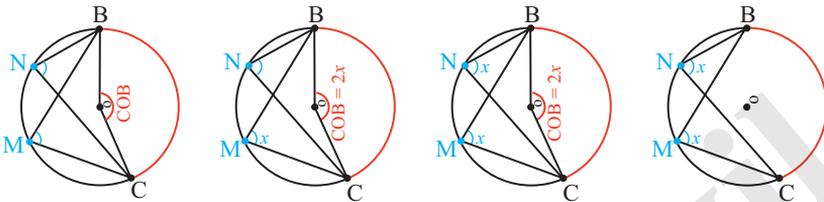
Следствие 4. Вписанные углы, опирающиеся на конгруэнтные дуги, конгруэнтны.

Если $\overset{\frown}{FE} \cong \overset{\frown}{CD}$, то $\angle FAE \cong \angle DBC$.

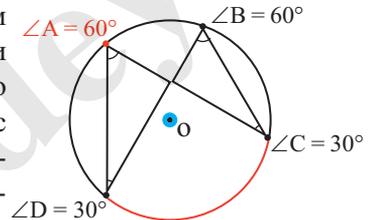


Вписанные конгруэнтные углы изображаются будучи различными измерениями. Ученик наблюдает с изменением угла изменение соответствующей дуги. А также наблюдает одинаковое изменение величин углов опирающихся на одну и ту же дугу.

Из показанных интернет - адресов можно продемонстрировать соответствующие рисунки, а также можно проследить презентацию.



Ученик должен уметь представить изображением, как показано внизу, понимаемую им теорему. Тем самым ученик демонстрирует наряду с такими практическими навыками как рисование окружности определенного радиуса. Построение угла определенной величины с помощью транспортира и первоначальные навыки объяснения теоремы, представление геометрическим изображением, а также применение на примере.



? У.5. 4) (стр. 36)

Решение: Так как вписанные углы опирающиеся на одну и ту же дугу конгруэнтны.

$$\angle D \cong \angle C \quad \text{и} \quad \angle A \cong \angle B$$

Отсюда

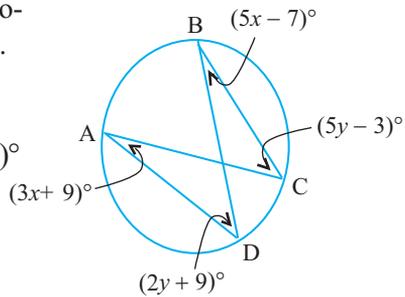
$$(3x + 9)^\circ = (5x - 7)^\circ \quad (5y - 3)^\circ = (2y + 9)^\circ$$

$$2x = 16 \quad 3y = 12$$

$$x = 8 \quad y = 4$$

$$\text{Тогда } \angle D = (2 \cdot 4 + 9)^\circ = 17^\circ,$$

$$\angle B = (5 \cdot 8 - 7)^\circ = 33^\circ.$$



Рабочий лист № 5

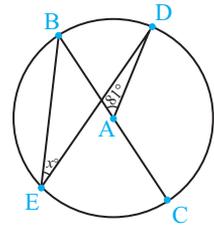
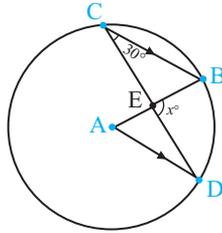
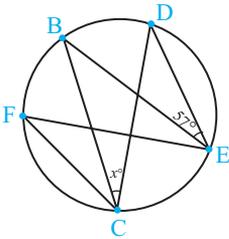
Имя _____ Фамилия _____

Число _____

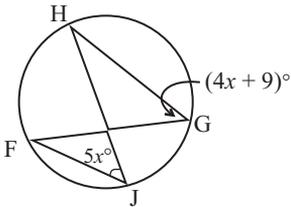


• Знает теорему о вписанных конгруэнтных углах, изображает геометрически и применяет в решение задачи.

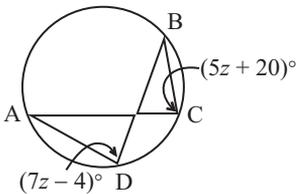
1) По данным найдите неизвестные.



2) $\angle FJH = ?$



3) Найдите градусную меру $\sim AB$.

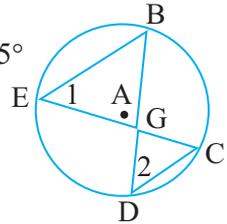


4) В окружности с центром A , $\angle 1 = 13x - 9^\circ$ и $\angle 2 = 27x - 65^\circ$

a) Найдите значение x .

b) Найдите $\angle 1$ и $\angle 2$.

c) Если $\angle BGE = 92^\circ$, найдите $\angle ECD$.



Урок 23, 24. Учебник стр. 37-39. Касательная к окружности. 2 часа



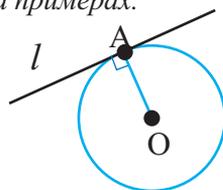
- Изображает касательную к окружности, знает свойства и применяет при решении задач.
- Понимание определения касательной демонстрирует геометрическими изображениями.

• С помощью теоремы Пифагора или чисел Пифагора обосновывает, что данный отрезок является касательной к окружности.

• Знает теорему о касательных, проведенных из одной точки, изображает геометрически, выражает математическим выражением, показывает на примерах.

Определение касательной, свойства касательной объясняет в виде прямой и обратной теоремы.

Определение и свойства ученики представляют геометрическими изображениями.



По интернет адресу <http://www.learnalberta.ca/content/memg/Division03/Tangent/index.html> из меню MATHEMATICS GLOSSARY любое геометрическое (или алгебраическое) понятие можно проследить в виде картинного изображения или презентации.

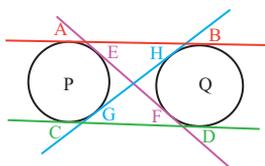
Проверяется навык рисования общей касательной к двум окружностям. Рекомендуется выполнять такие задания с помощью технологии.

Объясняется свойство касательных проведенных из одной точки. Решается задача-пример.



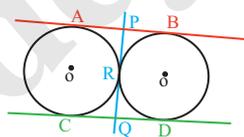
Моменты требующие внимания

1. Окружности не имеют общих точек



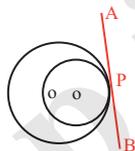
Имеют четыре общие касательные.

2. Окружности имеют внешнее касание



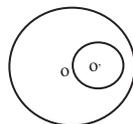
Имеют три общие касательные

3. Касаются внутренним образом



Имеют одну общую точку.

4. Окружности концентрические или же одна расположена внутри другой



Не имеют общих касательных



Решение некоторых заданий, данных в учебнике

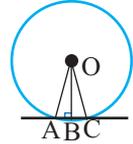
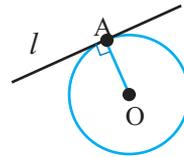
Доказательство свойств касательной:

Теорема 1. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Дано: Прямая l касательная к окружности. AO - радиус окружности.

Доказательство: Если прямая l - касательная к окружности, значит, имеет с окружностью единственную общую точку. Предположим, что прямая l не перпендикулярна радиусу OA . Проведем $OB \perp l$ и на прямой l отложим отрезки $AB = BC$.

Тогда, так как $\triangle AOB \cong \triangle COB$, то $OC = OA = r$. Значит и точка C лежит на окружности. То есть, прямая l имеет с окружностью две общие точки. А это противоречит условию. Следовательно $l \perp OA$.



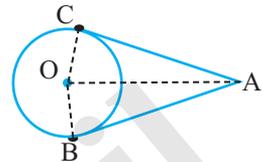
Теорема 2. Отрезки касательных, проведенных из одной точки конгруэнтны и центр окружности находится на биссектрисе угла, образованного касательными.

Доказательство теоремы 2.

Дано: AB и AC - отрезки касательных проведенных из точки A к точкам касания.

Докажите: $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$

Проведем радиусы окружности OC , OB и отрезок OA .



Предложение	Основа
1. $OA = OB$	1. Радиусы окружности
2. $\triangle AOC \cong \triangle AOB$	2. Конгруэнтность прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету
3. $AC \cong AB$	3. Соответственные стороны конгруэнтных треугольников
4. $\angle BAO \cong \angle CAO$	4. Соответственные углы конгруэнтных треугольников

У.9. (стр. 39) По данным на рисунке найдите длины сторон фигур и периметр.

б) Решение. Длины отрезков касательных, проведенных из точки вне окружности к точкам касания равны.

$$QT = QU = 4 \text{ см}, SV = ST = 8 \text{ см},$$

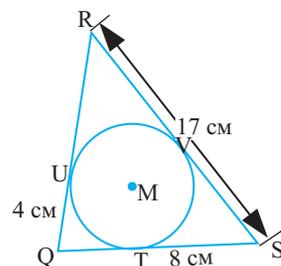
$$RV = RS - SV = 17 - 8 = 9$$

$$RU = RV = 9 \text{ см}.$$

$$\text{Значит, } QS = QT + TS = 4 + 8 = 12 \text{ см},$$

$$QR = QU + RV = 4 + 9 = 13, RS = 17 \text{ см, тогда}$$

$$P = 12 + 13 + 17 = 42 \text{ см}$$



Рабочий лист № 6

Имя _____ Фамилия _____

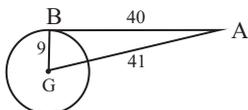
Число _____



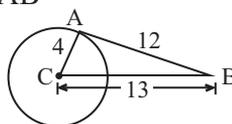
• Изображает касательную к окружности, знает ее свойства и применяет в решении задач.

1. Определите касательная или нет.

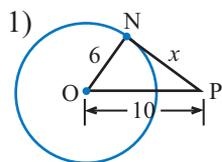
а) АВ



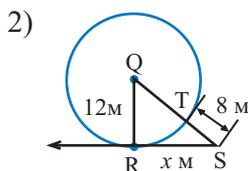
б) АВ



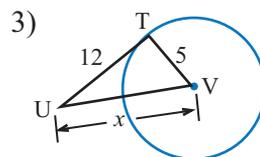
2. Найдите переменную x , приняв соответствующий отрезок за касательную.



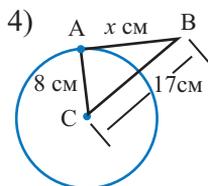
$x =$ _____



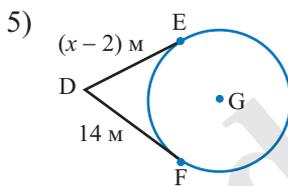
$x =$ _____



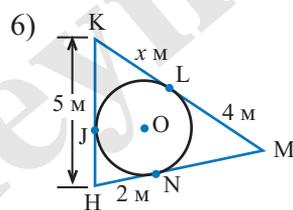
$x =$ _____



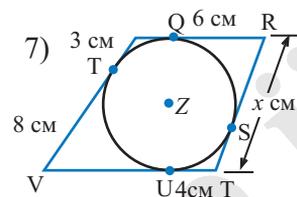
$x =$ _____



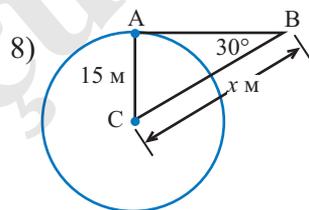
$x =$ _____



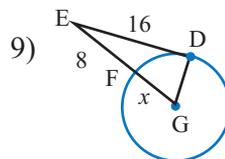
$x =$ _____



$x =$ _____



$x =$ _____



$x =$ _____

Рабочий лист № 7

Имя _____ Фамилия _____

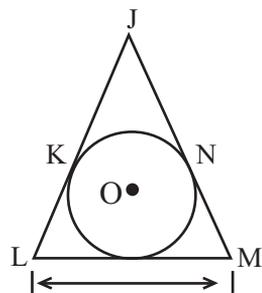
Число _____



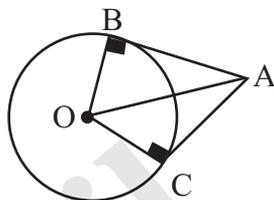
• Изображает касательную к окружности, знает ее свойства и применяет в решении задач.

По данным найдите требуемые (O центр окружности).

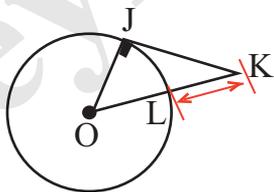
1.	Дано:	Найти:	
	a) $JK = 4, KL = 2, NM = 5$	LM JM	
	b) $JK = 2, KL = 5, NM = 9$	LM JM	
	c) $JK = 2, KL = 8, NM = 14$	LM JM	



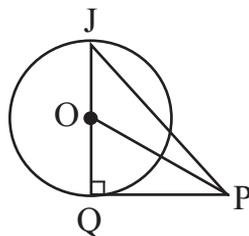
2.	Дано:	Найти:	
	$AO = 5, BO = 3$	AC	
	$OC = 4, AO = 5$	AB	



3.	Дано:	Найти:	
	$OJ = 3;$ $JK = 4;$	KL	



4.	Дано:	Найти:	
	$JQ = 40;$ $JP = 50;$	QP, OP	



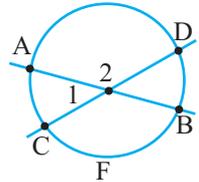
Урок 25-27. Учебник стр. 40-42. Углы, образованные секущей и касательными. 3 часа



• Изображает углы, образованные секущей и касательной, знает правила определения их градусных мер и применяет в решении задач.

Вершина угла расположена внутри окружности.

Теорема. Угол с вершиной внутри окружности равен полусумме двух дуг, одна из которых расположена внутри этого угла, а другая — внутри угла, вертикального к данному.



$$\angle 1 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DB}) \quad \angle 2 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC})$$

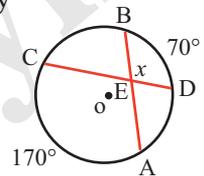
Объясняется обсуждением секущей и свойства угла, образованного пересечением двух секущих. Повторяются свойства смежных и вертикальных углов. Выявляется образование секущими двух углов с различными величинами.

! Правильность свойства ученики могут проверить эмпирическим путем, то есть могут проверить путем опыта. Например, любой искомым угол, может быть определен вычислением или же измерением (с определенной погрешностью). Результаты сравниваются (естественно, если рисунок соответствует данным измерениям)

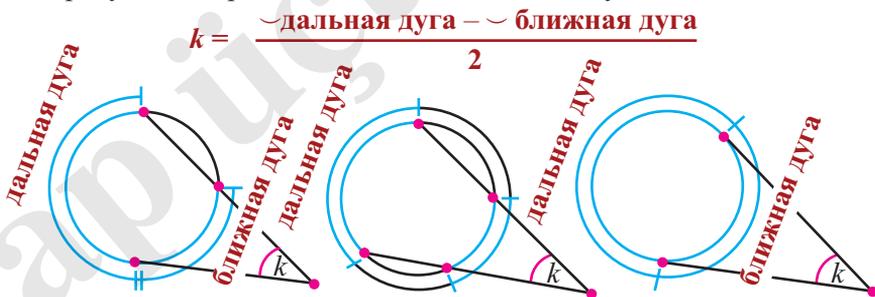
Например, по данным на рисунке требуется найти градусную меру x угла $\angle BED$.

До начала решения задачи ученики:

- 1) Высказывают приближения о градусной мере угла
- 2) Измеряют угол транспортиром
- 3) Вычисляют угол (120°) применяя соответствующее свойство;
- 4) Результаты сравниваются



Для того, чтобы ученики лучше представили себе о каких дугах идет речь при объяснении свойств углов образованных касательными и секущими, рекомендуется приготовление рисунков и презентаций как показано внизу.



Рабочий лист № 8

Имя _____ Фамилия _____

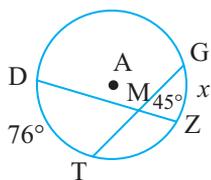
Число _____



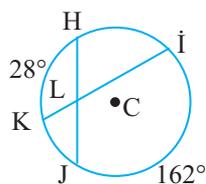
• Знает теорему о градусной мере угла, расположенного между двумя секущими, изображает геометрически, записывает математически и применяет при решении задачи.

1. По данным найдите.

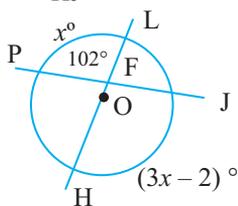
1) $\sphericalangle GZ$



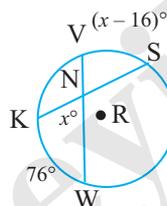
2) $\sphericalangle HLi$



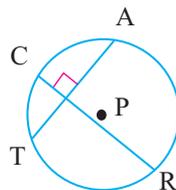
3) $\sphericalangle HJ$



4) $\sphericalangle SV$



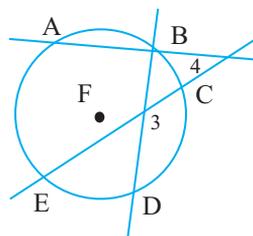
2. Если $CR \perp AT$, $\sphericalangle AC + \sphericalangle TR$ найдите сумму.



3.

1) Если $\sphericalangle 4 = 38^\circ$ и $\sphericalangle BC = 38^\circ$, найдите $\sphericalangle AE$.

2) Если $\sphericalangle BAE = 198^\circ$ и $\sphericalangle CD = 64^\circ$, найдите $\sphericalangle 3$.



Рабочий лист № 9

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



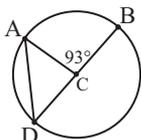
• Изображает углы образованные касательной и секущей, знает правила определения их градусных мер и применяет в решении задач.

1. По данным на рисунке найдите (C - центр окружности).

$\angle ADB =$ _____

$\angle ACD =$ _____

$\angle CAD =$ _____

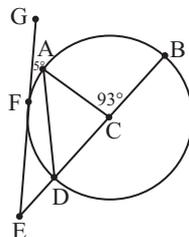


$\frown AD =$ _____

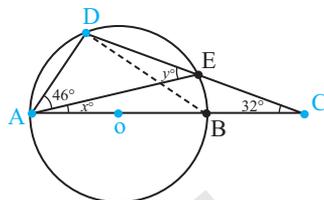
$\frown FD =$ _____

$\frown FB =$ _____

$\angle GEB =$ _____



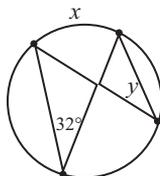
2. По данным на рисунке найдите $\angle DEA$.
(O - центр окружности).



3. По данным на рисунке найдите.

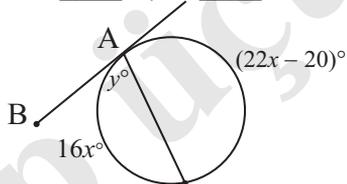
$x =$ _____

$y =$ _____

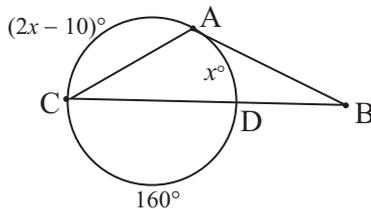


4. Отрезок AB - касательная к окружности. Найдите требуемые.

$x =$ _____, $y =$ _____



$\angle B =$ _____



Урок 28-31. Учебник стр. 43-46. Отрезки пересекающие окружность. Обобщающие задания 4 часа.



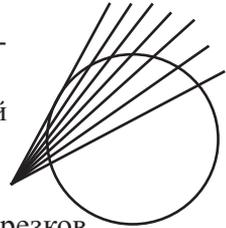
• Изображает отрезки, пересекающие окружность, знает правило нахождения их длин и применяет в решении задач.

• Изображает геометрически отрезки пересекающие окружность в зависимости от места их пересечения.

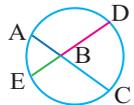
• Выражает математически (алгебраически) длины отрезков, пересекающих окружность в зависимости от места точек пересечения.

Теоремы о длинах отрезков пересекающих окружность объясняются рассуждениями.

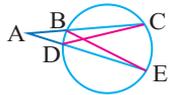
Ученики понимают, что касательная частный случай секущей (случай, когда точки пересечения совпадают)



Теорема 1. При пересечении двух хорд, произведение отрезков одной хорды, полученных точкой пересечения, равно произведению отрезков второй хорды: $AB \cdot BC = EB \cdot BD$



Теорема 2. Если из точки А провести две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках В и С, D и Е, то верно равенство $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

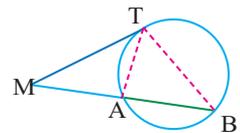


Проведем хорды BE и CD окружности

Предложение	Основание
1. $\angle ACD \cong \angle AEB$	1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны.
2. $\triangle ACD \sim \triangle AEB$	2. По Признаку УУ подобия треугольников.
3. $\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}$	3. У подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны.
4. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$	4. Свойство пропорции.

Теорема 3. Если из точки М проведена прямая, которая пересекает окружность в точках А и В и касательная к окружности в точке Т, то верно равенство:

$$MT^2 = MA \cdot MB$$



У.9. (стр. 46) $\cup DF : \cup FE : \cup EG : \cup GD = 5 : 2 : 1 : 7$

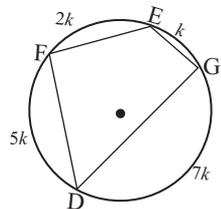
$$5k + 2k + k + 7k = 360^\circ$$

$$15k = 360^\circ, \quad k = 24^\circ$$

$$\cup DF = 120^\circ$$

$$\cup FE = 48^\circ \quad \angle FDE = \angle FGE = \frac{1}{2} \cup FE = 24^\circ$$

$$\cup EG = 24^\circ \quad \angle DFG = \angle DEG = \frac{1}{2} \cup GD = 84^\circ$$



Рабочий лист № 10

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Изображает отрезки пересекающие окружность, знает правило нахождения их длин и применяет в решении задач.

• Изображает геометрически отрезки пересекающие окружность в зависимости от места их пересечения.

• Выражает математически (алгебраически) длины отрезков, пересекающих окружность в зависимости от места точек пересечения.

Напишите математическими символами выражение по рисунку, соответствующую окружности и содержание 5-ти геометрических свойств данных числовыми информациями.

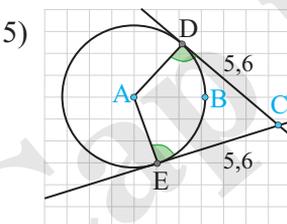
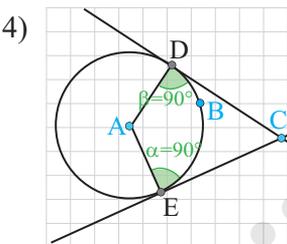
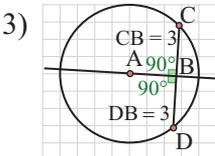
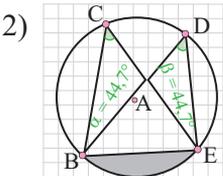
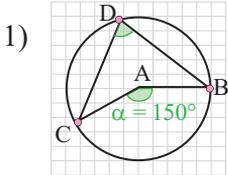
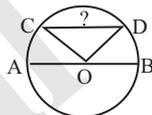


Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 1.2.

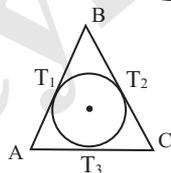
№	Критерии	Замечания
1	Решает задачи по нахождению длины дуги (по изменениям длины)	
2	Применяет свойства хорд при решении задач	
3	Применяет свойства вписанных в окружность углов при решении задач	
4	Применяет свойства касательных к окружности при решении задач	
5	Применяет свойства углов образованных касательными и секущими при решении задач	
6	Изображает отрезки пересекающие окружность, знает правила нахождения их длин и применяет при решении задач	

Урок 32. Задания суммативного оценивания по разделу 1.2

1. Найдите длину хорды CD, если диаметр окружности равна 10 см, $\sphericalangle AC = 37^\circ$, $\sphericalangle BD = 23^\circ$. O - центр окружности.

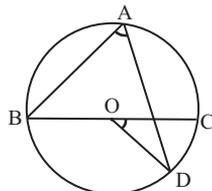


2. Окружность вписанная в равнобедренный треугольник точками касания делит боковые стороны на отрезки $AT_1 = 3$ см, $BT_1 = 4$ см. Найдите периметр треугольника.



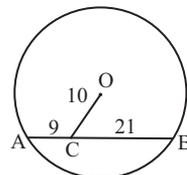
3. O-центр окружности. Найдите $\sphericalangle DOC$, если $\sphericalangle A = 70^\circ$.

- A) 30° B) 40° C) 70° D) 50°



4. O-центр окружности. Найдите радиус окружности, если $OC = 10$ см, $AC = 9$ см, $BC = 21$ см.

- A) 14 см B) 15 см C) 16 см D) 17 см



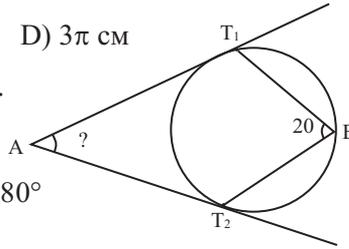
5. Найдите длину дуги, соответствующую окружности с радиусом 10 см и центральным углом 18° .

- A) π см B) 2π см C) $0,5\pi$ см D) 3π см

6. AT_1 и AT_2 - касательные к окружности.

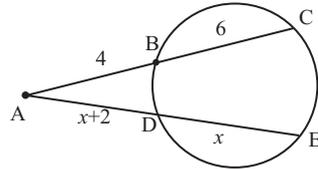
Если $\angle T_1ET_2 = 20^\circ$, то найдите $\angle A$.

- A) 100° B) 140° C) 120° D) 80°

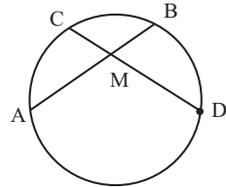


7. Если $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AD = x + 2$ и $DE = x$, то найдите длину отрезка AE.

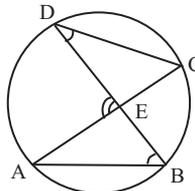
- A) 9 см B) 8 см C) 7 см D) 10 см



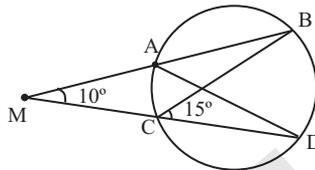
8. Если $CM = 3$ см, $MD = 8$ см, $AM = 6$ см, то найдите BM.



9. Если $\angle CDE = 30^\circ$, $\angle AED = 70^\circ$, то найдите $\angle ABE$.



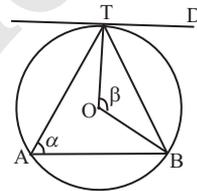
10. Если $\angle M = 10^\circ$, $\angle C = 15^\circ$, то найдите $\angle D$.



11. Установите соответствия. O - центр окружности, TD - касательная.

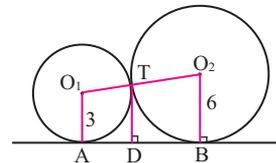
1. $\angle BTD = 20^\circ$
2. $\angle BTD = 30^\circ$
3. $\angle BTD = 40^\circ$

- A) $\beta + \alpha = 60^\circ$ B) $\beta - \alpha = 20^\circ$
 C) $\beta - \alpha = 30^\circ$ D) $\beta + \alpha = 120^\circ$



12. В окружности с диаметром 20 см найдите расстояние от центра до хорды длиной в 12 см.

13. Проведена общая касательная AB к окружностям имеющим внешнее касание. По данным найдите расстояние от прямой AB до точки касания.



14. Точками A, B, C, D окружность делится в отношении $2 : 3 : 3 : 4$ и точки соединены последовательно. Найдите углы четырехугольника ABCD.

Таблица планирования 2-го раздела

Стандарты содержания	Урок №	Тема	Поурочные часы	Учебник
<p>2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.</p> <p>2.2.3. Решает квадратное неравенство.</p> <p>3.1.3. Применяет свойство касательной и секущей к окружности.</p> <p>3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя данными точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.</p> <p>4.2.1. Проверяет соответствие полученных результатов при помощи практических измерений.</p>	33-35	График квадратичной функции	3	48-53
	36, 37	Формы выражения и график квадратичной функции	2	53-55
	38	Нули квадратичной функции	1	56, 57
	39-41	Общий вид квадратичной функции	3	58-61
	42-44	Решение задач с применением квадратичной функции	3	62-65
	45, 46	График функции $y = x $	2	66-68
	47	Обобщающие задания	1	69
	48	Задания суммативного оценивания по разделу 2.1.	1	
	49-52	Формула расстояния между двумя точками	4	70-73
	53-57	Уравнение окружности	5	74-81
	58, 59	Сектор и сегмент	2	82-83
	60	Обобщающие задания	1	84
	61	Задания суммативного оценивания по разделу 2.2.	1	
	Всего		29	



Стандарты содержания

2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.

2.2.3. Решает квадратное неравенство.



Формирующие навыки учеников

• Строит график квадратичной функции составлением таблицы значений

• Строит график квадратичной функции с помощью графика функции $y = x^2$;

• Строит график квадратичной функции по видам выражений

$$y = a(x - m)^2 + n \text{ и } y = a(x - p)(x - q)$$

• Определяет нули функции;

• Строит график функции соответствующую общему виду $y = ax^2 + bx + c$ и исследует;

• Решает задачи применяя квадратичную функцию;

• Строит график функции $y = |x|$;

• Строит графики функции вида

$$y = a|x - m| + n.$$



Математический словарь

- Квадратичная функция
- График квадратичной функции
- Парабола
- Вершина параболы
- Ось симметрии параболы
- Виды квадратичной функции
- Нули квадратичной функции
- Функции с модулем



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Интернет-адреса: <https://mathway.com/graph>

<http://www.meta-calculator.com/online>,

<https://www.desmos.com>.

Урок 33-35. Учебник стр. 48-53.

График квадратичной функции. 3 часа

1-ый час. Отмечается широкое применение квадратичной функции в инженерных, строительно-монтажных работах. Обратив внимание на мосты, сооруженные в последние годы в городе Баку, то можно увидеть конструкции в виде параболы. Куполообразные арки можно встретить на каждом шагу, будь эти образцы древних или же современных времен. Все эти конструкции возможны благодаря проведению на высоком уровне расчетов над квадратичными функциями. А также с помощью квадратичных функций можно получить важные экономические показатели, оценить положение и претворить в жизнь новые планы. Рекомендуется исследовать квадратичные функции в нижеследующих направлениях.

1. Сравнение графиков функций $y = x^2$ и $y = ax^2$.

2. Сравнение графиков функций $y = x^2$, $y = x^2 + n$.

3. Сравнение графиков функций $y = x^2$, $y = (x + m)^2$.

Графики можно построить и граф-калькулятором. Для каждого случая ученики исследуют относительно каких осей графики меняют свое положение. Задаются вопросы по чтению графической информации и по навыкам применения. Что можете сказать по поводу того, что в таблице значений функции $y = x^2$ с изменением x изменяются значения y . Слышатся мнения отдельных учеников - при любых значениях x значения y неотрицательны.

- несмотря на различные значения x , значения y повторяются.

Может ли в какой либо функции

одним и тем же значениям x соответствовать разные значения y ? Повторяется определение функции.

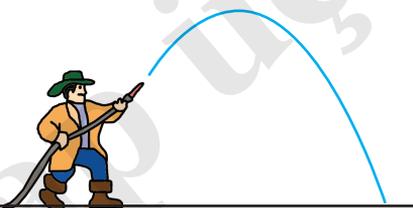
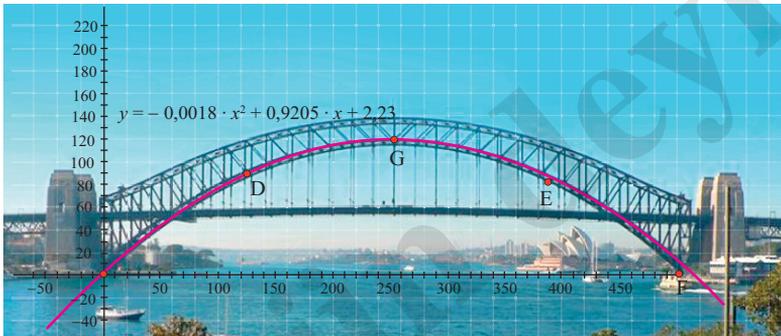
2. Как по вашему изменится положение графика, если функция была бы в виде $y = -x^2$? Слышатся мнения учеников. Ученик: это означает, что все значения y неположительные и график располагается в нижней полуплоскости.

3. Если $x = 3$, то значение функции $y = x^2$ равно 9, то есть $y = 9$. А для функции $y = 3x^2$ при $x = 3$ как изменится значение y ? Будет в 3 раза больше. А как изменится y для функции $y = \frac{1}{3}x^2$? Объясните это нахождением координат нескольких точек на графике. Можно ли по этим значениям определить в каком случае парабола расширяется, а в каком сужается. Слышатся мнения учеников: значение функции “ $y = 3x^2$ при одних и тех же значениях x по сравнению с функцией $y = x^2$ растут с “большей скоростью”, поэтому его график наиболее вытянут, **более узкий и больше**

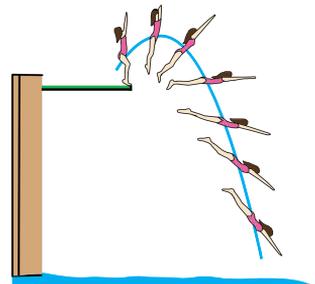
сжат к оси y . А график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ по сравнению с графиком функции $y = x^2$ “растет медленнее” и поэтому график функции более широкий.

4. Можно ли по записям $y = x^2 + n$ и $y = (x + m)^2$ сказать какой из этих графиков получается скольжением по оси Ox , а какой по оси Oy . Слышатся мнения учеников. Запись $y = x^2 + n$ показывает то, что функция $y = x^2$ уже “есть” и прибавляемое число n в зависимости от знака полностью изменяет значение “ y ”. А запись $y = (x + m)^2$, показывает то, что при изменении значения x на m единиц образуется квадратичная функция. Поэтому, график меняет положение по отношению к параболе $y = x^2$ по оси Ox .

Даются информации о квадратичной функции и о реальных жизненных ситуациях, демонстрируются картины.



Вода, вытекаемая из шланга с ускорением образует параболу.



Траектория прыжка пловца на дно воды имеет форму параболы.

2-ой час. График квадратичной функции.

Исследовательские вопросы 1. Как влияет коэффициент a функции $y = ax^2$ на значения и положение графика функции $y = x^2$?

2. Как влияет n -ый член функции $y = x^2 + n$ на значения и положение графика функции $y = x^2$.

3. Как влияет m -ый член функции $y = (x - m)^2$ на значения и положение графика функции $y = x^2$

4. Как влияет коэффициент a функции $y = a(x - m)^2 + n$ на значение и положение графика функции $y = x^2$.

Очень важно провести это исследование графкалькулятором. Построив график графкалькулятором ученики выполняют также полезные задания, показанные внизу:

1. Появляется больше возможности для сравнений графиков.

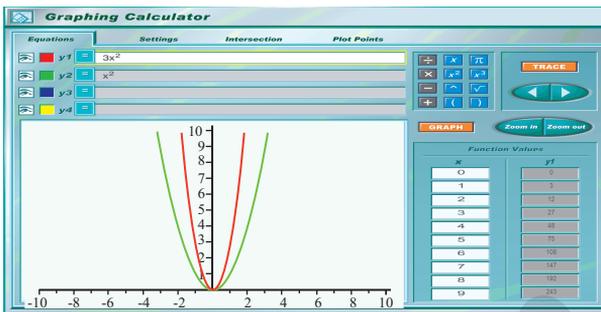
2. Определяет максимальное и минимальное значение x , масштаб расположения информации по x и y .

3. Отмечает на графике любую точку и анализирует соответствующую информацию. Самый соответствующий графкалькулятор для школьной программы по адресам:

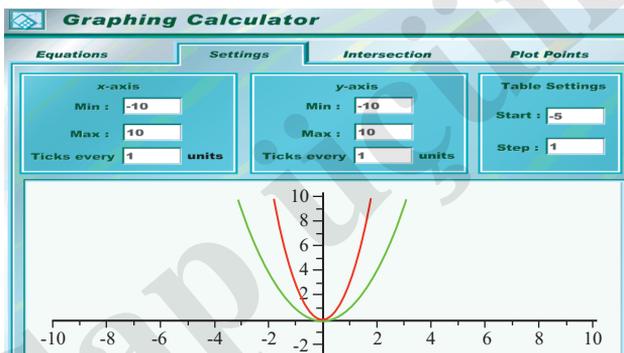
www.go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html

и <http://www.meta-calculator.com/>.

Если при пользовании графкалькулятором возникает какая-нибудь техническая проблема, то поиском Graf calculator на GOOGLE можно выбрать другой. Например, <https://mathway.com/graph>, <https://www.desmos.com/calculator>

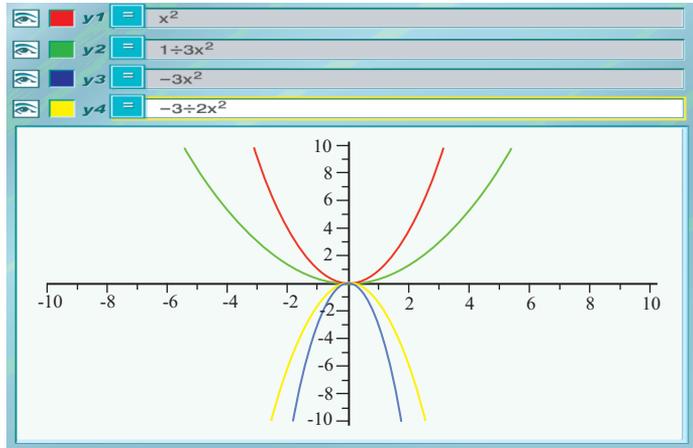


С помощью меню Settings ученик может заранее определить интервал значений аргумента, изменяющийся интервал функциями “ y ”, изменяющиеся шаги переменных x и y , а также для таблицы значений начальное значение и изменяющиеся шаги.



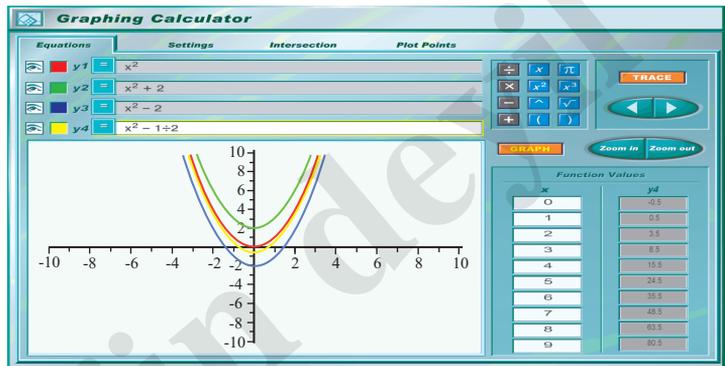
1. Как влияет коэффициент a функции $y = ax^2$ на значения и положение графика функции $y = x^2$? Задавая различные значения коэффициенту a наблюдается положение графика функции $y = ax^2$ относительно графика функции $y = x^2$. Дробные числа в этой программе выражаются действием деления.

Ученики отмечают, что в зависимости от значений коэффициента a ветви параболы $y = x^2$ сужаются или расширяются. В зависимости от знака коэффициента " a " ветви параболы направляются вверх или вниз. На показанном графкалькуляторе в одной координатной плоскости можно построить графики 4-х функций.



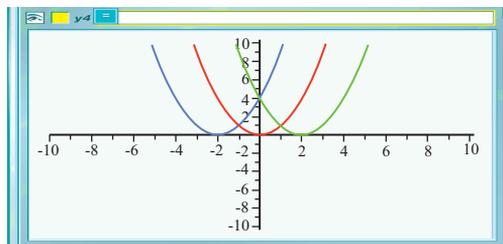
На более профессиональном графкалькуляторе в одной координатной плоскости можно построить еще больше графиков функций.

2. Как влияет n -ый член функции $y = x^2 + n$ на значения и положение графика функции $y = x^2$. Задавая различные значения n , ученики наблюдают изменение положения графика функции $y = x^2$. По n -му члену график перемещается по оси Oy вниз или вверх.



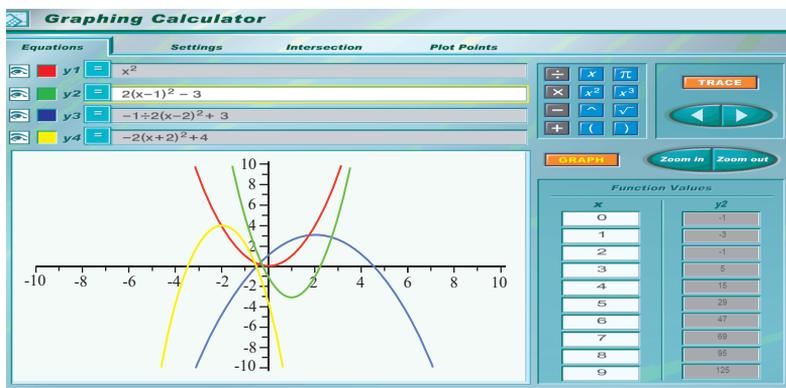
3. Как влияет m -ый член функции $y = (x - m)^2$ на значения и положение графика функции $y = x^2$.

m -это число, которое влияет на значение полного квадрата x , поэтому график получается перемещением графика функции $y = x^2$ налево или направо вдоль оси Ox .



4. Как влияет коэффициент a функции $y = a(x - m)^2 + n$ на значения и положение графика функции $y = x^2$?

Наконец, для квадратичной функции, в которую включены одновременно члены a , m , n изменения положения графика относительно функции $y = x^2$ обобщаются.



Влияние знака и значения коэффициента a .

При $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ -вниз.

- При $-1 < a < 1$ парабола сжатием к оси абсцисс становится шире параболы $y = x^2$.
- Если $a > 1$ или же $a < -1$ парабола растяжением от оси Ox вдоль оси Oy становится “уже” параболы $y = x^2$.

Влияние знака и значения “ n ” на график

- Парабола вдоль оси Oy перемещается на $|n|$ единиц: при $n < 0$ вниз, при $n > 0$ вверх.
- n - соответствует ординате вершины параболы.

Влияние знака и значения “ m ” на график

- При $m > 0$ парабола перемещается вдоль оси Ox направо, при $m < 0$ -налево.
- m - соответствует абсцисс вершины параболы,
- $x - m = 0$ - уравнение оси симметрии параболы, прямая $x = m$ - ось симметрии параболы.

Ученик понимает, что числа m и n - координаты вершины функции.

Несмотря на возможность пользования графкалькулятором ученики производя соответствующие изменения над графиком функции $y = x^2$, строят графики в тетради.

Ученикам рекомендуют приготовить презентацию на построение графиков на графкалькуляторе, и по таблице значений письменно.

Презентации собираются в портфолио учащегося. В учебнике даны несколько образцов заданий. Рекомендуется выполнение этих образцов письменно всеми учениками, исследуя обсуждениями.

Запись квадратичной функции в виде выделения полного квадрата облегчает построение его графика.

Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____

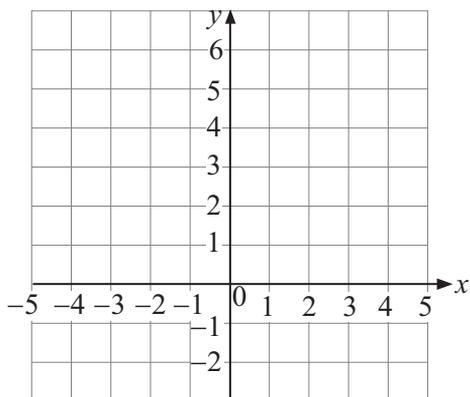
Число _____



• Строит графики функций $y = x^2 + n$ и $y = (x - m)^2$ по графику функции $y = x^2$

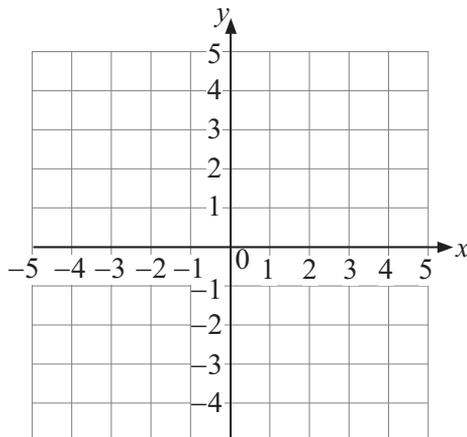
Воспользуйтесь графиком функции $y = x^2$ постройте графики данных функций:

1) $g(x) = x^2 + 1$



Объяснение: _____

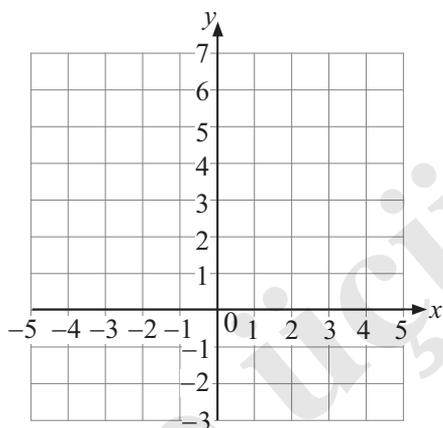
2) $p(x) = x^2 - 3$



Объяснение: _____

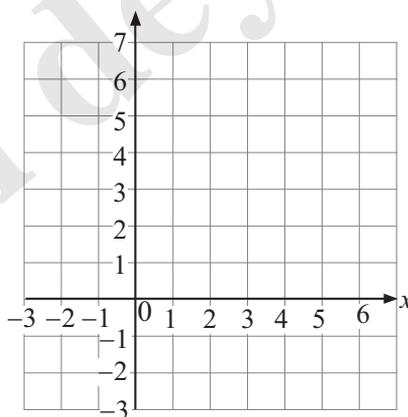
Воспользуйтесь графиком функции $y = x^2$, постройте графики данных функций:

3) $r(x) = (x + 1)^2$



Объяснение: _____

4) $k(x) = (x - 3)^2$



Объяснение: _____

В отведенных последующих часах для обучения квадратичной функции в учебнике и в пособии для учителей даны рабочие листы, специальные задания, способствующие усвоению учениками нижеследующих навыков.



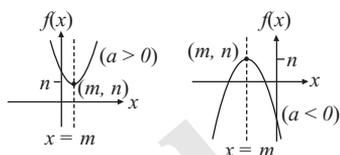
- Определять координаты вершины графика квадратичной функции
- Определять координаты точек пересечения графика с осями координат.
- Определять точки максимума и минимума квадратичной функции
- По графику функции определять в каком интервале значения функции будут положительными, а в каком - отрицательными.
- Определять квадратичную функцию по координатам вершины и любой точки на ее графике.
- Определять квадратичную функцию по точкам пересечения с осями координат.

Урок 36, 37. Учебник стр. 53-55. Формы выражения квадратичной функции и ее график. 2 часа

Шаги построения параболы $y = a(x - m)^2 + n$

1. Вершина параболы располагается в точке $(m; n)$.

Если ветви параболы направлены вниз, то значение n показывает максимум функции; если же ветви параболы направлены вверх, то значение n показывает минимум функции.

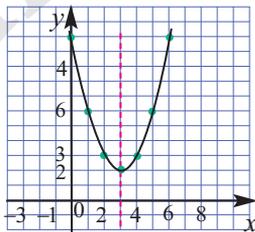
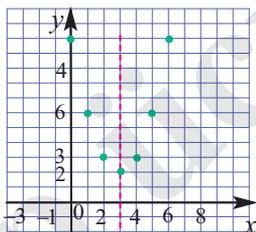


2. Находятся точки пересечения параболы с осями координат.

Например, для функции $y = (x - 3)^2 + 2$ при $x=0$ получится $y=11$, то есть парабола пересекает Oy в точке $(0;11)$. Определяется вершина параболы $(3; 2)$

3. Осью симметрии является прямая $x = m$

4. Обращается внимание на навыки местонахождения точек на графике по оси симметрии. В данном примере это определяется уравнением $x - 3 = 0$. Проводится ось симметрии $x = 3$. По оси симметрии отмечаются точки, находящиеся на равных расстояниях с равными координатами, другими словами, отмечаются симметричные точки на одной горизонтальной прямой (рис.1). Эти точки соединяются сплошной линией.



Обратите внимание! При положительный " m " вершина параболы располагается в правой полуплоскости от оси ординат, а при отрицательном " m " в левой полуплоскости.

Рабочий лист №2

Имя _____ Фамилия _____

Число _____

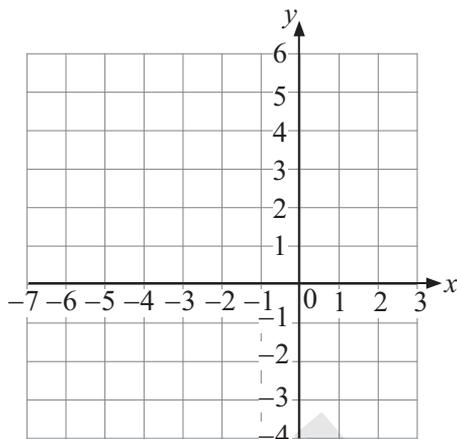
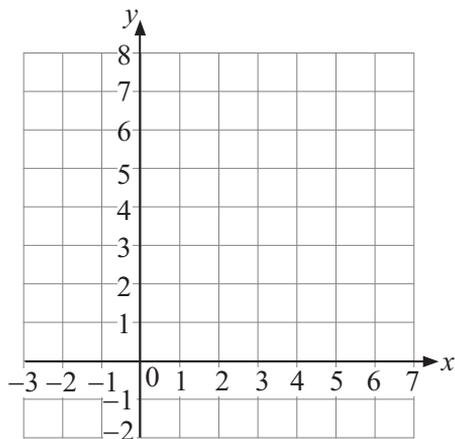


- Строит график данной квадратичной функции вида $y = a(x - m)^2 + n$

Постройте графики функций по координатам вершины и оси симметрии

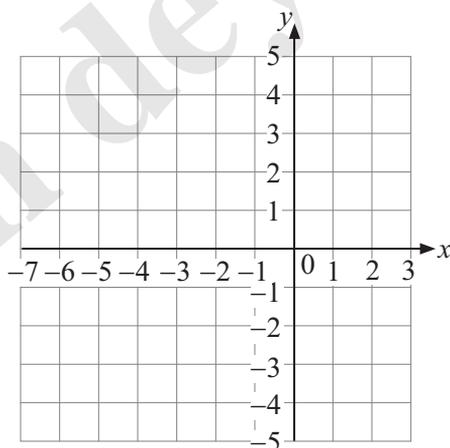
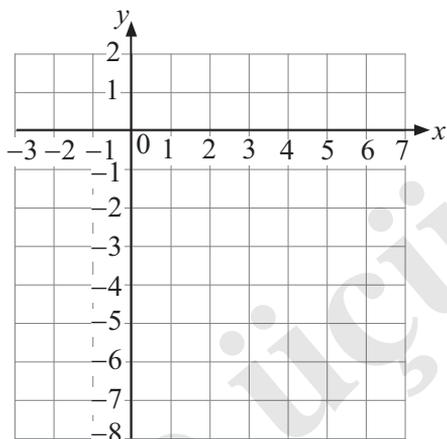
1) $y = (x - 3)^2 + 2$

2) $y = (x + 3)^2 - 1$



3) $y = -(x - 2)^2 - 4$

4) $y = -(x + 3)^2 + 3$



У.20. В каком случае можно написать уравнение оси симметрии квадратичной функции по данным координатам пар точек на графике?

- а) (3; 10) и (7; 10) б) (4; 6) и (6; -2)

Точки, находящиеся на параболе, расположены попарно на одинаковом расстоянии относительно оси симметрии и ординаты этих точек должны быть одинаковыми.

Уравнение оси симметрии $x = m$ определяется как координаты середины отрезка

$$\text{из равенства } x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

В случае а) данные условия выполняются и так как $\frac{3+7}{2} = 5$, то уравнение оси симметрии будет $x = 5$.

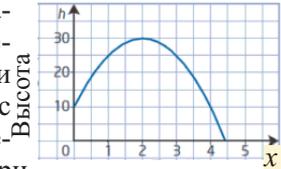
По данным пункта б) уравнение оси симметрии написать невозможно.

Урок 38. Учебник стр. 56, 57.

Нули квадратичной функции

Пересечение графика квадратичной функции с осью абсцисс

Информация о нулях функции, то есть о пересечении графика функции с осью абсцисс - важная информация. Ученники представляют эти точки и связь этих точек с корнями квадратного уравнения. Точки пересечения параболы с осями абсцисс и ординат имеют важное практическое значение в решении задач реальных жизненных ситуаций. Например, предположим, что график на рисунке был изображен во время прыжка какого-нибудь зверя (лягушки, белочки. т.п.). Точки пересечения с осями координат позволяют выявить с какой высоты началось движение, а также дальность прыжка.



Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.1. Определите число общих точек нижеследующих функций с осью абсцисс.

Так как в точке пересечения с осью абсцисс $y = 0$:

1) б) $f(x) = -2(x+1)^2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1 = 0, x = -1$

Ответ: Число общих точек равно 1.

с) $f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 36,$

$x-5 = \pm 6, x_1 = 11, x_2 = -1$ Ответ: Число точек пересечения равно 2.

У.2. Не строя графики функций

а) $y = 5(x-15)^2 - 100$ б) $y = -4x^2 + 14$ с) $y = (x+18)^2 - 8$

определите:

- 1) Направление ветвей параболы;
- 2) Точку вершины графика;
- 3) Уравнение оси симметрии;
- 4) Число точек пересечений с осью x .

а) 1) $a = 5 > 0$. Ветви параболы направлены вверх.

2) $m = 15, n = -100$

3) $x = 15$

4) $y = 0 \Rightarrow 5(x-15)^2 - 100 = 0, 5(x-15)^2 = 100$

$(x-15)^2 = 20, x-15 = \pm \sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$

$x_1 = 15 + 2\sqrt{5}, x_2 = 15 - 2\sqrt{5}$

Парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

b) 1) $a = -4 < 0$. Ветви параболы направлены вверх.

2) $m = 0, n = 14$

3) $x = 0$

4) $y = 0 \Rightarrow -4x^2 + 14 = 0, x^2 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$

С осью Ox парабола пересекается в двух точках.

c) 1) $m = -18, n = -8$

2) $a = 1 > 0$. Ветви параболы направлены вверх.

3) $x = -18$

4) $y = 0, (x + 18)^2 - 8 = 0, (x + 18)^2 = 8, \quad x + 18 = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$x_1 = -18 + 2\sqrt{2}, \quad x_2 = -18 - 2\sqrt{2}$ Число точек пересечения с осью Ox равно 2.

У.3. а) Разложив квадратный трехчлен на множители запишите в виде

$y = a(x - p)(x - q)$

б) Определите координаты пересечений с осями x и y .

с) Постройте график

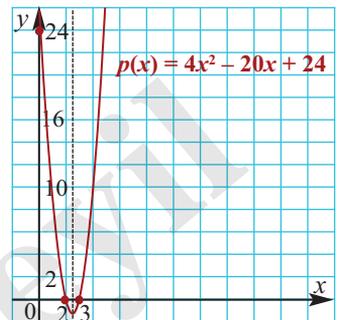
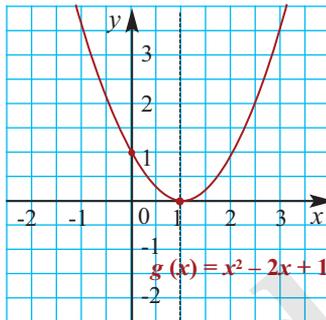
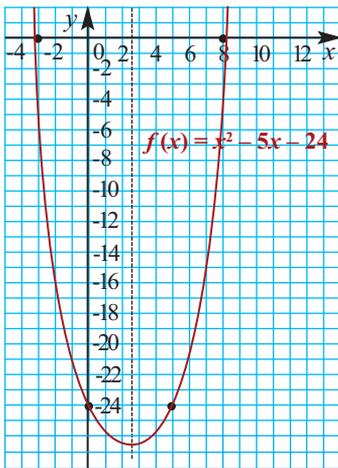
$f(x) = x^2 - 5x - 24, \quad g(x) = x^2 - 2x + 1, \quad p(x) = 4x^2 - 20x + 24$

а) $f(x) = (x - 8)(x + 3), \quad g(x) = (x - 1)^2, \quad p(x) = 4(x - 2)(x - 3)$

б) Точки пересечения с осями x и y .

$f(x) : (8; 0)$ и $(-3; 0); (0; -24)$ $g(x) : (1; 0); (0; 1)$ $p(x) : (2; 0)$ и $(3; 0); (0; 24)$

с)



Для того, чтобы построить данную функцию вида $y = a(x - p)(x - q)$ ученики устно представляют необходимые “важные” точки. Эти точки: точки пересекающие оси Ox и Oy и точка вершины параболы.

Важность уравнения оси симметрии, еще раз доводится до внимания учеников.

Отмечая симметричные точки по оси симметрии на листе бумаги в клетку, путем подсчитывания можно построить график функции более четким и точным.

У.6. Постройте график функции. Найдите расстояние между точками пересечения с осью Ox .

с) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

д) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

с) $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Корни уравнения $(x - 4)^2 - 3 = 0$

$x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ Расстояние между точками пересечения с осью абсцисс $d = |2 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

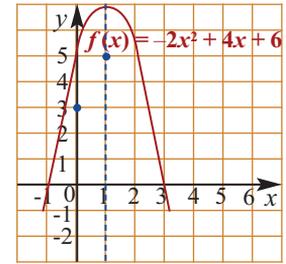
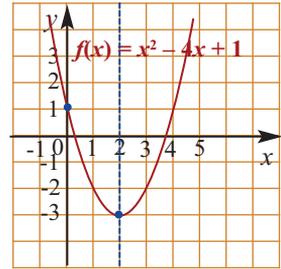
д) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

Найдем точки пересечения с осью абсцисс:

$-2x^2 + 4x + 6 = 0$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $(x-3)(x+1) = 0$ $x_1 = 3$ $x_2 = -1$

Расстояния между точками пересечения с осью абсцисс

$d = |3 - (-1)| = 4$



У.7. Даны точки пересечения параболы с осями координат. По этим данным найдите координаты вершины параболы.

а) (3; 0), (-1; 0), (0; -6) б) (-2; 0), (-3; 0), (0; 4)

с) (-3; 0), (1; 0), (0; 3)

а) **I способ.** Для того, чтобы найти коэффициенты a , b , c , в квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ нужно в равенстве $y = ax^2 + bx + c$ учесть координаты данных точек.

По точке пересечения оси ординат с точкой (0; -6) находится коэффициент c : $-6 = a + 0^2 + b \cdot 0 + c$, $c = -6$. Точка в функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$, учитывая координаты точек (3; 0) и (-1; 0) получим:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 6 \\ 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 6 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

Умножив 2-е уравнение системы на 3 и сложив почленно с 1-ым, получим:

$12a = 24$, $a = 2$. Это значение подставив во 2-е уравнение, получим $b = -4$. Итак,

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$. Воспользуемся формулами: $m = \frac{-b}{2a}$ и $n = f(m)$

$m = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$ и $n = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 6 = -8$

II способ. Воспользуемся видом: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$

Нужно отметить, что так как прямая $x = m$ является осью симметрии параболы, то из формулы $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ можно найти m .

$x_1 = 3$, $x_2 = -1 \Rightarrow m = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$ Тогда квадратичная функция примет вид:
 $y = a(x - 1)^2 + n$

Если здесь учесть координаты точек (3; 0) (или (-1; 0)), (0; -6) получим:

$\begin{cases} 0 = 4a + n \\ -6 = a + n \end{cases} \Rightarrow a = 2, \quad n = -8, \quad f(x) = 2(x - 1)^2 - 8$

III способ. Если известны точки пересечения графика квадратичной функции с осью абсцисс, тогда ее можно представить в виде $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. В рассматриваемом случае так как $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, то $y = a(x - 3)(x + 1)$. Если здесь учесть координаты точки (0; -6), то

$-6 = a(0 - 3)(0 + 1); \quad -6 = -3a$

$a = 2 \quad y = 2(x - 3)(x + 1)$

$y = 2(x^2 - 2x - 3) = 2(x - 1)^2 - 8$

Урок 39-41. Учебник стр. 58-61.

Общий вид квадратичной функции. 3 часа

1. Обращается внимание на навыки выделения полного квадрата из квадратного трехчлена
2. Квадратичная функция анализируется по нижеследующим показателям:
 - уравнению оси симметрии;
 - точке вершины;
 - наибольшему и наименьшему значению;
 - области определения и множеству значений;
 - пересечению с осью Ox ;
 - пересечению с осью Oy ;

Для того чтобы построить график функции, заданной в общем виде, нужно определить нижеследующие точки. Покажем это шагами на примере функции $y = x^2 + 2x - 3$

1. $a = 1, b = 2, c = -3$

Найдем абсциссу вершины: $m = -\frac{b}{2a} = -1$

Найдем ординату вершины: если значение

$x = -1$ учесть в уравнении $y = x^2 + 2x - 3$:

$y = 1 - 2 - 3 = -4$; Точка вершины: **$(-1; -4)$**

2. Найдем точку пересечения графика с осью Oy :

В уравнении $y = x^2 + 2x - 3$ при $x = 0$, получим $y = -3$. Точка пересечения графика с осью Oy : **$(0; -3)$**

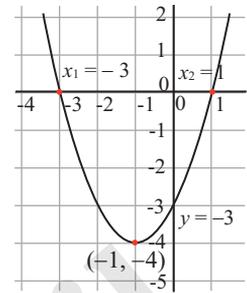
3. Найдем точку пересечения графика с осью Ox .

В уравнении $y = x^2 + 2x - 3$ при $y = 0$, получим

$x^2 + 2x - 3 = 0$. Корнями будут: $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Точки:

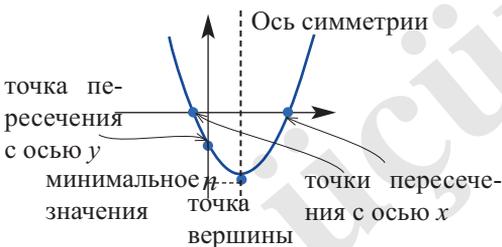
$(-3; 0)$ и $(-1; 0)$ - точки пересечения с осью Ox

4. Отметив эти точки в координатной плоскости, построим параболу.



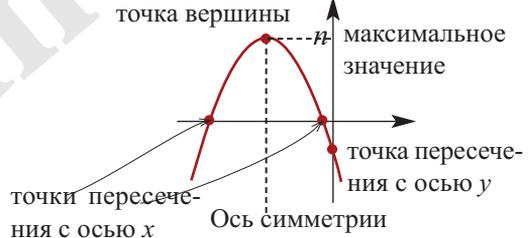
Каким показателям обращены внимания во время исследования квадратичной функции показаны на нижеследующих графиках (даны в учебнике)

При выполнении задания отмечается важность представления этих параметров.



Областью определения является множество всех действительных чисел $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Множество значений: $[n; +\infty)$



Областью определения является множество всех действительных чисел $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Множество значений: $(-\infty; n]$

Рабочий лист № 3

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Соответственно общему виду квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ строит и исследует график.

Пример. Напишите уравнение параболы, пересекающейся с осями координат в точках $(-3; 0)$ и $(2; 0)$, ветви которой направлены вверх.

$(-3; 0)$ и $(2; 0)$

По этим точкам график пересекает ось абсцисс при значениях аргумента (-3) и 2

$x = -3, x = 2$

По точкам пересечения с осью Ox уравнение квадратичной функции будет в виде $y = a(x - p)(x - q)$
А также точки пересечения с осью x является корнями соответствующего квадратного уравнения.

$(x + 3)(x - 2)$

Вид разложения квадратного трехчлена на множители. Если ветви параболы были бы направлены вниз, то перед выражением нужно было бы поставить знак минус.

$x^2 + x - 6$

Так как здесь $a > 0$ и ветви параболы направлены вверх, перед выражением знак минус не пишется.

$y = x^2 + x - 6$

Записывается функция.

1) Напишите уравнение какой-либо параболы, пересекающейся с осями координат в заданных точках и ветви которой направлены вверх.

а) $(-3; 0)$ и $(4; 0)$ б) $(-12; 0)$ и $(-3; 0)$ с) $(2; 0)$ и $(5; 0)$

2) Напишите уравнение какой-либо параболы пересекающейся с осями координат в заданных точках и ветви которой направлены вниз.

а) $(-2; 0)$ и $(6; 0)$ б) $(1; 0)$ и $(7; 0)$ с) $(5; 0)$ и $(-3; 0)$

Рабочий лист № 4

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Строит и исследует график, соответствующий общему виду квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Пример. Напишите уравнение параболы с вершиной в точке $(-2; -4)$ и проходящей через точку $(1; 3)$

Воспользуемся видом квадратичной функции $y = a(x - m)^2 + n$

Напишем координаты вершины $(-2; -4)$ в $y = a(x - m)^2 + n$, получим:

$$y = a(x - (-2))^2 + (-4) = a(x + 2)^2 - 4$$

Чтобы найти “ a ” воспользуемся координатами точки $(1; 3)$

$$3 = a \cdot 3^2 - 4$$

$$a = \frac{7}{9} \qquad y = \frac{7}{9}(x + 2)^2 - 4$$

а) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке $(-3; 2)$ и проходящей через точку $(4; 7)$.

б) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке $(4; 5)$ и проходящей через точку $(2; -2)$.

в) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке $(-2; 5)$ и проходящей через точку $(0; 9)$.

г) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке $(4; -1)$ и проходящей через точку $(2; 3)$.

Рабочий лист № 5

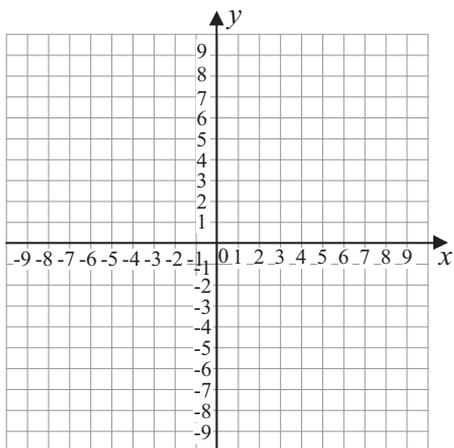
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Строит и исследует график квадратичной функции соответствующий общему виду $y = ax^2 + bx + c$.

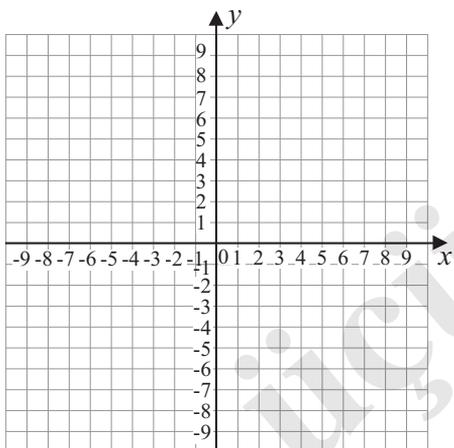
а) $y = -x^2 - 4$



- уравнение оси симметрии;
- координаты вершины параболы;

- наибольшее и наименьшее значение;
- область определения и множество значений;
- пересечение с осью Ox (если есть);
- пересечение с осью Oy .

б) $y = -x^2 - 6x - 9$



- уравнение оси симметрии;
- точку вершины;

- наибольшее и наименьшее значение;
- область определения и множество значений;
- пересечение с осью Ox (если есть);
- пересечение с осью Oy .

Рабочий лист № 6

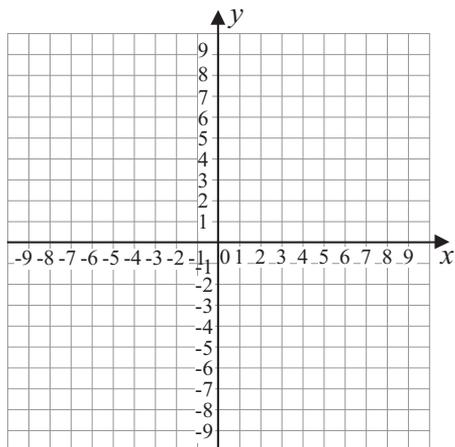
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



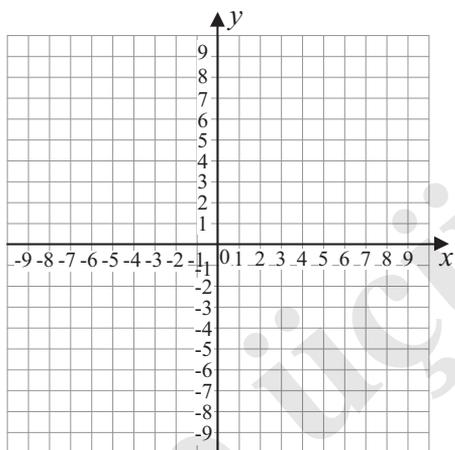
• Строит и исследует график квадратичной функции соответствующий общему виду $y = ax^2 + bx + c$.

а) $y = -x^2 - 6x + 4$



- запись по точке вершины (выделение полного квадрата)
- точку вершины;
- уравнение оси симметрии;
- наибольшее и наименьшее значение;
- область определения и множество значений;
- пересечение с осью Ox (если есть);
- пересечение с осью Oy .

б) $y = x^2 - 6x + 4$



- запись по точке вершины (выделение полного квадрата)
- точку вершины;
- уравнение оси симметрии;
- наибольшее и наименьшее значение;
- область определения и множество значений;
- пересечение с осью Ox (если есть);
- пересечение с осью Oy .

Рабочий лист № 7

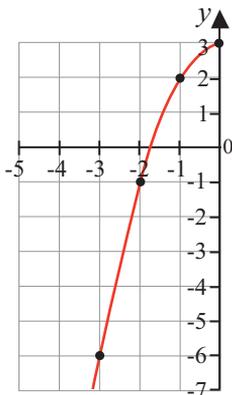
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



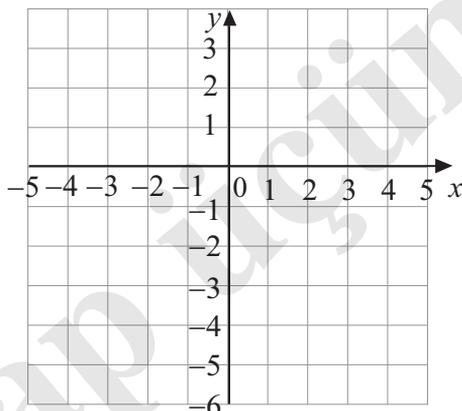
• Строит и исследует график квадратичной функции соответствующий общему виду $y = ax^2 + bx + c$

На рисунке дана половина параболы. По данным выполните задания.



x	$f(x)$
-3	-6
-2	-1
-1	2
0	3
1	2
2	-1
2	-6

- Напишите координаты вершины.
- Напишите уравнение оси симметрии
- Напишите точки, симметричные 3-ем данным точкам.
- Напишите точку пересечения с осью y
- Напишите точку пересечения с осью x
- Функция имеет максимум или минимум?
- Напишите функцию.
- Постройте полный график функции.



Урок 42-44. Учебник стр. 62-65.

Решение задач с применением квадратичной функции. 3 часа

Задачи можно объединить в 2-х группах. Один из этих групп-задачи на нахождение максимальных и минимальных значений с использованием особенностей квадратичной функции. Они охватывают экономические задачи, а также такие геометрические задачи как площадь, объем.

А вторая группа задач, по особенностям графика квадратичной функции-параболы, это моделирующие задачи. Эти задачи наиболее часто применяются в инженерно-конструкторских задачах, а также при изображении некоторых движений.



Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.2.Бизнес. Максимальное денежное поступление. Транспортная компания, занимающаяся перевозкой пассажиров, обслуживает ежедневно 200 пассажиров. Цена одного билета 5 манатов. Владелец компании считает, что каждый раз рост в цене на 50 копеек приводит к уменьшению 10-ти пассажиров.

а) Сколько раз компания должна повысить цены, чтобы получить максимальное поступление от продажи билетов?

б) Сколько манатов составит максимальное денежное поступление компании при таких повышениях цен?

1. Обозначим через x - число 50-ти копеечных повышений, тогда цена одного билета будет: $(5 + 0,5x)$

2. Так как при каждом повышении цен число людей уменьшается на 10, то число пассажиров будет: $(200 - 10x)$

3. Деньги, вырученные от продажи билетов обозначим, через $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= (200 - 10x)(5 + 0,5x) = 1000 + 100x - 50x - 5x^2 = \\ &= -5x^2 + 50x + 1000 = -5(x^2 - 10x - 200) = \\ &= -5((x - 5)^2 - 25 - 200) = -5((x - 5)^2 - 225) \end{aligned}$$

а отсюда $P(x) = -5(x - 5)^2 + 1125$

При $x = 5$ функция $P(x)$ принимает наибольшее значение, равное 1125.

а) Если компания 5 раз произведет увеличение цен, то от продажи билетов получит максимальное поступление: $P(5) = 1125$

б) Если в обыкновенные дни при обслуживании 200 пассажиров поступила $200 \cdot 5 = 1000$ манат, то после пятикратного подорожания цен на 50 копеек поступление составит $(200 - 10 \cdot 5)(5 + 0,5 \cdot 5) = 1125$ манат.

Проводится обсуждение и решение задачи нижеследующего типа.

Медицина. Зависимость числа размножения бактерий от температуры задается функцией

$$N(T) = 20T^2 + 20T + 120$$

Температура T показана по Цельсию и $-2^\circ \leq T \leq 14^\circ$

При какой температуре число бактерий будет минимальной?

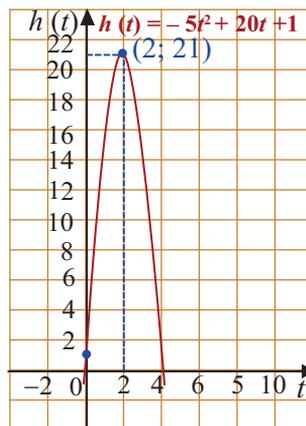
$$\begin{aligned} \text{Решение: } N(T) &= 20T^2 + 20T + 120 = 20(T^2 + T + 6) = 20\left(T^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}T + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 6\right) \\ &= 20\left(\left(T + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\frac{3}{4}\right) = 20\left(T + \frac{1}{2}\right)^2 + 115 \end{aligned}$$

Функция $N(T)$, выражающая зависимость числа размножения бактерий от температуры имеет минимум. При $T = \left(-\frac{1}{2}\right)^\circ$ $N\left(-\frac{1}{2}\right) = 115$.

У.4. Движение. Высоту мяча через t секунд после броска вверх можно найти по формуле

$$h = -5t^2 + 20t + 1.$$

- Через сколько секунд мяч достигнет высоты 16 м?
- На какую максимальную высоту поднимется мяч?
- Сколько секунд мяч пробудет в воздухе?



а) Из уравнения $-5t^2 + 20t = 16$ найдем через сколько секунд мяч достигнет высоты 16 метров:

$$\begin{aligned} -5t^2 + 20t - 16 &= 0 \Rightarrow \\ t^2 - 4t + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда получим $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Физически это показывает, что после подбрасывания вверх, мяч дважды оказывается на высоте 16 метров от земли. После первого подбрасывания за 1 секунду (мяч поднимаясь вверх), а второй раз за 3 секунды (достигнув максимальной высоты, возвращаясь). Другими словами это симметричные точки $(1; 16)$ и $(3; 16)$, лежащие на параболе, являющейся траекторией мяча.

б) Так как зависимость высоты брошенного вверх мяча от времени - квадратичная функция, то покажем ее в виде полного квадрата:

$$\begin{aligned} h &= -5t^2 + 20t + 1 = -5(t^2 - 4t - 0,2) = -5((t - 2)^2 - 4 - 0,2) = -5(t - 2)^2 + 21 \\ h(t) &= -5(t - 2)^2 + 21 \end{aligned}$$

Квадратичная функция имеет наибольшее значение. Это значение она принимает при $t = 2$ секундам и $h(2) = 21$. То есть максимальная высота подъема мяча равна 21 метру.

с) Для того чтобы найти сколько секунд мяч останется в воздухе, решим уравнение $h(t) = 0$

$$\begin{aligned} -5t^2 + 20t + 1 &= 0 \\ t_{1,2} &= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 5}}{5} \approx \frac{10 \pm 10,2}{5} \end{aligned}$$

Отметим, что так как при $t = 0$ мяч от земли находился на расстоянии 1 метра, то корень t_1 не относится к решению задачи. $t_2 \approx 4,04$ секунд показывает время падения мяча на землю. Значит мяч был в воздухе приблизительно 4,04 секунд.

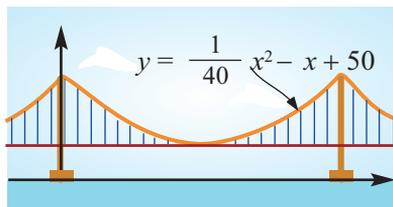
У.5. Зависимость между количеством билетов (N), проданных на концерт и днями (n) продаж определится как $N(n) = -10n^2 + 60n + 200$. В какой день продано наибольшее количество билетов? Найдите число билетов проданных в этот день.

Решение: Записав в виде $N(n) = -10(n^2 - 6n - 20) = -10[(n - 3)^2 - 29] = -10(n - 3)^2 + 290 = 290 - 10(n - 3)^2$, получим что 3-ий день ($n = 3$) было продано наибольшее число билетов. Число проданных билетов в этот день равно 290.

У.6. Трос поддерживающий вес моста между двумя опорами имеет форму параболы заданную формулой $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$ в выбранной системе координат, как показано на рисунке (x, y в метрах). Самая низкая точка троса находится на мосту. На какой высоте от поверхности воды находится мост?

Выделив квадрат двучлена в квадратичной функции

$$y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$$



найдем координаты вершины:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{40}x^2 - x + 30 = \frac{1}{40}(x^2 - 40x + 30 \cdot 40) = \\ &= \frac{1}{40}(x^2 - 40x + 1200) = \frac{1}{40}((x - 20)^2 - 400 + 1200) = \\ &= \frac{1}{40}((x - 20)^2 + 800) = \frac{1}{40}(x - 20)^2 + 20 \end{aligned}$$

при $x = 20$ -ти наименьшее значение функции равняется 20. То есть мост от поверхности воды находится на расстоянии 20 метров.

У.7. Решение: 1) По данным измерениям (в метрах)

арки, запишем квадратичную функцию в виде:

$$y = ax^2 + 2,24. \text{ При } x = 1,4 \text{ (м), } y = 0: 0 = 1,96a + 2,24.$$

Отсюда $a = -\frac{8}{7}$. Значит, искомая функция имеет вид:

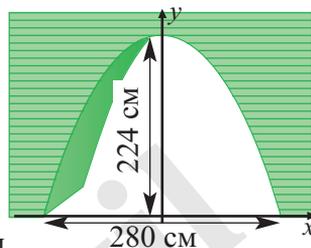
$$y = -\frac{8}{7}x^2 + 2,24. \text{ 2) а) Точка, расположенная на расстоянии}$$

70 см от края арки находится в расстоянии от оси симметрии (в данном случае от оси ординат) на

$1,4 - 0,7 = 0,7$ (м). Чтобы найти высоту арки в этой точке,

вычислим значения функции $y = -\frac{8}{7}x^2 + 2,24$ при $x = 0,7$:

$$y = -\frac{8}{7} \cdot 0,7^2 + 2,24 = 1,68 \text{ (м).}$$



У.8. Традиция олимпиады

По данным рисунка напишите функцию, показывающую параболу, образованную в осевом сечении зеркала. Начало координат выберите в точке, расположенной в середине, на самой глубине вогнутого зеркала.

Из рисунка видно, что функция показывающая параболу, образованную поперечным сечением имеет вид $y = ax^2$ ($a > 0$).

Так как при $x = \pm 40$ $y = 40$, получим $40 = a(\pm 40)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{40}$ и $y = \frac{1}{40}x^2$

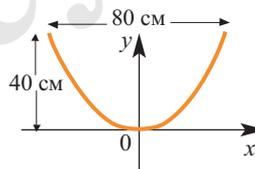
Посмотрим как изменится функция $y = \frac{1}{40}x^2$, если начало координат переместить в точку крепления рукоятки зеркала. Легко заметить, что если начало

координат переместить в точку крепления левой рукоятки, то функция $y = \frac{1}{40}x^2$

преобразуется в функцию вида $y = \frac{1}{40}(x - 40)^2 - 40$, если же переместить в

точку крепления правой рукоятки, к виду: $y = \frac{1}{40}(x + 40)^2 - 40$

Так как графики этих функций получаются параллельным переносом, то форма параболы не изменится.



Урок 45-47. Учебник стр. 66-68. Функция $y = |x|$ и ее график.
Обобщающие задания. 3 часа



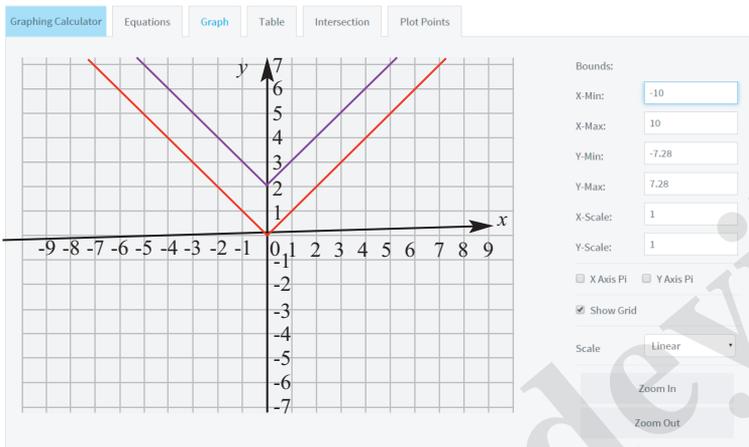
- Пользуясь графиком функции $y = |x|$, строит графики функции $y = 2|x|$, $y = |x + 2|$ и $y = -|x + 2|$.
- Пользуясь графиком функции $y = |x|$, строит графики функции $y = |x| + 2$ и $y = -|x| + 2$.

Аналогично правилу построения квадратичной функции, пользуясь графиком функции $y = |x|$, можно построить графики функции $y = 2|x|$, $y = |x + 2|$ и $y = -|x + 2|$, а также $y = |x| + 2$ и $y = -|x| + 2$.

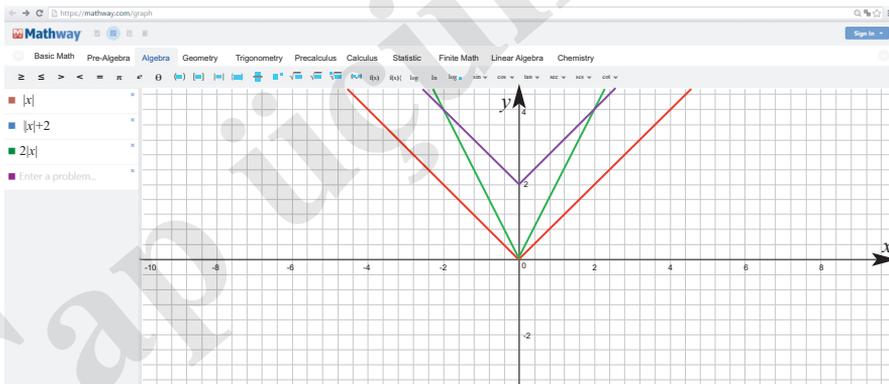
Исследуя шаги построения графика, заданного в учебнике, обобщаются основные черты функции с модулем.

Чтобы построить графики функций с модулем можно воспользоваться графкалькулятором, показанным ниже интернет-адресом:

<http://www.meta-calculator.com/online>



<https://mathway.com/graph>



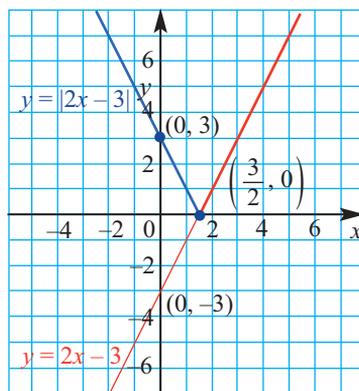
Одним из способов построения графика функции с модулем является использование соответствующего графика линейной функции. Для функции $y = |2x - 3|$ можно воспользоваться графиком функции $y = 2x - 3$. Для этого часть графика функции $y = 2x - 3$,

расположенную ниже оси абсцисс, нужно отобразить симметрично относительно оси x .

1. Точка $(\frac{3}{2}; 0)$ относится и к графику функции $y = 2x - 3$ и к графику функции $y = |2x - 3|$

2. Областью определения функции $y = |2x - 3|$ является множество всех действительных чисел. $\{x | x \in \mathbb{R}\}$.

Множество значений функции $[0; +\infty)$, потому что при любых значениях x $|2x - 3| \geq 0$.



3. График функции $y = |2x - 3|$ можно разделить на графики двух независимых линейных функций: 1) При $x \geq \frac{3}{2}$ на график функции $y = 2x - 3$; 2) При $x \leq \frac{3}{2}$ на график функций $y = -(2x - 3)$ или же $y = -2x + 3$

Нижеследующие функции можно показать как данные части функции

$$y = |2x - 3| \quad \begin{cases} y = 2x - 3, & x \geq 1,5 \\ y = -(2x - 3), & x \leq 1,5 \end{cases}$$

Рекомендуется выполнение заданий нижеследующих видов

1) Таблица значений относится к функции $y = kx + b$.

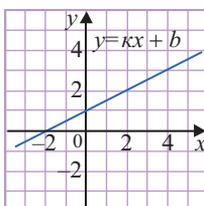
Измените значения в таблице для $y = |kx + b|$.

x	$y = kx + b$
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

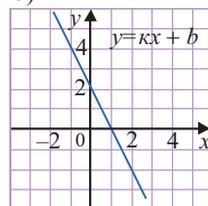
2) При пересечении графика функции $y = kx + b$ с осью абсцисс $x = 3$, а при пересечении с осью ординат $y = 4$. Напишите соответствующие значения точек пересечения графика функции $y = |kx + b|$ с осями x и y .

3) Перерисуйте график $y = kx + b$ в тетрадь. В одной координатной плоскости постройте график функции $y = |kx + b|$

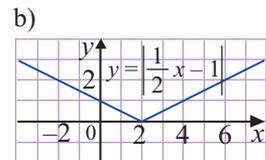
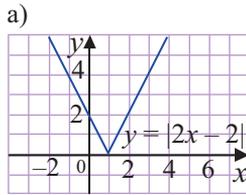
a)



b)



4) Напишите две разные линейные функции, соответствующие графику функции $y = |f(x)|$



? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.8. (стр. 69) Решение: Функцию $h(t) = -5t^2 + 20t$, задающую зависимость высоту h от время t запишем в следующем виде, выделив полный квадрат:

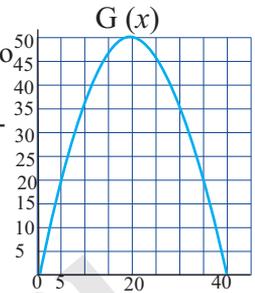
$$h(t) = -5t^2 + 20t = -5(t^2 - 4t) = -5(t^2 - 4t + 4) + 20 = -5(t - 2)^2 + 20$$

Из этой записи видно, что наибольшая высота подъема мяча равна 20 м и мяч достигает эту высоту при $t = 2$ секунд.

У.10. (стр. 69). Бизнес. Максимальная прибыль

Исследования выявили, что доход типографии изменяется по формуле $G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x$

Здесь x показывает число (тысячами) проданных книг, $G(x)$ - соответствующий доход (тысячами манат)



a) От продажи скольких книг типография получила доход в 32 тыс. манат? б) От продажи скольких книг компания получила максимальную прибыль?

с) Как объясните два ответа, полученные в пункте а)?

а) Для того чтобы ответить на вопрос “От продажи скольких книг типография получила доход в 32 тыс. манат” решим уравнение

$$-\frac{1}{8}x^2 + 5x = 32. \text{ Отсюда} \\ x^2 - 40x + 256 = 0 \text{ и } x_1 = 8, x_2 = 32$$

То есть от продажи 8-и тысяч и 32-х тысяч книг.

б) Чтобы вычислить максимальную прибыль компании от продажи книг, функцию $G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x$ покажем в следующем виде, выделив полный квадрат:

$$-\frac{1}{8}x^2 + 5x = -\frac{1}{8}(x^2 - 40x) = -\frac{1}{8}((x - 20)^2 - 400) = -\frac{1}{8}(x - 20)^2 + 50$$

То есть при продаже 20-ти тысяч книг, максимальная прибыль компании составит 50 тысяч манат.

с) В пункте а) кампания получает прибыль в 32 тысячи манат от продажи 8 тысяч и 32 тысяч книг. Это видно и по графику -книги сначала продавались по более высокой цене и с ростом числа продаваемых книг цена понизилась. Так что, 8 тысяч книг сначала продавались по 4 маната и компания получила доход в 32 тыс. манат, а затем этот же доход получила от продажи 32-х тысяч книг, продавая по 1-му манату.

Рабочий лист № 8

Имя _____ Фамилия _____

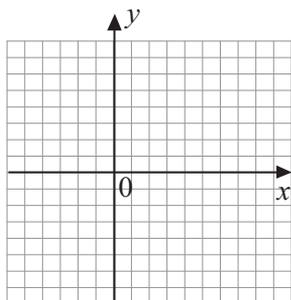
Число _____



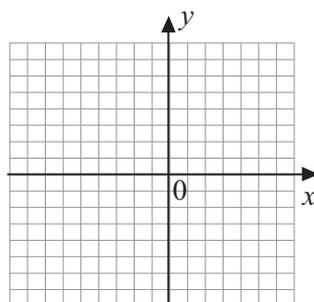
• Пользуясь графиком функции $y = |x|$, строит графики функции $y = 2|x|$, $y = |x + 2|$ вэ $y = -|x + 2|$.

Постройте графики функций с модулем

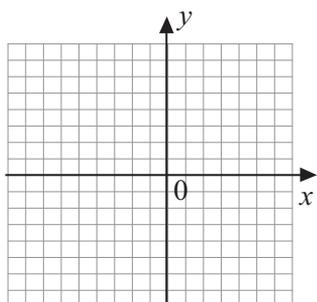
$$f(x) = |x - 3|$$



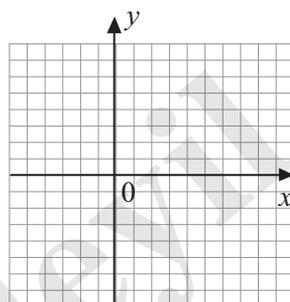
$$f(x) = |x + 2|$$



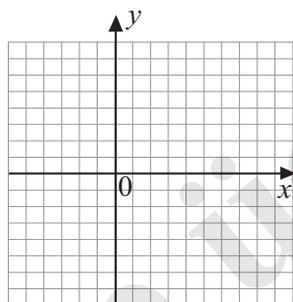
$$f(x) = |x + 3|$$



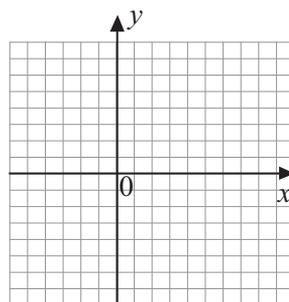
$$f(x) = |x - 4|$$



$$f(x) = |3 - x|$$



$$f(x) = |4 - x|$$



Рабочий лист № 9

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Пользуясь графиком функции $y = x^2$, $y = a(x - m)^2$, строит графики функции $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2 + n$.

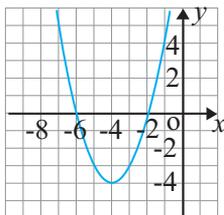
1. Какая из функций не является квадратичной?

- a) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 7$
- b) $f(x) = (x - 3)(2x + 5)$
- c) $f(x) = 5x^2 - 20$
- d) $f(x) = 3(x - 9) + 6$

2. Найдите множество значений функции $y = -6(x - 6)^2 + 6$.

- a) $(-\infty; 6]$
- b) $[6; +\infty)$
- c) $(-\infty; -6]$
- d) $[-6; +\infty)$

3. Какая из функций соответствует графику?

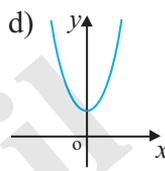
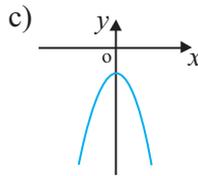
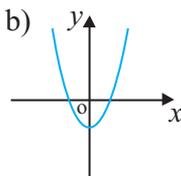
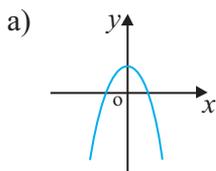


- a) $y = (x + 4)^2 + 4$
- b) $y = (x - 4)^2 + 4$
- c) $y = (x + 4)^2 - 4$
- d) $y = (x - 4)^2 - 4$

4. Какой из квадратичных функций эквивалентна функция $y = x^2 - 4x - 5$?

- a) $y = (x - 2)^2 - 1$
- b) $y = (x - 2)^2 - 9$
- c) $y = (x - 1)^2 - 4$
- d) $y = (x - 1)^2 - 6$

5. Выберите график, соответствующий функции. $y = 1 + ax^2$ и $a < 0$



6. При каких значениях a и q парабола $y = a(x - p)^2 + q$ не пересекает ось абсцисс?

- a) $a > 0$ и $q > 0$
- b) $a < 0$ и $q > 0$
- c) $a > 0$ и $q = 0$
- d) $a < 0$ и $q = 0$

7. Точка $(4; -2)$ является вершиной квадратичной функции. Точки $(8; 6)$ и $(2; 0)$ лежат на графике функции. Дополните график, написав координаты еще двух точек, принадлежащих графику.

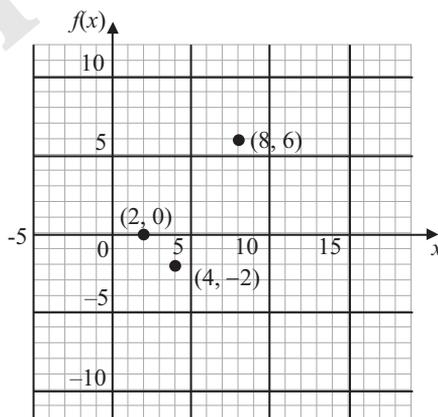


Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 2.1

№	Критерии	Замечания
1	Строит график квадратичной функции составлением таблицы множества значений.	
2	График квадратичной функции строит пользуясь графиком функции $y = x^2$	
3	Строит графики квадратичных функций вида $y = a(x - m)^2 + n$ и $y = a(x - p)(x - q)$	
4	Определяет нули функции.	
5	Решает задачи применяя квадратичную функцию	
6	Строит график функции $y = x $.	
7	Строит график функции вида $y = a x - m + n$	
8	Строит и исследует график квадратичной функции соответствующий общему виду $y = ax^2 + bx + c$	

Урок 48. Задания суммативного оценивания по разделу 2.1

1. Найдите b , если парабола $y = 2x^2 + 6x - 3$ проходит через точку $A(1; b)$.

A) 4 B) 6 C) 3 D) 5

2. Если для функции $f(x) = x^2 + px + q$ $f(1) = -1$, найдите сумму $p + q$.

A) -2 B) 2 C) 0 D) 1

3. Найдите множество значений функции $y = x^2 - 4x + 6$.

A) $[0; +\infty)$ B) $[2; +\infty)$ C) $[1; +\infty)$ D) $[6; +\infty)$

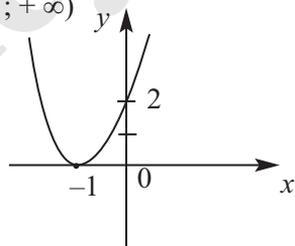
4. Укажите уравнение параболы данной на рисунке.

A) $y = (x + 1)^2 + 2$

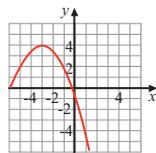
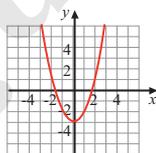
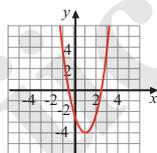
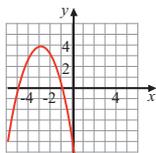
B) $y = (x + 1)(x - 2)$

C) $y = (x + 1)^2$

D) $y = 2(x + 1)^2$



5. Укажите график функций $y = (x - 1)^2 - 4$.



6. Точка $A(2; 3)$ лежит на параболе $y = x^2 + 2x + c$. Покажите точку вершины этой параболы.

A) $(-1; 6)$

B) $(2; 4)$

C) $(-1; -6)$

D) $(-2; 3)$

7. Абсцисса точки вершины параболы $y = -x^2 + bx + 6$ равна 2, найдите b .

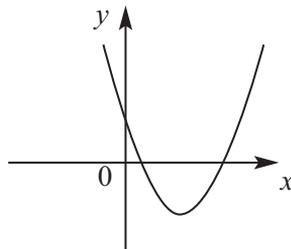
- A) -4 B) 4 C) 2 D) -2

8. В какой точке пересекает парабола $y = (x - 2)(x + 3)$ ось Oy ?

- A) (0 ; 2) B) (0 ; -3) C) (0 ; -6) D) (-6 ; 0)

9. Постройте график функции $y = |x - 1|$.

10. По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ данному на рисунке определите знаки коэффициентов a, b, c .



11. Зависимость расстояния от поверхности земли h (в м.) мяча, брошенного вверх с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/сек, от времени полета определяется формулой: $h = 24t - 5t^2$.

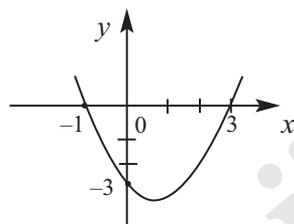
- а) Найдите наибольшую высоту, на которую поднимается мяч.
б) Через сколько секунд после броска мяч упадет на землю?

12. Определите соответствие..

- | | |
|------------------------|--|
| 1) $y = x^2 + 4$ | A) Наименьшее значение равно 4 |
| 2) $y = 4 - x^2$ | B) Наибольшее значение равно 4 |
| 3) $y = (x - 1)^2 + 2$ | C) Наименьшее значение равно 2 |
| | D) Наибольшее значение равно $x = 1$. |

13. При каком значении c наименьшее значение функции $y = x^2 - 2x + c$ равно 5?

14. По данному графику напишите формулу квадратичной функции и найдите наименьшее значение.



15. График какой квадратичной функции получится, если параболу $y = x^2$ переместить на 2 единицы в горизонтальном направлении направо и в вертикальном направлении на 3 единицы вниз?

16. Дан прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см. Если большую сторону уменьшить на a см, а меньшую увеличить на a см, то при каком значении a площадь полученного прямоугольника будет наибольшей?

Образец поурочного плана, относящийся ко 2-му разделу Уравнение окружности - 1-ый час. Учебник стр. 74, 75

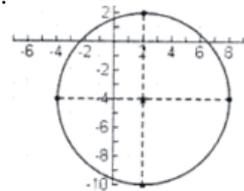
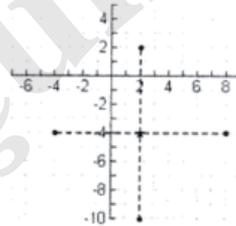
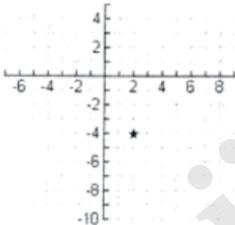
Стандарты содержания. 3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.

Предполагаемое формирование навыков учеников: Ученик:

- Пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
- Пишет уравнение окружности по точке центра и точке на окружности;
- Пишет уравнение окружности по координатам крайних точек диаметра;
- Строит окружность по уравнению окружности;
- Данное уравнение приводит к уравнению окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;

Мотивация. Какими точками вы пользуетесь, чтобы построить график заданной линейной функции вида $y = kx + b$? Выслушиваются мнения учеников. Определив координаты двух точек, например, точки пересечения с осями Ox и Oy можно построить график любой линейной функции. Какие точки по вашему мнению должны быть даны, чтобы в координатной плоскости можно было бы построить любую окружность? Слушаются мнения. Вместе с учениками исследуются обсуждения, что если известны координаты центра и координаты любой точки на окружности, то можно построить окружность. **3-4 мин. Обучение.** По точке $(0;0)$ и любой точке (x,y) применяя формулу расстояния между точками - обсуждениями вместе с учениками, определяется правило нахождения радиуса окружности. Уравнение окружности с центром в начале координат определяется как $x^2 + y^2 = r^2$. Построение окружности с центром в начале координат было показано на примере 1. Построение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ с центром не в начале координат показано на нижеследующем примере. Обращается внимание на навыки нахождения центра и радиуса окружности заданной уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ и построению окружности. Пример $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$. **Обсуждение.** Из записи $(x - 2)$ получается, что абсцисса центральной точки окружности равна 2, а из записи $(y + 4)$ получается что ордината центральной точки равна -4. Вероятность ошибок допущенных учениками в знаках координат велика и поэтому рекомендуют обратить внимание на эти моменты. Ответы учеников проверяются на нескольких примерах.

Отмечается центральная точка находятся от центральной точки на $\sqrt{36} = 6$ единиц направо, налево, вверх и вниз. Рисуется окружность проходящая через эти 4 точки.



Рекомендуется выполнение этого задания в тетради каждым учеником. Обращается внимание ученикам, которые находятся под наблюдением. **7-8 мин.**

Рекомендуется выполнить в классе в качестве индивидуальной работы общеклассными обсуждениями - по одному пункту из заданий D.1, D.2, D.3, D.4, D.5. Остальные пункты могут быть заданы как домашнее задание. **6-7 мин.**

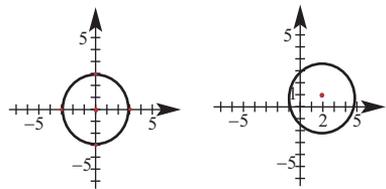
Обсуждения задания У.7. Какие формулы могут быть использованы при выполнении пункта а) Другими словами, как можно найти уравнение окружности, если известны координаты конечных точек диаметра? Выслушиваются мнения. Ученики:

- Используя формулы координат середины отрезка $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$ можно найти координаты центра окружности.

- Используя формулы расстояния между двумя точками можно найти радиус окружности $r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

- По координатам точки, лежащей на окружности (радиус известен) используя формулу $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ можно найти координаты центра. **6-7 мин.**

Дифференцированный подход. Слабые ученики. Во время урока слабые ученики, которые под наблюдением, остаются в центре внимания и им задаются дополнительные вопросы? Например, данные на рисунке окружности имеют одинаковые радиусы, однако координаты центральных точек различные. Изменятся ли от этого уравнения окружностей?



Изменятся ли от этого уравнения окружностей?

Работы в группах. Ученики делятся на группы. Каждому члену группы даются уравнения и таблица классификации уравнений как показано внизу. В каждом столбце одна пустая клетка, в которую ученики сами должны придумать и записать уравнение.

Уравнения:

1. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$
2. $(x+2)^2 + (y-1)^2 - 100 = 0$
3. $x^2 + (y+1)^2 = 25$
4. $(y-1)^2 + (x-2)^2 = 5$
5. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$
6. $x^2 + (y+1)^2 = 100$
7. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + 15 = 25$
8. $(x-2)^2 + (1+y)^2 = 100$
9. $(y+1)^2 + x^2 = 10$
10. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$
11. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + 4 = 9$
12. $(y+1)^2 + (x-2)^2 = 25$

	Центр (2; 1)	Центр (2; -1)	Центр (1; -1)	Центр (___; ___)
Радиус $\sqrt{5}$				
Радиус $\sqrt{10}$				
Радиус 5				
Радиус 10				

Во время работы с группами обращается внимание на обмен информации между членами группы и группами. Проектором может быть показана информация нижеследующего содержания.

Об обмене информацией

- свои ответы сравни с ответами ученика из своей группы
- если есть разница, то объясни свое решение и выслушай объяснение решения ученика.
- свою работу сравни с работой ученика из другой группы.
- если есть разница, то обсудите.

Оценивание. В течении всего урока ведется формативное оценивание путем наблюдения. Рабочий лист N1 может быть использован для формативного оценивания уровня знания. Остальные задания данные на странице 75 могут быть заданы как домашние задания.



Стандарты содержания

3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
4.2.1. Проверяет соответствие действительности полученных результатов при практических измерениях



Формирование навыков учеников

- В одномерной (числовой оси) и двухмерной системах координат вычисляет расстояние между двумя точками.
- находит среднюю точку отрезка по данным координатам;
- Решает задачи на нахождение расстояния между точками;
- По разным данным определяет уравнения окружности;
- решает задачи с применением уравнения окружности;
- Проводит вычисления плана изображенного определенным масштабом, и размеры соответствующие данному масштабу приводит в соответствие с реальными жизненными размерами;
- Решает задачи на нахождения центра окружности в реальных ситуациях;
- Вычисляет площадь сектора и сегмента окружности.



Математический словарь

- расстояние между двумя точками
- средняя точка отрезка
- серединный перпендикуляр отрезка
- уравнения окружности
- сектор
- сегмент



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы
Интернет-адреса

Урок 49-52. Учебник стр. 70-73. Расстояния между двумя точками. 4 часа.



• В одномерной (числовой оси) и двухмерной системах координат вычисляет расстояние между двумя точками.;

- находит среднюю точку отрезка по данным координатам;
- Решает задачи на нахождение расстояния между точками;

Ученикам знакомы нахождение средней точки отрезка в одномерном и двумерном координатных системах. Еще раз рассматриваются задачи такого типа.

Средняя точка отрезка

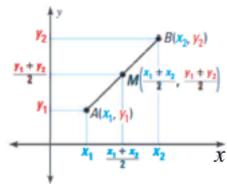


Точка М разделяет отрезок АВ на два конгруэнтных отрезка: $AM \cong MB$, значит $AM = MB$

Прямая CD разделяет отрезок АВ на две равные части .

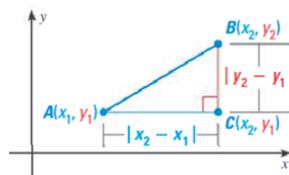
$AM \cong MB$, значит $AM = MB$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



! Рисуются картины, записываются формулы использованные при совместном обсуждении с учениками. Выполняются задания данные в учебнике. Многие задания охватывают реальные жизненные ситуации - охватывают информации, в которых отмечены направления и расстояния из определенной точки. Эти задания являются важными, с точки зрения - формирования пространственных представлений ученика. Выполняя задания, решаемые применением формулы расстояния между двумя точками обращается внимание нижеследующим навыкам - Точки размещаются на координатной плоскости, расстояние определяется по количеству клеток. Затем вычисляется с помощью формулы. Результаты сравниваются.

- Если во время вычислений используются числа не имеющие полного квадрата, то объявляется заранее с какой точностью ведется вычисление.

- Обращается внимание на выполнение заданий выполненных на участках с определенным масштабом с применением формулы расстояния между двумя точками.



Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.6. б) Если $(x ; y)$ - координаты конца Т отрезка RT, то по формулам координат середины отрезка.

$$\begin{cases} x_s = \frac{x_R + x_T}{2} \\ y_s = \frac{y_R + y_T}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = \frac{2 + x}{2} \\ 2 = \frac{6 + y}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Вычислив расстояния между точками R (2 ; 6) и T (- 4 ; - 2) найдем длину отрезка RT

$$RT = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-2 - 6)^2} = 10$$

У.8. 1) Найдем координаты середины стороны АВ :

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \quad y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

2) Длина отрезка CM : $CM = \sqrt{(7 - 3)^2 + (4 - 7)^2} = 5$

У.10. а) A (1 ; 2) , B (2 ; 3) , C (5 ; 0)

$$AB = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{2} \quad BC = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{18}$$

$$AC = \sqrt{(5 - 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{20} \quad (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2 = (\sqrt{20})^2$$

Из равенства $AB^2 + BC^2 = AC^2$ и по теореме обратной теореме Пифагора можно утверждать, что $\triangle ABC$ прямоугольный.

У.22. Будучи обобщающим заданием, небольшой проект по определению уравнения прямой, углового коэффициента, по угловому коэффициенту определения перпендикулярности прямых, определение центра окружности требует применение широких математических навыков. Составление учениками математического словаря служит формированию у учеников таких когнитивных навыков как определение, систематизирование и представление информации. Сначала составляется список этого словаря. Рекомендуется наряду с такими простыми понятиями элементов окружности как радиус, центр, диаметр расширить словарь, записав также использованные теоремы. Для составления словаря с помощью ключевых слов в GOOGLE, "MATH Glossary", MATH DEFINITION and EXAMPLE можно выбрать веб-линки. Эти задания наряду с увеличением запаса слов английского языка, также развивают навыки работы ученика с этими источниками.

Для примера было отмечено несколько линков:
<http://www.glencoe.com/apps/eGlossary612/landing.php>
<http://www.mathwords.com/d.htm>
http://www.ditutor.com/math_dictionary.html

1. Кусок тарелки помещается в координатную систему и на круговой части отмечаются три точки А, О, В.

2. Определяется диаметр окружности.

Для этого должен быть определен координаты центра окружности:

а) Проводятся срединные перпендикуляры отрезков АО и ОВ.

б) Определяются угловые коэффициенты к прямым содержащим в себе отрезки ОА и ОВ

♦ Уравнение прямой, содержащей срединный перпендикуляр отрезка ОА:

• Координаты средней точки М :

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{-4 + 0}{2}; \frac{2 + 0}{2} \right) = (-2; 1)$$

• Определяется угловой коэффициент k прямой содержащей в себе отрезок АО.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{0 - (-4)} = -\frac{1}{2}$$

Так как срединный перпендикуляр и эта прямая взаимно перпендикулярны, то угловой коэффициент его будет $k = 2$.

• Уравнение прямой $y - 1 = 2(x - (-2)); y = 2x + 5$

♦ Уравнение прямой содержащей срединный перпендикуляр отрезка ОВ:

• Координаты средней точки N :

$$N \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{4 + 0}{2}; \frac{1 + 0}{2} \right) = \left(2; \frac{1}{2} \right)$$

Определяется угловой коэффициент прямой, проходящей через ОВ.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

Угловой коэффициент прямой содержащей срединный перпендикуляр равен $k = -4$.

• Уравнение прямой $y - \frac{1}{2} = -4(x - 2); y = -4x + 8,5$

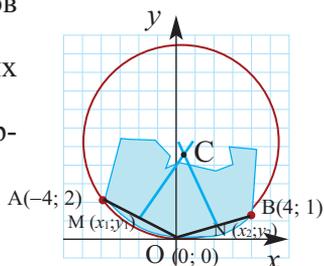
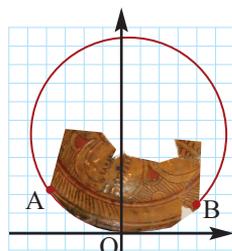
$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -4x + 8,5 \end{cases}$ Центр окружности находится на обеих прямых. Значит решением системы уравнений будет координаты середины этого центра.

$$x = \frac{7}{12}; y = \frac{37}{6} \quad C \left(\frac{7}{12}; \frac{37}{6} \right)$$

♦ Расстоянием от точки С до каждой отмеченной точке равен радиусу этой окружности :

$$\sqrt{\left(0 - \frac{7}{12}\right)^2 + \left(0 - \frac{37}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{5525}{144}} \approx 6,2 \text{ (см)}$$

Диаметр тарелки равен приблизительно 12 см.



Рабочий лист № 1

Имя _____

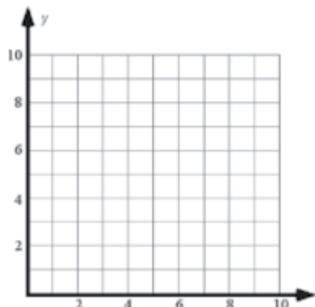
Фамилия _____

Число _____



• В одномерной (числовой оси) и двухмерной системах координат вычисляет расстояние между двумя точками.

1) Расположите точки $(2; 5)$ и $(8; 5)$ в координатной плоскости. Вычислите расстояние между этими точками.



2) Проверьте являются ли координаты данных точек вершинами прямоугольного треугольника.

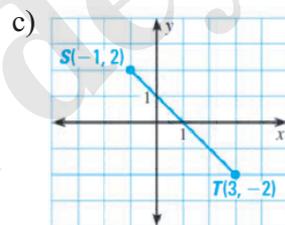
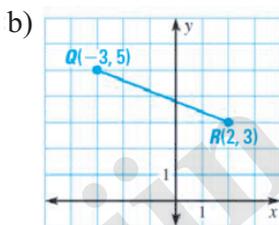
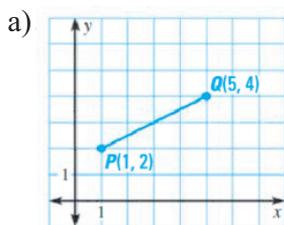
1) $(4; 0)$, $(2; 1)$, $(-1; -5)$

2) $(5; 4)$, $(2; 1)$, $(-3; 2)$

3) $(1; -5)$, $(2; 3)$, $(-3; 4)$

4) $(-1; 1)$, $(-3; 3)$, $(-7; -1)$

3) Найдите расстояние между данными точками и координаты середины соответствующих отрезков.



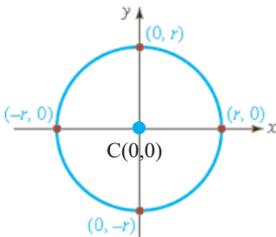
4) Точка М - средняя точка отрезка АВ. $AM = \frac{x}{4}$ и $AB = \frac{3x}{2} - 1$
Найдите длину отрезка МВ .

Урок 53-57. Учебник стр. 81. Уравнение окружности. 5 часов

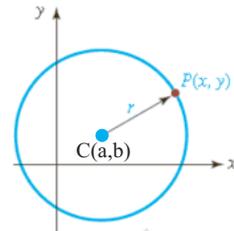


- Пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
- Пишет уравнение окружности по координатам центра и точке на окружности;
- Пишет уравнение окружности по координатам конечных точек диаметра;
- Пишет уравнение окружности по координатам трех точек расположенных на окружности;
- Данное уравнение приводит к виду уравнения окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
- По уравнению окружности строит окружность;
- По решению системы уравнений определяет взаимное расположение прямой и окружности: прямая касается окружности; пересекает окружность или ни одним не является.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r :
 $x^2 + y^2 = r^2$



Уравнение окружности с центром в точке и радиусом (a, b) r :
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$



Блок обучения и задания данные в учебнике, объясняются обсуждениями, выполняются данные задания.

Задания **У.11** - это задача охватывающая реальную ситуацию. Проблема данная и поставленная в условии задачи определяется учениками самостоятельно. Ведутся обсуждения вокруг таких вопросов как: "Чтобы решить проблему, геометрическим свойством какой фигуры можно воспользоваться?"



У.12. б) Напишем уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 41$ в точке $T(-4; -5)$:

Решение: 1) Центр окружности точка $O(0; 0)$. Угловой коэффициент прямой содержащей радиус OT равен: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 0}{-4 - 0} = \frac{5}{4}$

Так как касательная перпендикулярна радиусу проведенному в точку касания, то угловой коэффициент касательной находится из отношения

$$k \cdot \frac{4}{5} = -1; k = -\frac{4}{5}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{4}{5}$ и проходящей через точку $T(-4; -5)$ будет:

$$y - (-5) = -\frac{4}{5}(x - (-4)), y = -\frac{4}{5}x - \frac{41}{5}$$

Ответ: Уравнение касательной к окружности в данной точке: $y = -\frac{4}{5}x - \frac{41}{5}$

У.17. а) Чтобы найти число общих точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ и прямой $y = 6$, в уравнении $x^2 + y^2 = 36$ подставляем значение $y = 6$. Отсюда найдем $x = 0$.

То есть данная окружность имеет одну общую точку с прямой: $(0; 6)$
 Так как прямая имеет с окружностью одну общую точку, то прямая $y = 6$ является касательной к окружности $x^2 + y^2 = 36$.

У.20. б) Напишем уравнение окружности с координатами конечных точек его диаметра $(a; b)$ и $(c; d)$. 1) Координаты центра окружности

$$x_m = \frac{a+c}{2} \quad M\left(\frac{a+c}{2}; \frac{b+d}{2}\right)$$

$$y_m = \frac{b+d}{2}$$

2) Найдем радиус окружности.

$$R = \sqrt{\left(a - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b+d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{4}}$$

3) Уравнение окружности $\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+d}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{4}$

4) Напишем уравнение в нижеследующем виде:

$$\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\right)\left(x - \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\right) + \left(y - \frac{b+d}{2} + \frac{b-d}{2}\right)\left(y - \frac{b+d}{2} - \frac{b-d}{2}\right) = 0$$

После упрощения получим: $(x-c)(x-a) + (y-d)(y-b) = 0$.

Выполняется практическое задание данное на странице 79. Определения синуса, косинуса известные в 8-ом классе расширяются для тупого угла и доводятся до сведения, что синусы смежных углов равны, а косинусы - противоположные числа. Прослеживается выполнение каждым учеником исследовательского задания D.22.

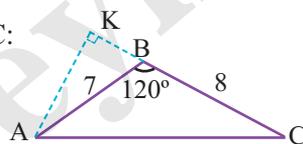
У.27. Решение: Проведем высоту из вершины А в $\triangle ABC$:

$AK \perp CK$. Так как $\angle BAK = 30^\circ$, то $KB = \frac{AB}{2} = \frac{7}{2}$, тогда

$KC = KB + BC = \frac{7}{2} + 8 = \frac{23}{2}$. Применив теорему Пифагора из $\triangle ABK$, находим $AK = \frac{7\sqrt{3}}{2}$. Из $\triangle AKC$ по теореме

Пифагора: $AC^2 = KC^2 + AK^2 = \left(\frac{23}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{529}{4} + \frac{147}{4} = 169$. Отсюда $AC = 13$.

По определению синуса острого угла из $\triangle AKC$ имеем $\sin \angle C = \frac{AK}{AC} = \frac{7\sqrt{3}}{26}$



Урок 51-53. Учебник стр. 82,83. Сектор и сегмент.

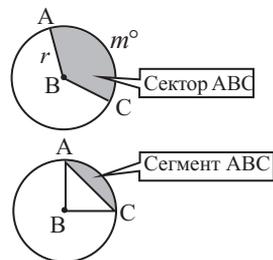
Обобщающие задания. 3 часа



• Вычисляет площади сектора и сегмента

Площадь сектора: $S_{ABC} = \frac{m^\circ}{360^\circ} \pi r^2$

Площадь сегмента: $S_{\text{сегмент}ABC} = S_{\text{сектор}ABC} - S_{\triangle ABC}$



Должно быть отмечено, что хорда делит круг на два сегмента. Вычисляя площадь сегмента соответствующего большой дуге - к площади соответствующего сектора прибавляется площадь $\triangle ABC$. Степень тяжести заданий на вычисление площадей сектора и сегмента несколько велика. Задачи даны на рисунке с условием определения площади закрашенной части.

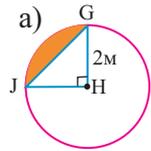
Рекомендуется провести устные обсуждения - воспользуясь вычислениями каких площадей можно найти закрашенную площадь?

У.2. а) 1) Площадь сектора данного на рисунке равна $\frac{1}{4}$ площади круга.

$$S_{\text{сектор}} = \frac{1}{4} 2^2 \pi = \pi$$

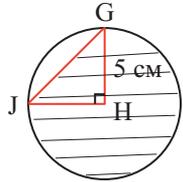
$$2) \quad S_{\triangle GHJ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$3) \quad S_{\text{сегмент}} = S_{\text{сектор}} - S_{\triangle} = \pi - 2$$



У.5. Площадь заштрихованной части на рисунке находится по формуле: $S = S_{\text{сектор}} + S_{\triangle GHJ}$

По данным, площадь сектора составляет $\frac{3}{4}$ часть целого круга.



$$S_{\text{сектор}} = \frac{3}{4} \pi \cdot 5^2 = \frac{75}{4} \pi$$

$\triangle GHJ$ прямоугольный треугольник:

$$S_{\triangle GHJ} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} = 12,5$$

Площадь заштрихованной части:

$$S' = \frac{75}{4} \pi + 12,5$$

У.6. Так как по условию задачи длина окружности

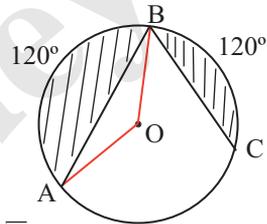
$$C = 12\pi \text{ мм},$$

$$2\pi r = 12\pi, \quad r = 6 \text{ мм}$$

Найдем площадь одного из заштрихованных сегментов

$$S' = \frac{1}{3} S_{\text{круга}} - S_{\triangle AOB} = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 12\pi - 9\sqrt{3} \text{ мм}^2$$

$$\text{Заштрихованная часть } S = 2 \cdot (12\pi - 9\sqrt{3})$$



У.10. а) $\triangle ABC$ - прямоугольный треугольник.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5$$

Так как из $\triangle AOC$ $r^2 + r^2 = 5^2$, $r^2 = 12,5$.

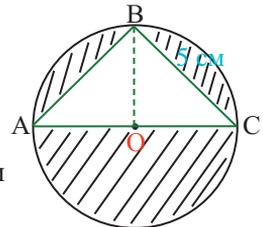
Площадь круга $S_d = 12,5\pi$. Тогда площадь закрашенной части

$$S' = 12,5\pi - 12,5$$

У.12. Вычислим площадь одной полки.

$$S = \frac{3}{4} \pi \cdot 40^2 = 1200\pi \text{ см}^2$$

Тогда, чтобы покрыть бумагой 2 полки, понадобится в 2 раза больше, то есть $2400 \pi \text{ см}^2$, а значит приблизительно 7536 см^2 бумаги.



Рабочий лист № 2

Имя _____

Фамилия _____

Число _____



- Пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
- Пишет уравнение окружности по координатам центра и точке на окружности.

1) По уравнениям определите центр и радиус окружности.

1) $x^2 + y^2 = 36$

2) $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 49$

3) $(x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 16$

4) $(x + 3)^2 + (y - 11)^2 = 12$

2) По данным информациям напишите уравнение окружности.

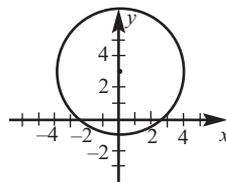
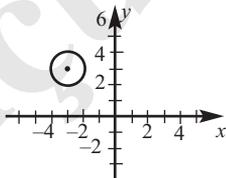
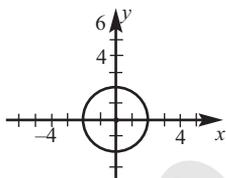
a) Центр: $(13; -13)$, радиус: 4

b) Центр: $(-1; -5)$, радиус: $\sqrt{5}$

c) Центр: $(-2; -3)$, координаты точки на окружности $(6; 4)$

d) Центр: $(2; -5)$, координаты точки на окружности: $(-7; -1)$

3) Напишите уравнение окружности.



Рабочий лист № 3

Имя _____

Фамилия _____

Число _____



• Данное уравнение приводит к уравнению окружности
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

1) Напишите уравнение окружности в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Отметьте центр и радиус.

a) $x^2 + y^2 + 16x + 40y - 25 = 0$

Центр _____ Радиус _____

b) $x^2 - 8x + y^2 = 33$

Центр _____ Радиус _____

c) $x^2 + y^2 + 14x - 12y + 4 = 0$

Центр _____ Радиус _____

d) $y^2 + 2x + x^2 = 24y - 120$

Центр _____ Радиус _____

2) Уравнение соответствующее новому положению окружности, напишите в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

a) $x^2 + y^2 + 14x + 12y + 76 = 0$

Перемещен на 2 единицы направо и 4 единицы вниз.

b) $x^2 + y^2 - 10x + 20y + 61 = 0$

Перемещен на 1 единицу налево и на 3 единицы вниз.

c) $x^2 + y^2 + 14x - 8y + 29 = 0$

на 3 единицы перемещен вверх.

d) $4y + y^2 = -28x - x^2 - 191$

перемещен на 4 единицы вниз.

Рабочий лист № 4

Имя _____

Фамилия _____

Число _____



• Пишет уравнение окружности по координатам конечных точек диаметра;

Напишите уравнения окружностей по информации данным ниже.

а) Конечные точки диаметра $(18; -13)$ и $(4; -3)$

б) Конечные точки диаметра $(2; 8)$ и $(2; -2)$

с) Конечные точки диаметра $(7; 7)$ и $(12; 9)$

д) Центр: $(10, -14)$

Уравнение касательной окружности: $x = 13$

е) Центр: $(-15; 9)$

Уравнение касательной окружности: $x = -17$

ф) Центр: $(-2; 12)$

Уравнение касательной окружности: $x = -5$

Рабочий лист № 5

Имя _____

Фамилия _____

Число _____



• Пишет уравнение окружности по координатам трех точек расположенных на окружности.

а) Три точки расположенные на окружности:

P (2; 2), Q (0; 5) и R (-4; 2)

б) Три точки расположенные на окружности:

A (-18; -5), B (-7; -16) и C (4; -5)

с) Три точки расположенные на окружности:

M (-7; 6), N (9; 6) и L (-4; 13)

Рабочий лист № 6

Имя _____

Фамилия _____

Число _____

Найдите площадь закрашенной части.

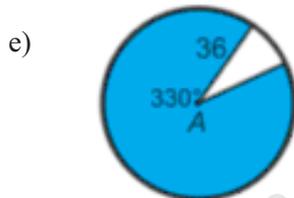
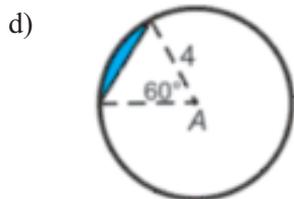
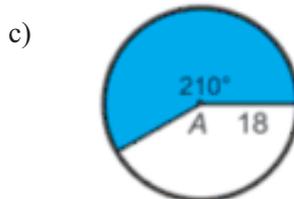
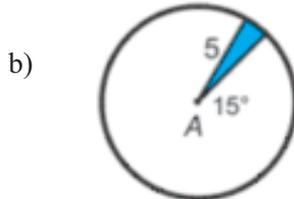
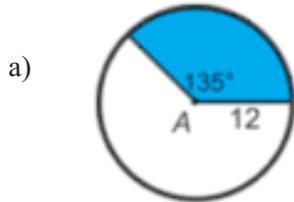


Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 2.2

№	Критерии	Замечания
1.	В одномерной (числовой ось) и двухмерной системах координат вычисляет расстояние между двумя точками	
2.	Находит среднюю точку отрезка по данным координатам	
3.	Решает задачи на нахождение расстояния между двумя точками	
4.	Пишет уравнение окружности с центром в начале координат	
5.	Пишет уравнение окружности с центром в произвольной точке	
6.	Решает задачи с применением уравнения окружности	
7.	Проводит вычисления плана изображенного определенным масштабом, и размеры соответствующими данному масштабу приводит в соответствие с реальными жизненными размерами.	
8.	Вычисляет площади сектора и сегмента	

Урок 61. Задания суммативного оценивания по разделу 2.2

1. Определите соответствие:

1) $x^2 + y^2 = 16$

А) диаметр равен 8 .

2) $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 25$

В) центр - точка (5; -4).

3) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

С) центр - точка (1; 4) .

Д) радиус равен 3 единицам.

2. Найдите радиус окружности данной уравнением $x^2 + y^2 - 12x = 0$

3. Найдите точку касания прямой $x + 2y = 0$ с окружностью $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

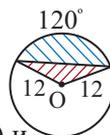
4. Найдите расстояния от начала координат до центра окружности $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

5. Найдите длину медианы АМ $\triangle ABC$ с координатами вершин А (1; -3) , В (3; 6) , С (-5; 2)

6. Вычислите расстояние между точками (1; -6) и В (7; 2) .

7. При каком значении m точки А (5; m) и В (3; 4) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат.

8. По данным на рисунке вычислите площади заштрихованных частей. О - центр окружности.



9. Вычислите площадь круга с конечными точками диаметра А (-2; 8) и В (4; -2).

10. Точки А (2; 12) и В (6; 8) - конечные точки диаметра. Вычислите площадь круга.

11. Вычислите площадь треугольника с вершинами А (3; 4), В (3; -4), С (-2; -4).

12. Найдите расстояние от начала координат до окружности $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 9 = 0$.

Таблица планирования уроков по 3-му разделу

Стандарт содержания	Урок №	Тема	Число ч.	Учебник стр.
<p>2.1.1. Составляет уравнение с одной переменной или систему уравнений с двумя переменными, соответственно реальным жизненным ситуациям.</p> <p>2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.</p> <p>2.2.1. Выполняет тождественные преобразования над алгебраическими выражениями.</p> <p>2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.</p> <p>3.1.1. Знает понятия ломанной и многоугольника, изображает правильный многоугольник.</p> <p>3.1.2. Вписывает окружность в треугольник и описывает окружность около него.</p> <p>3.1.4. Применяет свойства четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около него при решении задач.</p>	62-64	Решение уравнений высших степеней	3	86-88
	65, 66	Рациональные уравнения и решение задач	2	89, 90
	67-69	Уравнения с переменным под знаком модуля	3	91-94
	70-74	Системы уравнений	5	95-101
	75, 76	Решение задач составлением системы уравнений	2	102, 103
	77, 78	Обобщающие задания	2	104, 105
	79	Задания суммативного оценивания по разделу 3.1.	1	
	80	Полугодовые задания суммативного оценивания	1	
	81	Многоугольники	1	106-107
	82, 83	Внутренние и внешние углы многоугольника	2	108-109
	84-88	Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности	5	110-117
	89-91	Площадь правильного многоугольника	3	118-122
	92	Обобщающие задания	1	123
	93	Задания суммативного оценивания по разделу 3.2.	1	
			Всего	32



Стандарты содержания

2.1.1. Составляет уравнение с одной переменной или систему уравнений с двумя переменными, соответственно реальным жизненным ситуациям.

2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.

2.2.1. Выполняет тождественные преобразования над алгебраическими выражениями.

2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.



Формирование учебных навыков

- решает разными способами уравнения высших степеней;
- решает рациональные уравнения;
- решает уравнения с переменными под знаком модуля
- разными способами решает систему, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени.
- решает задачи составлением систем уравнений.



Словарь

уравнения высших степеней, рациональные уравнения, уравнения с модулем, система уравнений



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

<https://mathway.com/graph>

<http://www.meta-calculator.com/online>, <https://www.desmos.com>

Сгруппировав по нижеследующим направлениям были рассмотрены различные уравнения и системы уравнений. Решение уравнений высших степеней.

- Способ разложения на множители
- Уравнения, сводящиеся к квадратным. Рациональные уравнения. Уравнения с переменной под знаком модуля.

Системы уравнений.

- Система уравнений, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени
- Система уравнений, в которой оба уравнения второй степени.

Урок 62-64. Учебник стр. 86-88.

Решение уравнений высших степеней. 3 часа.

Сначала рассматривается решение уравнений высших степеней способом сведения к квадратному, разложением на множители и введением новой переменной.

Ученики выполняют задания применяя навыки разложения многочленов на множители способом группировки.



Методические рекомендации по выполнению некоторых заданий.

Способ разложения на множители. В учебнике по каждой теме приведено достаточное количество примеров и задач. Рекомендуется решать примеры заданные в достаточном количестве в виде работы в группах.

Например задания У.1 или У.2 можно выполнить четырьмя группами. Всем группам задаются одинаковые примеры, например, уравнения У.1. Члены группы делят их между собой. Затем, каждая группа записывает на доске полученные ответы. Ответы проверяются.

Выявляются ошибки. Цель такой организации урока позволяет формированию организации работы учениками; творческих, познавательных навыков, таких как систематизирование и организация информации; социальных навыков работы в коллективе. Поэтому рекомендуется, чтобы в группах ученики самостоятельно организовали работу. При решении уравнений разложением на множители доводится до сведений, что в основном используются нижеследующие преобразования.

Вынесение общего множителя за скобки:	$6x^2 + 15x = 3x(2x + 5)$
Выделение полного квадрата из квадратного трёхчлена:	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
Применение формулы разности квадратов:	$4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$
Применение формулы суммы кубов:	$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
Применение формулы разности кубов:	$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
Разложение квадратного трёхчлена на множители:	$2x^2 - 5x - 12 = (2x + 3)(x - 4)$

Заданиями данными на рабочем листе N1 эти навыки проверяются и закрепляются.

У.6. Один из корней уравнения $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$, равен 3. Найдите a и решите уравнение.

Так как $x = 3$ корень уравнения, то

$$3^3 + a \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

$$9a + 27 - 15 + 6 = 0 \Rightarrow 9a + 18 = 0 \Rightarrow a = -2$$

До того как перейти к письменному решению уравнения можно сначала провести устное обсуждение. Как понимаете требование “Действительный корень” уравнения? Может ли быть корень этого уравнения иррациональным числом, например, таким числом как $3\sqrt{2}$?

Вызывающий ученик отвечает (ученик, который под наблюдением), (проверяется навык узнавания действительных чисел). А может ли быть под знаком корня отрицательное число? Выслушиваются мнения учеников. Проводятся лекции для случаев с четным и нечетным показателем степени корня.

Так как $a = -2$, то уравнение может быть записано следующим образом :

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2(x - 3) + x(x - 3) - 2(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2 ; x = 1$$

В некоторых рабочих листах степень тяжести увеличена и даны задания охватывающие когнитивные навыки. В рабочем листе N2 наряду с решением несколько сложных рациональных уравнений, требуется еще классифицировать корни во множестве действительных чисел.

У.7. Найдите нули функции :

Значения аргумента, при которых функция равна нулю, называются нулями функции $f(x) = 0$.

а) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 16x - 80 = 0$. Сгруппировав члены в левой части $x^2(x-5) + 16(x-5) = 0 \forall (x-5)(x^2+16) = 0 \Rightarrow x^2+16 > 0 \forall x-5 = 0$, получим $x = 5$.

Обсуждается вопрос “как легче проверять, что число 8 не является корнем уравнения $x^5 - 3x^4 + x = 15$ ” и делается вывод:

если уравнение с целыми коэффициентами имеет корни, то эти корни должны быть среди делителей свободного члена.

с) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$

$$x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0 \quad x^4 - x^3 + 2x^3 - 2x^2 - 9x^2 + 9x - 18x + 18 = 0$$

$$x^3(x-1) + 2x^2(x-1) - 9x(x-1) - 18(x-1) = 0 \quad (x-1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = 0$$

$$x-1 = 0 \quad x = 1$$

$$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 \quad x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \quad (x^2-9)(x+2) = 0$$

$x = -2 \quad x = 3 \quad x = -3$ Нулями данной функции являются: $-3; -2; 1; 3$.

Введение нового переменного. В этом способе в центре внимания остается в основном применение свойств степеней.

Могут быть заданы задания как показано ниже, для диагностического оценивания:

$$x^6 = (x^3)^{\blacksquare} \quad x^{\frac{1}{2}} = (x^{\blacksquare})^2 \quad x^8 = (x^{\blacksquare})^2 \quad x^4 = (x^{\blacksquare})^2$$

Возможность приведения уравнений высших степеней к квадратным можно определить рассмотрев соответствующий многочлен. В этом случае говорят, что данное уравнение типа квадратного уравнения.

1-я группа

а) $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$

б) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

с) $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$

д) $x^6 + 10x^3 - 8 = 0$

е) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

2-я группа

а) $(2x+5)^2 - (2x+5) - 6 = 0$

б) $2(s+1)^2 - 5(s+1) = 3$

с) $3(1-y)^2 + 5(1-y) + 2 = 0$

3-я группа

а) $x - 4\sqrt{x} = 0$

б) $x - 8\sqrt{x} = 0$

с) $x + \sqrt{x} = 20$

д) $t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$

е) $z^{1/2} - 4z^{1/4} + 4 = 0$

4-я группа

а) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = 12$

б) $3x^{-2} - 7x^{-1} - 6 = 0$

с) $2x^{-2} - 3x^{-1} - 4 = 0$

Нижеследующие уравнения - это уравнения приводящиеся к квадратным. Однако здесь есть многочлены содержащие степень с дробным показателем, иррациональные выражения. Цель заключается в том, что ученик рассматривая члены многочлена проверяет диагностические навыки применения свойств степеней. Ведется учетный опрос: **Какую замену нужно произвести, чтобы полученное уравнение с новой переменной было квадратным?**

У.10. с) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) = 5$

Сделав замену: $x^2 + 3x = t$, получим

$$(t + 1)(t - 3) = 5 \quad t^2 - 3t + t - 3 = 5$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \quad (t - 4)(t + 2) = 0 \quad t_1 = 4 \quad t_2 = -2$$

Подставив в замену, получим $x^2 + 3x = 4$ или же $x^2 + 3x = -2$. Отсюда

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (x + 4)(x - 1) = 0 \quad x = -4 \quad x = 1$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (x + 1)(x + 2) = 0 \quad x = -1 \quad x = -2$$

У.10. е) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) + x^2 - 3 = 0$

Упростив уравнение можно привести к биквадратному уравнению

$x^4 + x^2 - 12 = 0$ или же вынося множитель $x^2 - 3$ за скобку можно привести к условию равенства произведения нулю.

$$(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x^2 + 4 \neq 0$$

$$x^2 - 3 = 0, x^2 = 3, x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

Множество решений: $\{\pm\sqrt{3}\}$

У.11. Если число $\frac{1}{x}$ среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, тогда число x называется средним гармоническим чисел a и b .

а) Выразите это мнение в виде рационального равенства и найдите x .

б) Среднее гармоническое двух чисел равно 6, а разность 8-ми. Найдите эти числа.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) ; \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{ab}, \text{ а отсюда } x = \frac{2ab}{a+b}$$

Это равенство определяет среднее гармоническое чисел a и b .

б) $\frac{2ab}{a+b} = 6 \quad a - b = 8$ Отсюда получим:

$$a = b + 8 \text{ и } \frac{2(b+8) \cdot b}{b+8+b} = 6$$

$$2a(b+8) = 6 \cdot (2b+8) \Rightarrow b^2 + 8b = 6b + 24 \Rightarrow b^2 + 2b - 24 = 0$$

Корни уравнения $b_1 = -6, b_2 = 4$. По условию $a > 0, b > 0$ поэтому $b = -6$ не может быть. Значит, $b = 4$. Тогда $a = 12$. Ответ: Числа 4 и 12.

У.12. Учитывая эквивалентность рациональных выражений найдем коэффициент k .

$$\frac{x^2 + kx - 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x - 1}{x + 2}$$

Сначала найдем область определения рациональных выражений. Так как область определения рациональных выражений будут все действительные числа, кроме нулей знаменателя, то из уравнений $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x + 2 = 0$ получим $x = -2$, $x = -3$. А при этих значениях рациональные выражения не имеют смысла, поэтому поставив условие $x \neq -2$ и $x \neq -3$ приведем знаменатель дроби $\frac{x-1}{x+2}$ к виду $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$.

То есть, числитель и знаменатель дроби $\frac{x-1}{x+2}$ умножим на $(x+3)$. Тогда

$$\frac{x^2 + kx - 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$$

Для равенства дробей с одинаковыми знаменателями должны быть равны их числители: $x^2 + kx - 3 = x^2 + 2x - 3$. Отсюда $x^2 + kx - 3 - x^2 - 2x + 3 = 0$, $kx - 2x = 0$ $(k-2)x = 0$. Для того, чтобы последнее равенство было верным при всех допустимых значениях переменной, должно быть $k = 2$

У.13. а) По результатам 6-ти недель средний бал равен 48, то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 48$$

Здесь через a_k обозначены баллы собранные в k -ю неделю. Значит, в первые 6 недель количество собранных бал составило: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 288$:

$$x = \frac{a_7 + a_8}{2}$$

Тогда $a_7 + a_8 = 2x$. По условию средний бал последних 8-и недель:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{8} = 50$$

Отсюда: $\frac{288 + 2x}{8} = 50$ $2x = 400 - 288$, $2x = 112$, $x = 56$

Ответ: Если средний бал 2-х недель будет равен 56, то средний бал последних 8 недель будет 50.

Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Разлагает многочлены на множители.

1) Разложите на множители.

$$x^3 - 8 =$$

$$1000x^3 + 27 =$$

$$x^3 + 64 =$$

$$27x^3 + 216 =$$

$$216x^3 + 1 =$$

$$32x^3 - 4 =$$

2) Разложите на множители.

$$x^3 + x^2 + x + 1 =$$

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 =$$

$$3x^3 - 6x^2 + x - 2 =$$

$$10x^3 + 20x^2 + x + 2 =$$

$$2x^3 - 5x^2 + 18x - 45 =$$

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 =$$

3) Разложите на множители.

$$16x^4 - 1 =$$

$$81x^4 - 256 =$$

$$81 - 16x^4 =$$

$$4x^4 - 5x^2 - 9 =$$

$$x^4 + 3x^2 + 2 =$$

$$32x^6 - 2x^2 =$$

4) Разложите на множители.

$$-18x^3 + 2x^2 + 27x - 3 =$$

$$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 =$$

$$3x^4 - 24x =$$

Рабочий лист № 2

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Разлагает на множители многочлены высших степеней. Классифицирует корни во множестве действительных чисел.

1) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x = 0$

Рациональный корень:

Иррациональный корень:

2) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$

Рациональный корень:

Иррациональный корень:

3) $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$

Рациональный корень:

Иррациональный корень:

4) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0$

Рациональный корень:

Иррациональный корень:

5) $x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 9x + 9 = 0$

Рациональный корень:

Иррациональный корень:

6) $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$

Рациональный корень:

Иррациональный корень:

Урок 65, 66. Учебник стр. 89, 90.

Рациональные уравнения и решение задач. 2 часа

С решением рациональных уравнений ученики знакомы с 8-го класса. На урочных часах выделенных для этой темы запланировано закрепить эти навыки и приобрести определенные привычки, а также углубить навыки решения задач с помощью построения рационального уравнения.



- Решает рациональные уравнения и определяет посторонние корни;
- В уравнениях с двумя и более переменными находит требуемые переменные.
- Решает задачи, построив рациональные уравнения.



В данном уравнении определяя ОДЗ среди найденных решений определяет посторонние корни. Например, решая уравнение $\frac{x+5}{x-4} + 3 = \frac{2x+1}{x-4}$ для переменной находится значение $x = 4$. Однако рациональное выражение входящее в уравнение не имеет смысла при $x = 4$. Значит решением этого уравнения будет пустое множество, \emptyset .

Рекомендуется изучать интегративно навыки решения уравнений с двумя переменными с уроками физики. Дается задание.

Напишите 5 формул, выученные до сих пор из физики. Переменные в этих формулах, по очереди выразите одну через другую.



Решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.5. Работая вместе Рагим и Джамиль скосят всю траву с поля за 2 часа. Джамиль, работая один может выполнить эту работу на 3 часа быстрее, чем Рагим. За сколько часов смог бы скосить все поле каждый из них ?

Если Рагим скосит один все поле за x часов, то Джамиль выполнит эту работу за $x - 3$. Рагим за 1 час выполнит $\frac{1}{x}$ часть работы, а Джамиль $\frac{1}{x-3}$ часть работы.

Работая вместе за 1 час они выполнят: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3}$ часть работы.

Так как работая вместе они выполняют работу за 2 часа, то за 1 час они выполнят $\frac{1}{2}$ часть работы. Значит:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-3+x}{x(x-3)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(2x-3) = x(x-3) \Rightarrow 4x-6 = x^2-3x$$

$x^2 - 7x + 6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. $x = 1$ не удовлетворяет условию задачи. Значит, Рагим скосит поле за 6 часов, а Джамиль за 3 часа.

У.6. Бассейн может опорожняться одновременно двумя трубами разного диаметра за 3 часа. Труба с меньшим диаметром опорожняет бассейн на 8 часов позже, чем труба с большим диаметром. За сколько часов опорожнит бассейн каждая труба в отдельности?

Решение: Если труба с большим диаметром опорожнит бассейн за x часов, тогда труба с меньшим диаметром - за $x + 6$ часов. За 1 час трубы опорожняют соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+6}$ часть, работая вместе $\frac{1}{4}$ часть бассейна. Поэтому:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}. \text{ Отсюда } \frac{x+6+x}{x(x+6)} = \frac{1}{4}$$

$$4(2x+6) = x(x+6) \quad 8x+24 = x^2+6x, \quad x^2-2x-24=0$$

$$x_1=6, \quad x_2=-4. \quad x=-4 \text{ не соответствует условию задачи.}$$

Значит, большая труба опорожняет бассейн за 6 часов, а меньшая за $x+6=12$ часов.

У.9. Решение: Пусть на одной работе предлагает x манат за каждый час, а на другой $(x+2,25)$ манат. Тогда, чтобы заработать 900 манат, на первой работе Тюркан должна работать $\frac{900}{x}$ часов. По условию задачи, на втором рабочем месте она работая на 10 часов меньше, т.е. $(\frac{900}{x}-10)$ часов может заработать 980 манат. Задача сводится к решению уравнения:

$(\frac{900}{x}-10) \cdot (x+2,25) = 980$. Обе части этого уравнения умножим на x ($x \neq 0$): $(900-10x) \cdot (x+2,25) = 980x$. После тождественных преобразований получаем квадратное уравнение: $4x^2+41x-810=0$. Корнями этого уравнения являются $-20,25$ и 10 . Так как $-20,25$ не подходит условиям задачи, то $x=10$. И так на первой работе за 1 час предлагают 10 манат, а на другой 12,25 манат.

У.12. Из 20 проведенных игр команда выиграла 12. Сколько игр подряд должна выиграть команда в последующих играх, чтобы выигранные игры составляли 80 % всех игр?

Обозначим через x число подряд выигранных командой игр после 12-ой. Тогда число выигранных игр будет $12+x$, а число всех игр $20+x$. По условию задачи получим:

$$\frac{12+x}{20+x} = 0,8. \text{ Отсюда:}$$

$$0,8(20+x) = 12+x \Rightarrow 16+0,8x = 12+x \Rightarrow$$

$$0,2x = 4 \text{ и } x = \frac{4}{0,2} = 20$$

Значит, команда должна выиграть подряд 20 игр.

У.13. Если к первому из 2-х последовательных чисел прибавить 6, а из второго вычесть 2, то частное полученных чисел будет $\frac{6}{5}$. Найдите эти числа. Последовательные числа обозначим через x и $x+1$. Тогда согласно условию задачи:

$$\frac{x+6}{x+1-2} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{x+6}{x-1} = \frac{6}{5}$$

$$5(x+6) = 6(x-1) \Rightarrow 5x+30 = 6x-6 \Rightarrow x = 36$$

Значит данные последовательные числа 36 и 37.

В пособии даны рабочие листы по различным степеням сложности рациональных уравнений.

Рабочий лист № 3

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Решает рациональные уравнения и определяет посторонние корни.

Решите уравнения и определите посторонний корень.

$$1) \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} = \frac{3}{n^2}$$

$$2) \frac{1}{k^2} = \frac{1}{3k^2} + \frac{k+5}{3k^2}$$

$$3) \frac{6}{k} - \frac{1}{k^2+6k} = \frac{1}{k}$$

$$4) \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x^2+5x} = \frac{4}{x^2+5x}$$

$$5) \frac{1}{2v} = \frac{5v+15}{v^2-6v} - \frac{v+6}{2v^2-12v}$$

$$6) \frac{n^2+7n+6}{n^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6n^2}$$

$$7) 1 = \frac{2}{r^2} - \frac{1}{r}$$

$$8) \frac{x^2-3x-4}{x^3-x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$$

$$9) \frac{v-6}{2v^2+2v-4} + \frac{v}{2v-2} = \frac{1}{2}$$

Рабочий лист № 4

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Решает рациональные уравнения и определяет посторонние корни.

Решите уравнения и определите посторонний корень.

$$1) \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-8} = \frac{x-20}{x^2-10x+16}$$

$$2) \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x-4} = \frac{4x+12}{x^2-2x-8}$$

$$3) \frac{x+3}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2-4x-32} = \frac{2}{x^2-3x-40}$$

$$4) \frac{x+5}{x^2+5x-14} - \frac{4}{x^2+10x+21} = \frac{5}{x^2+x-6}$$

$$5) \frac{x-2}{x^2-x-20} - \frac{7}{x^2+x-12} = \frac{2}{x^2-8x+15}$$

! Внизу даны формулы, которые могут быть использованы для формирования навыков нахождения требуемого переменного. Задания такого типа выгодны для обеспечения внутри предметной и межпредметной интеграции.

Наименование	Формула	Решение
Потенциальная энергия	В формуле $E_p = mgh$, m -масса, g - ускорение свободного падения, h -высота. Найдите m .	$m = \frac{E_p}{gh}$
Полная поверхность конуса	$S_{yan} = \pi r(r + l)$, r -радиус основания конуса, l - образующая. Найдите l .	$l = \frac{S_{yan} - \pi r^2}{\pi r}$

Из формулы $v = v_0 + at$, найдите a .

Из формулы $h = \frac{1}{2}gt^2$ найдите g .

Из формулы $V = \pi r^2 h$ (объем цилиндра), найдите h .

Из формулы $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (кинетическая энергия) найдите v .

Из формулы $V = \frac{KT}{P}$ (объем газа) найдите T .

Из формулы $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (объем конуса) найдите r .

Из формулы $A = P + Prt$ (простой процентный раст) найдите P .

Из формулы $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (полная поверхность цилиндра) найдите h .

Из формулы $U = IR$ (напряжение) найдите I .

Из формулы $ax + by = c$ найдите y .

Из формулы $S = \frac{1}{2}h(a + b)$ (площадь трапеции) найдите b .

Из формулы $S_{yan} = 2(ac + cb)$ (боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда) найдите c .

Из формулы $F = \frac{9}{5}C + 32$ (зависимость между шкалами по Цельсию и Фаренгейту) найдите C .

Рабочий лист № 5

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• В равенствах с двумя и более переменными находит требуемую переменную.

Найдите требуемую переменную.

1) $L = \frac{1}{3}(act + \alpha) \Rightarrow a =$

2) $A = lv \Rightarrow v =$

3) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow h =$

4) $V = 2\pi r^2 h \Rightarrow h =$

5) $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow m =$

6) $L = \alpha(1 + ct) \Rightarrow c =$

7) $N = \alpha + b(2 - ct) \Rightarrow c =$

8) $s = \alpha + (n - 1)d \Rightarrow d =$

9) $N = C - rC \Rightarrow C =$

10) $x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow x =$

11) $\frac{x}{A} + \frac{2}{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow x =$

12) $\frac{2C}{A} + \frac{1}{B} = 2 \Rightarrow C =$

13) $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow a =$

14) $A = \frac{1}{A} + \frac{1}{C} \Rightarrow A =$

15) $L = \frac{\varepsilon}{R + K} \Rightarrow R =$

16) $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - z \Rightarrow x =$

Рабочий лист № 6

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• В равенствах с двумя и более переменными находит требуемую переменную.

Решение задач по нахождению переменной.

1. Высота параллелепипеда: Тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длина основания которого равна 8 см, а ширина 5 см. Найдите высоту тела, если объем равен 120 см^3 .

2. Высота цилиндра: Радиус цилиндра равен 4 см, а объем $144\pi \text{ см}^3$. Найдите его высоту.

3. Процентная ставка: Депозит в размере 3000 манат помещен на 3 года в банк по простой процентной ставке. Если в результате одного оборота прибыль составит 450 манат, то чему равна депозитная процентная ставка?

4. Длина прямоугольника: Периметр прямоугольника равна 60 см, а ширина 12 см. Найдите его длину.

5. Преобразование температуры: В один из дней в Нью-Йорке в температура воздуха была 77°F . Чему равна эта температура по Цельсию?

6. Длина сада: Сад имеет форму трапеции. Высота трапеции равна 16 м, меньшее основание 20 м, площадь 224 м^2 . Найдите длину другого основания.

7. Индекс массы тела вычисляется по формуле $I = \frac{m}{h^2}$. Здесь I показывает индекс массы, m - вес человека (кг), h - длина роста (м). а) Из формулы найдите m ; б) Чему равен индекс массы тела человека с весом 50 кг и ростом 1,64 м?

8. Ускорение - это величина показывающее изменение скорости. Ускорение вычисляется по формуле $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$. Здесь v_2 - показывает конечную скорость, v_1 - начальную скорость, а t - время. Начальная скорость атлета равна 2 м/сек. Если через 3 мин. скорость атлета будет равна 4 м/сек, то найдите его ускорение.

Урок 67-69. Учебник стр. 91-94.

Уравнение содержащие переменную под знаком модуля. 3 часа.

Выражение Уравнения содержащие переменную под знаком модуля” коротко будем называть “модульные уравнения”



- Решает модульные уравнения алгебраически;
- Решает модульные уравнения графически.

Ученики младших классов знакомы с решением простых модульных уравнений. На уроках предназначенных для этой темы планируется решить модульные уравнения с различной степенью сложности как алгебраически, так и графически.

1. Правильное понимание учеником понятия абсолютной величины. Проводится диагностическая оценка навыков представления абсолютной величины прописью и словами. Отметьте на числовой оси две точки: $+4$ и -4 . Сколько единиц составляет расстояние этих точек от нуля? Может ли расстояние быть отрицательным числом?

2. Ведутся обсуждения над записью общего вида абсолютной величины любого действительного числа: $|a| = \begin{cases} a & \text{если } a \geq 0 \\ -a & \text{если } a < 0 \end{cases}$

Понимание учениками обобщающей математической записи можно проверить на нижеследующих примерах.

а) Так как $3 > 0$, $|3| = 3$

б) Так как $-7 < 0$ $|-7| = -(-7) = 7$

А также, для диагностического оценивания, можно использовать задания на вычисления, как показано ниже:

$$|4| - |-6|$$

$$b) 5 - 3|2 - 7|$$

$$c) |-2(5 - 7) + 6|$$

3. Исследуются решения простых уравнений. Решение уравнения $|x| = 10$ покажите на числовой оси геометрическим изображением.



Сколько решений имеет каждое из уравнений:

$$|x| = 7$$

$$|x| = 0$$

$$|x| = -5$$

Существует ли модульное уравнение, которое не имеет ни одно решение?

Итак, при решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля рассматриваются два случая.

1-ый случай. Выражение стоящее под знаком модуля положительно, или равно нулю.

2-ой случай. Выражение стоящее под знаком модуля отрицательно.

По определению абсолютной величины числа:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{если } x \geq 0 \\ -x & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Модульные уравнения можно объединить в 3 группы.

Уравнения	Эквивалентные уравнения	Множество решений
$ x = k \ (k > 0)$	$x = k$ или $x = -k$	$\{k, -k\}$
$ x = 0$	$x = 0$	$\{0\}$
$ x = k \ (k < 0)$		\emptyset

Примеры данные в учебнике исследуются обсуждениями. Рекомендуется наряду с алгебраическим способом решения модульных уравнений, обратить внимание и на графический способ.

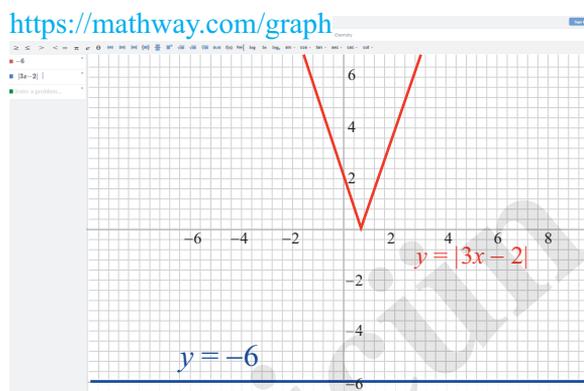
Графический способ решения уравнения легко притворить в жизнь с помощью графкалькулятора. Поэтому графический способ на самом деле может быть использован для проверки решения алгебраическим способом.

В учебнике были выбраны примеры разных степеней сложности и отличающиеся друг от друга по числу решений.

$$|3x - 2| + 11 = 5 \quad |x - 3| = 6 \quad |x^2 - 2x| = 3 \quad |2x - 4| = 1 - 3x$$

Модульные уравнения графическим способом можно решить с помощью: <https://mathway.com/graph> вэ <http://www.meta-calculator.com/online>, <https://www.desmos.com/calculator>.

Уравнение $|3x - 2| + 11 = 5$ перепишем в виде $|3x - 2| = -6$. Если ввести выражение вида $|3x - 2| = -6$, то графкалькулятор нарисует два графика не имеющих друг с другом не одной общей точки. Значит, решение этого уравнения-пустое множество.



$$|3x - 2| + 11 = 5$$

$$|3x - 2| = -6$$

уравнения

$$y = |3x - 2|$$

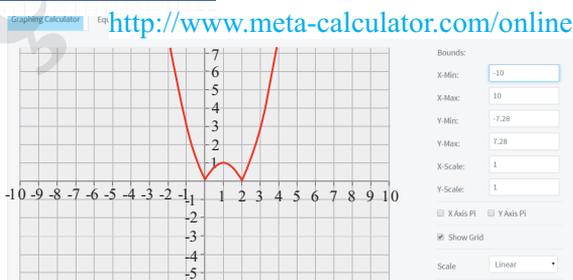
$$y = -6$$

$$|x^2 - 2x| = 3$$

уравнения

$$y = |x^2 - 2x|$$

$$y = 3$$

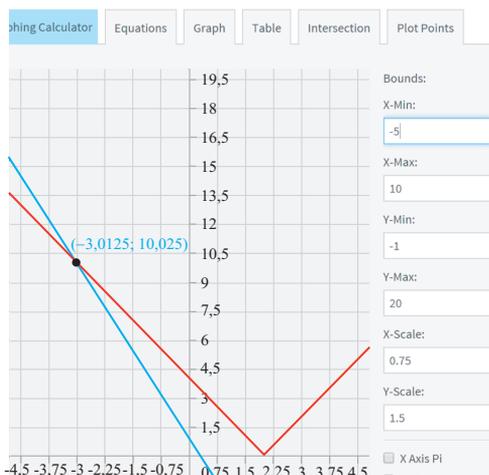


$$|2x - 4| = 1 - 3x$$

Функция введенная в графкалькулятор

$$y = |2x - 4|$$

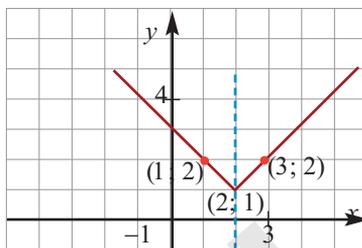
$$y = 1 - 3x$$



Графики можно распечатать из графкалькулятора или же для какой-либо презентации сохранить файлами в памяти.

Эти графики ученики могут построить с легкостью, как было показано на предыдущих уроках, параллельным переносом из графика функции $y = |x|$.

Также график функции $y = |x - 2| + 1$ можно построить по 3 точкам - точке вершины $(2; 1)$ и 2 точкам симметричным относительно оси симметрии $x=2$



У.9. Сабухи и Камран по заданным вопросам в интернете проверили свои IQ (интеллектуальные способности). Сабухи говорит, что его IQ отличается от IQ Камрана на 15 баллов. IQ Камрана было оценено на 110 баллов. Представьте баллы, показывающие уровень способности Сабухи в виде уравнения, содержащей переменную под знаком модуля.

Решение: Обозначим через x баллы, показывающие IQ Сабухи. Тогда, согласно условию задачи число баллов Сабухи должно быть или на 15 баллов больше, или же на 15 баллов меньше числа баллов Камрана. То есть должно быть: $x = 110 + 15$ или $x = 110 - 15$

А это означает решение модульного уравнения

$$|x - 110| = 15$$

У.14. Докажите, что если $|x - a| = |x - b|$, (Здесь $a < b$), то $x = \frac{a + b}{2}$ (то есть x средняя точка отрезка $[a; b]$)

Решение: Так как $|x - a| = |x - b|$, то $|x - a|^2 = |x - b|^2$ и отсюда $(x - a)^2 - (x - b)^2 = 0$. Тогда $(x - a - x + b) \cdot (x - a + x - b) = 0$. В произведении $(b - a) \cdot (2x - a - b) = 0$ множитель $b - a \neq 0$ (по условию $b > a$), а тогда $2x - a - b = 0$. Отсюда $2x = a + b$, $x = \frac{a + b}{2}$.

Рабочий лист № 10

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Решает модульные уравнения алгебраическим способом.

1) $|1 - 2z| + 6 = 9$

2) $4 - |1 - 2z| + 6 = 9$

3) $\frac{3}{4}|x| = 9$

4) $|u - 2| = -\frac{1}{2}$

5) $|x^2 - 16| = 0$

6) $|-2x| = 8$

7) $5 - |\frac{1}{2}x| = 3$

8) $|\frac{x}{2} + \frac{2}{5}| = 2$

9) $|2 - v| = -1$

10) $|x^2 - 2x| = 3$

11) $|2x - 2| = 9$

12) $|x^2 - 6| = 3$

13) $|7 + 3x| = x - 1$

Рабочий лист № 11

Имя _____ Фамилия _____

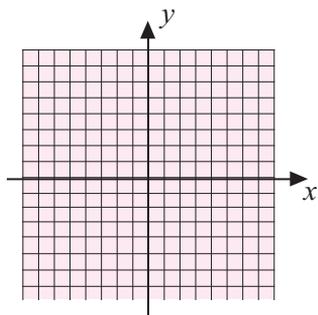
Число _____



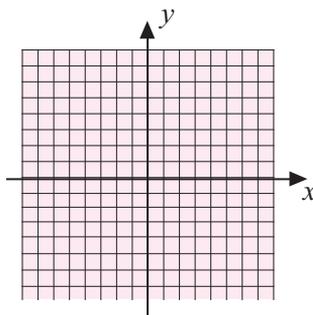
• Решает модульные уравнения алгебраическим способом.

Решите уравнения графическим способом.

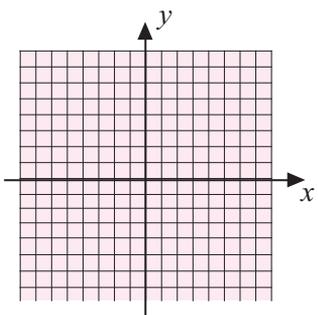
$$|x| = 3$$



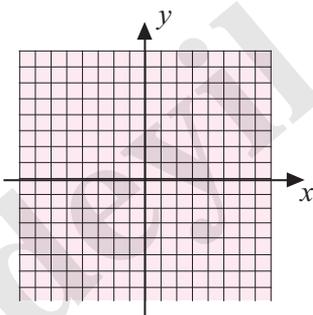
$$|x| = 5$$



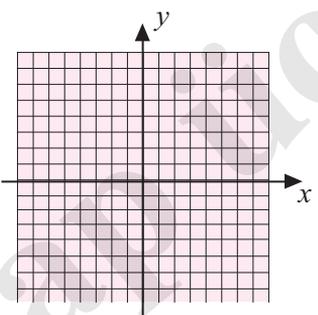
$$|x - 2| = \frac{7}{2}$$



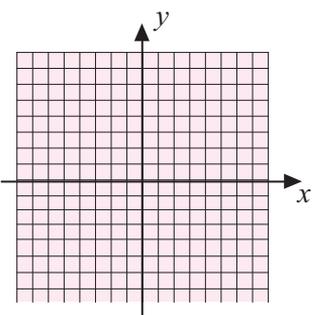
$$|x - 5| = 3$$



$$|x + 2| = 4$$



$$|x + 4| = 2$$



Урок 70-74. Учебник стр. 95-101. Система уравнений. 5 часа.



• Решает различными способами систему уравнений, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени.

- Графический способ
- Способ подстановки
- Почленное сложение (или вычитание)
- Число решений системы уравнений определяет по знаку дискриминанта.
- Решает разными способами систему уравнений, в которой оба уравнения второй степени.

Графический способ

Графический способ решения систем уравнений является одним из удобных способов. Применяя навыки построения квадратичной и линейной функции, ученик может показать наглядно число решений системы.

Повторяются знания о графике функции $y = kx + b$.

1) Как изменяется расположение графика в четвертях в зависимости от знака “ k ”?

2) Как изменится это расположение в зависимости от знака “ b ”?

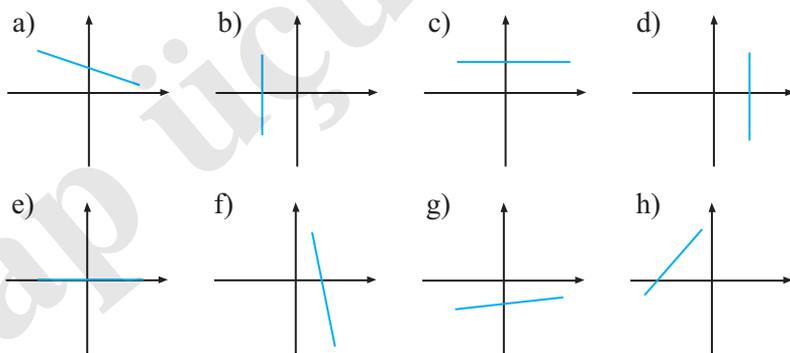
3) Как изменение “ k ” повлияет на положение графика относительно осей координат.

Рекомендуется заранее приготовить электронный плакат, который будет отражать в себе все обсуждения.

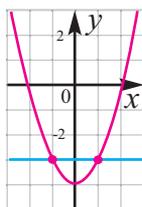
Рекомендуется использование графкалькуляторов, из интернет адресов, представленных на предыдущих уроках.

Ученики знакомы со способами сложения и подстановки решения систем. При применении этих алгебраических способов обращается внимание навыки эквивалентных преобразований.

По данным изображениям линейных функций определите равенство углового коэффициента отрицательному, положительному числу или нулю.

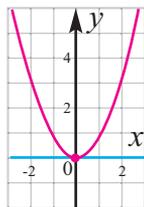


$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3 \end{cases}$$



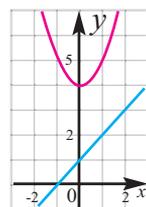
Прямая пересекает параболу в двух точках. Система имеет два решения

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$



Прямая является касательной параболы. Имеет одно решение.

$$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$$



Прямая не имеет общей точки с параболой. Нет решений.

У.12. а. Прямая $y = 4x + b$ и квадратичная функция $y = -3x^2 - 2x + 4$ не имеет общих точек. Какие значения может принять b ?

Так как в точке пересечения графиков значения функций равны то получим равенство

$$-3x^2 - 2x + 4 = 4x + b$$

$$-3x^2 - 6x + 4 - b = 0 \text{ или}$$

$$3x^2 + 6x + b - 4 = 0$$

Для того, чтобы точки пересечения не было дискриминант должен быть отрицательным:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (b - 4) < 0 \Rightarrow$$

$$36 - 12b + 48 < 0 \Rightarrow 12b > 84, b > 7$$

То есть, при любых значениях " b " взятых из промежутка $(7; +\infty)$ прямая $y = 4x + b$ и парабола $y = -3x^2 - x + 4$ не имеют общих точек.

У.13. Уравнение прямой имеет вид $y = kx - 5$. При каком значении k эта прямая будет касательной к графику квадратичной функции $y = 3x^2 + 4x - 2$?

Для того чтобы прямая $y = kx - 5$ была касательной к параболы

$y = 3x^2 + 4x - 2$, у них должна быть единственная общая точка. Поэтому

после приравнения y -ов, полученное уравнение относительно x должно иметь одно решение. То есть дискриминант должен быть равен нулю.

$$3x^2 + 4x - 2 = kx - 5 \Rightarrow$$

$$3x^2 + 4x - kx - 2 + 5 = 0$$

$$3x^2 + (4 - k)x + 3 = 0$$

$$D = (4 - k)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \quad (4 - k)^2 = 36$$

$$4 - k = \pm 6 \Rightarrow \quad k_1 = 4 - 6 = -2$$

$$k_2 = 4 + 6 = 10$$

Значит к графику данной квадратичной функции при двух значениях k , $k = -2$ и $k = 10$ можно провести две касательные: $y = -2x - 5$ и $y = 10x - 5$.

У.20. На посевной площади прямоугольной формы для подсолнуха фермер запланировал выделить участок для посадки перца. Для ограждения этого участка он использовал материал длиной 32 м и огородил площадь прямоугольной формы в 64 м^2 . Найдите размеры посевной площади перца.

Обозначим измерения посевной площади перца прямоугольной формы через x и y . Тогда

$$\begin{cases} 2x + 2y = 32 \\ x \cdot y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ x \cdot y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 16 - x \\ x(16 - x) = 64 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы

$$16 - x - x^2 = 64 \quad \text{или} \quad x^2 - 16x + 64 = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{Тогда } y = 16 - x = 16 - 8 = 8$$

Значит измерения посевной площади перца равны: $x = 8 \text{ м}$ и $y = 8 \text{ м}$.

У.21. Одно уравнение системы имеет вид: $y = x^2 - 6x - 10$. Другое уравнение, будучи линейным пересекает параболу в точках $x = 3$ и $x = 2$.

Напишите эту систему уравнений. Покажем уравнение прямой в виде $y = ax + b$. Тогда система уравнений будет:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x - 10 \\ y = ax + b \end{cases}$$

Чтобы определить a и b воспользуемся значениями $x = 2$ и $x = 3$. Из первого уравнения соответственно получим:

$$\text{при } x = 2, y = 2^2 - 6 \cdot 2 - 10 = -18$$

$$\text{при } x = 3, y = 3^2 - 6 \cdot 3 - 10 = -19$$

Учитывая эти значения во втором уравнении для нахождения a и b получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -18 = a \cdot 2 + b \\ -19 = a \cdot 3 + b \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = -18 \\ 3a + b = -19 \end{cases}$$

Почленно вычитая получим $a = -1$. А отсюда $2 \cdot (-1) + b = -18 \Rightarrow b = -16$. То есть искомая, система уравнений такова:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x - 10 \\ y = -x - 16 \end{cases}$$

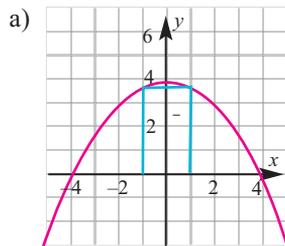
У. 23. а) Две вершины прямоугольника данные на рисунке лежат на оси абсцисс, а две другие на параболе $y = 4 - \frac{x^2}{4}$. Найдите площадь прямоугольника.

Как видно из рисунка 2 вершины прямоугольника в точках $(1; 0)$ и $(-1; 0)$. Расстояние между этими точками равно двум единицам. Значит, одно измерение прямоугольника равно 2. Для того чтобы найти второе измерение прямоугольника, в уравнение параболы записав $x = 1$ или $x = -1$, найдем y , то есть второе измерение прямоугольника:

$$y = 4 - \frac{14}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Площадь прямоугольника

$$S = x \cdot y = 2 \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ кв. ед.}$$



Рабочий лист № 12

Имя _____ Фамилия _____

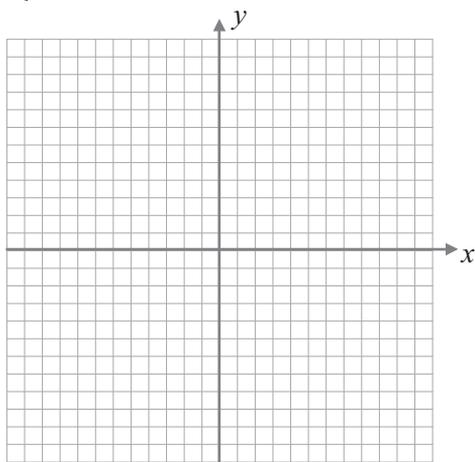
Число _____



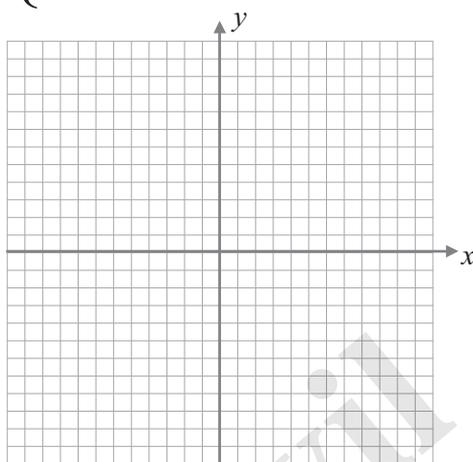
• Решает систему графическим способом.

Решите системы уравнений графическим способом.

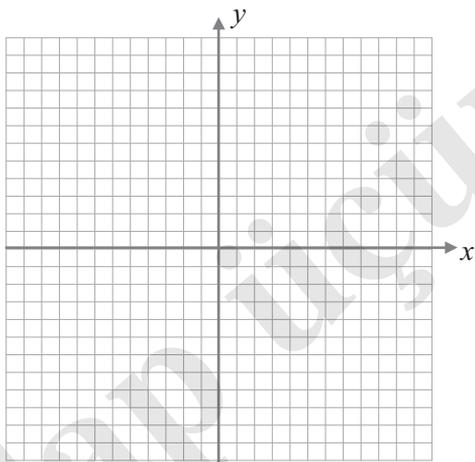
$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$



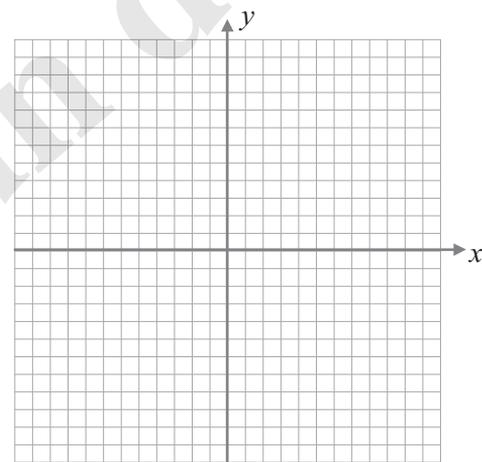
$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ 2x + x = 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 1 \\ y + 2x = 6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y + 2 = -6x \end{cases}$$



Урок 75-78. Учебник стр. 102-105.

Решение задач составлением системы уравнений. Обобщающие задания. 4 часа.

У.1. Обозначим через x число студентов, а число других зрителей через y : Согласно условию задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 560 \\ 4,2x + 6y = 2586 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6y = 3360 \\ 4,2x + 6y = 2586 \end{cases}$$

Вычитая почленно получим: $1,8x = 774$ и $x = 430$

На спектакле участвовало 430 студентов.

Финансовые задачи

У.3. Сумму вложенную в банк с 4,5 % обозначим через x ; а с 6% - через y . По условию задачи получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y = 3x \\ 1,045x + 1,06y = 4225 \end{cases}$$

Применив способ подстановки, находим: $x = 1000$, $y = 3000$

Задачи на смеси

У.6. Количество ниток из чистого шелка обозначим через x кг, а ниток содержащих 85% шелка через y кг, тогда $x + y = 120$. А для ниток с 96 % шелком получим

$$\frac{x + 0,85y}{x + y} = 0,96.$$

Таким образом для нахождения x и y получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x + 0,85y = 0,96(x + y) \end{cases} \Rightarrow 0,04x = 0,11y, x = \frac{11}{4}y$$

Если в первом уравнении принять во внимание значение x , то получим

$$\frac{15}{4}y = 120 \Rightarrow y = \frac{4 \cdot 120}{15} = 32, \quad x = \frac{11}{4} \cdot 32 = 88$$

Значит нужно взять 88 кг ниток чистого шелка и 32 кг ниток содержащих 85 % шелка.

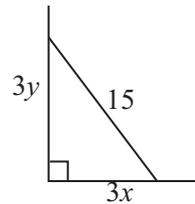
У.10. Пусть первой трубой бак наполняется за x минут, а второй наполняется за y минут. Согласно условию получим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{12} = \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25 \end{cases}$$

Отсюда
$$\begin{cases} \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{12} \\ x+y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{50}{xy} = \frac{1}{12} \\ x+y=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=600 \\ x+y=50 \end{cases}$$

Так как сумма положительных чисел 20 и 30 равна 50, а произведение равна 600, то получается, что первая труба наполняет бак за 20 минут, а вторая за 30 минут.

У.11. (стр. 105) Скорость первого тела, начинающего двигаться из вершины прямого угла обозначим через x , а скорость второго через y . Так как расстояние пройденное первым телом за 3 секунды, равно расстоянию, пройденному вторым телом за 4 секунды, то можно получить следующую систему уравнений:



$$\begin{cases} (3x)^2 + (3y)^2 = 15^2 \\ 3x = 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 = 225 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16y^2 + 9y^2 = 225, \\ 25y^2 = 225 \end{cases}$$

$$y = 9, y = 3, 3x = 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 4$$

Скорость первого тела 4м/сек, а второго 3м/сек.

У.14. (стр. 105) а) При каком значении a система уравнений
$$\begin{cases} y + 2x = a \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Решение: Почленно вычитая уравнения получим $(y + 2x) - (y - x^2) = a - 1$.

Отсюда, если дискриминант квадратного уравнения будет равен нулю, то данная система уравнений будет иметь единственное решение. Так как:

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - a) = 4 - 4 + 4a = 4a$ получим что при $a = 0$ данная система уравнений имеет единственное решение. Действительно, при $a = 0$ получается система уравнений:

$$\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$

Из 1-го уравнения получили $y = -2x$ и подставив во 2-е уравнение, получим

$$-2x - x^2 = 1, x^2 + 2x + 1 = 0, (x + 1)^2 = 0, x = -1. \text{ Тогда}$$

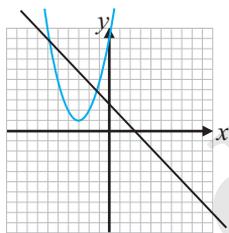
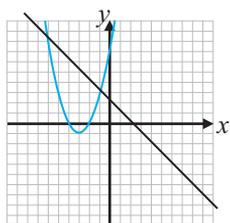
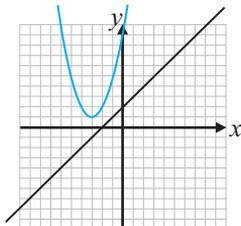
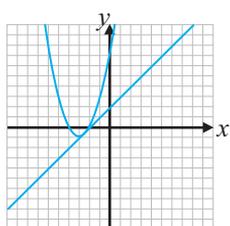
$$y = -2 \cdot (-1) = 2. \text{ Решением системы будет } (-1; 2).$$

Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 3.1

№	Критерии	Замечания
1.	Решает уравнения высших степеней разными способами.	
2.	Решает рациональные уравнения	
3.	Решает уравнения с переменными под знаком модуля	
4.	Решает разными способами системы уравнений, состоящие из уравнений первой и второй степени.	
5.	Решает задачи составлением уравнений и систем уравнений.	

Урок 79. Задания суммативного оценивания по разделу 3.1

1. По данным графикам напишите систему уравнений.



2. В уравнении $y = x^2 - 4x$ найдите y , если $x = 4$.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

3. Найдите сумму абсцисс точек пересечения графиков функций $y + 2x = x^2$ и $y = 4$.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

4. Найдите число точек пересечения графиков функций $y = 2x + x^2$ и $y = x^2$.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

5. Решите уравнение:

$$||x - 1| + 5| = 8$$

A) $-2 ; 5$

B) $-3 ; 6$

C) $-2 ; 4$

D) $4 ; 5$

6. Найдите произведение корней уравнения: $\frac{x-1}{x-2} = 5 - x$

7. Найдите сумму действительных корней уравнения

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 8) = 24 .$$

8. Решите уравнение: $\sqrt{(x-2)^2} = x$.

9. Решите уравнение: $(x-4) \cdot \sqrt{4-x^2} = 0$

10. Установите соответствие для уравнения $x^2 - 8|x| + 12 = 0$

1) при $x < 0$;

A) Корни равны -2 и -6

2) при $x > 0$;

B) Получается неверное числовое равенство.

3) при $x = 0$;

C) Сумма корней равна 8

D) Корни равны 2 и 6 .

11. Из системы уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3,6 \\ xy = 2 \end{cases}$ найдите разность: $x - y$.

12. Из системы уравнений $\begin{cases} \frac{1}{3x} - \frac{1}{2y} = 4 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$ найдите произведение $x \cdot y$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-5)(y-3) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

14. Из системы уравнений $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 5 \\ y + \frac{1}{x} = 10 \end{cases}$ найдите отношение $\frac{x}{y}$.

15. Установите соответствие:

1) $\begin{cases} x^3 + 3x^2y = 0 \\ y^3 + 3xy^2 = 21 \end{cases}$ A) $x + y = 3$

2) $\begin{cases} x^2 + xy = 4 \\ y^2 + xy = 12 \end{cases}$ B) $|x + y| = 4$

3) $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ y^2 - xy = 7 \end{cases}$ C) $|x - y| = 3$

D) $x - y = 2$

16. Шагая по движущемуся вниз эскалатору весь путь пассажир спускается в метро за 90 секунд, а стоя за 171 секунду. За сколько секунд он спустится вниз в метро по недвигающемуся эскалатору?

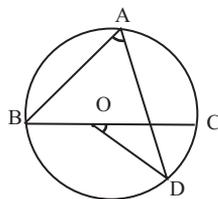
Урок 80. Полугодовое суммативное оценивание.

1. Число $\sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{3}}$ покажите в виде степени с рациональным показателем.

2. Сократите дробь $\frac{x - 3x^{\frac{1}{2}}}{x - 9}$.

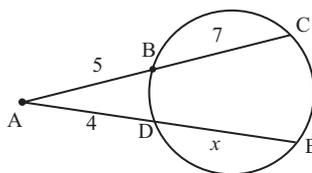
3. O - центр окружности. Если $\angle DOC = 20^\circ$, найдите $\angle A$.

A) 80° B) 70° C) 60° D) 45°



4. Если $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AD = 4$ см и $DE = x$, найдите длину отрезка DE.

A) 11 см B) 6 см C) 5 см D) 12 см

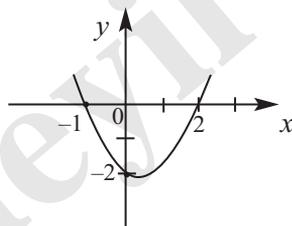


5. Если парабола $y = x^2 + bx - 2$ проходит через точку A (2; 0), найдите b .

A) -1 B) -2 C) 2 D) 1

6. Какое уравнение является уравнением параболы данной на рисунке?

A) $y = (x - 1)^2 - 2$ B) $y = (x - 2)(x + 1)$
C) $y = (x + 1)^2 - 3$ D) $y = 2(x + 1)^2 - 1$

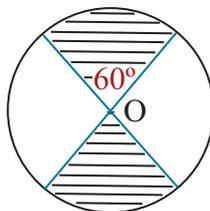


7. В какой точке парабола $y = 2(x + 1)^2 - 3$ пересекает ось Oy ?

A) (0; 1) B) (0; -1) C) (0; 2) D) (0; -2)

8. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 7$.

9. O - центр круга. Какую часть круга составляет заштрихованная часть?



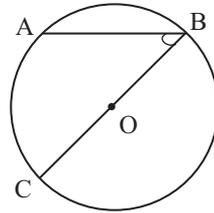
10. В системе уравнений $\begin{cases} x + xy + y = 9 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$ найдите значение выражения $x^2 + y^2$.

11. Найдите сумму корней уравнения: $\sqrt{(x-3)^2} - 1 = 2$

12. Из системы уравнений $\begin{cases} (x-6)(y+2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ найдите произведение $x \cdot y$.

13. В окружности радиуса r , и центром O $\angle BAC = 45^\circ$. Найдите длину дуги BC .

A) $\frac{\pi r}{4}$ B) $\frac{\pi r}{3}$ C) πr D) $\frac{\pi r}{2}$

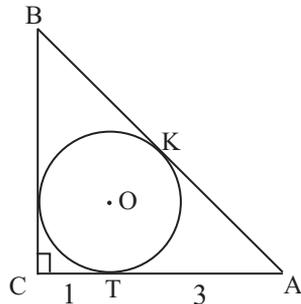


14. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих уравнению: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$.

15. При каком значении “ b ” уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$ имеет хотя бы один корень?

16. В треугольнике $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $CT = 1$, $AK = 3$. Найдите периметр $\triangle ABC$.

A) 8 B) 12 C) 10 D) 14





Стандарты содержания

3.1.1. Знает понятия ломанной и многоугольника, изображает правильный многоугольник.

3.1.4. Применяет свойства четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около него при решении задач.



Формирование учебных навыков

- Называет многоугольник по числу сторон, определяет вогнутость или выпуклость;
- Решает задачи на сумму внутренних и внешних углов многоугольника;
- изображает правильный многоугольник, решает задачи на нахождение периметра и площади;
- Знает свойства многоугольников описанных и вписанных в окружность, применяет их при решении задач.



Математический словарь

- Многоугольник
- Выпуклый многоугольник
- Вогнутый многоугольник
- Правильный многоугольник
- Неправильный многоугольник
- Площадь правильного многоугольника
- Внутренний угол многоугольника
- Внешний угол многоугольника
- Окружность вписанная в правильный многоугольник
- Окружность описанная около правильного многоугольника
- Радиус окружности описанной около правильного многоугольника
- Радиус окружности вписанной в правильный многоугольник
- Центр правильного многоугольника
- Апофема правильного многоугольника



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Интернет адреса:

www.mathopenref.com/polygonconcave.html

Урок 81. Учебник стр. 106, 107. Многоугольники

Выпуклые и вогнутые многоугольники

Рекомендуется заранее приготовить плакат отображающий различия выпуклого и вогнутого многоугольника.

Для того, чтобы ясно представить и сравнить выпуклые и вогнутые многоугольники рекомендуется использовать интернет адрес www.mathopenref.com/polygonconcave.html.

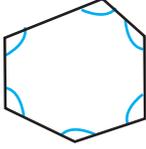
Обращается внимание на осознании каждым учеником понятий замкнутая фигура и незамкнутая фигура, многоугольники, не являющейся многоугольником плоская фигура, смежные стороны, соседние вершины, диагонали, внутренний и внешний угол

Эти понятия можно формировать заданиями из учебника типа У1, У2, У3, У4, У5

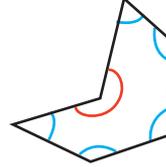
Можно вспомнить о конгруэнтности, провести опрос. Рекомендуется вспомнить конгруэнтность треугольников. Эти знания пригодятся ученикам при решении задач. Рекомендуется нарисовать в тетради рисунки отражающие различия выпуклого и вогнутого многоугольника. Внимание учеников должно быть направлено на проверку признаков пяти, шести, семи и т.д. многоугольников.

Образец плаката

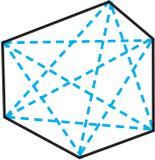
1. Каждый внутренний угол выпуклого многоугольника меньше 180°



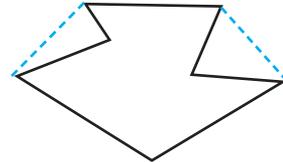
1. Хотя бы один из внутренних углов вогнутого многоугольника больше 180°



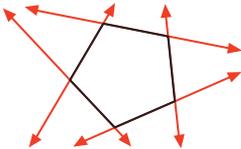
2. Все диагонали выпуклого многоугольника лежат внутри многоугольника



2. Вогнутый многоугольник имеет хотя бы одну “внешнюю” диагональ.



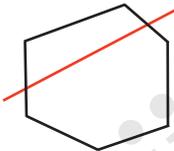
3. Выпуклый многоугольник целиком лежит в одной полуплоскости от прямой, содержащей любую его сторону.



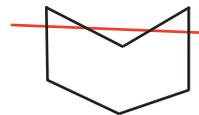
3. Продолжение хотя бы одной стороны вогнутого многоугольника проходит через внутреннюю область.



4. Любая прямая может пересечь максимум две стороны выпуклого многоугольника.



4. В зависимости от того через какую часть многоугольника проходит прямая, она может пересечь несколько сторон многоугольника. Прямая изображенная на рисунке, пересекает 4 стороны многоугольника.



Урок 82, 83. Учебник стр.108-109. Внутренние и внешние углы многоугольника. 2 часа.



- Применяет теорему о внутренних углах многоугольника при решении задач.
- Применяет теорему о внешних углах многоугольника при решении задач;
- Решает задачи на нахождение внутреннего угла при данной вершине правильного многоугольника ;
- Решает задачи на нахождение внешнего угла при данной вершине правильного многоугольника.

Объясняет теоремы о сумме внутренних и внешних углов многоугольника и о градусной мере угла при каждой вершине многоугольника. Выполняются задания данные в учебнике. По мере освоения каждым учеником определенных навыков - наблюдением ведется формативное оценивание. Рекомендуется воспользоваться заданиями данными в учебнике, рабочими листами данными в дополнительном пособии. Выполняются исследовательские задания данные в учебнике с увеличением сторон правильного многоугольника, наблюдается увеличение градусной меры каждого внутреннего угла, а градусная мера внешнего угла наоборот уменьшается. Чтобы убедиться поняли-ли ученики эту зависимость можно задать вопросы. Например, Кенуль говорит, что каждый внутренний угол 12-ти угольника равен 170° , 18-ти угольника - 130° . Можете ли вы объяснить ошибку Кенуль не проводя никаких вычислений?

Рекомендуется решение нижеследующей задачи.



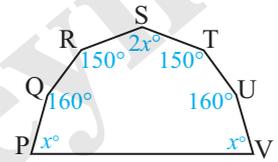
Покажите, что не существует правильного многоугольника, с внутренним углом равным 123° . Задание выполняется по формуле градусной меры угла при одной вершине правильного многоугольника:

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 123^\circ; 180^\circ n - 360^\circ = 123^\circ n; 57^\circ n = 360^\circ; n = 6,3$$

Так как число сторон не целое число, то не существует правильного многоугольника с внутренним углом 123° .

У.17 а) Можно ли сказать, что этот многоугольник правильный. Выслушивается мнения. В правильном многоугольнике меры всех углов одинаковые. А в этом многоугольнике внутренние углы разной величины. Задачу можно решить применив теорему о сумме внутренних углов многоугольника. Сумма внутренних углов: $180^\circ \cdot (7 - 2) = 900^\circ$

$$x + 2 \cdot 160^\circ + 2 \cdot 150^\circ + 2x + x = 900^\circ \quad 4x + 620^\circ = 900^\circ \quad 4x = 280^\circ \quad x = 70^\circ$$



У.17 б) Задачу можно решить двумя способами.

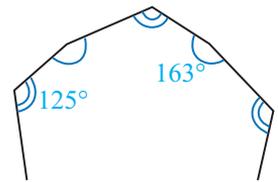
1) Как требуется в условии задачи применив сумму внешних углов многоугольника: Сумма внешних углов многоугольника равна 360° . Внешние углы соответствующие данным внутренним углам равны 55° и 17° . Если учесть,

что углы 125° и 163° чередуются продолжаясь меняться один на другой - становится ясно, что число сторон и углов многоугольника - четное: $n = 2k$, $k = \frac{n}{2}$, то есть в k имеется k штук по 125° , и в k штук по 163° . Значит:

$\frac{n}{2} \cdot 55^\circ + \frac{n}{2} \cdot 17^\circ = 360^\circ$; $72^\circ \cdot n = 360^\circ \cdot 2$; $n = 10$. В этом многоугольнике 5 углов 125° и 5 углов по 163° . **Ответ:** Многоугольник имеет 10 сторон.

2) Воспользуясь теоремой о сумме внутренних углов многоугольника:

$$\frac{n}{2} \cdot 125^\circ + \frac{n}{2} \cdot 163^\circ = 180^\circ(n - 2). \text{ Решив это уравнение получим } n = 10.$$



Рабочий лист № 1



• Решает задачи на вычисление внутренних и внешних углов правильного многоугольника.

Имя _____ Фамилия _____

Число _____

Сумма внутренних углов правильного многоугольника

Многоугольник	Число сторон	Число диагоналей исходящих из одной вершины	Число внутренних углов	Сумма внутренних углов	Величина одного внутреннего угла (в правильном многоугольнике)	Величина одного внешнего угла (в правильном многоугольнике)	Сумма внешних углов
Треугольник 							
Прямоугольник 							
Пятиугольник 							
Шестиугольник 							
Семиугольник 							
Восьмиугольник 							
Девятиугольник 							
Десятиугольник 							
n угольник							

Рабочий лист № 2

Имя _____ Фамилия _____

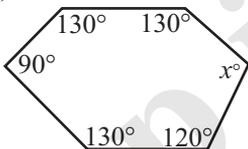
Число _____



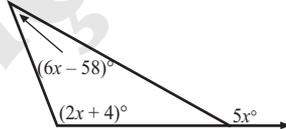
• Вычисляет внутренние и внешние углы выпуклого многоугольника.

1. Из нижеследующих суждений укажите верные и неверные.
 - а) Если число сторон многоугольника увеличить в два раза, градусная мера внешнего угла уменьшится в два раза.
 - б) Внешний угол восьмиугольника больше внешнего угла четырехугольника.
 - с) Если соединить последовательно середины сторон многоугольника, имеющего разные длины сторон, то получится многоугольник с конгруэнтными сторонами.
 - д) Четырехугольник с конгруэнтными сторонами-правильный четырехугольник.
 - е) Четырехугольник с конгруэнтными углами - правильный четырехугольник.
 - ф) Треугольник с конгруэнтными сторонами-правильный треугольник.
2. По данным условиям найдите, сколько сторон имеет правильный многоугольник:
 - 1) Сумма внутренних углов которого равен 1980°
 - 2) Каждый внешний угол которого равен 15°
 - 3) Каждый внутренний угол которого равен 108°
 - 4) Сумма внутренних углов которого равен 3600°
 - 5) Каждый внешний угол которого равен 24°
 - 6) Каждый внутренний угол которого равен 135°
 - 7) Каждый внутренний угол которого равен 160°
3. По данным на рисунке найдите неизвестные углы многоугольника.

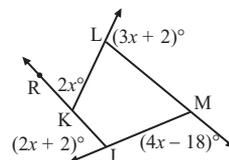
а)



б)



с)



Урок 84-88. Учебник стр. 110-115. Вписанные и описанные многоугольники. 5 часа



• Изображает вписанные и описанные многоугольники ;

- При решении задач применяет теорему об определении центра окружности вписанной в треугольник и описанной около него;
- Центр вписанной и описанной окружностей выражает через стороны треугольника;
- Знает свойства четырехугольников вписанных в окружность и описанных около него и применяет их при решении задач;
- Радиус вписанной и описанной окружности выражает через стороны четырехугольника.



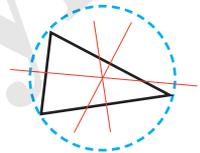
Необходимые первичные знания

- Вспоминет знания о высотах, биссектрисах, медианах, средних перпендикулярах и рисует соответствующие изображения;
- Виды и свойства параллелограмма;
- Свойства касательной к окружности.

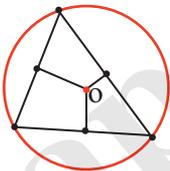
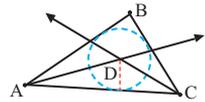
Объясняется определение описанного и вписанного многоугольника и ученики рисуют в тетрадах соответствующие изображения.

! 1. Исследуя теоремы о центре вписанной и описанной окружности, выясняется, что в любой треугольник можно вписать и описать окружность.

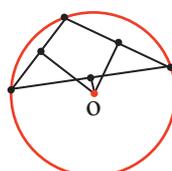
2. Чтобы описать около треугольника окружность сначала рисуются серединные перпендикуляры. Принимая за центр окружности точку пересечения серединных перпендикуляров, а любую вершину треугольника - за конец радиуса рисуется окружность. Эта окружность будет описанной около треугольника. Центр окружности может быть внутри треугольника и может лежать на стороне треугольника.



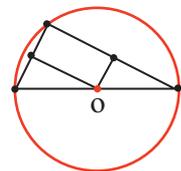
3. Чтобы в треугольник вписать окружность сначала нужно нарисовать биссектрисы его углов. Приняв за центр точку пересечения биссектрис из этой точки к любой стороне проведите высоту: Проведённую высоту приняв за радиус рисуется окружность. Эта окружность будет описанной в данный треугольник.



Остроугольный треугольник



Тупоугольный треугольник



Прямоугольный треугольник

“Если одна из сторон вписанного в окружность треугольника проходит через центр, значит этот треугольник прямоугольный”. Выполните задания У.3 и У.4 на применение этого свойства.

У.4 Обращается внимание на создание связи между данными в задаче элементами треугольника и элементами окружности.

$\triangle ABC$ прямоугольный
треугольник
 $BC = 2 AM = 20 \text{ см}$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

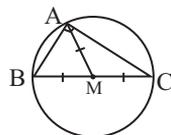
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

Сторона лежит на диаметре

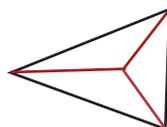
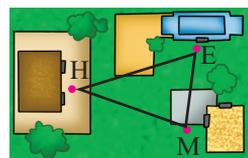
Медиана треугольника является также и радиусом.

По теореме Пифагора

По формуле площади треугольника



У.6. Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной окружности. А точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника является центром описанной окружности. Ученики измеряя план линейкой, перечерчивают его в тетрадь в определенном масштабе. Новый офис здания будет в точке пересечения серединных перпендикуляров треугольника. Ученики производя измерения, обращают внимание на навыки построения треугольника по трем сторонам.



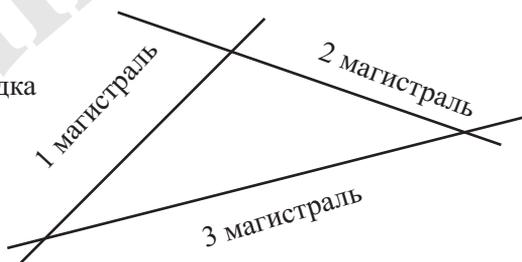
! Решая задачи относящиеся к реальным жизненным ситуациям обращается внимание на то, в каком случае решение требует нахождения центра вписанной окружности, а в каком описанной окружности.

Ученикам представляют два задания

1) Планируется соорудить столовую в парке таким образом, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от площадок для игры. Отметьте в плане место столовой.

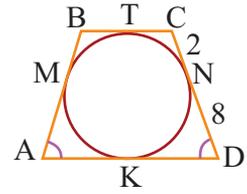


2) Планируется построить торговый центр расположенный на одинаковом расстоянии от трех магистральных дорог. Отметьте место торгового центра на плане.



Обоснуйте свои мнения геометрическими свойствами.

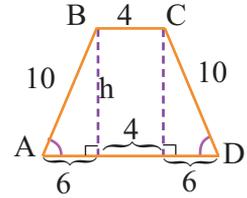
У.14. Решение: а) По данным трапеция ABCD равнобокая: $AB = CD = 10$. Отрезки касательных, проведенных из одной точки конгруэнтны: $DK = DN = 8$. $CT = CN = 2$, Тогда $BC = 4$, $AD = 16$ и периметр трапеции $P = 4 + 16 + 10 + 10 = 40$.



Проведем высоту трапеции как показано на рисунке. По теореме Пифагора имеем: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту:

$$S = \frac{16+4}{2} \cdot 8 = 80$$



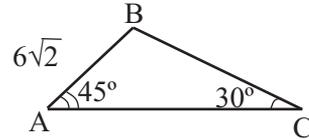
У.19 $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$, $\alpha = 30^\circ$, $a = 8 \Rightarrow 2R = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$, $R = 8$

У.20. Данный $\triangle ABC$

$\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, $AB = 6\sqrt{2}$

Найти. 1) Радиус описанной окружности.

2) Длина стороны BC.

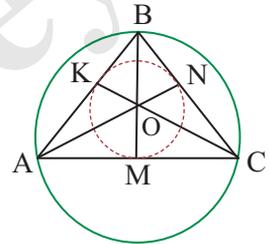


Решение: 1) $d =$ По формуле $\frac{a}{\sin \alpha}$, $d = \frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = 12\sqrt{2}$. Отсюда $R = \frac{d}{2} = 6\sqrt{2}$

2) С другой стороны, так как $d = \frac{BC}{\sin \angle A}$, получим: $6\sqrt{2} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$

$$BC = 6\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

У.24. Для решения этого задания рекомендуется дать информацию о том, что центры вписанной и описанной окружностей около равностороннего треугольника совпадают и обосновать это. Так как в равностороннем треугольнике медиана является и высотой и биссектрисой, то центры вписанной и описанной окружностей совпадают с точкой пересечения медиан.



По свойству медиан отмечается, что $BO : ON = 2 : 1$.

$$r = OM = \frac{1}{3} \cdot BM$$

$$R = OB = \frac{2}{3} \cdot BM$$

В результате, до сведения учеников доводится, что радиус описанной около равностороннего треугольника окружности в 2 раза больше радиуса окружности вписанного в этот треугольник.

Обобщаются теоремы, определения и свойства используемые учениками при решении.

1. Центр окружности вписанный в угол находится на биссектрисе угла. Это основывается по теорему “Любая точка, взятая на биссектрисе угла находится на одинаковом расстоянии от его сторон”.
2. Биссектриса делит противоположающую сторону треугольника на отрезки пропорциональные двум другим сторонам.
3. Признаки подобия прямоугольных треугольников.

У.25. а) Центры окружностей лежат на биссектрисе острого угла прямоугольного треугольника. Радиус окружности вписанной в прямоугольный треугольник.

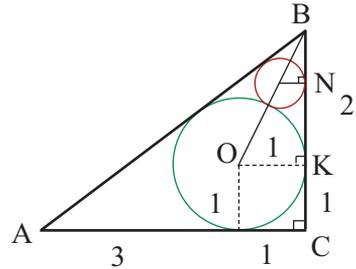
$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{3 + 4 - 5}{2} = 1$$

$$OK = KC = 1 \quad BK = 3 - 1 = 2$$

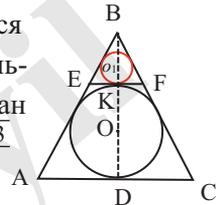
Так как $\triangle BOK \sim \triangle BMN$ и $MN = x$, $BN = 2x$. Тогда $BM = x\sqrt{5}$, $BO = BM + MO = x\sqrt{5} + x + 1$. С другой стороны из $\triangle BOK$ по теореме Пифагора

$$BO = \sqrt{5} \cdot x\sqrt{5} + x + 1 = \sqrt{5}$$

$$x(\sqrt{5} + 1) = \sqrt{5} - 1 \quad x = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{5 - 1} = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$



У.25. б) Центром окружности вписанного в треугольник является точка пересечения биссектрис углов. В равностороннем треугольнике биссектриса является также и медианой. По свойству медиан треугольника $BO : OD = 2 : 1$, поэтому $r = OD = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} h = \frac{\sqrt{3}}{6}$



Если EF - касательная к большей и к меньшей окружностей, то $\triangle ABC \sim \triangle EFB$. Так как $BK = KO = OD = r$, то $BK = \frac{\sqrt{3}}{6}$

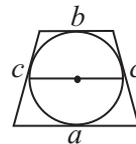
Меньшая окружность показанная в условии - это окружность вписанная в $\triangle EFB$ и так как в равностороннем треугольнике биссектриса является также и медианой, то по свойству медиан $r_1 = O_1K = \frac{1}{3} BK = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

У.26 Средняя линия: $\frac{a + b}{2}$

Равнобедренная трапеция описанная около окружности:

$$c + c = a + b \Rightarrow 2c = a + b$$

$$c = \frac{a + b}{2}$$



То есть, средняя линия равна боковой стороне

Рабочий лист № 3

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Знает свойство четырехугольников вписанных в окружность и описанных около окружности и применяет в решении задач.

1) **Теорема.** Если в окружность вписан параллелограмм, то это прямоугольник.

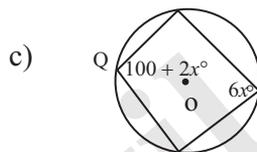
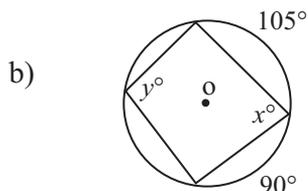
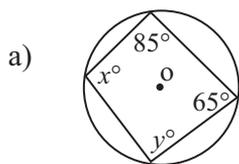
Дано: AC и DB - диаметры.

O - центр окружности.

OA, OB, OD, OC - радиусы окружностей.



2) Найдите неизвестные углы.



3) **Дано:** $\sphericalangle AD = 60^\circ$, $BC \parallel EF$

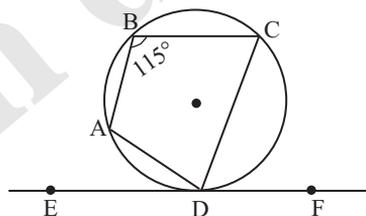
EF - касательная.

Найдите: $\sphericalangle ADC =$

$\sphericalangle CDF =$

$\sphericalangle C =$

$\sphericalangle A =$



Рабочий лист № 4

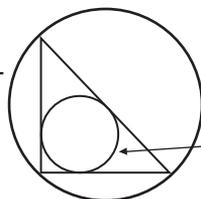
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Радиусы окружностей вписанных в треугольник и описанных около треугольника выражаются сторонами треугольника.

На рисунке в прямоугольный треугольник вписана окружность и описана около нее



1) Напишите формулу зависимости сторон a , b , c прямоугольного треугольника (c гипотенуза) от радиусов вписанных окружностей.

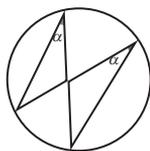
.....

2) Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей, зная что стороны треугольника равны 5, 12, 13 единицам.

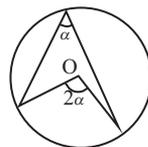
.....

Напишите какими из указанных ниже теорем вы пользовались.

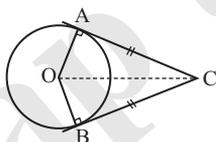
Вписанные углы соответствующие одной и той же дуге конгруэнтны.



Угол, вписанный в окружность равен половине градусной меры соответствующей дуги или же половине градусной меры центрального угла.



Отрезки двух касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки к точкам касания, конгруэнтны.



Если диаметр окружности перпендикулярен хорде, значит диаметр является серединным перпендикуляром хорды. (делит его пополам)



Урок 89-92. Учебник стр. 116-123. Радиусы окружностей описанной и вписанной в правильный многоугольник. Площадь правильного многоугольника. 4 часа. Обобщающие задания.



• Разделив правильный многоугольник на треугольники пишет формулу зависимости площади многоугольника от его периметра и апофемы.

- Применяя формулу площади правильного многоугольника решает разные задачи.
- Знает правило паркетирования и применяет при решении задач.

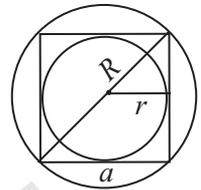


Моменты требующие внимания

Формулы $S = \frac{1}{2} nah$ или же $S = \frac{1}{2} Ph$ для вычисления площади правильного многоугольника выводится общеклассными обсуждениями. Площадь многоугольника можно вычислить, если известен радиус вписанной или описанной около многоугольника окружности, или же сторона.

Можно написать формулу для вычисления площади многоугольника, если известны его а) сторона; б) радиус вписанной окружности; в) радиус описанной окружности. Из-за сложности этих формул нет необходимости в их запоминании. Однако, отводится время для решения задач такого типа.

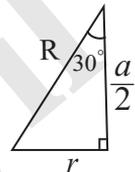
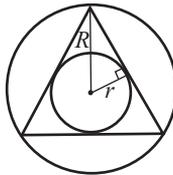
Ученик понимает равенство апофемы радиусу вписанной окружности.



У.29. а)

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$



Можно было бы воспользоваться тем, что в прямоугольном треугольнике катет лежащей против угла 30° равен половине гипотенузы.

Обратите внимание! Радиус окружности описанной около правильного треугольника в 2 раза больше радиуса окружности вписанного в этот треугольник.

2. Для правильного четырехугольника (квадрата) то есть для $n = 4$:

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{a}{2}$$

Обратите внимание! Сторона правильного четырехугольника (квадрата) в два раза больше радиуса вписанного в этот четырехугольник.

3. Для правильного шестиугольника, то есть для $n = 6$

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Обратите внимание! Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен стороне.

Рабочий лист № 5

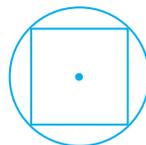
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Радиусы окружностей вписанной в треугольник и описанной около треугольника выражает через сторону треугольника.

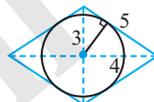
1. На рисунке около квадрата со стороной равной 2 см описана окружность. Найдите отношение площади соответствующего круга к площади квадрата.



2. На рисунке изображен квадрат вписанный в окружность с диаметром 12 см, а в квадрат вписана окружность. Найдите отношение площадей соответствующих кругов.

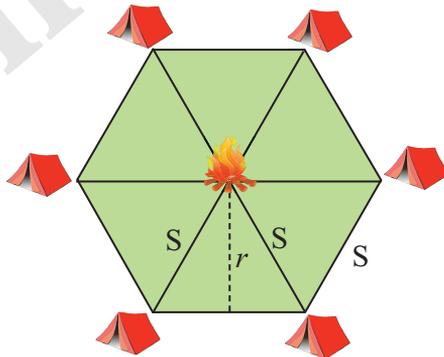


3. На рисунке изображен круг вписанный в ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Найдите отношение площади ромба к площади круга.



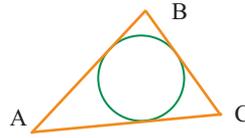
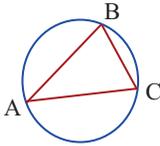
4. В лагере туристы соорудили 6 палаток таким образом, что соседние палатки были друг от друга и от костра на одинаковом расстоянии. Если они увеличат расстояние от палаток до костра в 2 раза, то как изменится площадь лагеря?

Для решения задачи воспользуйтесь рисунком.



По уровню знаний, ученикам, можно поручить вывести формулу радиуса вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника окружности, площади многоугольника, зависимости периметра от соответствующего радиуса. Некоторые из них даны ниже как образцы.

Зависимость сторон треугольника вписанного в окружность и описанного около окружности от радиуса окружности:

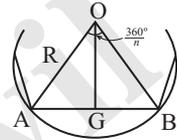


$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \quad r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Формулы для вычисления площади правильного многоугольника:

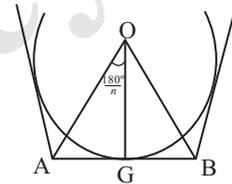
Формула зависимости площади многоугольника вписанного в окружность от радиуса окружности.

$$S_n = \frac{1}{2} n R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$$



Формула зависимости площади многоугольника описанного около окружности от радиуса окружности:

$$S_n = n r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$



Приняв радиус окружности $r = 1$, построив таблицу показывающую наименование многоугольника, число сторон, периметр и полупериметр - для определения числа π , можно повторить и с учениками исследование проведенное Архимедом. Для исследования таблица приведена на следующей странице.

а) Формула для вычисления периметра правильного многоугольника вписанного в окружность: $P = 2Rn \sin \frac{180^\circ}{n}$

б) Формула для вычисления периметра правильного многоугольника описанного около окружности: $P = 2rn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

Таблица для определения числа π

Таблица 1

Многоугольник	Число сторон	Угол	Периметр	$P/2$
Треугольник				
Квадрат				
Пятиугольник				
Шестиугольник				
Восьмиугольник				
Двенадцатиугольник				
24-угольник				
48-угольник				
96-угольник				

а) Периметр правильного многоугольника, вписанного в окружность:

$$P = 2Rn \sin \frac{180^\circ}{n}$$

Таблица 2

Многоугольник	Число сторон	Угол	Периметр	$P/2$
Треугольник				
Квадрат				
Пятиугольник				
Шестиугольник				
Восьмиугольник				
Двенадцатиугольник				
24-угольник				
48-угольник				
96-угольник				

б) Периметр правильного многоугольника, описанного

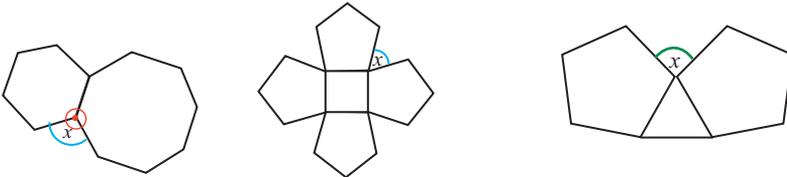
около окружности: $P = 2rn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

Ученикам объясняется правило паркетирования. При построении фигур рядом друг с другом сумма углов с общей вершиной должна быть равна 360° . Это возможно лишь при использовании одинаковых фигур - ромба (квадрата), равностороннего треугольника и правильного шестиугольника.

Паркетирование, узоры из геометрических фигур, резьба по дереву занимают важное место в Исламском искусстве. В разных районах Республики можно встретить мечети и мавзолеи украшенные этими узорами. Рекомендуется дать ученикам в качестве проектной работы задание сфотографировать эти памятники и узоры на них, записать на компьютер, снова нарисовать их и определить геометрические свойства этих узоров.

? Методические рекомендации для выполнения некоторых заданий.

У.16. (стр. 122) Найдите отмеченный угол x .



Обратите внимание на правильность определения углов. Информацию о градусной мере каждой отмеченной точки ученики определяют общеклассными обсуждениями. Например, а) угол x является общевершинным углом с одним внутренним углом шестиугольника и одним внутренним углом восьмиугольника.

$\angle x + \text{угол при одной вершине правильного шестиугольника} + \text{угол при одной вершине правильного восьмиугольника} = 360^\circ$

$$\text{Угол при одной вершине правильного шестиугольника} = \frac{180(n-2)}{n} = 120^\circ$$

$$\text{Угол при одной вершине правильного восьмиугольника} = \frac{180(n-2)}{n} = 135^\circ$$

При выполнении заданий обращается внимание на навыки устного вычисления градусных мер этих углов.

$$\angle x + 120^\circ + 135^\circ = 360^\circ \quad x = 105^\circ$$

Решение заданий такого типа важно для решения многих практических дизайнерских задач. Ученики рисуют эти фигуры на компьютерах и повторяют их. Ученики понимают, что создание этими фигурами пустот определенного вида может быть использовано в паркетировании. Могут быть выполнены задания на вычисление углов полученных этими пустотами. Эти навыки имеют огромное значение при выполнении гравировочных работ на камне или на дереве.

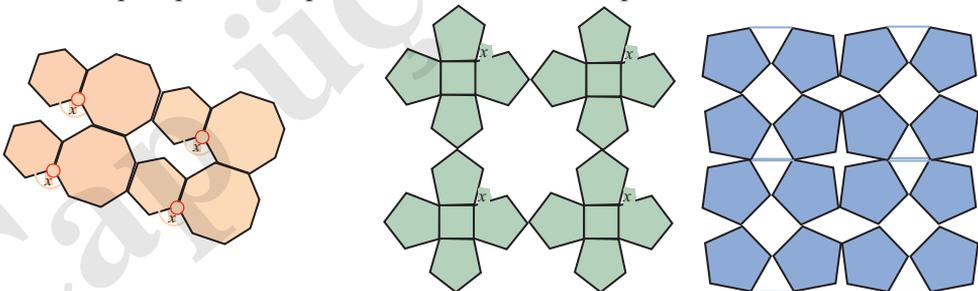


Таблица критерий большого суммативного оценивания по разделу 2.2

№	Критерии	Замечания
1.	Многоугольники классифицирует по числу сторон, по вогнутости или выпуклости	
2.	Решает задачи на сумму внутренних и внешних углов многоугольника.	
3.	Изображает правильный многоугольник, решает задачи на периметр и площадь многоугольника	
4.	В треугольник вписывает окружность и окружность описывает около него.	
5.	Выражает формулой зависимость радиуса соответствующей окружности с площадью, периметром, сторонами треугольника вписанного в окружность и применяет при решении задач.	
6.	Знает свойства четырехугольника вписанного в окружность и описанного около окружности и применяет в решении задач.	
7.	Радиус вписанной в четырехугольник или описанной около нее окружности выражает через стороны четырехугольника.	

Урок 93. Задания суммативного оценивания по разделу 3.2

1. Найдите число сторон правильного многоугольника, в котором внутренний угол больше внешнего в 3 раза.

- A) 6 B) 8 C) 7 D) 9

2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если сумма внутренних углов равна 1620° ?

- A) 11 B) 7 C) 9 D) 10

3. Сколько диагоналей имеет многоугольник, если число диагоналей исходящих из одной вершины равно 5.

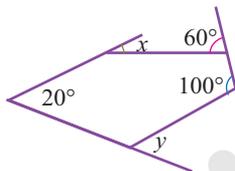
- A) 12 B) 16 C) 20 D) 10

4. Найдите отношение внутреннего угла правильного 20-угольника к внешнему углу.

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 10

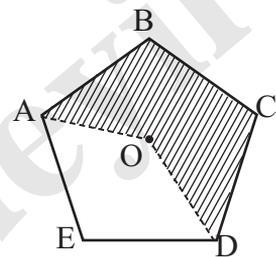
5. По рисунку найдите сумму $x + y$.

- A) 40° B) 30° C) 20° D) 60°



6. Точка O - центр правильного пятиугольника ABCDE. Площадь четырехугольника AODE равна 24 см^2 . Найдите площадь пятиугольника ABCDE.

- A) 36 см^2 B) 48 см^2 C) 24 см^2 D) 60 см^2



7. Найдите апофему правильного многоугольника, площадь которого равна 180 см^2 , а периметр 60 см.

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8

8. Около окружности с радиусом 3 см описан правильный многоугольник с площадью 24 см^2 . Найдите периметр этого многоугольника.

- A) 14 B) 16 C) 18 D) 20

9. Установите соответствие:

- | | |
|------------------------------|---|
| 1) правильный пятиугольник | A) сумма внутренних углов равна 540° ; |
| 2) правильный шестиугольник | B) сумма внутренних углов равна 1080° ; |
| 3) правильный восьмиугольник | C) сумма внутренних углов равна 720° ; |
| | D) внутренний угол больше внешнего угла на 50%. |

10. Найдите градусную меру самого большого внешнего угла шестиугольника, если внутренние углы относятся как $3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 7$?

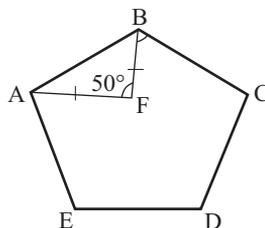
- A) $67,5^\circ$ B) $112,5^\circ$ C) $157,5^\circ$ D) $22,5^\circ$

11. ABCDE - правильный пятиугольник.

$AF = FB$

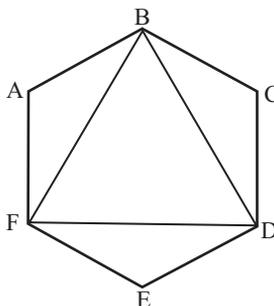
Если $\angle AFB = 50^\circ$, найдите $\angle FBC = ?$

- A) 43° B) 41° C) 46° D) 48°



12. ABCDEF - правильный шестиугольник. Найдите отношение периметра этого шестиугольника к периметру $\triangle FBD$.

- A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



13. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей в прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см.

- A) 3 и 2 B) 5 и 2 C) 5 и 3 D) 4 и 3

14. Радиус окружности описанной около правильного 12-угольника, равней 6 см. Найдите его площадь.

- A) 108 см^2 B) 216 см^2 C) 120 см^2 D) 36 см^2

15. Установите соответствие.

- | | |
|-------------------|---|
| 1) пятиугольник | A) Из одной вершины исходят 6 диагоналей. |
| 2) семиугольник | B) Из одной вершины исходят 4 диагоналей. |
| 3) девятиугольник | C) Число всех диагоналей равно 5. |
| | D) Число всех диагоналей равно 14. |

Таблица планирования по 4 разделу.

Стандарты содержания	Урок №	Тема	Поурочные часы	Учебник стр.
<p>2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.</p> <p>2.2.3. Решает квадратное неравенство.</p> <p>2.3.1. Решает алгебраические неравенства методом интервалов.</p> <p>3.1.5. Применяет в математических и физических задачах понятие вектора на плоскости, правила сложения, вычитания и умножения вектора на число.</p> <p>4.1.1. Преобразовывает производные единицы измерений друг в друга.</p> <p>4.2.1. Проверяет соответствие полученных результатов при помощи практических измерений.</p>	94- 96	Система неравенства и совокупность неравенств	3	125-127
	97, 98	Неравенства с переменной под знаком модуля	2	128, 129
	99, 100	Линейные неравенства с двумя переменными	2	130-132
	101, 102	Система линейных неравенств с двумя переменными	2	133-136
	103-106	Квадратные неравенства	4	137-144
	107-109	Решение неравенств методом интервалов	3	145-148
	110, 111	Обобщающие задания	2	149, 150
	112	Задания суммативного оценивания по разделу 4.1	1	
	113	Векторы	1	151, 152
	114, 115	Векторы в координатной плоскости	2	153-155
	116	Направление вектора	1	156, 157
	117-120	Сложение и вычитание векторов	4	158-164
	121	Компоненты вектора и тригонометрические отношения	1	165, 166
	122	Решение задач с применением векторов	1	167
	123-125	Умножение вектора на число. Обобщающие задания	3	168-174
126	Задания суммативного оценивания по разделу 4.0	1		
	Сумма		33	



Стандарты содержания

- 2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.
- 2.2.3. Решает квадратное неравенство.
- 2.3.1. Решает алгебраические неравенства методом интервалов.



Формирующие учебные навыки.

- Систему неравенств отличает от совокупности неравенств и решает;
- Представляет графически множество решений линейного неравенства с двумя переменными;
- Решает графически систему неравенств с двумя переменными;
- Решает алгебраически и графически квадратные неравенства;
- Решает алгебраически неравенства методом интервалов.



Математический словарь

- линейное неравенство с одной переменной
- линейное неравенство с двумя переменными
- система неравенств
- совокупность неравенств
- неравенства с модулем
- квадратные неравенства
- методом интервалов



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы, игровые карты

Граф калькулятор:

<https://mathway.com/graph>

<http://www.meta-calculator.com/online>,

<https://www.desmos.com>

В учебнике тема неравенств была рассмотрена в нижеследующих направлениях и для обучения было запланировано 19 часов.

Преобразовывает производные единицы измерений друг в друга.

Неравенства с модулем

Линейные неравенства с двумя переменными

Квадратные неравенства

Решение неравенств методом интервалов.

Предпочтение дается решению неравенств графическим способом.

Рекомендуется систематически уделять внимание навыкам учеников изображать графики линейных либо квадратичной функций. Эти способности реализуется определением необходимых важных точек и технологическими способностями, графкалькулятором отмечая эти точки строит графики.

Принимая во внимание все это для построения графика линейной функции координаты каких 2-х точек легко найти и достаточно ли это для построения графика? Ведутся исследования вокруг этого вопроса, строятся примеры графиков линейных функций с разными знаками углового коэффициента. Исследуется деление координатной плоскости графиком линейной функции на две полуплоскости.

При решении неравенств с одной переменной ученик понимает требование определения значений x по графику соответственно заданному условию. А условие строится на значениях y .

Поэтому ученик должен соответственно ситуации уметь определять аргумент - независимую переменную (x), и функцию - зависимую переменную (y).

? **Задача.** Один из туристических лагерей находится на высоте 300 м над уровнем моря, а другой -1500 м. Два туристических отряда начали одновременно двигаться навстречу друг-другу. Туристы из 1-го лагеря поднимаются, на высоту 3м за одну минуту, а туристы из 2-го лагеря спускается на 5 м, за минуту. Через сколько минут 1-ый отряд будет выше чем 2-ой?

Туристы отправившиеся в путь из первого лагеря минуту поднимаются на 3 метра, поэтому через x минут они будут на высоте $300 + 3x$.

А туристы отправившиеся в путь из второго лагеря за каждую минуту спускаются на 5 метров, поэтому через x минут они будут на высоте $1500 - 5x$.

Так как по условию 1-ый отряд выше второго, то можно написать следующее неравенство

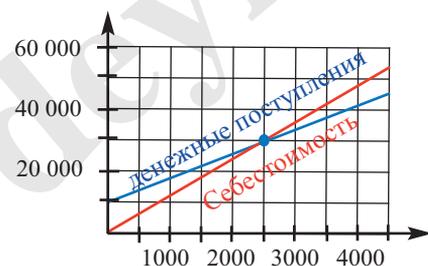
$$300 + 3x > 1500 - 5x$$

$$8x > 1200, x > 150$$

То есть туристы, которые поднимаются вверх через 150 минут будут выше туристов, которые спускаются вниз.

! Представление неравенства графическим способом широко используется при решении финансовых задач. По координатам точки пересечения графиков денежного поступления и себестоимости можно определить, начиная с какого момента появляется прибыль.

На рисунке даны графики денежного поступления и изменение себестоимости, в виде линейных функций. После продажи 2500 единиц затраты потраченные на себестоимость будут уже “возвращены”. Продажа 2501-ой единицы уже будет приносить доход.



Урок 94-96. Учебник стр. 125-127.

Система неравенств и совокупность неравенств. 3 часа.



- Связывает с помощью соединительного союза “и” неравенства, образующие систему неравенств.
- Связывает с помощью союза “или” группу неравенств, образующие совокупность неравенств.
- Представляет множество решений системы и совокупности неравенств.

! Ученики с 8-го класса знакомы с неравенствами связанными с соединительными союзами “и, или” и с их решениями. Например, нормальная температура тела должна быть между 35-37 градусами. Температурная норма для здорового человеческого тела $35^\circ < T < 37^\circ$

А какая температура тела показывает, что человек больной? Как можно выразить это неравенством? Человек считается больным, если температура тела ниже 35° или же равна 37° и если выше 37° . Это можно написать неравенством: $T \geq 37^\circ$ или $T \leq 35^\circ$. А теперь, решим более сложные неравенства, соединяя их в систему с помощью соединительного союза “и”, используя фигурные скобки либо союзом “или” в совокупность неравенств с помощью скобки вида [.

Ученики исследуют возможность представления следующих неравенств в виде системы или же совокупности неравенств.

$$\begin{aligned} 7 < 4 + x < 8 \\ -1 < 2x + 3 \leq 13 \\ 6 < 4x - 2 \leq 14 \\ 4x - 1 > 7 \text{ или } 5x - 1 < -6 \\ 2x + 3 < -1 \text{ или } 3x - 5 > -2 \\ 4 \leq -8 - x < 7 \end{aligned}$$

Неравенства построенные соединительным союзом “и”.

$$\begin{aligned} 7 < 4 + x < 8 \\ \begin{cases} 4 + x < 8 \\ 4 + x > 7 \end{cases} & \quad \begin{cases} -1 < 2x + 3 \leq 13 \\ 2x + 3 \leq 13 \\ 2x + 3 > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Неравенства построенные соединительным союзом “или”.

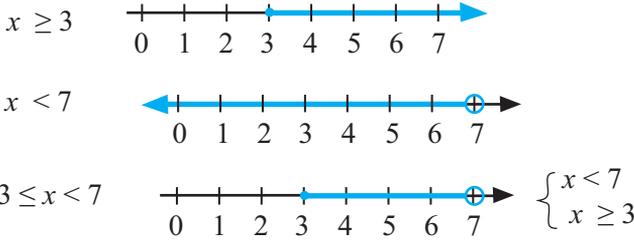
$$\begin{aligned} 4x - 1 > 7 \text{ или } 5x - 1 < -6 \\ 2x + 3 < -1 \text{ или } 3x - 5 > -2 \\ \left[\begin{aligned} 4x - 1 > 7 \\ 5x - 1 < -6 \end{aligned} \dots \text{ и т.д.} \right. \end{aligned}$$

При анализе многих реальных жизненных и математических ситуаций требуется решить систему или совокупность неравенств. Ученики придумывают примеры на систему и совокупность.

Математическая ситуация. Если выражение состоит из нескольких корней с четными показателями корней, то каждое подкоренное выражения не может быть отрицательным. Если неравенство отражает условие отрицательности произведения двух многочленов, то это условие выполняется при противоположенных знаках многочленов - это пример совокупности неравенств. Рекомендуется проводить с учениками обобщение такого типа примеров.

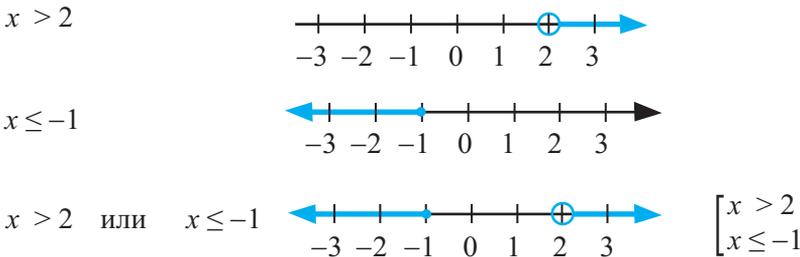
! Решением системы неравенств является пересечение множеств решений неравенств входящих в систему. А решением совокупности неравенств является объединение множеств решений неравенств, входящих в эту совокупность. Ученики, изображают решение геометрически на числовой оси. Эти навыки ученики приобрели в 8-ом классе.

Графическое изображение системы неравенств.



Графическое представление совокупности неравенств

На числовой оси изображены действительные числа, которые больше 2-х или меньше -1.



? **У.8.** Если к удвоенному произведению целого числа прибавить половину числа, то сумма будет меньше 92. Если же от удвоенного произведения этого числа отнять половину числа разность будет больше 53. Найдите это целое число.

$$\begin{cases} 2x + \frac{x}{2} < 92 \\ 2x - \frac{x}{2} > 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 36,8 \\ x > 35\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 36$$

У.9. Решение: По условию задачи $\begin{cases} 6,48 + 0,2x \leq (10,8 + x) \cdot 0,4 \\ 6,48 + 0,2x \geq (10,8 + x) \cdot 0,3 \end{cases}$

Решая эту систему неравенств, находим: $x \geq 10,8$ и $x \leq 32,4$. Значит, из второго раствора нужно перемещать не меньше 10,8 кг и не больше 32,4 кг.

У.10. Одна сторона треугольника равна 5 м, а другая 8 м. Скольким метрам может быть равна длина третьей стороны, если периметр треугольника меньше 22 м?

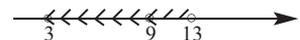
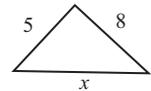
Решение:

$$P = 5 + 8 + x < 22 \quad x < 22 - 13 < 9 \quad x < 9$$

С другой стороны - сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других сторон и больше модуля разности этих сторон:

$$|5 - 8| < x < 5 + 8 \Rightarrow 3 < x < 13$$

Из полученных этих двух неравенств получаем, что длина третьей стороны будет любое число взятое из промежутка (3; 9).



Рабочий лист № 1



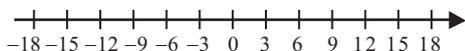
- Связывает с помощью союза “и” неравенства образующие систему неравенств;
- Связывает с помощью союза “или” неравенства, образующие совокупность неравенств;
- Представляет множества решений системы и совокупности неравенства.

Имя _____ Фамилия _____

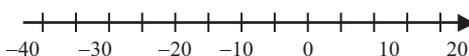
Число _____

Напишите неравенства в виде системы или совокупности, решите и представьте графически.

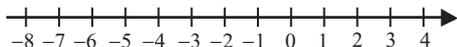
1) $x + 9 > 6$ или $1 \leq -10$



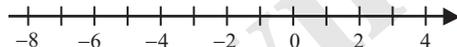
2) $x - 2 \leq 6$ или $\frac{x}{7} > -5$



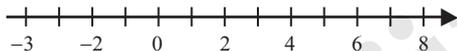
3) $4x < 8$ или $\frac{x}{3} \leq -2$



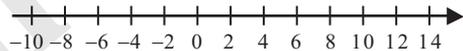
4) $x + 11 > 9$ или $8x \geq -24$



5) $\frac{x}{2} \leq 1$ или $x + 9 > 14$



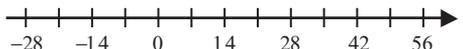
6) $-4 < 2x \leq 16$



7) $3 \leq x - 6 < 12$



8) $x \geq 5$ или $1\frac{x}{2} > 7$



Рабочий лист № 2

Имя _____

Фамилия _____

Число _____



- Решает задачи при помощи системы и совокупности неравенств.

Составьте неравенства по условиям задач данным ниже.

1) Каждый вид рыбы растет при определенной температуре. Для акул это температура между 18 и 22 градусами. Напишите неравенством температуру, при которой акулы не развиваются.

2) Примерно 20% от времени на сон уходит на размышление с закрытыми глазами. Если нормальное время сна составляет 7-8 часов, то сколько часов от времени на сон уйдет на размышление.

3) Сумма учетверенного произведения каких чисел с 8 расположено между числами 0 и 12?

4) Воспользуясь интернетом найдите величину слоев земной атмосферы - тропосферы, стратосферы, мезосферы, термосферы, экзосферы и объясните функцию каждого слоя.

Напишите неравенства соответствующие размерам атмосферных слоев. Нижеследующий линк является для вас полезным источником.

[Http://www.enchantedlearning.com/subjects/astronomy/planets/earth/atmosphere.shtml](http://www.enchantedlearning.com/subjects/astronomy/planets/earth/atmosphere.shtml)

5) Оценочные баллы Наргиз по биологии - 72, 82, 83 и 89. В качестве итоговой оценки выводится средней бал. Оценка С между 77-84 баллами. получит ли Наргиз по биологии С?

6) Произведение какого числа на 1,5 меньше нуля, больше минус трех или равен минус трем?

7) Магазин предлагает скидку на 30 манат на все цветные принтеры. Сеймур хочет купить цветной принтер. Цена принтеров меняется от 175 манат до 260 манат. В каком промежутке попадут цены после скидки и какая польза от этой скидки Сеймуру?

Урок 97, 98. Учебник стр. 128, 129. Неравенства с переменными под знаком модуля. 2 часа.



- Выражая неравенства с модулем в виде системы и совокупности неравенств, решает алгебраическим способом;
- Пользуясь графиком функции $y = |x|$ решает графически неравенства с модулем.

В таблице данной в учебнике исследуется как при различных видах модульных неравенств, пользуются системами и совокупностями неравенств. Чтобы лучше понять это рекомендуется пользоваться геометрическими изображениями.

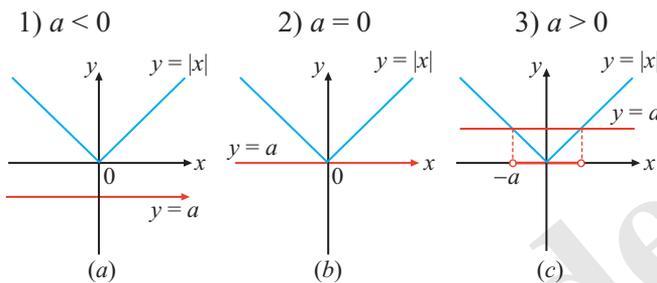
Математическая запись

Это означает, что..

$ x - c = d$	расстояние между точками x и c равно d .	$\{c - d; c + d\}$	
$ x - c < d$	расстояние между точками x и c меньше d	$(c - d; c + d)$	
$ x - c > d$	расстояние между точками x и c больше d .	$(-\infty; c - d) \cup (c + d; +\infty)$	

Рекомендуется исследовать решение модульных неравенств как показано ниже:

Решение неравенства $|x| < a$ в зависимости от знака a может быть разным.



1) Прямая $y = a$ расположена ниже оси абсцисс. Неравенство не имеет решений. Абсолютная величина не может быть отрицательным.

2) В этом случае прямая $y = a$ совпадает осью x . А функция $y = |x|$ не имеет такого значения, чтобы была бы ниже оси x . В этом случае неравенство не имеет решений

3) В этом случае прямая $y = a$ находится выше оси абсцисс и пересекает график функции $y = |x|$ в двух точках: $-a$ и a . График расположен на промежутке $(-a; a)$ ниже прямой $y = a$. Значит, это неравенство верно при $-a < x < a$.



Решения некоторых задач данных в учебнике.

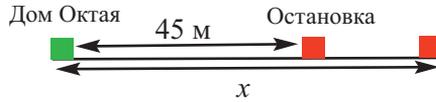
У.1. а) $|5x + 3| - 4 \geq 9$. Запишем данное неравенство в виде: $|5x + 3| \geq 13$

Решение неравенство $|5x + 3| \geq 13$ приводится к решению совокупности: $\begin{cases} 5x + 3 \geq 13 \\ 5x + 3 \leq -13 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x \geq 10 \\ 5x \leq -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -3,2 \end{cases}$$

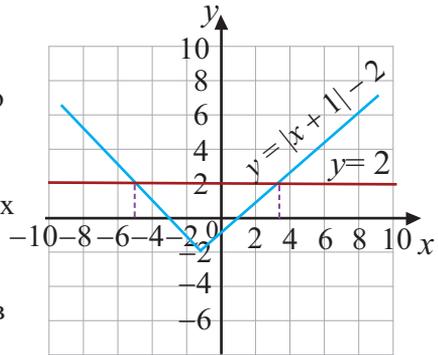
Ответ: $(-\infty; -3,2] \cup [2; +\infty)$

У.3. Автобусная остановка находится на расстоянии 45 м от дома Октя. Планируется переместить остановку от нынешнего местоположения на расстояние не более 30 м. Покажите неравенством расстояние от новой остановки до дома Октя.



Решение: Если расстояние от дома Октя до новой остановки равно x , тогда расстояние от новой до старой остановки будет $|x - 45|$. По условию это расстояние может быть не более 30. То есть $|x - 45| \leq 30$

В задании **У.5.** ученик понимает что график функции $y = |x + 1| - 2$ строится смещением графика функции $y = |x|$ на 1 единицу влево и на 2 единицы вниз. По графику функции $f(x) = |x + 1| - 2$ определяет решение данного уравнения и неравенства не производя никаких вычислений.



1) Решение уравнения $|x + 1| - 2 = 2$

определяется по точкам пересечения графиков функций. По клеткам видно, что этими точками являются $x = -5$ и $x = 3$

2) Неравенство $|x + 1| - 2 < 0$ верно при $-5 < x < 3$

3) А неравенство $|x + 1| - 2 > 2$ верно при $x < -5$ или же при $x > 3$. Множество решений $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$. Как видно, задание выполняется при помощи навыков чтения графической информации. Поэтому рекомендуется, периодически, уделять внимание графическому способу проверки решения уравнений и неравенств.

Для того чтобы провести формативное оценивание навыков решения модульных неравенств приготавливаются карты с математической записью модульных неравенств, со словесной записью и с геометрическим изображением. Каждой группе выдается набор карт.

Члены группы приклеивают на белый лист бумаги в один ряд, карты выражающие одинаковые модульные неравенства.

У.7. в) решим неравенство $|w - 519,5| < 12,5$.

$$-12,5 < w - 519,5 < 12,5.$$

$$507 < w < 532$$

Так как длина световой волны удовлетворяет неравенство $507 < w < 532$, по таблице находим, что в этом случае при сгорании вещества получается зеленый свет.

Примеры игральных карт

$ x + 5 \leq 4$	<p>множество точек, расстояние которых от -5-ти меньше 4-х или равно 4-ем</p>	
$x - 5 > -4$ и $x - 5 < 4$	<p>множество точек, расстояние которых от 5-ти меньше 4-х</p>	
$ x + 5 \geq 4$	$x + 5 \leq -4$ или $x + 5 \geq 4$	
$ x + 4 \geq 5$	<p>множество точек, расстояние кото- рых от -4-х больше 5 или равен 5.</p>	$x + 4 \leq -5$ или $x + 4 \geq 5$

Примеры игральных карт (продолжение)

$ 2x - 1 \leq 7$	<p>Множество точек расстояния которых от $-\frac{1}{2}$-ой меньше $\frac{7}{2}$-х, или равно $\frac{7}{2}$-х</p>	
$2x - 1 \leq -7$ или $2x - 1 \geq 7$	$ 2x - 1 \geq 7$	<p>Множество точек расстояния которых от $\frac{1}{2}$-ой больше $\frac{7}{2}$, или равно $\frac{7}{2}$</p>
	$2x + 1 \leq -7$ или $2x + 1 \geq 7$	$ 2x + 1 \geq 7$
<p>Множество точек расстояния кото- рых от 2-х меньше 7, или равно 7.</p>		$x - 2 \geq -7$ и $x - 2 \leq 7$

Рабочий лист № 3

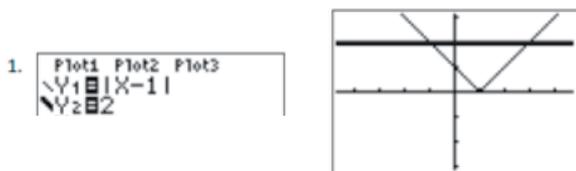
Имя _____ Фамилия _____

Число _____

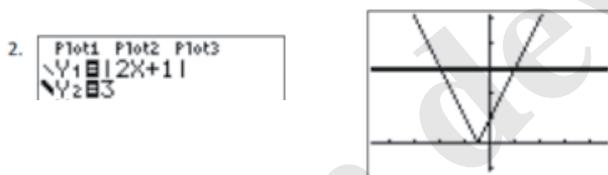


• Модульные неравенства решает графическим способом используя график функции $y = |x|$.

На рисунке даны записи на экране графкалькулятора и изображенные им графики. Напишите в соответствующих ячейках таблицы по каждой картине одно модульное уравнение, два модульных неравенства и их решение.



Модульное уравнение	Неравенство 1	Неравенство 2
Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом
Графическое решение	Графическое решение	Графическое решение



Модульное неравенство	Неравенство 1	Неравенство 2
Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом
Графическое решение	Графическое решение	Графическое решение

Урок 99, 100. Учебник стр. 130-132.

Линейные неравенства с двумя переменными. 2 часа



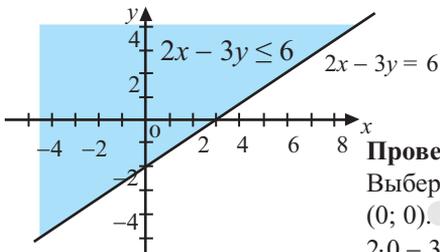
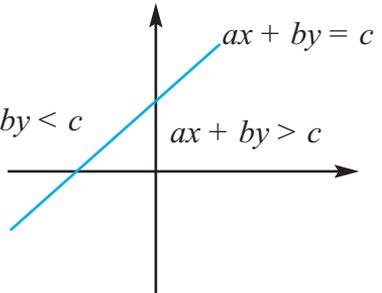
- Решает графическим способом линейные неравенства с двумя переменными;
- Решает графическим способом системы линейных неравенств с двумя переменными;
- Решает задачи на линейные неравенства с двумя переменными.

Объясняет возможность с помощью линейного уравнения с двумя переменными $ax+by=c$ решить линейные неравенства с двумя переменными вида $ax+by < c$, $ax+by \leq c$, $ax+by > c$, $ax+by \geq c$

Решить эти неравенства означает найти такие точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют соответствующему неравенству. Для нахождения этих точек используется график уравнения $ax+by=c$. График линейной функции делит координатную плоскость на две полуплоскости. Множество точек составляющие одну из полуплоскостей целиком соответствует условию $ax+by > c$. Множество точек составляющие другую полуплоскость удовлетворяют неравенству $ax+by < c$. А неравенства $ax+by \geq c$ и $ax+by \leq c$ охватывают множество всех точек прямой $ax+by=c$ и соответствующих полуплоскостей.

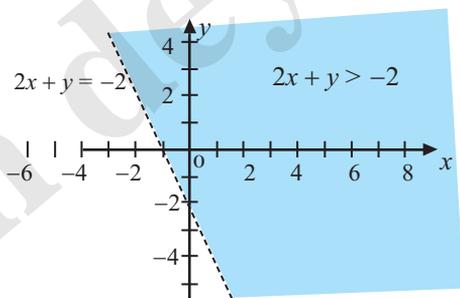
Самый лёгкий путь определения какая из полуплоскостей является решением неравенства, проверка точки принадлежащей этим полуплоскостям. Если не удовлетворяет одной полуплоскости, значит охватывает множество точек другой полуплоскости. Самая удобная пробная точка - эта точка $(0; 0)$

Доводится до внимания, что соответственно неравенствам $ax+by \geq c$ и $ax+by \leq c$ график прямой рисуется сплошной линией.



Проверка:

Выберим точку $(0; 0)$.
 $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \leq 6$
 $0 < 6$



Решением неравенства $2x - 3y \leq 6$ является множество всех точек, лежащих на прямой и на полуплоскости расположенной выше прямой. Эта прямая называется граничной линией.

График прямой $2x + y = -2$ рисуется пунктирной линией так как не относится к решению неравенства $2x + y > -2$. Решением неравенства $2x + y > -2$ является множество всех точек, лежащих на полуплоскости выше прямой линии.

Имя _____

Фамилия _____

Число _____

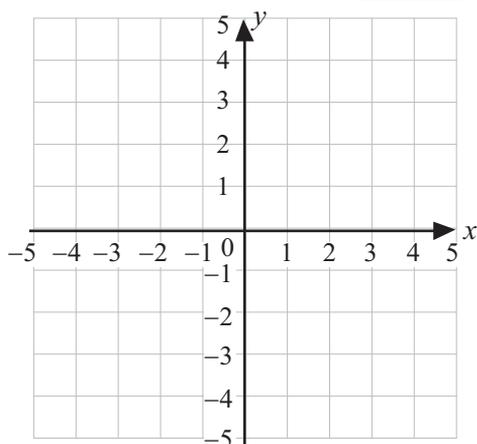


• Рисует графическое изображение решения линейных неравенств с двумя переменными и записывает напишите требуемые показатели.

Нарисуйте графическое изображение решения линейных неравенств с двумя переменными и напишите требуемые показатели.

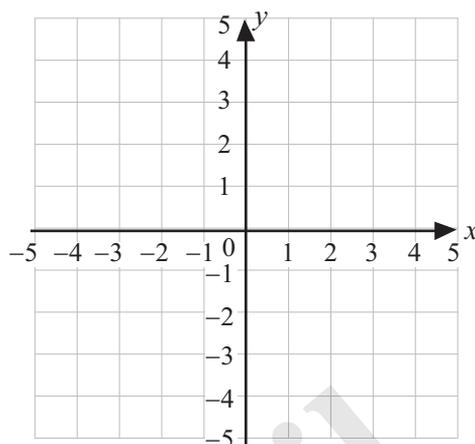
$$x - y < 4$$

- уравнение граничной линии _____
- точка пересечения с осью Ox _____
- точка пересечения с осью Oy _____
- проверочная точка $(0; 0)$ _____



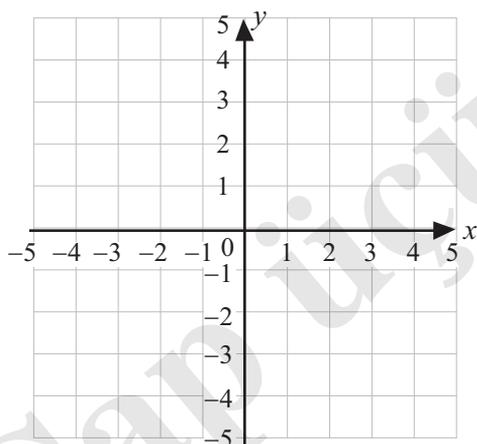
$$2x + 3y > 6$$

- уравнение граничной линии _____
- точка пересечения с осью Ox _____
- точка пересечения с осью Oy _____
- проверочная точка $(0; 0)$ _____



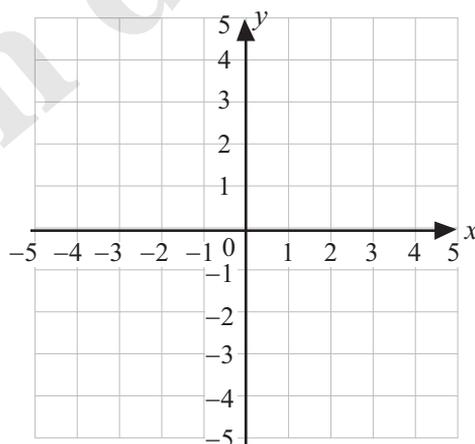
$$-4x + y \leq 4$$

- уравнение граничной линии _____
- точка пересечения с осью Ox _____
- точка пересечения с осью Oy _____
- проверочная точка $(0; 0)$ _____



$$-x + 2y \leq 8$$

- уравнение граничной линии _____
- точка пересечения с осью Ox _____
- точка пересечения с осью Oy _____
- проверочная точка $(0; 0)$ _____



Урок 101, 102. Учебник стр. 133-136.

Система неравенств с двумя переменными. 2 часа.



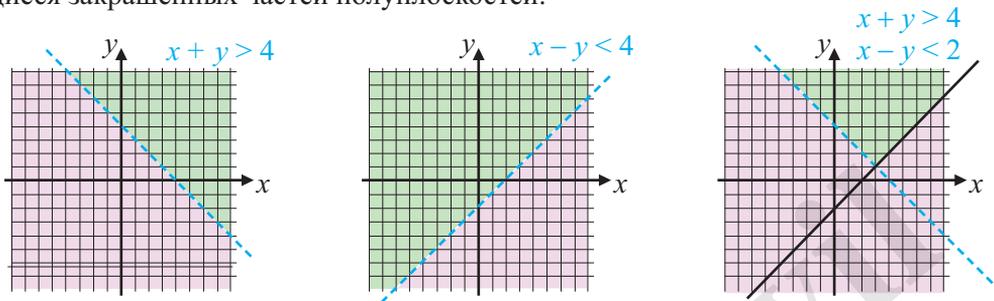
- Рисует графическое изображение решения системы линейных неравенств с двумя переменными;
- Решает задачи при помощи системы линейных неравенств с двумя переменными.

Исследует шаги построения графического изображения решения линейных неравенств с двумя переменными:

1. Строится график линейной функции, соответствующий каждому неравенству.
2. Закрашивается часть плоскости соответствующая каждому неравенству.
3. Закрашенная обеими цветами часть плоскости - это часть плоскости показывающая множество решений системы.

$$\begin{cases} x + y > 4 \\ x - y < 2 \end{cases}$$

Если эти графики нарисовать в одной координатной системе, то увидим совпадающие закрашенных частей полуплоскостей.



Точка пересечения линейных функций, соответствующая неравенствам - важная точка. Эту точку называют угловой точкой и начиная с этой точки прямые охватывают часть плоскости состоящей из множества решений.

Система линейных неравенств с двумя переменными может состоять из двух и более неравенств. В зависимости от числа этих неравенств число угловых точек может расти. В этом случае уравнения $y = a$ и $x = a$, в частности оси x и y могут быть включены в решение системы неравенств. Задачи относящиеся к системам линейных неравенств с двумя переменными построены на навыках математического моделирования реальных жизненных ситуаций.

В задаче **У.7.** ученик, принимая во внимание информацию данную в таблице, должен выразить неравенством требуемую ситуацию.

Условие: 1. Протеин должен быть не меньше 50 г.

2. Энергетическая ценность должна быть больше 600 калорий.

Продукты	Протеин (г/чашка)	Энергетическая ценность (калорий/чашка)
А	20	100
В	10	200

По информации данной в таблице в одной чашке продукта А содержится 20 г протеина, а энергетическая ценность составляет 100 калорий. В одной чашке продукта В содержится 10 г протеина, а энергетическая ценность составляет 200 калорий.

По условию в меню должны быть оба продукта.

x чашек А \times 20 г + y чашек В \times 10 не меньше 50 г

$$20x + 10y \geq 50$$

x чашек А \times 100 г + y чашек В \times 200 не больше 600 калорий

$$100x + 200y \leq 600$$

$$\begin{cases} 20x + 10y \geq 50 \\ 100x + 200y \leq 600 \end{cases}$$

1. $20x + 10y \geq 50$

Уравнение граничной линии: $y = -2x + 5$

Точки пересечения с осями x и y :

При $x = 0$ $y = 5$

При $y = 0$ $x = 2,5$

Рисуется график прямой

Проверка: Проверяется точка $(0; 0)$: $20 \cdot 0 + 10 \cdot 0 \geq 50$

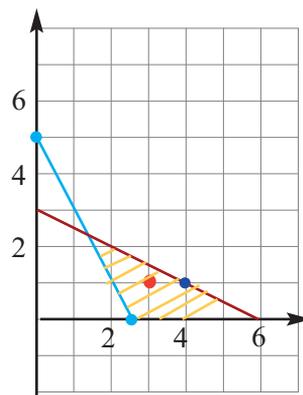
Не удовлетворяет. Значит, прямая и часть полуплоскости выше прямой будет множеством решений.

2. $100x + 200y \leq 600$ $x + 2y = 6$

Уравнение граничной линии: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Проверка: Проверяется точка $(0; 0)$: $100 \cdot 0 + 200 \cdot 0 \leq 600$; $0 \leq 600$ удовлетворяет. Значит, прямая и часть полуплоскости ниже этой прямой является множеством решений.

Точка пересечения дважды закрашенных прямых и часть плоскости, ограниченная этими прямыми, является множеством решений удовлетворяющих данным условиям. Из этой части плоскости определим число чашек. Точки $(3; 1)$, $(2; 2)$, $(4; 1)$, $(6; 0)$, $(0; 3)$ являются решением этого неравенства (числом полных чашек). Возможно, бесконечное число вариантов для выражения этого неравенства количеством неполных чашек.



Рабочий лист № 5

Имя _____

Фамилия _____

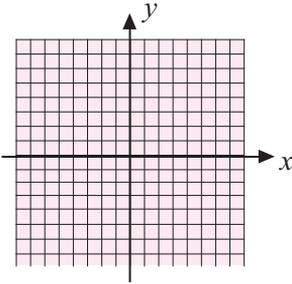
Число _____



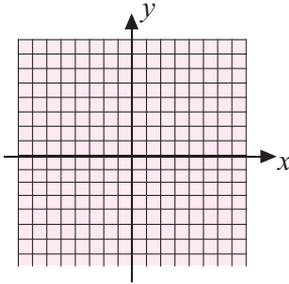
• Рисует графическое изображение решения системы линейных неравенств с двумя переменными.

Нарисуйте графическое изображение решения системы неравенств.

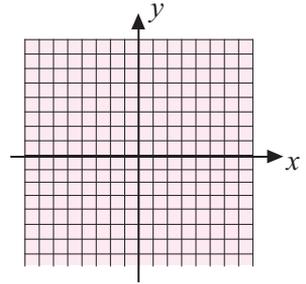
1. $x + 2y \leq 4$
 $x - y \geq 1$



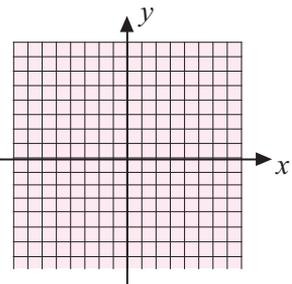
2. $3x - y > 6$
 $x + y < 6$



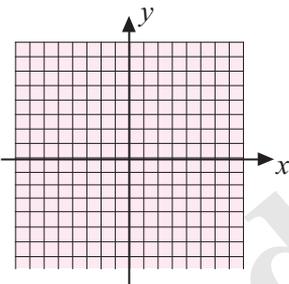
3. $3x + y < 6$
 $x + y > 4$



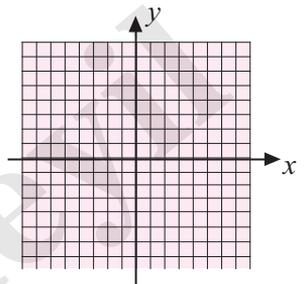
4. $2x + y \geq 4$
 $x + y \geq 4$



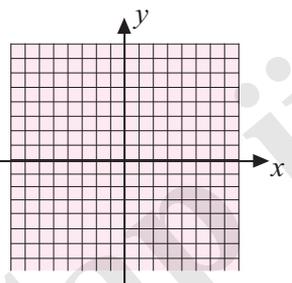
5. $x + 3y \geq 12$
 $2x - 3y \leq 6$



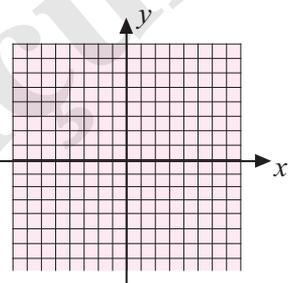
6. $x - 2y > 8$
 $3x - 2y > 12$



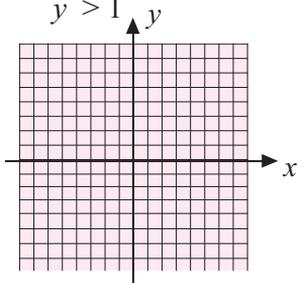
7. $2x + 2y \leq 12$
 $x \geq 2$



8. $2x + y \leq 6$
 $x \geq 1$



9. $2x + y \leq 8$
 $x > 1$
 $y > 1$



Рабочий лист № 6

Имя _____

Фамилия _____

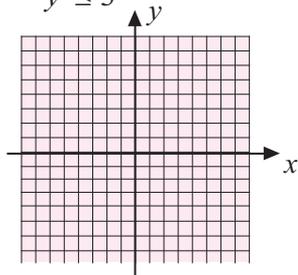
Число _____



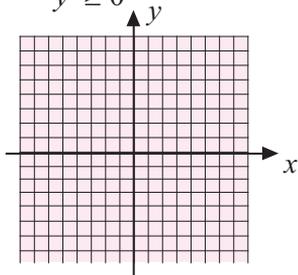
• Рисует графическое изображение решения системы линейных неравенств с двумя переменными.

Нарисуйте графическое изображение решения системы неравенств.

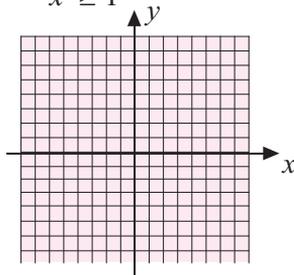
10. $3x - y \leq 6$
 $x \geq 1$
 $y \leq 3$



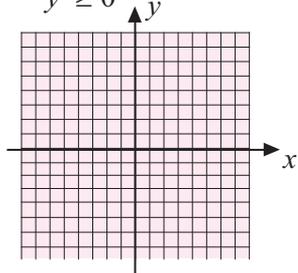
11. $x + 2y \leq 8$
 $2 \leq x \leq 6$
 $y \geq 0$



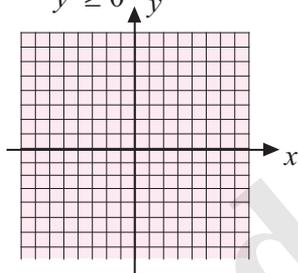
12. $x + y < 6$
 $0 \leq y \leq 3$
 $x \geq 1$



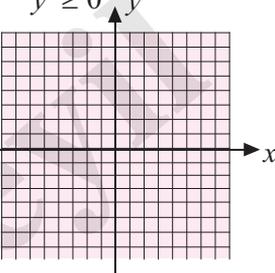
13. $3x + y \leq 6$
 $x + y \leq 4$
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$



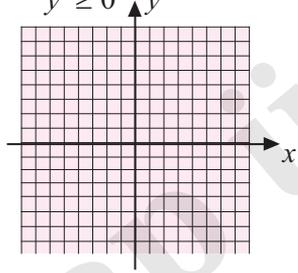
14. $x - 2y \geq -2$
 $x + 2y \leq 6$
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$



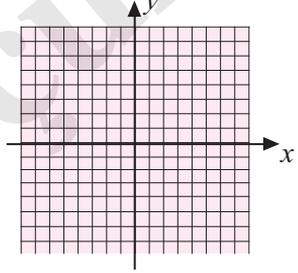
15. $4x + 3y \leq 12$
 $x + 4y \leq 8$
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$



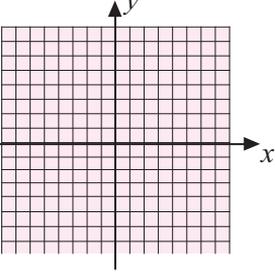
16. $2x + y \leq 8$
 $x + y \geq 3$
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$



17. $x - 4y \leq -4$
 $x + 2y \leq 8$
 $x \geq 2$



18. $x - 3y \geq -6$
 $x + 2y \geq 4$
 $x \leq 4$



Урок 103-106. Учебник стр.137-144. Квадратные неравенства. 4 часа.

Урок 107-109. Учебник стр 145-148. Решение неравенств методом интервалов. 3 часа.



- $ax^2 + bx + c < 0$ Данные неравенства решаются разными способами:
- $ax^2 + bx + c \leq 0$ - графическим способом
- $ax^2 + bx + c > 0$ - методом интервалов
- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- Решает задачи на квадратные неравенства.

Способы решения квадратных неравенств исследуются в той последовательности, в которых даны в учебнике. Рекомендуется одно и то же квадратное неравенство решить разными способами и сравнить решения. Эти задания удобны для работы в группах. Еще раз проверяются навыки построения графика квадратичной функции.

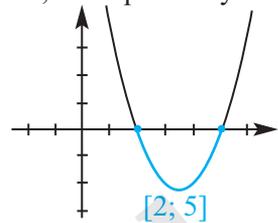
Графическое решение неравенства $x^2 - 7x + 10 \leq 0$:

Доводится до внимания, что выражение $x^2 - 7x + 10$ может принимать положительные, отрицательные значения и нуль. В данном неравенстве должны определить при каком значении x значение данного выражения меньше, либо равно нулю.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 5)(x - 2) = 0$$

$$x = 5, x = 2$$



Осью симметрии будет прямая $x = 1,5$. Строится парабола. Нас интересует значения x , при которых выражение $x^2 - 7x + 10$ будет меньше либо равно 0. Из графика видно, что на отрезке $[2; 5]$ это условие выполняется.

Задается вопрос: Определите по графику, при каких значениях x значение этого выражения будет положительным? Ответ ученика: При значениях $x < 2$ или $x > 5$

Данное неравенство можно решить и алгебраическим способом выбирая пробные точки.

Интервалы: $(-\infty; 2)$ $(2; 5)$ $(5; +\infty)$

Проверочное число: -4

3

10

Условие : ≤ 0

$x - 5$

-9

-2

5

$x - 2$

-6

1

8

$(x - 5)(x - 2)$

+

-

+

Условие : ≤ 0

$[2; 5]$

Шаги решения квадратного неравенства:

1. Постройте график функции $y = ax^2 + bx + c$ соответствующий неравенству.
2. Отметьте точки пересечения графика функции с осью абсцисс.
3. По графику определите при каких значениях аргумента x , значения функции y будут положительными, а при каких - отрицательными.
4. Выберите множество значений x , соответствующий неравенству.

Шаги решения неравенства алгебраическим способом.

1. Если, возможно, упростите данное неравенство (освободите от скобок и дроби).
2. Оставьте в левой части неравенства многочлен, а в правой нуль.
3. Разложите левую часть на множители.
4. Найдите граничные точки.
5. Граничные точки отметьте на числовой оси.
6. Их каждого множества образованного граничными точками выберите одну пробную точку и проверьте неравенство.



Решения некоторых задач данных в учебнике.

У.21. $T(x) = 0,005x^2 - 0,23x + 22$

а) Если $x = 16$, то $T(x) = 0,005 \cdot 16^2 - 0,23 \cdot 16 + 22 = 23,28 - 3,68 = 19,6$.

То есть продолжительность реакции 16-ти летнего водителя 19,6 терций

б) $x = 35$, $V(35) = 0,05 \cdot 35^2 - 0,23 \cdot 35 + 22 = 20,75$

Продолжительность реакции 35-ти летнего водителя 20,75 терций

Проанализовав результаты пунктов а) и б) видим, что в продолжительность реакции водителей, в возрасте 16 и 35 лет, можно считать равной.

У.24. $h(x) = -5x^2 + 20x + 1$

а) Через сколько секунд мяч поднимется выше 16 м?

$$-5x^2 + 20x + 1 > 16 \Rightarrow$$

$$-5x^2 + 20x - 15 > 0 \text{ или}$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \text{ решим это неравенство.}$$

Нули квадратного трехчлена в левой части неравенства $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Приблизительно через 1 секунду от удара вверх и приблизительно через 3 секунды, когда возвращался на землю.

Для того чтобы определить сколько секунд мяч был в воздухе, решим уравнение $h(x) = 0$.

$$x_1 = \frac{-20 + \sqrt{420}}{-10} \approx \frac{-20 + 20,49}{-10} = -0,049 \quad x_2 = \frac{-20 - 20,49}{-10} = 4,049$$

То есть мяч будет в воздухе приблизительно 4,049 секунд.

У.27. 1) а) $x^2 \leq 15 - 2x$

Для того, чтобы решить неравенство графически, в одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = 15 - 2x$.

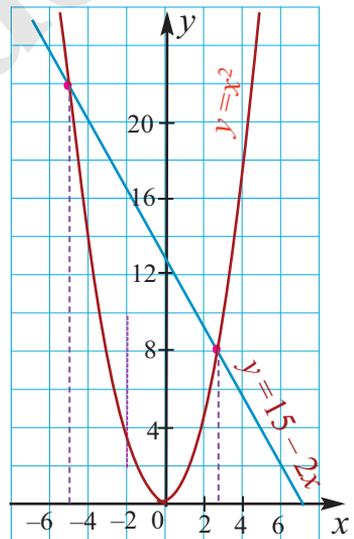
Как видно из графика при любом значении x из промежутка $[-5; 3]$ ордината точки на графике функции $y = x^2$ не больше соответствующей ординаты функции $y = 15 - 2x$. А это означает, что при всех значениях x из промежутка

$[-5; 3]$ неравенство $x^2 \leq 15 - 2x$ верно.

2) а) $x^2 \leq 15 - 2x \Rightarrow x^2 - 15 + 2x \leq 0$ или

$$x^2 + 2x - 15 \leq 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow$$

$$x \in [-5; 3]$$



У. 29. $\dot{I} = \frac{m}{h^2}$ \dot{I} - индекс массы, m - масса человека (кг), h рост (м).

а) Каким должен быть все человека с ростом 1 м 50 см, чтобы индекс массы был меньше 24. Учитывая сказанное имеем:

$$\frac{m}{h^2} < 24, \quad h = 1,5 \text{ метр} \Rightarrow m < 24 \cdot 2,25, \quad m < 54 \text{ кг.}$$

У. 30. $P = 2(x + y) = 70, \quad x + y = 35$

$$y = 35 - x$$

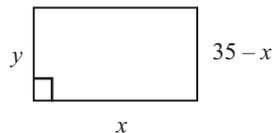
$$S = x \cdot y = x \cdot (35 - x) \geq 300$$

$$35x - x^2 \geq 300 \Rightarrow x^2 - 35x + 300 \leq 0$$

$$x_{1,2} = 17,5 \pm 2,5$$

$$x_1 = 20; \quad x_2 = 15; \quad y_1 = 35 - 20 = 15; \quad y_2 = 20$$

$x^2 - 35x + 300 = (x - 20)(x - 15) \leq 0$. Множество решений последнего неравенства промежутки $[15; 20]$.



Ширина участка может быть любым числом, взятым из промежутка $[15; 20]$. Для каждого из таких чисел верно неравенства $S \geq 300$.

У.7. (стр. 148) По условию задачи стоимость одного стола x манат, общее число проданных столов примем за $120 - x$, тогда получим неравенство $(120 - x) \cdot x > 1800 + 10x$.

А отсюда: $-x^2 + 120x - 10x - 1800 > 0$

$$-x^2 - 110x + 1800 < 0$$

$$(x - 20)(x - 90) < 0$$

Применяя метод интервалов, получим что решением неравенства будет промежуток $(20; 90)$. Проверкой можно убедиться, что при значениях вне этого промежутка торговля Гейдара будет убыточной.

Урок 113 . Учебник стр. 149, 150. Обобщающие задания. 1 час.

У.10. Ежемесячный доход 1-го продавца $200 + 0,02x$, x - количество от общей продажи;

Ежемесячный доход 2-го продавца $0,1x$. Тогда по условию задачи

$$0,1x > 200 + 0,02x \Rightarrow 0,08x > 200 \Rightarrow x > 2500$$

У.13. Если I число обозначим через x , II через y , то $x + y = 20$ и $y = 20 - x$

$$x^2 + y^2 < 208 \Rightarrow x^2 + (20 - x)^2 < 208$$

$$2x^2 - 40x + 400 - 208 < 0 \quad 2x^2 - 40x + 192 < 0 \Rightarrow 8 < x < 12 \Rightarrow -8 > -x > -12$$

$-12 < -x < -8$. К обеим частям последнего неравенства прибавим 20:

$$20 - 12 < 20 - x < 20 - 8 \Rightarrow$$

$$8 < 20 - x < 12 \Rightarrow 8 < y < 12$$

Ответ: Если одно из чисел равно 9, то другое будет 11, или же каждое из чисел равно 10.

Рабочий лист № 7

Имя _____

Фамилия _____

Число _____



• Рисует графическое изображение решения системы неравенств с двумя переменными.

1. Решите квадратные уравнения алгебраическим способом.

1) $x^2 + x - 20 \leq 0$

—————→

2) $x^2 - 3x - 54 < 0$

—————→

3) $x^2 - 5x - 14 > 0$

—————→

4) $2x^2 - 4x - 30 \geq 0$

—————→

5) $3x^2 - 6x - 9 \geq 0$

—————→

6) $2x^2 + 9x - 5 < 0$

—————→

2. Разложите на множители, по знаку множителей определите множество решений.

a) $x^3 + 3x \leq 18$

b) $x^2 + 3 \geq -4x$

c) $4x^2 - 27x + 18 < 0$

d) $-6x \geq x^2 - 16$

3. Решите неравенства воспользуясь графиком соответствующей функции.

a) $x^2 + 14x + 48 \leq 0$

b) $x^2 \geq 3x + 28$

c) $-7x^2 + x - 6 \geq 0$

d) $4x(x^2 - 1) > 63$

4.1 Таблица критериев суммативного оценивания по разделу

№	Критерии	Замечания
1.	Решает графическим способом линейные неравенства с двумя переменными	
2.	Различает и решает систему неравенств и совокупность неравенств	
3.	Представляет графическим способом множество решений линейных неравенств с двумя переменными	
4.	Решает графическим способом систему неравенств с двумя переменными	
5.	Решает алгебраическим и графическим способом квадратные неравенства	
6.	Решает методом интервалов алгебраические неравенства.	

Урок 112. 4.1 Суммативные оценочные задания по разделу.

1. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству. $|x - 1| < 3,2$.

2. Напишите неравенство $-6 < x < 6$ с помощью знака модуля .

A) $|x| = 6$ B) $|x| \geq 6$ C) $|x| < 6$ D) $|x| \leq 6$

3. Решите неравенство $\frac{2 - \sqrt{5}}{2x - 3} \geq 0$.

A) $(1,5; +\infty)$ B) $(-\infty; 1,5)$ C) $[1,5; +\infty)$ D) $(-\infty; 1,5]$

4. Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству:

$$\begin{cases} 5x - 2 \geq 2x + 7 \\ 4x + 2 \geq 5x - 10 \end{cases}$$

A) 7 B) 10 C) 8 D) 9

5. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству: $\frac{9 - x^2}{|x + 2|} \geq 0$

A) 0 B) 3 C) 1 D) 2

6. Решите неравенство: $x^2 > x^3$.

A) $(-\infty; 1]$ B) $(-\infty; 1)$ C) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ D) $(1; +\infty)$

7. При каком наибольшем значении “ b ” число 4 будет принадлежать множеству решений неравенства $2x^2 + bx - 54 \leq 0$?

8. При каких значениях a трехчлен $ax^2 - 4ax + 4$ всегда положительно?

- A) (0; 2) B) (0; 1) C) (-1; 0) D) (1; $+\infty$)

9. Решите неравенство $\frac{x^2 + 4}{x} \leq 4$:

- A) $(-\infty; 0) \cup \{2\}$ B) $[2; +\infty)$ C) $(-\infty; 2]$ D) $(-\infty; 2)$

10. При каком значении “ b ” уравнение $2x^2 + bx + 2 = 0$ не имеет действительных корней ?

11. При каком значении “ k ” уравнение $3x^2 + kx + 3 = 0$ имеет два различных корня?

12. Решите: $||x + 1| - 3| < 4$

13. Одна сторона треугольника 6 см, другая 9 см. Чему может быть равно наибольшее и наименьшее целое значение третьей стороны, если периметр треугольника меньше 25 см?

14. В мешочке имеются золотые и серебряные монеты. Масса каждой золотой монеты 4 г, а серебряной 7 г. Масса мешочка не больше 420 г. Напишите неравенство, показывающее число золотых и серебряных монет и постройте график. Покажите несколько возможных вариантов.

15. Установите соответствие.

1. $x^2 < 9$

2. $x^2 < 9x$

3. $x^2 \leq 3x$

a) наименьшее целое решение равно 0.

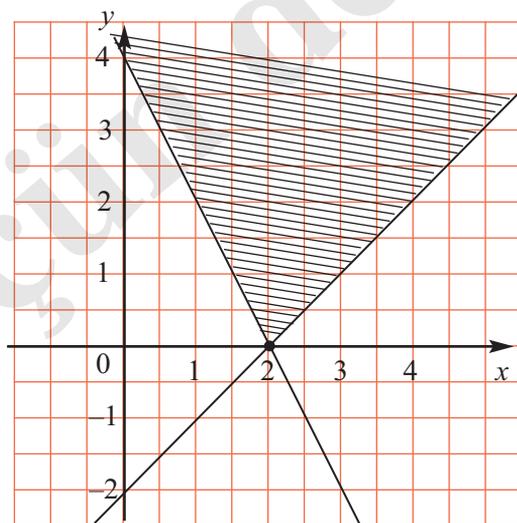
b) наименьшее целое решение равно 1.

c) наибольшее целое решение равно 3.

d) сумма целых решений равно 0.

16. Решите неравенство $\frac{1}{x-1} \leq 1$.

17. Напишите систему неравенств, соответствующую графическому изображению.





Стандарты содержания

3.1.5. Применяет в математических и физических задачах понятие вектора на плоскости, правила сложения, вычитания и умножения вектора на число.

4.1. Понимает смысл единиц измерения, использует соответственные измерительные приборы.

4.1.1. Преобразовывает производные единицы измерений друг в друга.

4.2. Ведет вычисления используя измерительные и вычислительные средства.

4.2.1. Проверяет соответствие полученных результатов при помощи практических измерений.



Формирующие ученических навыков

- Различает скалярные, векториальные безымянные величины;
- Рисует вектор по данному направлению и данной длине;
- Определяет абсолютную величину и направление вектора по заданным измерениям;
- Изображает вектор в координатной плоскости;
- Выражает вектор компонентами.
- Определяет длину и направление вектора.
- Разными способами складывает и высчитывает векторы;
- Решает задачи на умножение вектора на число;
- Решает разные задачи на векторы;
- Размеры нарисованного изображения с определенным масштабом, приводит в соответствие к реальному, согласно данному масштабу.



Словарь:

Вектор, коллинеарные вектора, начальная точка, конечная точка, направление вектора, стандартное положение, модуль вектора, параллельные векторы, равные векторы, противоположные векторы, ноль-вектор, компоненты вектора, результирующий вектор



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Интернет-адреса:

<http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/WindTunnel/Activities/vectors.html>

Урок 113. Учебник стр. 151, 152. Векторы

Мотивация. В информации о погоде мы слышим информацию нижеследующего содержания.

Завтра температура воздуха будет +13 градусов, будет дуть северо-западный ветер со скоростью 15 км/час.

Как вы думаете, почему в прогнозе о температуре дается одна единица измерения, а о скорости ветра две? Ученики используя знания по физике, отвечают на этот вопрос.

Ученики высказывают мнения о том, являются ли скалярными или векториальными величинами: пройденный путь, перемещение, температура, скорость, ускорение, различные виды сил - сила тяжести, сила притяжения, сила трения, гравитационная сила и др. Доводится до внимания, что масса и вес различные физические величины. Например, массу своего тела определяют с помощью весов. В это время масса находится под воздействием силы (гравитационная сила), направленного к центру Земли с ускорением $9,8 \text{ м/сек}^2$. Так как гравитационная сила на разных планетах разная, то и вес меняется. Модуль вектора и его направления исследуются на определенных физических величинах.

Отмечается важность последовательности букв, которыми обозначены начало и конец вектора. Например, обозначение \overrightarrow{AB} означает, что A - начало вектора, а B - конец, то есть вектор направлен от точки A в точку B .

А вектор \overrightarrow{BA} наоборот, направлен от точки B в точку A .

В задании **У.3.** ученик определяет модуль вектора по числу клеток. В центре внимания держится то, как выполняется практическое задание всеми учениками. Эти навыки имеют важное значение и для последующих уроков. На всех запланированных уроках на векторы применяются навыки изображения вектора по данной модулю и направлению и наоборот, измеряя линейной и транспортиром по данному изображению вектора – определение направления и модуля.

<https://trigonometry.wikispaces.hcpss.org/Unit+1+Geometric+Vectors>

<http://www.mathwarehouse.com/vectors/>

http://www.analyzemath.com/vector_calculators/magnitude_direction.html

<http://www.onlinemathlearning.com/vector-subtraction.html>

<http://www.onlinemathlearning.com/vector-addition.html>

<http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/WindTunnel/Activities/vectors.html>

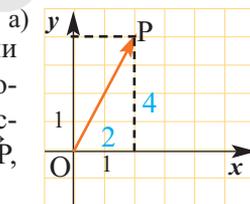
Урок 114, 115. Учебник стр.153-155.

Векторы на координатной плоскости. 2 часа



- По координатам изображает вектор в координатной плоскости.;
- Понимает, что вектор состоит из вертикальных и горизонтальных компонентов;
- Запись вектора компонентами объясняет изображением на координатной плоскости;
- Понимает существование бесконечного числа векторов с одинаковыми компонентами в зависимости от координат начальной точки;
- Применяя формулу расстояния между двумя точками находит модуль вектора;
- Решает разные задачи на компоненты вектора.

Исследуются задания данные в учебнике. При выражении вектора, изображенного на координатной плоскости компонентами, обращается внимание на масштаб на осях x и y , масштабы могут быть даны по разному. Запись вектора \vec{OP} , показанного на рисунке компонентами, будет: $\vec{OP} \langle 2; 4 \rangle$



Задания охватывают навыки записи вектора компонентами, вычисления расстояние между двумя точками, а также по данным компонентам и данным координатам начала или конца определение неизвестной координаты. Даны образцы решений задач разных типов, приведенных в учебнике. Рекомендуется выполнение этих образцов учениками в классе письменно.

Дополнительно можно решить задачи на применение компонентов вектора и теоремы Пифагора.

Эти задачи были даны в Рабочем листе № 1.

Урок 116. Учебник стр. 156, 157. Направление вектора. 1 час

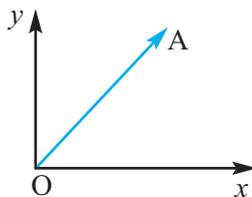


• Для вычисления направления вектора используют тригонометрические отношения.

• Выражая через тангенс находит соответствующий угол.

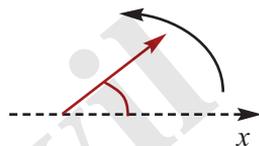
- Направление вектора определяет по углу образованному положительным направлением оси Ox ;
- Решает задачи на направление вектора.

Задачи на направление вектора, во многих случаях определяются указанием положения вектора, которое называется стандартным положением вектора. Вектор стандартного положения - это вектор, начальной точкой которого является начало координат. За направление вектора принимается угол, образованный положительным направлением оси Ox . На рисунке OA - стандартный вектор.



В заданиях учебника, для определения направления вектора пользуются такими понятиями как:

- 1) Направо, налево, вверх, вниз, запад, восток, север, юг, что используют в повседневной жизни.
- 2) По стандартному положению, то есть по углу образованного с осью Ox .



Задачи были даны на выражение разных направлений вектора и на взаимные преобразования между этими формами выражения.

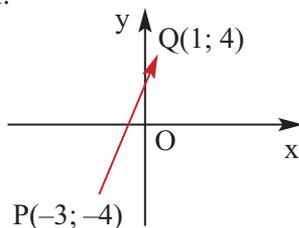
У.10. а) Определите модуль и направление вектора.

Решение: Напишем вектор \vec{PQ} компонентами:

$$\vec{PQ} = \langle 1 - (-3); 4 - (-4) \rangle = \langle 4; 8 \rangle$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{8}{4} = 2 \quad \varphi \approx 64^\circ$$



Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• *Выражает вектор компонентами.*

1. По следующим данным выразить вектор компонентами.

а) Скорость 35 м/сек, под углом 55°

б) Скорость 12 м/сек, на северо-запад

в) Скорость 8 м/сек, на север

г) Перемещение 8 м/сек на север

2. Айдын пройдя 20 км из дому на север, затем 15 км на запад дошел до озера. Вычислите расстояние от дома Айдына до озера по его перемещению.

Рабочий лист № 2

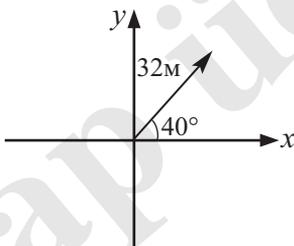
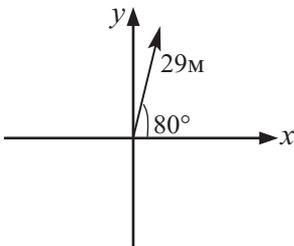
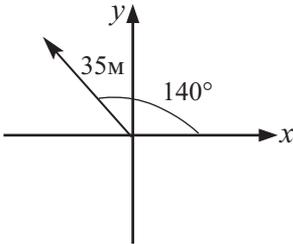
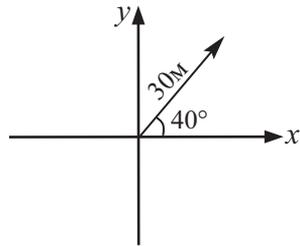
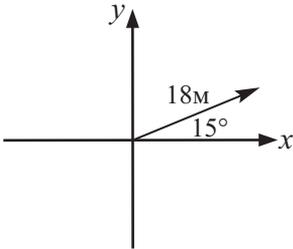
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



- Направление вектора определяет по углу образованному положительным направлением оси Ox .

Напишите векторы с компонентами.



Рабочий лист № 3

Имя _____ Фамилия _____

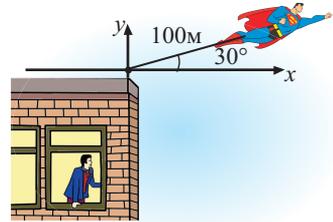
Число _____



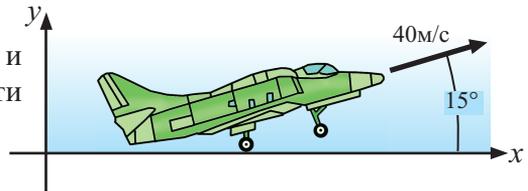
• выражает вектор компонентами.

По следующим данным выразите векторы компонентами.

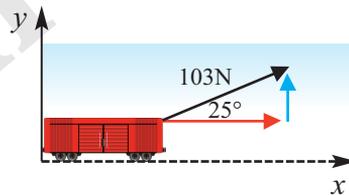
1. Найдите компоненты скорости “Супермена” по x и по y .



2. Найдите горизонтальную и вертикальную компоненту скорости самолета.



3. Найдите горизонтальную и вертикальную компоненту силы, приложенной к вагону.



Урок 117-120. Учебник стр.157-163.

Сложение и вычитание векторов. 4 часа



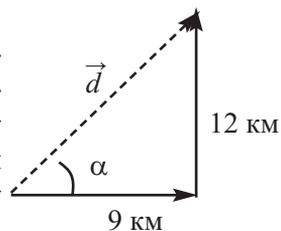
- Для сложения и вычитания векторов пользуется
 - графическими способами;
 - Правилем треугольника (правило многоугольника);
 - Правилем параллелограмма.
- Используя компоненты вектора складывает их;
- При сложении векторов применяет свойство действия сложения;
- Решает задачи на сложение векторов.

! 1. Первоначально выполняется сложение коллинеарных векторов. Ученик должен с помощью линейки измерить длины данных векторов, определить модуль и направление результирующего вектора. Отмечается важность выполнения измерения с малой погрешностью, правильного определения направления результирующего вектора.

Задания **У.1** ясно показывает роль направления, сложения и вычитания векторных величин в реальных ситуациях. В игре с веревками были применены две силы с противоположными направлениями (и эти силы состоят из суммы сил отдельных игроков). В какую сторону сила тяги будет большей, перемещение всех остальных игроков будет в этом же направлении. Особое внимание уделяется навыком графического изображения вектора по модулю и направлению. Это, наряду с развитием пространственных представлений, создает возможность наглядно представить себе складываемые векторы и модуль результирующего вектора. Остаются во внимании навыки выбора учеником для данных измерений. Рекомендуется устно провести проверку с несколькими образцами. Например, как выберете масштаб, чтобы изобразить графически перемещение в 1000 км, силу в 10 Н, скорость 60 км/час?

Ученики понимают, что сложение и вычитание коллинеарных векторов похоже на правила сложения и вычитания над числами. Правила сложения неколлинеарных векторов объясняется графическими и в центре внимания остаётся уровень выполнения всеми учениками.

Правило треугольника. Объясняется, что невозможно найти равнодействующего вектора, показывающего движение 9 км на юг и 12 км на запад, по правилу сложения целых чисел. Этот вектор - вектор соединяющий начальную точку с конечной точкой движения, и его длину можно найти применив геометрические свойства.



1. Для того, чтобы найти модуль равнодействующего, применяем теорему Пифагора: $d = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

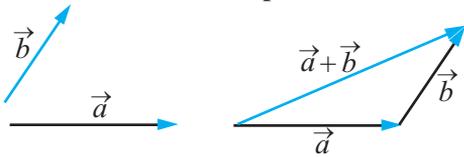
2. Направление определяем тригонометрическим отношением.

$$\operatorname{tg} \alpha = 12/9 \quad \alpha \approx 80^\circ$$

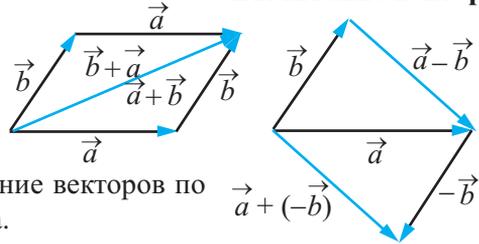
Ответ: Равнодействующий вектор показывает изменение места конечной точки по отношению к начальной на 15 км в направлении юго-запада.

При сложении векторов геометрическими способами - правилам треугольника или правилом параллелограмма очень важно обратить внимание на направление векторов. Не имеет значение какой вектор нарисован первым, а какой вторым. Потому, что при сложении векторов верны свойства сложения.

Сложение векторов



Вычитание векторов



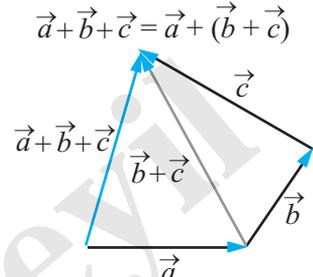
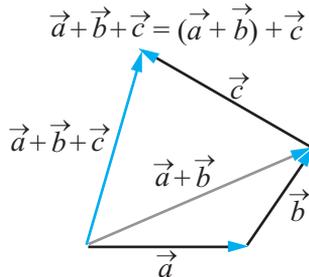
Рассматривается сложение и вычитание векторов по правилу треугольника и параллелограмма.

До сведения учеников доводится выполнение сложения векторов графически путем измерения. Чтобы сложить векторы заданные изображением:

- мы должны измерить каждый из них
- соответственно этим изображениям, рисуем измеренные векторы, соединяя конечную точку одного вектора с начальной точкой другого.
- соединяем начальную и конечную точки.

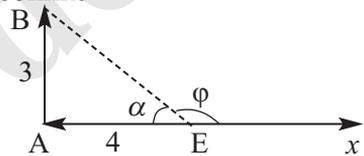
Равнодействующий вектор выражает изменение конечной точки относительно начальной модулем и направлением.

сложение нескольких векторов

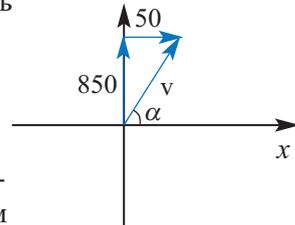


Решения некоторых заданий, данных в учебнике

У.7. $\vec{EA} + \vec{AB} = \vec{EB}$
 $|\vec{EB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 $\text{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75 \quad \alpha \approx 37^\circ, \quad \varphi \approx 143^\circ.$



У.10. (Стр.162). Самолет летит по направлению севера со скоростью 850 км/час. Как изменится скорость и направление самолета под воздействием западного ветра со скоростью 50 км/час? Нарисуйте, покажите. Под действием западного ветра направление движения меняется. Реальная скорость самолета состоит из суммы двух компонентов - скорости 850 км/час по направлению севера (y) и скорости 50 км/час в западном направлении ветра (x).



$|\vec{v}| = \sqrt{850^2 + 50^2} = 865 \text{ км/час}$
 $\text{tg} \alpha = \frac{850}{50} = 17 \quad \alpha \approx 81^\circ$

Применение свойств сложения к векторам исследуется на графических изображениях

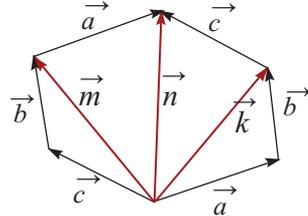
У.13. (Стр.163) а) $\vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB}$

д) $\vec{AB} - \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$

к) $\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

Вычитание векторов приводится к сложению противоположным вектором.

У.14. Векторы, нарисованные красным цветом, замените различными способами на сумму векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и покажите свойства действия сложения над векторами.



Задается вопрос: Как можно определить, какие вектора сложены?

Объясняется, что это можно определить, показав начальные и конечные точки векторов.

1. Слева по направлению часовой стрелки последовательно построены векторы \vec{c} , \vec{b} , \vec{a} таким образом, что конец одного является началом другого, а их равнодействующий вектор это вектор \vec{n} .

$\vec{c} + \vec{b} + \vec{a} = \vec{n}$. С другой стороны, если посмотреть по направлению против часовой стрелки увидим, что $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Отсюда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$. А это показывает верность переместительного свойства сложения.

2. Если рассмотреть картинку слева по направлению часовой стрелки, то увидим, что конец вектора \vec{c} является началом вектора \vec{b} . Сумму этих векторов показывает вектор \vec{m} . $\vec{c} + \vec{b} = \vec{m}$. Конец вектора \vec{m} является началом вектора \vec{a} .

Сумма этих векторов - равнодействующий вектор \vec{n} .

$$\vec{n} = \vec{m} + \vec{a} \text{ или } \vec{n} = \vec{a} + (\vec{c} + \vec{b}).$$

Аналогично, если рассмотреть векторы справа в направлении против стрелки:

$$\vec{k} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{n} = \vec{k} + \vec{c}, \text{ значит, } \vec{n} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Если принять во внимание свойство группировки, то получим:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{c} + \vec{b}).$$

То есть, слагаемые в любой последовательности можно заменить их суммой.

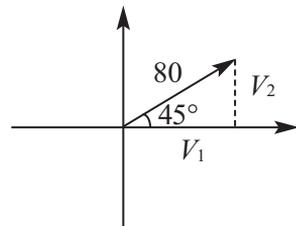
У.16. (стр. 164) Скорость самолета $V_1 = \langle 650 ; 0 \rangle$

скорость ветра

$$V_2 = \langle 80 \cos 45^\circ ; 80 \sin 45^\circ \rangle = \langle 56 ; 56 \rangle$$

Конечная скорость:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \langle 7060 ; 56 \rangle$$



Ветер будет отдалять самолет каждый час на 56 км в направлении на север.

Урок 121. Учебник стр. 165, 166.

Компоненты вектора и тригонометрические отношения

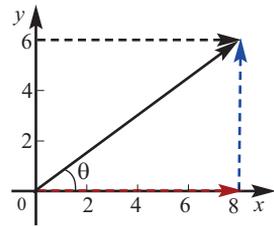


- Компоненты вектора выражает тригонометрическими отношениями;
- Воспользуясь тригонометрическими отношениями решает задачи на векторы.

Нахождение вектора и его компонентов, а также в задачах на определение равнодействующего вектора широко используется тригонометрические отношения. Если движение выражается одним вектором, то воспользуясь прямоугольным треугольником, компоненты легко выразить тригонометрическими отношениями.

$$\text{Перемещение по оси } x: \quad \cos \theta = \frac{d_x}{d} \quad d_x = d \cos \theta$$

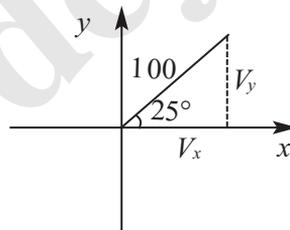
$$\text{Перемещение по оси } y: \quad \sin \theta = \frac{d_y}{d} \quad d_y = d \sin \theta$$



Сложение нескольких неколлинеарных векторов выполняется следующими шагами.

1. Компоненты x и y каждого вектора определяются через тригонометрические отношения.
2. Все компоненты в направлении оси Ox суммируются. Эти суммы - компоненты x и y , равнодействующего вектора.
3. Модуль равнодействующего вектора вычисляется по теореме Пифагора.
4. Угол наклона вектора вычисляется тригонометрическими отношениями.

Как выполняются эти шаги показано на примере 2.



У.3. $\sin 25^\circ = \frac{V_y}{100}$ $\cos 25^\circ = \frac{V_x}{100}$

Здесь:

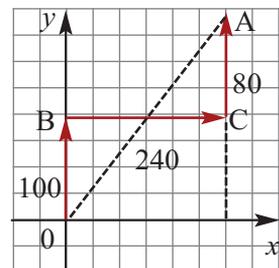
$$V_y = 100 \cdot \sin 25^\circ \approx 0,4226 \cdot 100 = 42,26$$

$$V_x = 100 \cdot \cos 25^\circ \approx 0,9063 \cdot 100 = 90,63$$

У.5. Расстояние OA найдем по теореме Пифагора.

$$|OA| = \sqrt{240^2 + 180^2} = 300 \text{ м.}$$

Отдалился от начальной точки на 300 м.



У.6. Ильгар плавает по реке в перпендикулярном направлении к берегу со скоростью 1 м/сек. Если скорость течения реки 2 м/сек, а ширина 40 метров, найдите:

- время за которое Ильгар переплывет реку;
- расстояние, которое переплывет Ильгар.
- под каким углом по отношению к берегу Ильгар переплывет реку?

Решение:

Скорость, с которой плывёт Ильгар $\vec{v}_1 = \langle 0; 1 \rangle$

Скорость течения реки $\vec{v}_2 = \langle 2; 0 \rangle$

Конечная скорость Ильгара $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \langle 0; 1 \rangle + \langle 2; 0 \rangle = \langle 2; 1 \rangle$

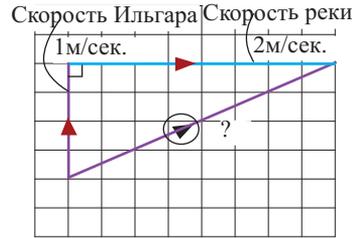
$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,2$ м/сек

а) Если ширина реки была бы 40 м, то время за которое Ильгар переплывет реку будет $t = 40$ сек.

б) Скорость Ильгар относительно берега равняется скорости течения реки: 2 м/сек

с) Ильгар будет плыть со скоростью 2,2 м/сек:

$$S = 40 \cdot 2,2 = 88 \text{ м.}$$

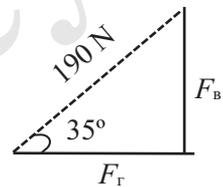


Урок 122. Учебник стр. 167.

Решение задач на применение векторов. 1 час

Решение задач на векторы охватывает такие взаимосвязанные навыки, как графическое представление соответствующее условию данной задачи, сложение векторов, нахождение компонентов. Рекомендуется выполнение задач в качестве самостоятельной как индивидуальной работы, с дальнейшим представлением решения у доски.

У.2. (стр. 166) Горизонтальная компонента силы приложенной Гюльнар $F_r = 190 \cdot \cos 33^\circ \approx 190 \cdot 0,84 = 159\text{Н}$
вертикальная компонента $F_b = 190 \cdot \sin 33^\circ \approx 190 \cdot 0,54 \approx 103,05\text{Н}$



У.5. Лыжник проделал путь сначала 150 м под углом 120° , а потом 200 м под углом 30° . Определите вектор перемещения лыжника.

Решение:

$$|d_1| = 150 \quad d_{1x} = -150 \cdot \cos 60^\circ = -75$$

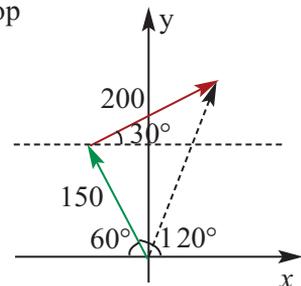
$$d_{1y} = 150 \cdot \sin 60^\circ = 75\sqrt{3} \approx 129,9$$

$$|d_2| = 200 \quad d_{2x} = 200 \cdot \cos 30^\circ = 100\sqrt{3} \approx 173,2$$

$$d_{2y} = 200 \cdot \sin 30^\circ = 100$$

$$d_x = -75 + 173,2 = 98,2 \quad d_y = 129,9 + 100 = 229,9$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{98,2^2 + 229,9^2} = 250 \text{ (м)}$$



Рабочий лист № 4

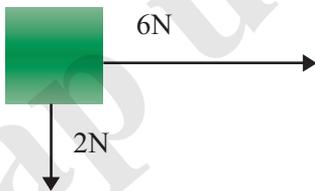
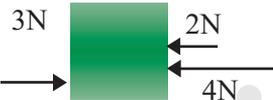
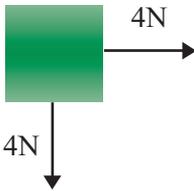
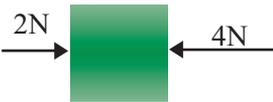
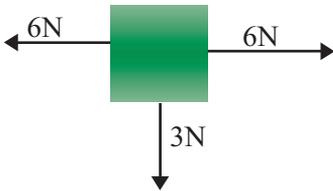
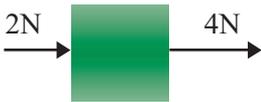
Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Определяет равнодействующий вектор коллинеарных и неколлинеарных векторов.

Выберите масштаб. Представьте графически равнодействующую силу. Определите абсолютное значение и направление.



Рабочий лист № 5

Имя _____ Фамилия _____

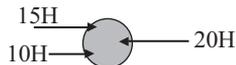
Число _____



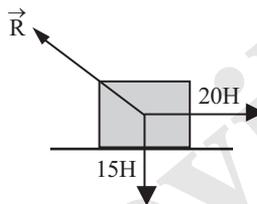
• Определяет равнодействующий вектор коллинеарных и неколлинеарных векторов.

1. На данном рисунке слева на тело действуют силы в 15 Н и 10 Н, а с права в 20 Н.

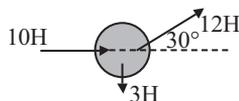
Чему равна равнодействующая сил, действующих на тело?



2. Тело находится в покое под действием трёх сил. Если сила, направленная направо равна 20 Н, а сила направленная вниз будет равна 15 Н, то определите направление и абсолютную величину силы \vec{R} .



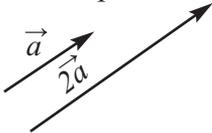
3. Имеются три силы, действующие на тело: слева в 10 Н, снизу - в 3 Н и сила 12 Н, под углом наклона 30° . Найдите вертикальную и горизонтальную компоненты результирующего этих сил.



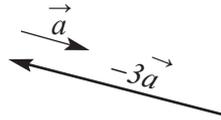
Урок 123-125. Учебник стр. 168, 174. Умножение вектора на число. Обобщающие задания. 3 часа

Умножение какого нибудь вектора на скалярное число объясняется на примерах, выбирая положительное целое, отрицательное целое, и дробные числа.

1) Изображен вектор $2\vec{a}$, полученный увеличением длины вектора \vec{a} в 2 раза. Эти векторы одинаково направлены.



2) На рисунке изображен вектор $(-3\vec{a})$, полученный умножением длины вектора \vec{a} на (-3) . Эти векторы противоположно направлены



Отмечается справедливость свойств действия умножения при умножении вектора на число. Здесь опять-таки обращается внимание на то, что данный вектор и вектор полученный после умножения на число изображаются одинаковым масштабе.

Другими словами, рекомендуется выполнять умножение вектора на число наблюдая графические изображения. Ученик предлагает и убеждается, нарисованными изображениями, что вектор $2\vec{a}$ в два раза длиннее вектора \vec{a} , а вектор \vec{a} в два раза короче вектора $2\vec{a}$.

У.1.

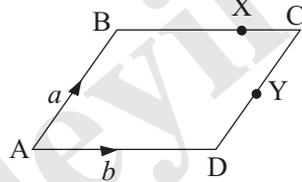
a) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{a}$

d) $\vec{LI} + \vec{LE} = -4\vec{a} - \vec{b}$

У.10.

2) $\vec{AX} = \vec{AB} + \vec{BX} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

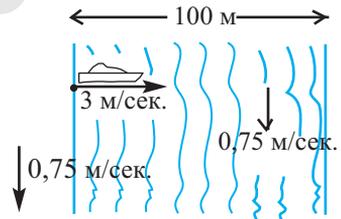
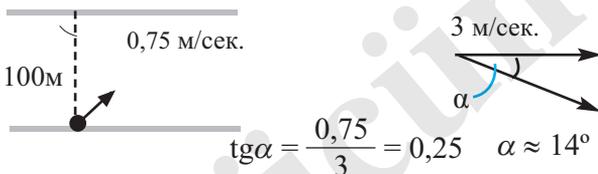
3) $\vec{BY} = \vec{BC} + \vec{CY} = \vec{b} + \left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$



У.5.(Стр. 171). а) Чему равна скорость?

$$v = \sqrt{3^2 + 0,75^2} \approx 3,1 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}}\right)$$

б) Под каким углом проплывет катер реку?

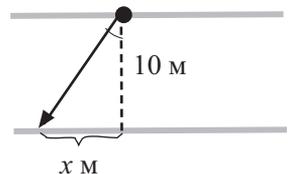


с) За какое время катер проплывет реку?

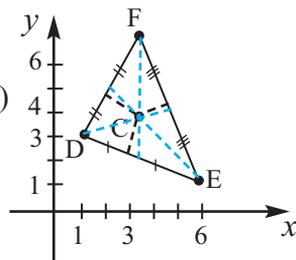
$$100 : 3 = 33 \frac{1}{3} \text{ секунд.}$$

д) На каком расстоянии от места назначения остановится катер, если будет двигаться в запланированном направлении?

$$x = 100 : 3 \cdot 0,75 = 25 \text{ (м)}$$



У.8. (стр. 171) Точка пересечения медиан называется центром тяжести треугольника. Точки D (1; 3) и E (6; 1) являются вершинами треугольника $\triangle DEF$, C (3; 4) - показывает центр тяжести. Определите вершины F.



Точку пересечения прямой FC со стороной треугольника DE обозначим через M. Точка M - средняя точка DE.

$$x_m = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{1 + 6}{2} = 3,5 \quad y_m = \frac{y_D + y_E}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

M (3,5 ; 2)

По свойству медиан FC : CM = 2 : 1

Пусть F (x ; y), тогда

$$FC = \langle 3 - x ; 4 - y \rangle = 2 \langle 0,5 ; -2 \rangle$$

$$\text{Отсюда } \begin{cases} 3 - x = 1 & x = 2 \\ 4 - y = -4 & y = 8 \end{cases} \quad \text{Ответ : F (2 ; 8)}$$

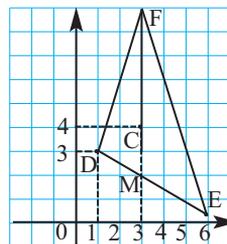
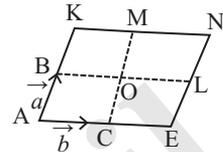


Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 4.2

№	Критерии	Замечания
1	Различает векториальные, скалярные и безымянные величины	
2	Рисует вектор в данном направлении и по данной длине	
3	Измерениями определяет модуль и направление вектора	
4	Изображает вектор в координатной плоскости	
5	Вектор выражает компонентами	
6	Определяет длину и направление вектора	
7	Разными способами складывает и вычитает векторы	
8	Решает задачи на умножение вектора и на число	
9	Решает разные задачи на векторы	

Урок 126. Задания суммативного оценивания по разделу 4.2

1. Найдите координаты точки В, если $(-3; 7)$ и $\vec{AB} = \langle 8; -11 \rangle$.
2. Даны точки А $(3; -2)$ и В $(5; 4)$. Напишите вектор \vec{AB} компонентами.
3. В $\triangle ABC$ даны $AB = 15$, $BC = 20$, $\angle B = 90^\circ$, найдите $|\vec{AB} + \vec{BC}|$.
4. Известно, что векторы $\vec{a}(4; k+1)$ и $\vec{b}(k-1; 6)$ коллиениарны. Найдите k .
5. Вычислите длину вектора $\vec{a}(-5; 12)$.
6. Даны точки А $(5; 2)$, В $(8; 7)$, С $(1; 3)$. Найдите координаты точки D, если $\vec{AB} = \vec{CD}$.
7. Напишите компоненты вектора \vec{AB} и вычислите длину, если начало А $(-1; 3)$, а конец В $(5; 5)$.
8. Рисунок состоит из конгруэнтных параллелограммов. Если $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$, то выразите векторы \vec{AM} , \vec{AL} , \vec{NE} через \vec{a} и \vec{b} .



9. Если $\vec{a} = \langle 3; 2 \rangle$. Напишите компоненты векторов:
 - a) $2\vec{a} + \vec{b}$
 - b) $\vec{a} + 2\vec{b}$
 - b) $3\vec{a} + 4\vec{b}$

10. Скорость катера в стоячей воде равна 4 м/сек. Ширина реки равна 60 м, скорость течения 1 м/сек. Найдите скорость катера.
 - a) по течению
 - b) против течения
 - c) на сколько градусов изменится направление движения, если катер начнет двигаться перпендикулярно течению реки.
 - d) за сколько секунд катер переплывет реку?
11. Точка движется под углом 30° под действием силы $F = 40$ Н. Найдите горизонтальную и вертикальную компоненты этой силы.

12. Туристы, двигаясь 150 м на юг, 80 м на восток и еще 90 м на север дошли до озера. Найдите расстояние от лагеря до озера. Вычислите $\angle DAB$. Выразите вектор \vec{AD} через \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{CD} .

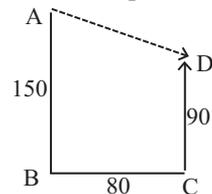


Таблица планирования по 5-му разделу

Стандарты содержания	Урок	Тема	Часы	Учебник стр.
2.1.3. Применяет свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий при решении задач. 1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (банковские операции, изменение цены продажи). 3.2.1. Знает понятия параллельного переноса на плоскости и применяет его для преобразования фигур. 3.2.2. Знает понятие преобразование движения и получает две конгруэнтные фигуру преобразованием движения.	127, 128	Числовые последовательности	2	173-175
	129-132	Арифметическая прогрессия. Формула n -го члена арифметической прогрессии. Свойства членов арифметической прогрессии	4	176-182
	133,134	Сумма n -го первых членов арифметической прогрессии	2	183-186
	135	Геометрическая прогрессия	1	187, 188
	136,137	Формула n -го члена геометрической прогрессии	2	189-191
	138	Свойства членов геометрической прогрессии	1	192
	139,140	Сумма n - первых членов геометрической прогрессии	2	193-195
	141	Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $ q < 1$	1	196, 197
	142, 143	Обобщающие задания	2	198,199
	144-147	Геометрические преобразования. Движение	4	200-205
	148	Обобщающие задания	1	206
149	Задания суммативного оценивания по 5-му разделу	1		
	Всего		23	



Стандарты содержания

2.1.3. Применяет свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий при решении задач.

1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (банковские операции, изменение цены продажи).



Навыки учеников

- Для числовых последовательностей пишет рекуррентную и эксплицитическую формулы.
- Для арифметической прогрессии пишет рекуррентную и эксплицитическую формулу.
- Применяет формулу суммы n -первых членов арифметической прогрессии.
- Решает задачи на нахождение членов, числа членов и разности арифметической прогрессии;
- Пишет рекуррентную и эксплицитическую формулу геометрической прогрессии;
- Решает задачи на нахождение суммы членов, членов, знаменателя и числа членов геометрической прогрессии.



Словарь

числовая последовательность, член числовой последовательности, n -ый член последовательности, рекуррентная формула (правило), эксплицитическая формула (правило), арифметическая прогрессия, сумма n членов арифметической прогрессии, среднее арифметическое, геометрическая прогрессия, сумма n членов геометрической прогрессии, среднее геометрическое, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.



Дополнительные ресурсы
Рабочие листы, интернет-адреса:

https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number
www.ixl.com/math/precalculus/find-a-recursive-formula

Урок 127, 128. Учебник стр. 173-175
Числовые последовательности. 2 часа

Мотивация. Задание исследования используется в качестве мотивации. Ученики высказывают мнения по поводу правила построения апельсинов. Есть ли связь с номером каждого ряда сверху вниз и с числом апельсинов этого ряда.

1.	2.	3.	4.	5.
1	4	9	16	25

Число апельсинов каждого слоя равно квадрату соответственного номера слоя

Записывается формула для определения числа апельсинов любого слоя, построенных по этому правилу.

1, 4, 9, 16 ... Эти числа называются квадратными числами. Как видно, число апельсинов каждого слоя собранных в виде пирамиды, стало возможным построить возведением в квадрат. Вместе с квадратными числами используется также понятия как треугольные, пятиугольные, шестиугольные числа. Со временем - при решении задач, мы познакомимся с этими числами



Обучение. Для обучения, рекомендуется задавать задания в нижеследующей последовательности.

1. В следующих последовательностях установите правило и определите следующий член..

- a) 1, 3, 5, 7, 9, ... b) 2, 5, 8, 9, ...
c) 1, 4, 9, 16, ... d) 0, 3, 8, 15, ...



Доводится до сведения учеников, что члены арифметической прогрессии могут меняться с определенной постоянной разностью, а также по меняющемуся правилу номера члена. Рассматриваются нижеследующие примеры:

- a) $\begin{matrix} 5, & 8, & 11, & 14 & \dots \\ & \wedge & \wedge & \wedge & \\ & 3 & 3 & 3 & \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} 1, & 3, & 7, & 11, & \dots \\ & \wedge & \wedge & \wedge & \\ & 2 & 3 & 4 & \end{matrix}$

До сведения учеников доводится, что числовые последовательности задаются следующим образом:

- выражением каждого следующего члена предыдущим определенным правилом изменения последовательности
- заменой каждого члена в зависимости от своего порядкового номера (например, треугольные числа, квадратные числа, как при построении треугольника из апельсинов)
- формулой n -го члена.

✓ Ученикам может быть задан вопрос: “Определите правило изменения членов нижеследующих последовательностей и напишите формулу для записи любого члена”. а) 3, 6, 9, 12 ... б) 1, 3, 5, 7, ... в) 3, 5, 7, ...

Ученики, определив правило изменения каждого члена по предыдущему, выражают члены последовательности таким образом: $a_2 = a_1 \cdot 3$, $a_3 = a_2 \cdot 3$, ... и т.д.

✓ Последовательности могут быть заданы и моделью. Нарисуйте следующую модель. Из скольких кругов будет состоять последовательность на 10-ом, 18-ом шагу модели.



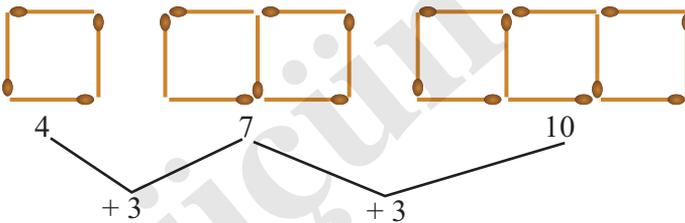
Решение некоторых заданий данных в учебнике.

У.6. В последовательности заданной формулой $a_n = n^2 - 8n$ есть ли член равный: а) 20; б) 48; в) -15; д) 0; е) 4
Если есть, чему равен номер этого члена?

Решение: а) $n^2 - 8n = 20$ $n^2 - 8n - 20 = 0$ $(n - 10)(n + 2) = 0$
 $n = 10$ $n = -2$. Так как $10 \in \mathbb{N}$, то у данной последовательности есть член равный 20 и этот член a_{10} .

е) Так как корни уравнения $n^2 - 8n = 4$ не натуральные числа, то у последовательности $a_n = n^2 - 8n$ нет члена равного 4.

Д.7. Число спичек на каждом шагу выражается числом.



Как видно на каждом шагу число спичек увеличивается на 3 значит в счетном составе спичек есть коэффициенты числа 3 : $4 = 3 \cdot 1 + 1$; $7 = 3 \cdot 2 + 1$; $10 = 3 \cdot 3 + 1$; $? = 3 \cdot 4 + 1$ (13), и т.д.

Значит, на любом шагу число спичек можно вычислить с помощью формулы $3n + 1$.

! Для формирования навыков создания новой числовой последовательности самым выгодным способом являются пользование уравнениями линейных функций. Например, к утроенному произведению числа прибавьте два. Последовательность созданная правилом $3a + 2$ в общем случае записывается как $3a_n + 2$. Членами этой последовательности будут числа 5, 8, 11, 14, ... и т.д. А теперь обратим внимание на навыки определения формулами последовательностей, которые могут выражены уравнениями линейных функций.

Например, в последовательности 21, 27, 33, 39, 45, разность каждого члена с предыдущим равна 6. Запишем каждый член как $6n + b$. По первому члену можно определить что число $b = (21 - 6)$, то есть $b = 15$. Значит, любой член этой последовательности можно найти по правилу $6n + 15$. Ученикам демонстрирует последовательности, как показано ниже и предлагают определить правило изменения последовательности. Устными вычислениями ученики определяют эти правила. Задания могут быть выполнены и как групповая работа.

- 7, 12, 17, 22, 27, ... $2 + 5n$
- 100, 115, 130, 145, 160, ... $15n + 85$
- 2,5; 4,5; 6,5; 8,5; 10,5; ... $(4n + 1)/2$
- -12, -7, -2, 3, 8, ... $5n - 17$
- 4, -2, -8, -14, -20, ... $10 - 6n$

! Формулу, показывающую зависимость числа диагоналей от числа сторон многоугольника, определяют написав последовательность.

Число сторон:	1	2	3	4	5	6	7	...
Число диагоналей:	0	0	0	2	5	9	14	...



1. Невозможно провести диагональ из данной вершины к соседним вершинам многоугольника. Значит, число вершин из которых можно провести диагонали будет $n - 3$.

2. Если учесть, что многоугольник имеет n вершин. Тогда число диагоналей будет $n(n - 3)$.

3. Однако диагональ, исходящая из одной вершины охватывает и другую вершину, учитывая, что одна диагональ считается дважды, общее число делим на 2. Число диагоналей можно найти по правилу $\frac{n(n - 3)}{2}$.

У.12.

$$3. a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{если } a_n - \text{четное число;} \\ 3a_n + 1, & \text{если } a_n - \text{нечетное число;} \end{cases}$$

По условию, если a_1 четное число, то нужно воспользоваться I формулой, если же a_1 нечетное число, то II формулой. Если $a_1 = 11$, то воспользуемся формулой $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 11 + 1 = 33 + 1 = 34$. Тогда $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{34}{2} = 17$

$a_n = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 17 + 1 = 52$ и т.д.

Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Для числовой последовательности пишите рекуррентную и эксплицитную формулы.

1. Принимая во внимание изменение членов последовательности линейной зависимостью, напишите формулой правило изменения последовательности.

a) 4, 8, 12, 16, 20,

b) 5, 10, 15, 20, 25,

c) 11, 21, 31, 41, 51,

d) 7, 9, 11, 13, 15,

e) 5, 9, 13, 17, 21, ...

f) 20, 19, 18, 17, 16, ...

g) 50, 44, 38, 32, 26,

h) 22, 25, 28, 31, ...

i) 8, 7, 6, 5, 4,

j) -4, 0, 4, 8, 12, ...

k) 7, 12, 17, 22, 27, ...

l) 3, -2, -7, -12, ...

2. Напишите последовательность изменения числа спичек, которую используют для создания фигур.

• Для того, чтобы найти число используемых спичек в фигуре с любым номером, определите правило и напишите формулой.

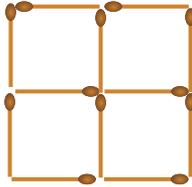
• Сколько спичек будет в 10-ой фигуре, созданной по этому правилу?

1 Фигура



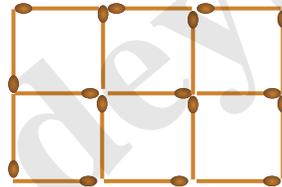
7 штук

2 Фигура



12 штук

3 Фигура



17 штук

3. Измерения сторон прямоугольника изменяются по правилу данному на рисунке.

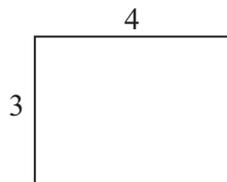
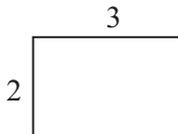
Определите правило, выражающее зависимость площади прямоугольника от номера последовательности.

Найдите площадь 8-ой фигуры, измерения сторон которого изменяются по этому правилу.

1.

2.

3.



Урок 129-132. Учебник стр. 176-182. Арифметическая прогрессия.

Формула n -го члена арифметической прогрессии.

Свойства членов арифметической прогрессии. 4 часа



- Определяет правило изменения арифметической прогрессии;
 - Для арифметической прогрессии пишет рекуррентную и эксплицитную формулу;
 - Применяет формулу суммы n членов арифметической прогрессии;
 - Знает и применяет свойства членов арифметической прогрессии;
 - Решает задачи на нахождение членов, числа членов, суммы членов, разности арифметической прогрессии.
 - Решает реальные жизненные задачи на арифметическую прогрессию.
- www.ixl.com/math/precalculus/find-a-recursive-formula



Рекурсив - это латинское слово, смысл которого $a_n = a_{n-1} + 1$ степень - периодически меняющийся. В последовательностях имеется в виду формула, выражающая каждый член через предыдущий.

Эксплицит - это латинское слово означает явный. Математический смысл “Непосредственное определение”- подразумевает формулу позволяющую определить любой член последовательности.



$a_3 = a_2 + 1$ степень
 $a_2 = a_1 + 1$ степень



Обсуждениями объясняется правило изменение арифметической прогрессии. Ученикам поручается самостоятельно написать прогрессии, отвечающие условиям.

Построить возрастающие и убывающие арифметические прогрессии:

- С положительными целыми числами
- С отрицательными целыми числами
- С дробными числами
- С десятичными дробями

Ученики понимают, что для составления арифметической прогрессии должны определить первый член и разность прогрессии и поэтому для создания каждой прогрессии начинают с определения этих показателей.

Выполняются задания с помощью рекуррентных и эксплицитных формул. Ученик пишет последовательно несколько членов числовой последовательности, а также любой член последовательности.



Рекомендуется уделить внимание занятиям по созданию последовательности применяя технологию. Рекомендуется с помощью программы “Excel” вводить формулу изменения построить электронную таблицу показывающую позицию члена, номер последовательности и сам член.

	A	B
1		
2	1	=A2·3+7
3	=A2+1	=A3·3+7
4	=A3+1	=A4·3+7
5	=A4+1	=A5·3+7
6	=A5+1	=A6·3+7
7	=A6+1	=A7·3+7
8	=A7+1	=A8·3+7
9	=A8+1	=A9·3+7
10	=A9+1	=A10·3+7

	A	B
1		
2	1	10
3	2	13
4	3	16
5	4	19
6	5	22
7	6	25
8	7	28
9	8	31
10	9	34



Ученики обращают внимание на различие числовой последовательности и арифметической прогрессии.

Например а) 1, 3, 7, 11, ... с) 1, 4, 9, 16, ... - это числовые последовательности заданные определенным правилом, однако так как в этих последовательностях нет постоянной разности, то они не являются арифметической прогрессией.



Методические рекомендации и решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.1. (стр. 178) б) $-6; -2; 2; \dots$

Рекуррентное правило: $a_1 = -6$ вэ $a_2 = -2$, $d = a_2 - a_1 = -2 - (-6) = 4$

$a_{n+1} = a_n + d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = -6$

Эксплицитическое правило: по формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$ и $a_1 = -6$, $d = 4$ получим,
 $a_n = -6 + 4(n-1) = 4n - 10$

$a_n = 4n - 10$

У.4. Если между числами 4 и 40 добавить еще 4 числа, то арифметическая прогрессия будет состоять из 6 членов: 4; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; 40. $a_1 = 4$, $a_6 = 40$.

Воспользуемся формулой $d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$: $d = \frac{a_6 - a_1}{6 - 1} = \frac{40 - 4}{5} = \frac{36}{5} = 7,2$

$a_2 = a_1 + d = 4 + 7,2 = 11,2$ $a_3 = a_2 + d = 11,2 + 7,2 = 18,4$

$a_4 = a_3 + d = 18,4 + 7,2 = 25,6$ $a_5 = a_4 + d = 25,6 + 7,2 = 32,8$

У.6. Для каких членов арифметической прогрессии $-40; -37; \dots$ выполняется условие: а) $a_n > 0$, б) $a_n < 0$?

а) Для выполнения условия $a_n > 0$ напишем формулу зависимости a_n от n :

В формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$ $a_1 = -40$, $d = a_2 - a_1 = -37 - (-40) = 3$

$a_n = -40 + 3(n-1) > 0$.

$3(n-1) > 40 \Rightarrow$

$3n > 43 \Rightarrow n > 14\frac{1}{3}$

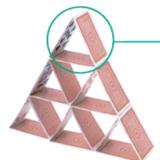
n - натуральное число и больше $14\frac{1}{3}$. Наименьшее натуральное число больше $14\frac{1}{3}$ равно 15. Поэтому при $n \geq 15$, $a_n > 0$.

У.9. б) Покажите, что последовательность заданная формулой $x_n = 2n - 5$ является арифметической прогрессии. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

Решение. Найдем разность $(n+1)$ -го и n -го членов.

$x_{n+1} - x_n = (2(n+1) - 5) - (2n - 5) = 2n + 2 - 5 - 2n + 5 = 2$. Как видно, для любого значения n разность $(n+1)$ -го и n -го членов, то есть разность двух соседних членов постоянная (в этом случае равна 2). Значит, последовательность заданная формулой $x_n = 2n - 5$ - арифметическая прогрессия с разностью равной 2, то есть $d = 2$. Первый член этой прогрессии $x_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$.

У.17. Внимание учеников привлекается к разным экологическим, геодезическим изменениям связанным с нашей планетой. В задаче **У.18** доводится до сведения последовательные изменения в архитектуре. Рекомендуется нарисовать картину к задаче про архитектуру. Для того, чтобы украсить грани конструкции в виде пирамиды используются различные узоры, правило паркетирования. Ученики наблюдают эти изменения в архитектуре увиденных разных зданий, фотографируют и определяют правило.



Пирамида при входе в музей Лувр в Париже.



У.20. а) $a_1; a_2; a_3$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 & a_1 = ?; a_2 = ?; a_3 = ? \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 28 \end{cases}$$

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Rightarrow a_1 + d = 4$$

$a_1 + d = a_2 = 4$. Учитывая последнее равенство, получим:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 8 \\ a_1 \cdot a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 1, \text{ то } a_3 = 7 \\ a_1 = 7, \text{ то } a_3 = 1. \end{matrix}$$

Итак последовательность чисел 1; 4; 7 и 7; 4; 1 удовлетворяет условию данной задачи.

Важно развивать исследовательские способности, увидеть эти закономерности при определенных изменениях над рисунками, реальными объектами, в реальных жизненных ситуациях. Ученик может применять свойства последовательностей над числами. Однако в реальных жизненных ситуациях могут быть трудности в создании связи. Поэтому рекомендуется отдать предпочтение заданиям, где проблема задана текстом, таблицей, картиной, моделью. Обучение арифметической прогрессии рекомендуется проводить взаимосвязано с линейной функцией. И линейная функция, и арифметическая прогрессия отражают постоянное изменение. Последовательность - это линейная функция определенная на множестве натуральных чисел. На занятиях можно исследовать схожие и отличительные черты этой связи. У.21, У.22, У.27. (стр. 180).

У.7. (стр. 182). По теореме Фалеса, если параллельные прямые пересекающие стороны угла отсекают на одной стороне угла равные отрезки, то и на другой стороне отсекают равные отрезки.

$$BM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3A \Rightarrow CN_1 = N_1N_2 = N_2N_3 = N_3D$$

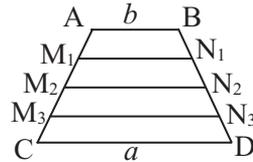
А это позволяет определить, что отрезки, M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 являются средними линиями соответствующих трапеций. С легкостью можно увидеть, что отрезок M_2N_2 средняя линия трапеции $ABCD$:

$$M_2N_2 = \frac{BC + AD}{2} = \frac{6 + 18}{2} = 12 \text{ см}$$

Также можно показать, что отрезок M_1N_1 является средней линией трапеции M_2BCN_2 , а отрезок M_3N_3 - средней линией трапеции AM_2N_2D . Тогда:

$$M_1N_1 = \frac{M_2N_2 + BC}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9 \text{ см}$$

$$M_3N_3 = \frac{M_2N_2 + AD}{2} = \frac{18 + 12}{2} = 15 \text{ см}$$



Таким образом: $M_1N_1 = 9$ см; $M_2N_2 = 12$ см; $M_3N_3 = 15$ см. То есть отрезки M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 образуют арифметическую прогрессию. Отметим, что если добавить сюда длины верхнего и нижнего оснований трапеции, то длины всех указанных параллельных отрезков образуют последовательность членов арифметической прогрессии: 6; 9; 12; 15; 18.

У.8. Если $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}, \frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 2$

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2}; \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{b}{c} + \frac{b}{a} = b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = b \cdot \frac{2}{b} = 2$$

У.12. Известно, что a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что последовательность $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2$, тоже образует арифметическую прогрессию. По свойству арифметической прогрессии $b = \frac{a+c}{2}$.

Покажем, что верно равенство: $a^2 + ac + c^2 = \frac{a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2}{2}$

Примем во внимание, что $b = \frac{a+c}{2}$ и упростим выражение $\frac{a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2}{2} &= \frac{a^2 + b(a+c) + 2b^2 + c^2}{2} = \\ &= \frac{a^2 + \frac{a+c}{2}(a+c) + 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + c^2}{2} = \frac{2a^2 + (a+c)^2 + (a+c)^2 + 2c^2}{4} = \\ &= \frac{4a^2 + 4ac + 4c^2}{4} = a^2 + ac + c^2 \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Урок 133, 134. Учебник стр. 183-186.

Сумма n -первых членов арифметической прогрессии. 2 часа.



- Применяет формулу n -первых членов арифметической прогрессии ;
- Формулу сумму n -первых членов арифметической прогрессии применяет в задачах реальных жизненных ситуаций.

На примере 5, 8, 11, 14, ... объясняется смысл “сумма n -первых членов”. Высказывание сумма членов прогрессии имеет в виду $5 + 8 + 11 + 14 + \dots$ и используется для нахождения суммы n -первых членов арифметической прогрессии.

Для вышепоказанной арифметической прогрессии:

$S_1 = t_1$	$S_2 = t_1 + t_2$	$S_3 = t_1 + t_2 + t_3$	$S_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$
$S_1 = 5$	$S_2 = 5 + 8$	$S_3 = 5 + 8 + 11$	$S_4 = 5 + 8 + 11 + 14$
	$S_2 = 13$	$S_3 = 24$	$S_4 = 38$
сумма первых 2-х членов	сумма первых 3-х членов	сумма первых 4-х членов	

Вывод двух разных записей формулы суммы n -первых членов арифметической прогрессии проводится коллективно.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \qquad S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}$$

Решаются разные задачи по данным - суммы n -первых членов, первого члена, разности, по числу членов арифметической прогрессии.

Для диагностического определения знаний, могут быть заданы вопросы нижеуказанного типа. (также могут быть даны рабочие листы, охватывающие вопросы этого типа)

В арифметической прогрессии $S_{10} = 100$, $a_1 = 1$ и $d = 2$. Как можно, не пользуясь формулой найти сумму первых 11-ти членов прогрессии.

Поняв, что можно добавить к этой сумме 11-ый член, приблизительно можно ответить правильно. Как указано внизу. $S_{11} = S_{10} + a_{11}$

Из формулы $a_{11} = a_1 + (n-1)d$ можно найти a_{11} : $a_{11} + 10 \cdot 2 = 21$.

Тогда $S_{11} = 100 + 21 = 121$.



Решение некоторых заданий данных в учебнике.

Сумма n -первых членов арифметической прогрессии.

У.2. $a_n = 2n - 3$ а) $S_{15} = ?$ б) $S_n = ?$

$$а) S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{-1 + 27}{2} \cdot 15 = 13 \cdot 15 = 195$$

$$б) S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-1 + 2n - 3}{2} \cdot n = \frac{2n - 4}{2} \cdot n = (n - 2) \cdot n = n^2 - 2n$$

Замечание: С помощью формулы $S_n = n^2 - 2n$ можно проверить правильность ответа в пункте а) $n = 15 \Rightarrow S_{15} = 15^2 - 2 \cdot 15 = 225 - 30 = 195$.

У.5. Найдите сумму.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$a_1 = 1, a_n = n \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

c) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{1+2n-1}{2} \cdot n = n \cdot n = n^2$

У.6. c) Найдем сумму натуральных чисел меньших 100 и делящихся на 3 :
 Последовательность чисел делящихся на 3 задается формулой $a_n = 3n$. Согласно условию $1 \leq a_n < 100, 1 \leq 3n < 100, \frac{1}{3} \leq n \leq 33 \frac{1}{3}$.

Значит в арифметической прогрессии заданной формулой $a_n = 3n$ мы должны найти сумму первых 33-х членов. Так как:

$$a_1 = 3, a_{33} = 99, \text{ то } S_{33} = \frac{3+99}{2} \cdot 33 = 1683$$

У.7. $a_1 = 7, d = 1,5, S_{5-11} = ?$

$$S_{11} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{S_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}}_{S_{5-11}}$$

$$a_1 = 7, d = 1,5, S_{5-11} = ?$$

$$S_{11} = S_4 + S_{5-11} \Rightarrow S_{5-11} = S_{11} - S_4$$

Значит для того, чтобы найти S_{5-11} нужно найти S_{11} и S_4 .

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{14 + 15}{2} \cdot 11 = 14,5 \cdot 11 = 159,5$$

$$S_4 = \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = \frac{14 + 15}{2} \cdot 4 = 18,5 \cdot 2 = 37$$

$$S_{5-11} = 159,5 - 37 = 122,5$$

У.12. a) $1 + 4 + 7 + \dots + x = 70, \quad x = ?$

$$a_1 = 1, d = 3, a_n = x, \quad S_n = 70$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 3(n-1) = x \Rightarrow 3(n-1) = x-1 \Rightarrow$$

$$n-1 = \frac{x-1}{3}, \quad n = \frac{x+2}{3}$$

$$S_n = \frac{1+x}{2} \cdot n = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+2}{3} = 70 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 70 \cdot 6 = 420$$

$$x^2 + 3x + 2 = 420$$

$x^2 + 3x - 418 = 0 \Rightarrow x_1 = 19, x_2 = -22$. Так как $x > 0$, то $x = -22$ не удовлетворяет условию задачи. Значит $x = 19$

У.14. Обратите внимание ! $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$
 $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$

Если вычтем почленно эти равенства, то получим: $a_n = S_n - S_{n-1}$.

b) $S_n = 2n^2 + n, a_5 = ? a_{11} = ?$

$$\text{По формуле } a_5 = S_5 - S_4 = 2 \cdot 5^2 + 5 - (2 \cdot 4^2 + 4) = 55 - 36 = 19$$

$$a_{11} = S_{11} - S_{10} = 2 \cdot 11^2 + 11 - (2 \cdot 10^2 + 10) = 11(22 + 1) - 10(20 + 1) = 11 \cdot 23 - 10 \cdot 21 = 253 - 210 = 43$$

Рабочий лист № 2

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Решает задачи на нахождение членов, числа членов и разности арифметической прогрессии.

1. Найдите отмеченные члены арифметической прогрессии.

a) $1, 4, 7, \dots, (a_{10})$

b) $-8, -6, -4, \dots, (a_{12})$

c) $8, 4, 0, \dots, (a_{20})$

d) $-20, -15, -10, \dots, (a_7)$

e) $40, 30, 20, \dots, (a_{16})$

f) $-6, -8, -10, \dots, (a_{11})$

g) $2, 2\frac{1}{2}, 3, \dots, (a_{20})$

h) $6, 5\frac{3}{4}, 5\frac{1}{2}, \dots, (a_{12})$

i) $-7, -6\frac{1}{2}, -6, \dots, (a_{13})$

j) $0, -5, -10, \dots, (a_{15})$

2. По арифметической прогрессии $k, \frac{2k}{3}, \frac{k}{3}, 0, \dots$

a) найдите a_6 .

b) найдите a_n .

c) если $a_{20} = -16$, найдите k .

Рабочий лист № 3

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Применяет формулу n - первых членов арифметической прогрессии .

1. a) $1, 3, 5, \dots, (S_8)$

b) $2, 5, 8, \dots, (S_{10})$

c) $10, 7, 4, \dots, (S_{20})$

d) $-8, -7, -6, \dots, (S_{14})$

e) $-2, 0, 2, \dots, (S_{18})$

f) $-20, -16, -12, \dots, (S_5)$

g) $40, 35, 30, \dots, (S_6)$

h) $12, 10, 12, 9, \dots, (S_{11})$

i) $-8, -5, -2, \dots, (S_{12})$

2. Найдите сумму пяти членов арифметической прогрессии, если первый член равен 6, а разность -3 .

3. В последовательности, заданной суммой членов $25 + 19 + 13 + \dots$, найдите число членов последовательности сумма которых равна -20 .

4. Найдите 15-ый член и сумму первых 15-ти членов арифметической прогрессии, первые три члена которой равны 1; 4 и 7.

5. Найдите 12-ой член и сумму первых 12 членов арифметической прогрессии, первые три члена которой равны -22 ; -19 ; -17 .

6. Первый член арифметической прогрессии равен -7 , а разность прогрессии $\frac{1}{2}$. Сумма скольких первых членов этой прогрессии равна 52,5 ?

Урок 135-138. Учебник стр. 187-192. Геометрическая прогрессия

Формула n -го члена геометрической прогрессии.

Свойства членов геометрической прогрессии. 4 часа



- Определяет правило изменения членов геометрической прогрессии;
- Для геометрической прогрессии пишет рекуррентную и эксплицированную формулы;

- Применяет формулу суммы n членов геометрической прогрессии ;
- Знает и применяет свойства членов геометрической прогрессии;
- Решает задачи на нахождение суммы членов, членов, числа членов, знаменателя геометрической прогрессии;
- Решает реальные жизненные задачи на геометрическую прогрессию.

Объяснение определения геометрической прогрессии осуществляется при помощи последовательностей, как являющихся геометрической прогрессией, так и нет.

Последовательность b_n , первый член которой отличен от нуля, и каждый член начиная, со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q , называется **геометрической прогрессии**. Другими словами, в геометрической прогрессии, начиная со второго отношение каждого члена к предыдущему остается постоянным. Например, $2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, \dots$ или $2 \cdot 3^0, 2 \cdot 3^1, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3, \dots$ или, по определению, т.к в последовательности $2, 6, 18, 54, \dots$ отношения $6 : 2 = 18 : 6 = 54 : 18 = \dots$ равны, то последовательность является геометрической прогрессией.

Записывается последовательность, соответствующая задаче в исследовательском задании. Первый раз мяч поднимается на высоту 3 м, а затем каждый раз поднимается на высоту равную 60 % предыдущей высоты.

- $3 \cdot (0,6)^0$
- $3 \cdot 0,6 = 3 \cdot (0,6)^1$
- $(3 \cdot 0,6) \cdot 0,6 = 3 \cdot (0,6)^2$
- $(3 \cdot 0,6 \cdot 0,6) \cdot 0,6 = 3 \cdot (0,6)^3 \dots$

Значит, при перемещении мяча в любой момент времени высота определяется: $h_n = 3 \cdot (0,6)^{n-1}$

Связь, между последовательностью ударов о землю и высотой, на которую поднимается мяч меняется по правилу геометрической прогрессии. В этой прогрессии, первый член равен 3, а общий множитель 0,6. Геометрическая прогрессия может быть конечной и бесконечной.

Рекуррентная формула геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

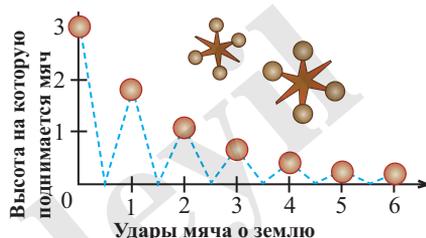
Формула n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad q \neq 0$$

Решаются задания на применение этих формул. С целью диагностического оценивания ученикам могут задаваться вопросы как показано ниже:

1) Определите, являются ли последовательности геометрическими прогрессиями.

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ • $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ • $1, -3, -9, -27, 81, \dots$



2) Определите 7-ой член геометрической прогрессии.

512, -256, 128, -64, ...

Определяется знаменатель прогрессии.

$$-\frac{256}{512} = -\frac{1}{2}$$

Для того, чтобы определить члены прогрессии, нужно первый член, то есть 512 умножить на $-\frac{1}{2}$ - с последовательно меняющимися показателями степени:

$$b_1 = 512 \quad b_2 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \quad b_3 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \quad b_4 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$
$$b_7 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = 8$$

Ученики обращают внимание на знаки членов прогрессии. Так как знаменатель прогрессии отрицательный, то начиная со второго знаки членов прогрессии чередуются в зависимости от четности или нечетности показателя степени.



Решение некоторых заданий данных в учебнике.

У.1. (стр. 190) f) Если $b_1 = 3$, $b_5 = 48$, то найдите $q = ?$ $b_7 = ?$

Решение: Из формулы $b_5 = b_1 \cdot q^4$ найдем $q^4 = \frac{b_5}{b_1} = \frac{48}{3} = 16$
 $q = \pm 2$

$$b_7 = b_5 \cdot q^2 = 48 \cdot 4 = 192$$

У.7. Найдем гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 12 см и 16 см: $c = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$. Периметр данного треугольника $P_1 = 12 + 16 + 20 = 48$ см. Периметр треугольника образованного средней линией данного треугольника равен: $P_2 = \frac{P_1}{2} = 24$ см. Периметры треугольников построенных таким образом на каждом шагу уменьшаются в два раза, то есть последовательность периметров образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ тогда, $P_6 = P_1 \cdot q^5 = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 48 \cdot \frac{1}{32} = 1,5$ см

У.14. а) $b_1 = 2048$ и по условию задачи при 1-ом поиске количество элементов делится пополам.

$$b_2 = \frac{2048}{2} = 1024.$$

Поиск продолжается по тому же правилу: $b_3 = \frac{2024}{2} = 512$ и т.д.

Как видно, $q = \frac{1}{2}$ и число элементов n -го поиска в банке равно

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2048 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{11} \cdot 2^{1-n} = 2^{12-n}$$

То есть $b_n = 2^{12-n}$

$$b) b_n = 1 \Rightarrow 2^{12-n} = 1 = 2^0 \Rightarrow 12 - n = 0, n = 12$$

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Для геометрической прогрессии пишите рекуррентную и эксплицитную формулы.

1) $-1 ; 6 ; -36 ; 216 ; \dots$

2) $-1 ; 1 ; 4 ; 8 ; \dots$

3) $4 ; 16 ; 36 ; 64 ; \dots$

4) $-3 ; -15 ; -75 ; -375 ; \dots$

5) $-2 ; -4 ; -8 ; -16 ; \dots$

6) $1 ; -5 ; 25 ; -125 ; \dots$

1. Напишите первые 5 членов по эксплицитной формуле геометрической прогрессии.

$$b_n = 3^{n-1}$$

$$b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$b_n = -2,5 \cdot 4^{n-1}$$

$$b_n = -4 \cdot 3^{n-1}$$

2. По рекуррентной формуле геометрической прогрессии определите знаменатель, первые 5 членов и формулу n -го члена.

$$b_n = b_{n-1} \cdot 2$$

$$b_1 = 2$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot (-3)$$

$$b_1 = -3$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot 5$$

$$b_1 = 2$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot 3$$

$$b_1 = -3$$

Сумму членов геометрической прогрессии можно представить так:

$$\begin{array}{r}
 S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1} \\
 \underline{- qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n} \\
 S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n
 \end{array}$$

умножим на q
и
почленно вычтем

$$\begin{aligned}
 S_n(1 - q) &= b_1(1 - q^n) \\
 S_n(1 - q) &= \frac{b_1(1 - q^n)}{(1 - q)} & S_n &= \frac{b_1q - b_1}{q - 1}, \quad (q \neq 1)
 \end{aligned}$$

Выполняются задания данные в учебнике с применением суммы и членов геометрической прогрессии. При нахождении числа членов геометрической прогрессии ученики, вынуждены решать уравнения вида $r^n = a$ и при этом нужно обратить внимание на способы нахождения n . Например, рассмотрим уравнение $4^n = 4096$. Это уравнение ученик может решить способом подбора. Результат $4^4 = 256$ намного меньше 4096-ти, проверим 4^6 . $4^6 = 4096$, $4^n = 4^6$, $n = 6$

Найдите сумму, если $x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x_n$$

Так как, $b_1 = 1$, $q = x$, получим:

$$1 + x + x^2 + \dots + x_n = \frac{b_1(x^{n+1} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\div S_n = 3 - 3^{1-n}, b_1 = ? q = ?$$

$$n = 1, S_1 = b_1 = 3 - 3^0 = 3 - 1 = 2$$

$$n = 2, S_2 = b_1 + b_2 = 3 - 3^{1-2} = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$b_1 + b_2 = 2\frac{2}{3} \Rightarrow b_2 = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} \quad \text{То есть в данной прогрессии } b_1 = 2, q = \frac{1}{3}.$$



Решение некоторых заданий данных в учебнике.

У.7. (стр. 194) Так как бактерия делится каждые 20 минут, то каждый час будет делиться на 2 части 3 раза и тогда в течении дня процесс деления происходит 72 раза. Число бактерий полученных из одной бактерии в течении одного дня можно показать в виде суммы :

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{72} = \frac{1 \cdot (2^{73} - 1)}{2 - 1} = 2^{73} - 1$$

У.13. Приняв во внимание условие задачи, чтобы найти число животных показанных на картинке нужно вычислить сумму геометрической прогрессии.

$$b_1 = 1, q = 4$$

$$1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = \frac{1 \cdot (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{1}{3} \cdot (4^5 - 1)$$

Если Фаррух захотел бы найти число конечностей животных, то полученную сумму он должен был умножить на 4.

$$4 \cdot \frac{1}{3} (4^5 - 1) = \frac{4}{3} (4^5 - 1) = \frac{4}{3} (2^{10} - 1) = \frac{4}{3} \cdot 1023 = 4 \cdot 341 = 1264$$

То есть число конечностей равно 1264.

Рабочий лист № 5

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Применяет формулу суммы n -первых членов геометрической прогрессии ;

1. 1, 3, 9, 27, ... Найдите число n -первых членов геометрической прогрессии, сумма которых равна 364.

2. Найдите сумму членов прогрессии.

a) $729 - 243 + 81 - 27 + \dots$ (12 членов)

b) $7 + 14 + 28 + 56 + \dots + 7168$

3. Найдите первый член прогрессии, если её знаменатель равен 3, а сумма 5-ти первых членов равна 968.

4. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии.
 $1029 - 147 + 21 - 3 + \dots$

5. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если первый член равен 38, а сумма бесконечного числа членов равна 76.

6. Найдите b_9 , S_6 в прогрессии
4, 12, 36, 108, ...

7) Найдите b_8 , S_5 , если дана последовательность
-2, 6, -18, 54, ...

Урок 141-143. Учебник стр. 198-201. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$. Обобщающие задания. 3 часа

Изменение членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии исследуется на заданном практическом задании. На нескольких примерах, сложением конечного числа членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, исследуется возможность определения суммы её членов.

Например, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad S_2 = S_1 - \frac{1}{4} \quad S_3 = S_2 - \frac{1}{8} \quad S_4 = S_3 - \frac{1}{16}$$

$$S_1 = 0,5 \quad S_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \quad S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \quad S_4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}$$

$$S_1 = \frac{1}{4} \quad S_3 = \frac{3}{8} \quad S_4 = \frac{5}{16}$$

$$S_1 = 0,25 \quad S_3 = 0,375 \quad S_4 = 0,3125$$

Следующий член: $\frac{1}{32}$

Следующий член: $-\frac{1}{64}$

$$S_5 = S_4 + \frac{1}{32}$$

$$S_6 = S_5 - \frac{1}{64}$$

$$S_5 = \frac{5}{16} + \frac{1}{32}$$

$$S_3 = \frac{11}{32} - \frac{1}{64}$$

$$S_5 = \frac{1}{32}$$

$$S_6 = \frac{21}{64}$$

$$S_5 = 0,34375$$

$$S_5 = 0,328125$$

Определив сумму некоторого числа первых членов прогрессии замечаем, что сумма то увеличивается, то уменьшается. Однако эта сумма бесконечно приближается к числу 0,33. Поэтому, за сумму данной геометрической прогрессии можно принять 0,33.

Вопрос открытого типа. Напишите две бесконечно убывающие прогрессии, сумма членов которых равна 4.

Нужно выбрать знаменатель прогрессии $|q| < 1$.

Пусть $q = -0,25$ и $q = 0,5$. $S = \frac{b_1}{1 - q}$

$$1) 4 = \frac{b_1}{1 - (-0,25)}, \quad b_1 = 5$$

$$2) 4 = \frac{b_1}{1 - 0,5}, \quad b_1 = 2$$

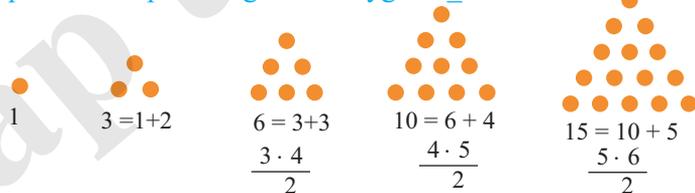
$$5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \dots$$

$$2 + 1 + 0,5 + 0,25, \dots$$



У.5. На рисунке изображены треугольные числа, в виде последовательности кружочков. Как видно кружочки даны в таком количестве, что на каждом шагу их можно выстроить в треугольном виде.

https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number



Для того, чтобы любое число выразить в треугольнике виде (смоделировать) можно воспользоваться формулой $\frac{7(7+1)}{2}$. Например, число кружков на 7-ом шаге или 7-ой член последовательности треугольных чисел равен:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 21.$$

1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

Как видно треугольные числа изменяются в зависимости от порядкового номера.

У.6. (стр. 197) Так как сторона квадрата равна 6 см, тогда длина отрезка, соединяющего середины его сторон, то есть сторона второго квадрата равна $3\sqrt{2}$ см, сторона следующего квадрата будет равна 3 см. Продолжая таким образом получим:

стороны: 6 ; $3\sqrt{2}$; 3 ... площади : 36 ; 18 ; 9 ; ...

Чтобы найти сумму площадей надо найти бесконечно убывающую сумму $36 + 18 + 9 + \dots$

$$S_1 = 36, S_2 = 18, q = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}. \text{ Поэтому } S = \frac{36}{1 - \frac{1}{2}} = 72 \text{ (см}^2\text{)}$$

У.13. В арифметической прогрессии с целыми числами $a_3 = 11$, а сумма первых 8 членов больше 72-х, но меньше 80. Найдите a_2 .

Решение: По условию $\begin{cases} a_3 = 11 \\ 72 < S_8 < 80 \end{cases}$ Отсюда получим: $\begin{cases} a_1 + 2d = 11 \\ 72 < \frac{a_3 + a_8}{2} \cdot 8 < 80 \end{cases}$

Из 2-го условия системы получим $18 < a_3 + a_8 < 20$. Так как члены - целые числа, то: $a_1 + a_8 = 19$.

Таким образом из системы уравнений: $\begin{cases} a_1 + 2d = 11 \\ a_1 + a_8 = 19, \end{cases}$ получим $\begin{cases} a_1 + 2d = 11 \\ 2a_1 + 7d = 19 \end{cases}$

1-ое уравнение этой системы умножим на -2 , и сложим со 2-ым. Получим: $3d = -3, d = -1. a_1 = 13$. Тогда $a_2 = a_1 + d = 13 + (-1) = 12$

У.20. (стр. 199) Найдите сумму.

$$a) \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$$

Решение: Обозначим $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$ (1)

Обе части этого равенство умножим на $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} S = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \dots$$
 (2)

Вычтем почленно (1) и (2):

$$S - \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots$$

$$\frac{2}{3} S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \text{ и отсюда находим } S = \frac{3}{4}.$$

Урок 144-148. Учебник стр. 199-205. Преобразования движений.
Обобщающие задания. 5 часов



Стандарты содержания

3.2.1. Знает понятия параллельного переноса на плоскости и применяет его для преобразования фигур.

3.2.2. Знает понятие преобразований движения и получает две конгруэнтные фигуру преобразованием движения.



Формирующие учебные навыки

- Демонстрирует понимание свойств параллельного переноса на изображениях или же рисованием изображения;
- Понимает осуществление параллельного переноса определенным вектором;
- В результате преобразования движения - параллельного переноса, поворота, отражения преобразовывает фигуру в конгруэнтную с ней фигуру демонстрирует при решении задач;
- Представляет разницу гомотетического преобразования с параллельным переносом, поворотом, отражением;
- Преобразование движения представляет на координатной плоскости.



Словарь

параллельный перенос
 вектор параллельного переноса
 поворот
 угол поворота
 отражение
 линия отражения
 конгруэнтные фигуры
 подобные фигуры
 коэффициент гомотетии



Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

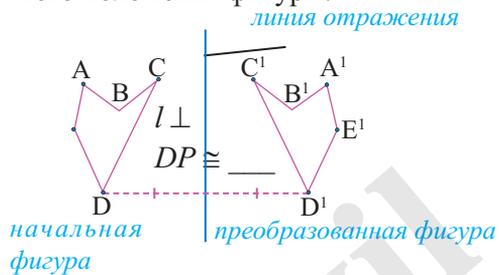
Ресурсы из интернета:

www.khanacademy.org/math/geometry/transformations

Основные свойства параллельного переноса объясняются с помощью обучающего блока данного в учебнике. Рисуются рисунки. Для изучения преобразования движения имеется много интернет-ресурсов. www.khanacademy.org/math/geometry/transformations .

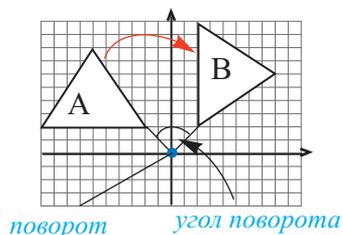
Основные свойства отражения (симметрии):

1. Фигура полученная отражением конгруэнтна исходной фигуре ;
2. Линия отражения - это серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего любые две точки начального и конечного положения фигуры.



Особенности движения поворота:

- Определяет угол поворота, центр поворота и направление поворота.
- Центр поворота может быть внутри и вне фигуры. В любом случае центр поворота остается постоянным (недвижимым);
- При повороте исходная фигура и преобразованная фигура - конгруэнтны;
- При повороте на 360° преобразованная фигура совпадает с исходной фигурой.



Понимает, что при параллельном переносе на координатной плоскости точка с координатами $(x; y)$ переходит в точку с координатами $(x + a; y + b)$.

По данным и виду движению записывает новые координаты вершин фигур

Пример. Параллельный перенос: на 2 единицы налево и на 1 единицу вниз

$Q(0; -1), D(-2; 2), V(2; 4), J(3; 0)$

$Q'(-2; -2), D'(-4; 1), V'(0; 3), J'(1; -1)$

1) Параллельный перенос: на 5 единицы вверх

$U(-3; -4), M(-1; -1), L(-2; -5)$

3) Параллельный перенос: на 3 единицы направо и на 2 единицы вверх.

$D(-4; 1), A(-2; 5), S(-1; 4), N(-1; 2)$

2) Параллельный перенос: на 3 единицы вниз

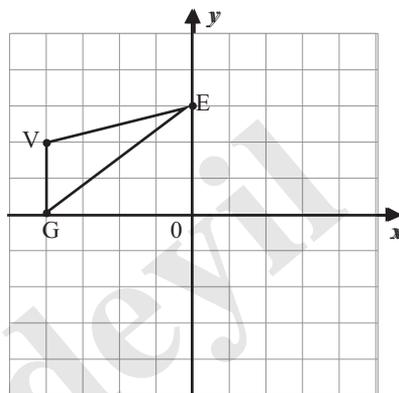
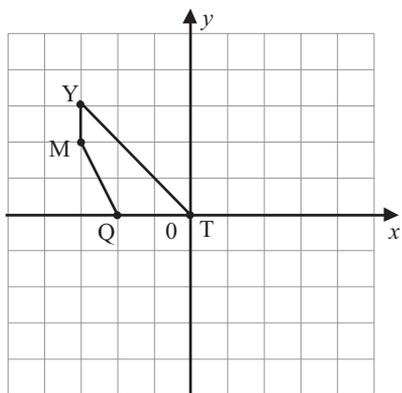
$R(-4; -3), D(-4; 0), L(0; 0), F(0; 3)$

4) Параллельный перенос: на 3 единицы налево и 4 единицы вверх.

$Z(-4; -3), I(-2; -2), V(-2; -4)$

5) Параллельный перенос: на 4 единицы направо и 4 единицы вверх

6) Вектор параллельного переноса $\langle -2; 1 \rangle$

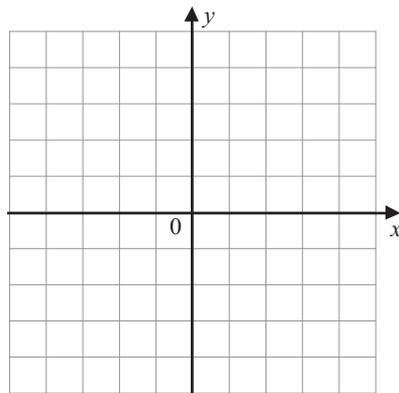
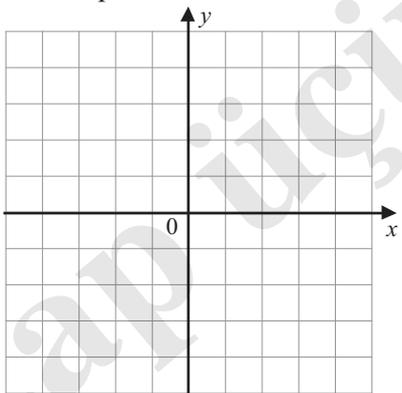


7) $U(-3; -4), M(-1; -1), L(-2; -5)$

Параллельный перенос: на 4 единицы вверх

8) $R(-4; -3), D(-4; 0), L(0; 0), F(0; -3)$

Параллельный перенос: на 3 единицы вниз



Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____

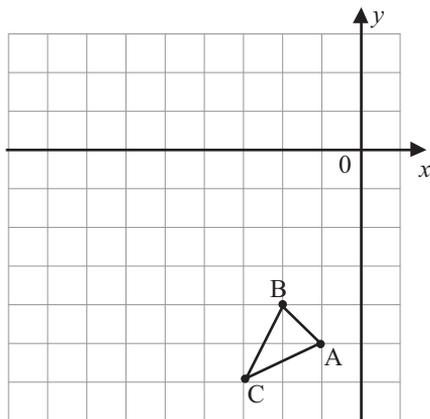
Число _____



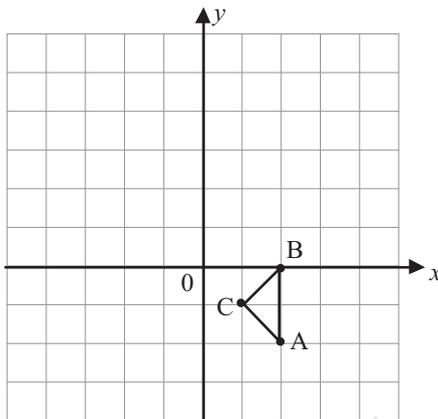
• Понимает, что параллельный перенос осуществляется при помощи вектора.

Изобразите требуемое движение на рисунке.

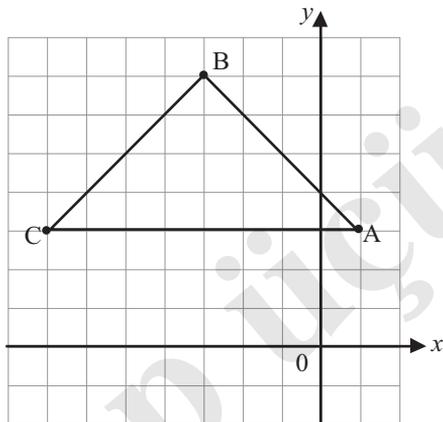
1. Отражению относительно прямой $x = -2$, а затем параллельный перенос на вектор $\vec{v}\langle -2; 7 \rangle$



2. Отражению относительно прямой $y = 0$, а затем против часовой стрелки на 90° с центром в точке $B(2; 0)$



3. Гомотетическое преобразование с центром $D(-3; 3)$ и коэффициентом гомотетии $k = 1/2$, затем параллельный $\vec{v}\langle -3; 2 \rangle$ и отражение относительно прямой $y = 3$



4. Отражению относительно прямой $y = 1$, затем параллельный перенос на вектор $\vec{v}\langle -1; 2 \rangle$ и поворот по часовой стрелке на 90° относительно точки $O(0; 0)$

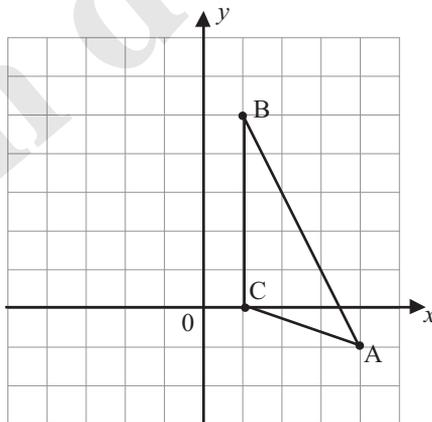


Таблица критериев суммативного оценивания по 5-му разделу

№	Критерии	Замечания
1.	Для числовых последовательностей пишет рекуррентную и эксплицитную формулы	
2.	Пишет рекуррентную и эксплицитную формулы для арифметической прогрессии	
3.	Применяет формулу суммы n членов арифметической прогрессии	
4.	Решает задачи на нахождение членов, числа членов, суммы членов и разности арифметической прогрессии	
5.	Пишет рекуррентную и эксплицитную формулы для геометрической прогрессии	
6.	Решает задачи на нахождение членов, суммы членов, знаменателя и числа членов геометрической прогрессии.	
7.	Решает задачи на применение формулы бесконечно убывающей геометрической прогрессии	

Урок 149. Задания суммативного оценивания по 5-му разделу

1. Какую числовую последовательность выражает последовательность чисел 4, 12, 36, 108, ... ?

a) $a_n = 4 + 3n$

c) $a_1 = 4, a_n = 3a_{n-1} \quad n \geq 2$

b) $a_n = 3 + 4n$

d) $a_1 = 3, a_n = 4a_{n-1} \quad n \geq 2$

2. Какая из последовательностей соответствует формуле $a_n = \frac{2n}{n+1}$?

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$

$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$

6, 4, 2, 0, -2, -4, ...

6, 0, 12, -12, 36, ...

0, 12, -12, 36, -60, ...

6, 0, -6, -12, -18, ...

3. Если a_n арифметическая прогрессия, то будут ли последовательности:

a) $a_1, a_3, a_5, a_7; \dots$ b) $a_1+1, a_2+1, a_3+1, \dots$ арифметическими прогрессиями?

4. Найдите первые пять члены последовательности заданной рекуррентным способом. a) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3$ b) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n - 3$

c) $a_1 = 16, a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$

d) $a_1 = 3, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$

5. a) Если от суммы 5 первых членов арифметической прогрессии отнять сумму 4-х первых членов, то чему будет равна полученная разность?

b) Докажите справедливость равенств: $a_4 = S_4 - S_3, a_6 = S_6 - S_5, a_n = S_n - S_{n-1}$.

6. Какая из последовательностей, которая может быть записана согласно условию задачи не будет арифметической прогрессией?

a) Гюльнара очень любит шоколад. Однако из-за аллергии ей разрешают есть по 2 шоколадки через каждые 5 дней.

b) Али каждый день ходит пешком 5 км. Он думает увеличивать это расстояние на 0,8 км ежедневно.

c) Стоимость одного круга езды на лошади равен 4 манат. Джафар, на сегодня выделил для тренировки 60 манат.

d) Мардан купил автомобиль за 25 000 манат . Когда через год Мардан хотел продать автомобиль, он был оценен в 21000 манат, а еще через год в 18500 манат .

7. Первые члены арифметической прогрессии отмечены на координатной плоскости. Координаты двух из них (3; 11) и (6; 23). Какое из следующих выражений является формулой, для нахождения любого члена этой арифметической прогрессии ?

- a) $6n - 3$ b) $3n + 11$ c) $4n - 1$ d) $1 + 4n$

8. По следующим данным найдите формулу n -го члена геометрической прогрессии.

9, -6, 4, $-\frac{8}{3}$, ...

- A) $9\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ B) $9\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ C) $\frac{2}{3}(9^{n-1})$ D) $-\frac{2}{3}(9^{n-1})$

9. Сумма какой бесконечной геометрической прогрессии равна -5?

- A) $-6 - 1,2 - 0,24 - 0,048 - \dots$ B) $-6 + 1,2 - 0,24 + 0,048 - \dots$
 C) $6 - 1,2 + 0,24 - 0,048 + \dots$ D) $6 + 1,2 + 0,24 + 0,048 + \dots$

10. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

$1,6 - \frac{8}{3} + \frac{40}{9} - \frac{80}{27} + \dots$

- A) 30 B) 4 C) 6 D) 20

11. У скольких из данных геометрических прогрессий есть конечная сумма?

- $1 - 0,5 + 0,125 + 0,0625 + \dots$ $3 - 9 + 27 - 81 + \dots$
 $1 - \frac{3}{4} + \frac{16}{9} + \frac{64}{27} + \dots$ $-12 - 6 - 3 - 1,5 - \dots$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

12. У какой геометрической прогрессии знаменатель отличен от -0,5 ?

- A) $-5; 2,5; -1,25; 0,625, \dots$ B) $6; -3; 1,5; -0,75, \dots$
 C) $\frac{1}{200}; -\frac{1}{100}; \frac{1}{50}; -\frac{1}{25}; \dots$ D) $-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{12}; \frac{1}{24}; \dots$

13. На каком из рисунков изображен параллельный перенос на вектор $\langle -5; 3 \rangle$. Нарисуйте этот рисунок в тетрадь.

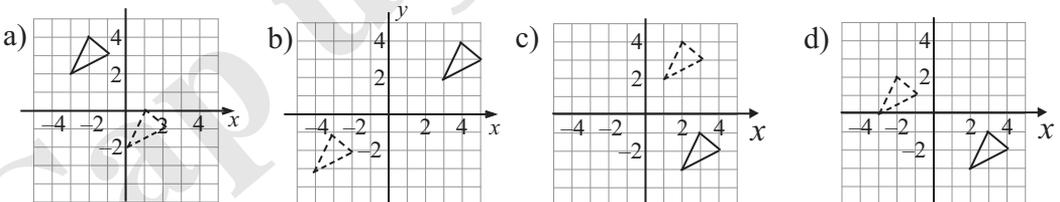


Таблица планирования по 6-му разделу

Стандарты содержания	Урок №	Тема	Число уроков	Учебник стр.
5.1.1. Читает и анализирует данные, представленные в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или графика. 5.1.2. Классифицирует статистические данные по определённым свойствам. 5.1.3. Определяет правильность статистической информации. 5.1.4. Строит таблицу частот и диаграммы, на основе вариантов полученных данных.	150, 151	Группировка и представление информации.	2	208-210
	152, 153	Представление информации.	2	211-214
	154, 155	Представление и анализ информации	2	215, 216
	156	Обобщающие задания	1	217
	157, 158	Число возможных событий. Пермутация. Комбинезон.	2	218-223
	159, 160	Пермутация, комбинезон и вероятность. Решение задач на вычисление вероятности.	2	224- 227
	161	Обобщающие задания	1	228
	162	Задания суммативного оценивания по 6-му разделу.	1	
	163-169	Обобщающие задания	7	229-235
	170	Задания суммативного оценивания за год.	1	
5.2.1. Различает виды комбинаторных соединений и решает задачи. 5.2.2. Прогнозирует возможность событий на основе статистической информации. 5.2.3. Решает простые задачи на вероятность с помощью комбинаторных соединений.		Всего	21	

Стандарты содержания. 5.1.1. Читает и анализирует информацию, заданную в виде таблицы, диаграммы, гистограммы и графика.

5.1.4. Составляет таблицу вариантов частот и строит диаграмму на основе статистических данных.

Навыки учеников: Группирует информацию, разделяя её на классы, и составляет таблицу частот;

- составляет таблицу частот, охватывающую относительную частоту класса;
- представляет частоту и относительную частоту данных в виде гистограммы;
- представляет данные в виде полигона частот ;
- вычисляет показатели распределения информации.

Мотивация. Демонстрируются две таблицы отражающие данные, как показано ниже. В какие группы можно объединить эти данные? Можно ли определить количество информации, соответствующей каждой группе?

Цвет обуви				
голубой	белый	красный	черный	белый
красный	черный	белый	белый	ореховый
черный	голубой	черный	голубой	белый

Размеры проданных спортивных футболок						
XL	L	M	L	M	S	L
M	XL	M	XL	M	L	L
M	S	S	M	L	XL	L

Выслушиваются мнения учащихся. В таблицу об обуви записывают информацию о цвете(голубой, белый, красный, черный, коричневый), количестве пар обуви данных цветов (при помощи чёрточек) и соответствующего числа (частоты). До сведения учащихся доводится, что очень важно записывать название таблицы.

Аналогично, формируется таблица данных о размерах спортивных футболок..

Цвета	Черточка	Число
голубой	/	

А как можно сгруппировать информации, если база информации состоит из множества числовых информаций? Изучается правило, по которому систематизируется множество данных, представленных в учебнике.

Рекомендуется, чтобы число классов было от 5 до 20. Также, для определения количества классов, вводится правило 2^k . Например, если множество состоит из 38 элементов, то соответственно $2^k > 38$. Значит, если $2^5 = 32$, то количество классов равно не 5, а 6.

Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



- Группирует множество данных, разделяя его на классы.

Следующие данные показывают баллы, которые набрали 50 учащихся по предмету математика при оценивании по 100-бальной шкале.

43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87,
 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35,
 25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 49, 25,
 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61,
 45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 28.

- а) Сгруппируйте данные в 10 классов б) Сгруппируйте данные в 5 классов.

Классы	Черточка	Число

Классы	Черточка	Число

Наибольшее значение, соответствующее данным:

Наименьшее значение, соответствующее данным:

Размах класса (среднее значение):

Урок 152, 153. Учебник стр. 212-215

Представление информации. 2 часа

Для анализа множества данных используется такой показатель, как - *относительная частота*. Эти понятия объясняются на примере, представленном в учебнике.

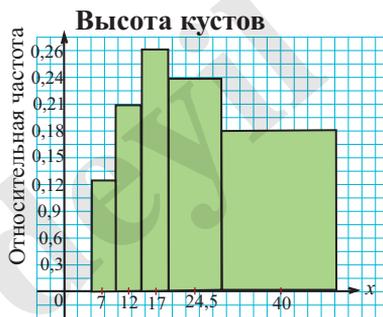
Средняя оценка класса (этот показатель в литературе иногда называют средней точкой) вычисляется как среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значений (предельных значений) и довольно часто используется в графических представлениях (гистограмма, полигон частот).

Относительная частота показывает, какую часть составляет данная информация от общей информации. Относительная частота вычисляется соответственно для каждого из данных и выражается в виде десятичной дроби или процента.

Например, какой процент пользователей пользуются интернетом в среднем 36,5 минут? или же, на сколько больше (или какой процент) людей, использующих интернет меньше 30 минут, чем тех, кто использует интернет больше 30 минут?

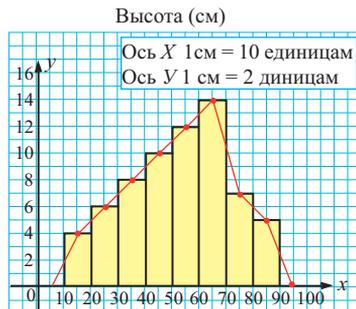
Исследуется гистограмма и правило построения полигона распределения. Самая выгодная форма представления данных сгруппированных по определенным категориям, интервалам - это гистограмма. Она создает наиболее ясное визуальное представление о распределении информации. Ученики, в определенной степени, уже владеют навыками построения гистограммы и представления информации. Здесь рекомендуется направить внимание учащихся на то, чтобы они научились представлять и анализировать **гистограммы относительных частот**.

Класс	Частота	Средняя оценка класса	Относительная частота
5-9	4	7	$4 : 38 \approx 0,11$
10-14	8	12	$8 : 38 \approx 0,21$
15-19	10	17	$10 : 38 \approx 0,26$
20-29	9	24,5	$9 : 38 \approx 0,24$
30-50	7	40	$7 : 38 \approx 0,18$
Всего: 38			Всего 1



Этапы построения полигона частот, при помощи гистограммы

1. Строится гистограмма частот (или относительных частот)
2. Отмечаются средние точки верхних сторон прямоугольников, образующих столбцы (это средняя оценка класса).
3. Для того чтобы построить полигон частот определяются средние точки двух мнимых нулевых класса. Одна из них - средняя точка мнимого класса, расположенного слева от первого столбца, другая - средняя точка мнимого столбца, расположенная справа от последнего столбца.
4. Средние точки последовательно соединяются, начиная с первой средней точки.



Класс	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
Частота	4	6	8	10	12	14	7	5

Рабочий лист № 2

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Строит развернутую таблицу частоты, охватывающую относительную частоту класса.

1. Данную информацию сгруппировав в 6-ти классах составьте таблицу охватывающую класс, среднюю оценку класса, частоту и относительную частоту. Деньги потраченные за книги студентами за один семестр:

91 472 279 199 142 273 189 248 101

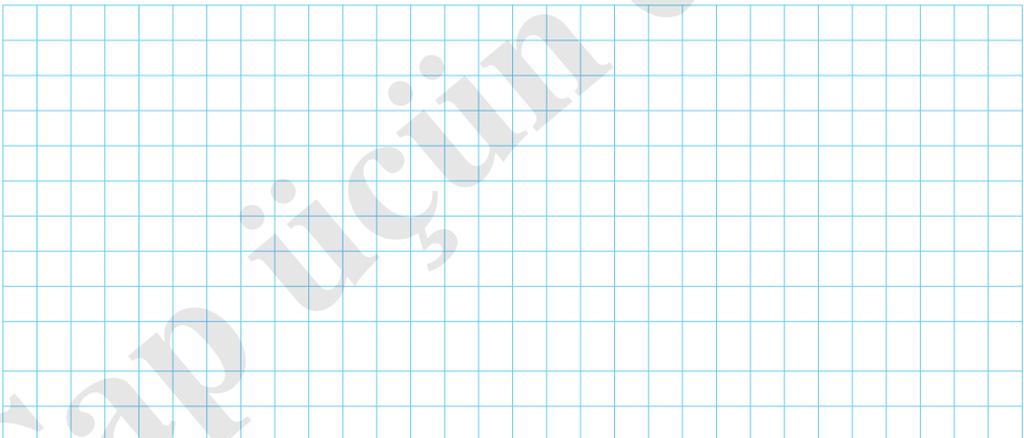
375 486 249 530 376 190 398 188 269

130 489 266 43 30 127 354 84188 341

	Всего:		Всего:	

2. На основании информации данной в таблице составьте таблицу охватывающую такие показатели как средняя оценка класса, частота, относительная частота.

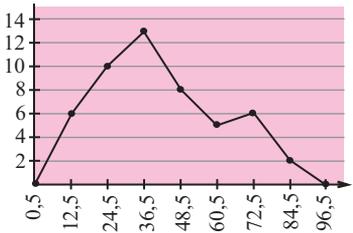
Время (мин)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
Число разговоров по телефону	7	10	23	11	8	5



Представление информации по полигону частот. Полигон частот является многоугольником, ограниченным осью абсцисс. По этому графику можно визуально проследить диапазон возрастания и убывания данных и сравнить отдельные части данных.

По данным графика в учебнике, учащиеся представляют различную информацию.

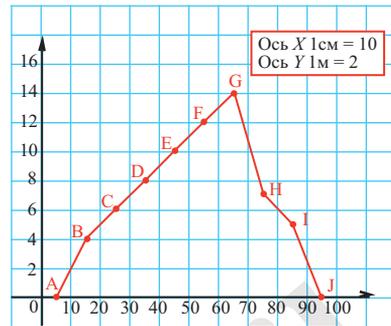
Например, число пользователей возрастает до значения 36,5 минут, после этого значения их число идёт на убыль.



Одновременное построение полигона частот по средней точке (по средней оценке класса) и частоте.

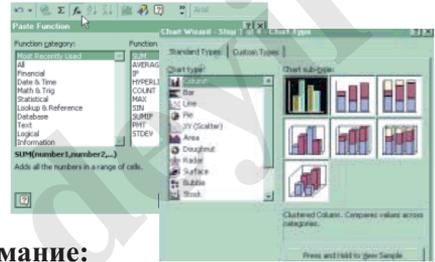
Класс	Средняя оценка класса	Частота
0 – 10	5	0
10 – 20	15	6
20 – 30	25	4
30 – 40	35	8
40 – 50	45	10
50 – 60	55	12
60 – 70	65	14
70 – 80	75	7
80 – 90	85	5
90 – 100	95	0

На координатной плоскости из таблицы отмечаются и последовательно соединяются точки A (5; 0), B (15; 4), C (25; 6), D (35; 8), E (45; 10), F (55; 12), G (65; 14), H (75; 7), I (85; 5) и J (95; 0).



Многоугольник ABCDEFGHIJ - это полигон частот данной информации.

Для построения графика частот рекомендуется воспользоваться программой EXCEL. Чтобы представить статистическую информацию, в меню INSERT FUNCTION можно выбирать диалоговое окно PASTE INSERT FUNCTION, а также можно в меню CHART WIZARD сразу выбрать форму графика.



Моменты, на которые нужно обратить внимание:

Достоинства и недостатки таких форм распределения информации таких как: таблица частот, гистограмма и полигон частот, можно обобщить, как показано ниже.

Таблица частот. Достоинство: информацию можно представить в различных графических формах, существует возможность для определения таких статистических показателей как среднее арифметическое, медиана, мода.

Недостатки: Невозможно ясно представить распределение частот (отсутствие визуальности).

Гистограмма. Достоинство: Непрерывна, а также удобна для того, чтобы представить сгруппированную дискретную информацию. По графику можно визуально определить медиану и моду. Недостатки: При построении графика возникает трудность определения границ классов.

Полигон частот. Достоинство. Создает условие для сравнения частот. Возможно на одном графике построить полигон, соответствующий различным данным и сравнить их. Например, рост мальчиков и девочек

Недостатки : Невозможно проводить статистические вычисления.

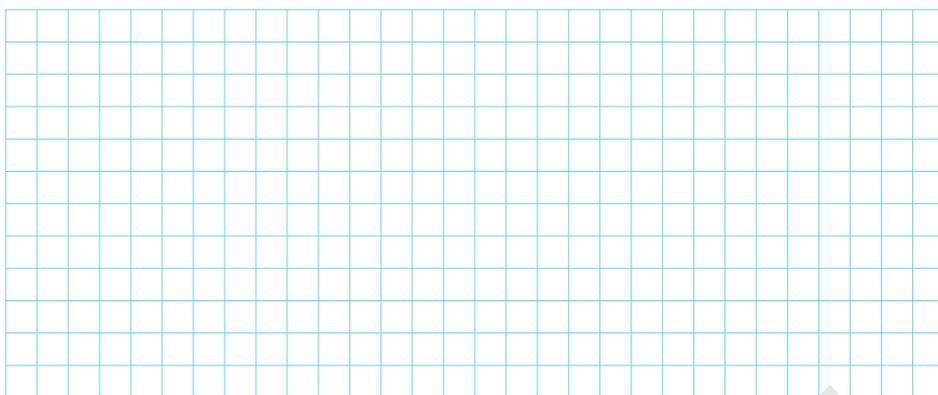


• Представляет информацию частотой и гистограммой относительных частот.

1. а) По таблице постройте гистограмму частот.

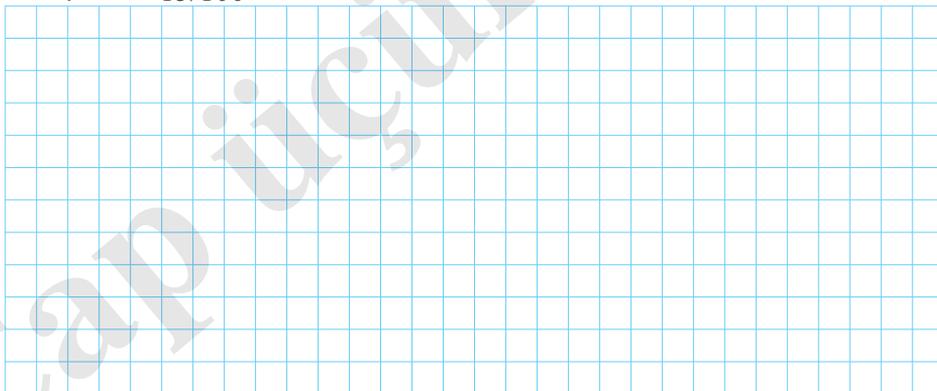
Число букв	3–5	6–8	9–11	12–14	15–17
Частота	22	30	24	12	5

б) По гистограмме постройте полигон частот.



2. В таблице для информации Y представлены данные 5 относительных частот. По данным определите: а) количество классов и их границы; б) оценки классов (средняя точка); в) постройте гистограмму, в которой отображены средняя оценка класса и относительная частота.

Y	Относительная частота.
-	-----
0	5/100
1	25/100
2	30/100
3	25/100
4	15/100



Рабочий лист № 4



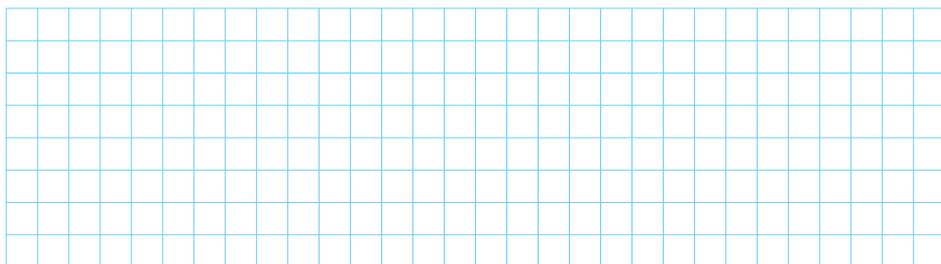
Имя _____ Фамилия _____ Число _____

• Представляет информацию частотой и гистограммой относительных частот.

1. а) По таблице вычислите относительные частоты.

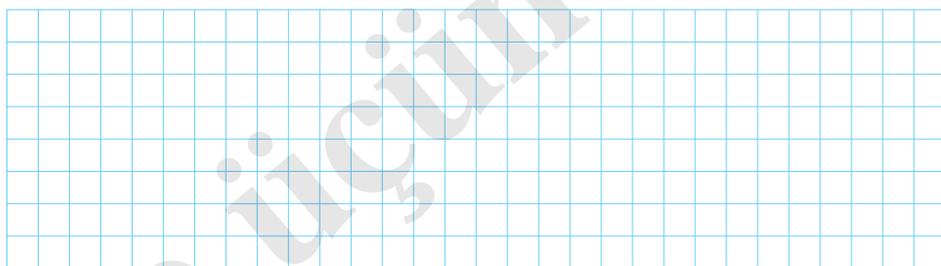
Возраст (год)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Число людей	6	11	25	31	18	12	6

б) По таблице постройте гистограмму и полигон относительных частот.



2. По данным изобразите график частот.

Рост:	120 – 124	125 – 129	130 – 134	135 – 139	140 – 144
Частота:	10	40	70	65	15



Определите по графику:

- Количество людей, у которых рост ниже 130 см?
- Количество людей, у которых рост выше 134 см?

Урок 154-156. Учебник стр. 215-217.

Анализ и представление информации. Обобщающие задания. 3 часа.

Стандарты содержания. 5.1.1. Читает и анализирует информацию данную в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или графика.

5.1.2. Классифицирует статистическую информацию по определенным признакам.

5.1.3. Определяет справедливость статистической информации.

5.2.2. Прогнозирует возможность возникновения событий на основе статистической информации.

Навыки учеников:

- вычисляет среднее арифметическое соответствующее сгруппированной информации;
- определяет виды распределения информации: нормальный (симметричный), положительно асимметричный и отрицательно-асимметричный;
- дает прогноз основанный на данных.

1-ый час. Повторяется правило вычисления среднего арифметического. Например, для чисел 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4 среднее арифметическое вычисляется как $(1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4) / 7$.

1. Эту запись можно написать используя распределительное свойство умножения таким образом:

$$(1+1+2+3+4+4+4) \cdot (1/7) = (1/7)1 + (1/7)1 + (1/7)2 + (1/7)3 + (1/7)4 + (1/7)4 + (1/7)4.$$

Теперь, мы записали заданные числа с определенным коэффициентом. Обратите внимание, что сумма коэффициентов равна 1, т.е. 7 штук по $(1/7)$.

2. Сгруппируем подобные множители.

$$(2 \cdot 1 + 2 + 3 + 3 \cdot 4) / 7 = (2/7)1 + (1/7)2 + (1/7)3 + (3/7)4.$$

Каждый коэффициент показывает, какую часть данное число (нельзя допускать повторение чисел) составляет от общего множества чисел. Этот подход, обращает внимание учащихся на правило нахождения среднего арифметического в разных ситуациях, т.е. помогает его обобщить.

Одновременно уделяется внимание таким первичным навыкам как: вычисления процента от числа, нахождение среднего арифметического.

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot p)}{\sum p} \quad \text{знак } \sum \text{ показывает сумму и считается как "сигма"}.$$

Делается упор на умение проговаривать формулу словами.

Если все коэффициенты равны, то для нахождения среднего арифметического, используют уже известное до сегодняшнего дня простое правило.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Изучение последовательности нахождения среднего арифметического для, сгруппированных в таблицу распределения, данных есте с учащимися.

Рабочий лист № 5

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



- Заполните таблицы нахождения среднего арифметического соответствующих сгруппированных данных.

Число жителей поселка

Возраст	Число
0-9	57
10-19	68
20-29	36
30-39	55
40-49	71
50-59	44
60-69	36
70-79	14
80-89	8

Время разговора одного человека в течении года по телефону(в мин.)

Продолжительность звонка	Число
1-5	12
6-10	26
11-15	20
16-20	7
21-25	11
26-30	7
31-35	4
36-40	4
41-45	1

Классы	средняя оценка класса	Частота	$x \cdot f$
		$n =$	$\Sigma =$

Классы	средняя оценка класса	Частота	$x \cdot f$
		$n =$	$\Sigma =$

Урок 157, 158. Учебник стр. 218-223.

Число возможных событий. Пермутации. Комбинезон.



5.2.1. Различает виды множеств и решает простые задачи.

- применяет принцип умножения, для определения числа возможных событий;
- определяет число пермутаций и комбинезонов, в зависимости от расположению элементов множества;
- решает задачи на вероятность используя формулу пермутации;
- решает задачи на вероятность используя формулу комбинезона.



Мотивация. Гюляр отправляется на отдых. У нее есть 3 разные дорожные сумки и 3 разных чемоданы.

1) Сколько вариантов выбора у нее есть, если она хочет взять с собой один или сумку или чемодан? 2) Сколько вариантов выбора у нее есть, если она хочет взять с собой и сумку и чемодан. ?



Если Гюляр выберет или сумку или чемодан, то число возможных вариантов будет $3 + 3 = 6$.

На данном примере ещё раз рассматриваются фундаментальные принципы сложения и умножения подсчёта возможных вариантов.



Если Гюляр, выберет один чемодан и одну сумку то число разных вариантов будет $3 \times 3 = 9$

Пермутация. Рассмотрим способ подсчета вариантов на примере следующих задач.

Задача 1. Эльдар готовит табличку, с номером для велосипеда. У него есть краски - белого, черного, желтого цветов. Эльдар хочет табличку покрасить одним цветом, а цифры на ней другим. Сколько вариантов у него есть? (6 вариантов)

1. Черная доска, белые цифры 2. Черная доска, желтые цифры 3. Белая доска, желтые цифры 4. Белая доска, черные цифры 5. Желтая доска, белые цифры. 6. Желтая доска, черные цифры

Задача 2. У Сябы 3 вида цветов - фиалки, гвоздики, ромашки. Сяба хочет поставить в вазу два вида цветов. Сколько у нее есть выборов?

фиалки, гвоздики фиалки, ромашки гвоздики, ромашки

Ученики должны представить разницу между двумя задачами. Если один из элементов обозначим через А, другой через В, то в первом случае АВ и ВА отличаются друг от друга. Потому что, один из них отражает цвет доски, а другой цвет цифр. Во втором случае разницы между комбинациями АВ и ВА, нет потому что каждый из них отражает вид цветов в вазе,

Замечание! Задача, представленная в качестве мотивации в учебнике относится к пермутации и учитываются все возможные перестановки с участием всех n -элементов из n. Упорядоченный набор, в котором используются g элементов из n элементов множества называется аранджеман. На самом деле, по выбору и размещению g элементов из n, аранджеман также является пермутацией. Учитывая, то что в учебной литературе Европы, Турции и США используют только одно понятие, в учебник было включено только понятие пермутации.

Пермутацией называется каждый из разных возможных вариантов размещения элементов множества в требуемой ситуации. ${}_n P_n = n!$ (1). Формула (1) показывает число наборов, образованных перестановками элементов n -элементного множества, то есть число пермутаций. Например, один человек - Азер- один набор, двое Азер и Камал, АК и КА - два разных набора, а Азер, Ильгар, Фидан: АИФ, АФИ, ИАФ, ИФА, ИФА, ФИА могут образовать $3 \times 2 = 6$ наборов.

При определении числа пермутаций имеет значение последовательность элементов. Число r перестановок из n -элементов в определенном порядке, не допуская повторения, записывается как число ${}_n P_r$ -пермутаций и равно: ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ (2)

Число пермутаций, с повторениями равно:
$$\frac{M}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad N = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k \quad (3)$$

Соответственно ситуации задачи могут быть решены с применением формулы пермутации (3). Рассмотрим некоторые ситуации, в которых к набору постановлены особые условия.

1. Число r элементных пермутаций из n элементов, при условии присутствия данного элемента во всех наборах: $r \cdot {}_{n-1} P_{r-1}$

Из 6 учеников должны выбрать троих - председателя, заместителя и секретаря. Себя обязательно должна быть выбрана на одну из этих должностей. Значит, остались 5 человек и две должности ${}_5 P_2$. Себя сама может быть избрана тремя способами. Число вариантов выбора $3 \cdot {}_5 P_2 = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$.

2. Число r элементных пермутаций из n элементов при условии отсутствия одного элемента: ${}_{n-1} P_r$

3. Число пермутаций из n элементов при условии, m элементов будут стоять рядом: $m! \times (n - m + 1)!$

4. Число пермутаций из n элементов при условии, m элементов не будут стоять рядом: $n! - [m! \times (n - m + 1)!]$

5. Число пермутаций из n элементов с условием что какие-либо k элементы будут под данным номером: $[_{n-k} P_{n-k}] \times [{}_k P_k]$

Задача. Сколько различных перестановок получится из буква имени Симузер, при условии, что: а) ни одна гласная не была бы рядом; б) гласные всегда были бы на чётных местах (2-ая,4-ая,6-ая буква). **Решение:**

В имени Симузер 7 букв три из которых гласные. Подойдем к задаче с противоположной стороны. Представим, что все гласные записаны подряд. В этом случае 3 гласные рассматриваются как один элемент. Число элементов и согласные + 1 место гласной = 5 элементов, число всевозможных размещений будет равно $5!$. 3 гласные, меняясь между собой местами, дают $3!$. Общее число размещений будет $3! \cdot 5! = 720$. Это число вариантов, когда гласные записаны подряд. Так как число букв в имени 7, то общее число пермутаций равно $7!$. Тогда, число пермутаций, когда гласные не расположены рядом = общее число пермутаций - число пермутаций когда все гласные рядом = $7! - 3! \cdot 5! = 5040 - 720 = 4320$.

б) В ряду построения 7 букв есть 4 нечетных и 3 четных места. Число построений гласных букв в 3-х четных ${}_3 P_3$, согласных ${}_4 P_4$, а число общего построения: ${}_3 P_3 \cdot {}_4 P_4$. Задачи такого типа занимают важное место в вопросах GMAT, SAT. Поэтому рекомендуется изучать задачи, с различными ситуациями.

Исследуются ситуации на комбинезон. Ученики устно представляют различные ситуации, в которых построение не имеет значения. Например, как выбрать 2 салата из 8 видов или как выбрать трехзначное число для кода и т.д.

$${}^n C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad {}^n C_r = \frac{{}^n P_r}{r!}$$

Объясняется формула комбинезона. Из-за удобства при вычислении чаще всего пользуются формулой, связанной с пермутацией. Во многих ситуациях элементы и их комбинезоны состоят из 2-3 различных элементов. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В группе альпинистов из 25 человек 15 мужчин и 10 женщин. Сколько существуют возможных вариантов групп, состоящих из 3 мужчин и 2 женщин?

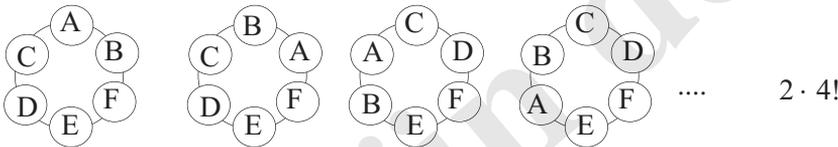
Решение: 3 мужчин из 15 ${}_{15}C_3$ способами, 2 женщин из 10 можно выбрать ${}_{10}C_2$ способами. Тогда по принципу умножения число возможных групп будет: ${}_{15}C_3 \times {}_{10}C_2$.

Рекомендуется, решать задания такого типа соответственно уровню знаний учащихся. Примеры некоторых задач вместе с решениями приведены ниже.

Некоторые типы комбинаторных задач

Задача 1. Сколькими способами можно рассадить 6 человек за круглый стол, если А и В не захотят сидеть рядом?

Решение: Существует $(n-1)!$ вариантов, чтобы рассадить 6 человек за круглый стол. В этом случае существует $(6-1)! = 5!$ вариантов. Однако, в условии задачи А и В не хотят сидеть рядом. Для того, чтобы решить задачу, найдем число вариантов, когда А и В будут сидеть рядом. В этом случае рассмотрим АВ как один элемент. Тогда число всех вариантов будет не $5!$, а уже $4!$. Здесь появляются два варианта по рассаживанию В справа или слева от А и их общее число будет $2 \cdot 4!$



Если эти варианты вычесть из общего числа вариантов, тогда число вариантов рассаживания 6 человек вокруг круглого стола с условием, что А и В не будут сидеть рядом будет:

$$5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = 72.$$

Задача 2. Из 4 врачей, 3 инженеров и 5 ученых нужно выбрать делегацию, в которой 3 ученых, 2 врача и 1 инженер. Сколькими вариантами можно это сделать?

Из 3 учёных из 5 можно ${}_5C_3$ способами, 2 врача из 4 можно выбрать ${}_4C_2$ способами, и наконец 1 инженера из 3 ${}_3C_1$ способами. Число вариантов составит: ${}_5C_3 \times {}_4C_2 \times {}_3C_1 = 10 \times 6 \times 3 = 180$

Задача 3. В коробке 2 белых, 3 черных и 4 красных шара. Если из коробки вытащить 3 шара, то сколько существует возможных вариантов, что хотя бы один из них черный? Возможные варианты: 1 черный + 2 другого цвета или 2 черных + 1 другого цвета или 3 черных. Число комбинаций: $({}_3C_1 \times {}_6C_2) + ({}_3C_2 \times {}_6C_1) + {}_3C_3$. Задачи такого типа имеют важное значение при вычислении вероятности по статической информации и в задачах прогнозирования.

Задачи, в которых используются и пермутации и комбинезоны:

Из 20 учащихся в организацию должны выбрать президента, вице-президента, секретаря и четырёх членов совета. Сколькими способами можно это сделать?

Здесь важно из какого ряда выбирают 3 учеников (президент, вице-президент, секретарь). ${}_{20}P_3 = 6840$. Членов совета выбирают уже из оставшихся 17 и здесь последовательность выбора уже не имеет значения, то есть получим ${}_{17}C_4 = 2380$.

по принципу умножения общее число вариантов равно: ${}_{20}P_3 \times {}_{17}C_4 = 16\,279\,200$. Внимание учеников обращается на определение типа комбинаций, к которой относится ситуация в задаче, а именно, что требуется в задаче, нахождение числа пермутаций или числа комбинезонов? Для развития навыков решения таких задач, рекомендуется в качестве домашнего задания рабочие листы, с задачами данными в пособии для учителей.

Урок 159-161. Учебник стр. 224-227.

Пермутация, комбинезон и вероятность. Решение задач на вычисление вероятности. Обобщающие задания. 3 часа.



Стандарты содержания. 5.2.3. Решение простых задач на вероятность с помощью комбинаторики.



■ Демонстрирует навыки вычисления вероятности событий с применением пермутации и комбинезона:

- вычисляет пермутации в соответствии с числом возможных событий;
- вычисляет комбинезон в соответствии с числом возможных событий;
- определяет число благоприятных событий различными способами;
- находит вероятность события;

■ Находит вероятность событий соответствующих различным ситуациям:

- независимые события;
- зависимые события;
- совместные события;
- несовместимые события.

Ученик должен понимать, как определить число возможных событий с помощью комбинезона и пермутации. При этом он уметь определять число $n(E)$ благоприятных событий и число $n(S)$ всех возможных событий для вычисления вероятности по формуле $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$. В зависимости от ситуации, каждое количество он должен определить по формуле пермутации или комбинезона и уметь применять принцип умножения.

Задача. Из 52 карт на столе случайным образом, не возвращая обратно, вытягиваются 2 карты. Найдите вероятность того, что эти карты являются тузами.



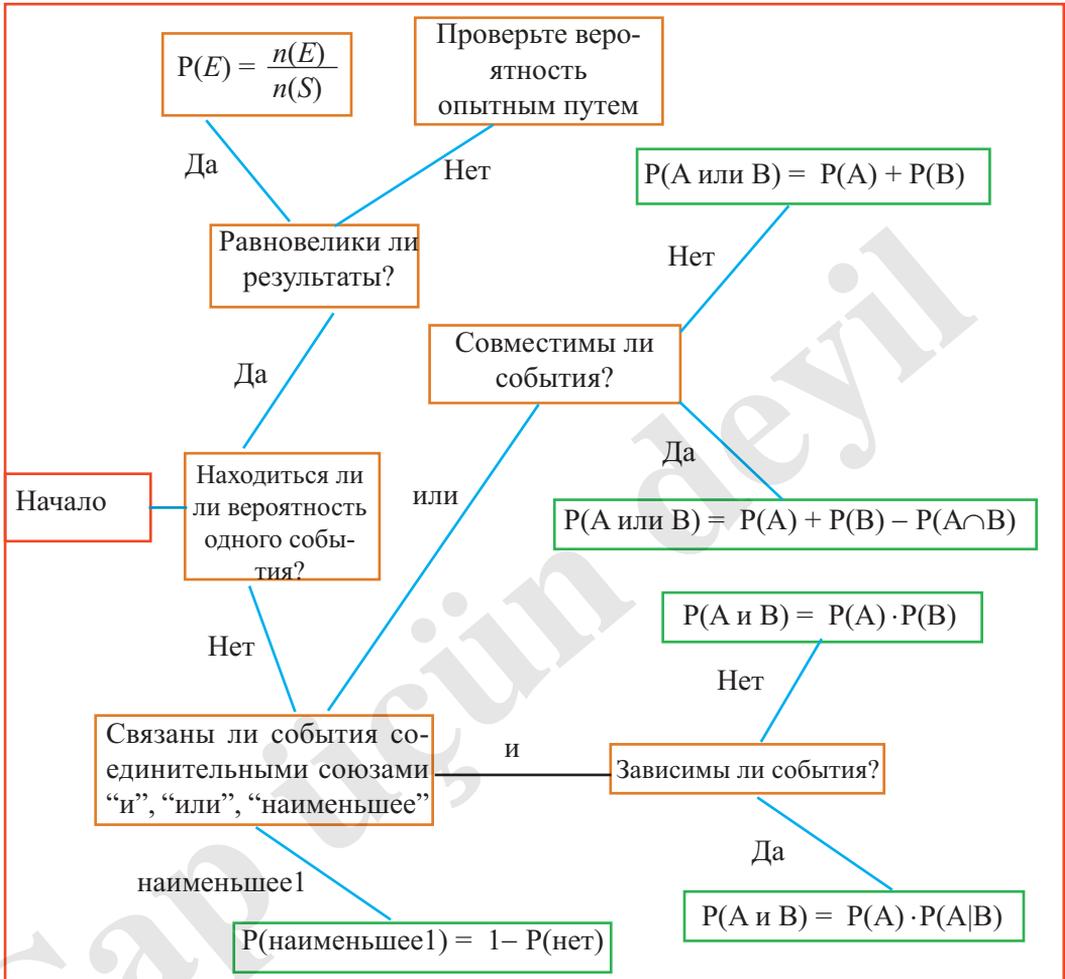
1. Число всех возможных событий (пермутаций) ${}_{52}P_2$.

2. Число благоприятных событий: $4P_2$. Потому что в колоде имеются 4 туза.

3. Вероятность событий = $\frac{4P_2}{{}_{52}P_2} = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51} = \frac{1}{221}$

Рассматриваются задачи данные в учебнике.

Задачи на вероятность. Задания в учебнике преследуют цель обобщения пройденных до сих пор ситуаций на вероятность, проверку навыков решения задач и развития учащихся по данной теме. Эти ситуации можно исследовать с помощью следующего алгоритма.



Решение некоторых задач данных в учебнике.

У.3. (стр. 219) Сколько пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

Решение: I способ. Первую цифру числа можно выбрать 4 способами, вторую цифру 4 способами, третью цифру 3 способами, четвертую цифру 2 способами, пятую (последнюю) цифру 1 способом. По принципу умножения получим, согласно данному условию можно составить $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ пятизначных чисел.

II способ. $5! - 4! = 120 - 24 = 96$

У.6. Сколькими разными способами можно построить в ряд группу из 8 школьников, при условии чтобы Лала и Эльмир стоят рядом?

Решение: Если Лала и Эльмир будут стоять рядом, то число пермутаций из 7 элементов будет $7!$. А так как Лала и Эльмир тоже могут меняться между собой местами $2!$ раз, то число различных построений будет $2! \cdot 7!$

У.10. d) Сколько слов с разными произношениями можно получить переставляя буквы в слове ЭЛЕМЕНТ.

Решение:
$$\frac{7!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 840$$

У.15. Вюгар, Яшар, Лейла, Илаха и Тогрул в соревновании по шахматам между собой набрали различные очки.

а) Найдите число всевозможных вариантов занявших I и II места.

б) Шахматисты, занявшие первые два места завоевали право принять участие в а зональном туре. Найдите число возможных вариантов.

Решение: а) I место может занять один из шести шахматистов 6 разными способами, II-е место - из оставшихся пяти шахматистов 5 разными способами. По принципу умножения число возможных вариантов занявших I и II места будет $6 \cdot 5 = 30$.

б) В этом случае надо найти число разных пар, занявших первые 2 места. Так как пара (Али, Тогрул) с парой (Тогрул, Али) означают одни и те же составы, то число разных пар завоевавших право на участие в зональном туре составляет

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15 .$$

У.19. (стр. 221)

Решение: Так как У Фидан 6 рабочих костюма, то в понедельник она может надеть их 6-ю разными способами. Если она будет надевать каждый день разные костюмы, тогда во вторник она наденет один из 5-и оставшихся костюмов. По принципу умножения число разных выборов будет:

$${}_6P_2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

У.23. Сколькими разными способами могут покинуть автобус трое пассажиров на 5 остановках, при условии, что на каждой остановке выходит не более одного пассажира?

Решение: $5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Действительно, один из пассажиров может выйти на одной из пяти остановок 5 разными способами, другой на четырёх остановках 4 способами, третий на оставшихся трёх остановках 3 способами. По принципу умножения число разных способов равно $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

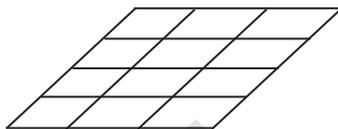
У.13. (стр. 223) На окружности отмечены 8 точек. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

Решение: Если любые три точки из 8 соединить отрезками, то получится треугольник. Число разных треугольников будет:

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

У.14. Сколько параллелограммов можно сосчитать на картине?

Решение: На рисунке показано пересечение 4 параллельных прямых с 5 параллельными прямыми. Пересечением любых двух горизонтальных прямых из 4-х, с двумя наклонными прямыми из 5-ти, образуется параллелограмм. По принципу умножения число различных параллелограммов будет ${}_4C_2 \cdot {}_5C_2 = 6 \cdot 10 = 60$.



У.16. Сколько разных групп из трёх человек можно составить из 4 мальчиков и 5 девочек, так чтобы в группе была хотя бы одна девочка?

Решение: Одну девочку из 4 можно выбрать ${}_4C_1$ способами, двух других членов для группы из 3 человек можно выбрать из пяти мальчиков ${}_5C_2$ способами. Значит, число групп из трёх человек, в составе которой будет хотя бы одна девочка равно: ${}_4C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1 + {}_4C_3 = 74$.

У.17. В урне 5 белых и 3 красных шаров. Сколькими разными способами можно вынуть из урны 3 шара так, чтобы 2 из них были белыми, а 1 красным?

Решение: Два шара из 5 белых можно вытащить ${}_5C_2$ способами, один шар из 3 красных ${}_3C_1$ способами. Число разных вариантов будет ${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 = 10 \cdot 3 = 30$.

У. 2. (стр. 224) Определите совместные или несовместные события и вычислите вероятность.

2) При бросании одной кости: а) $P(1 \text{ или } 5)$; б) $P(\text{нечетное число и меньше } 5)$;

а) Событие $P(1 \text{ или } 5)$ - это нахождение вероятности совместных событий. Вероятность выпадения 1 равно $\frac{1}{6}$; и вероятность выпадения 5-ти тоже равна $\frac{1}{6}$.
Вероятность выпадения 1 или 5 равно:

$$P(1 \text{ или } 5) = P(1) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

б) Событие $P(\text{меньше } 5 \cap \text{нечетное число})$ относится к совместным событиям. Здесь применяется формула: $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Нечетные числа на поверхности кости-это числа 1, 3, 5.

$$P(\text{нечетное число}) = \frac{3}{6}$$

Числа меньше 5-ти это 4, 3, 2, 1 поэтому

$$P(\text{меньшее } 5\text{-ти}) = \frac{4}{6}$$

$$P(\text{меньше } 5\text{-ти} \cap \text{нечетное число}) = \frac{2}{6}$$

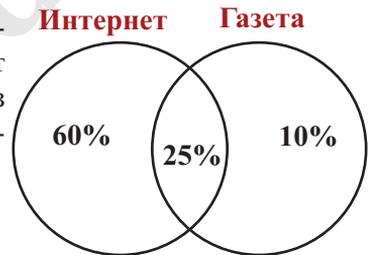
$$P(\text{нечетное число и меньше } 5) = P(\text{нечетные числа}) + P(\text{меньше } 5\text{-ти}) -$$

$$P(\text{меньше } 5 \cap \text{нечетное число}) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Ответ: $\frac{5}{6}$

У.17. (стр. 227) Результат опроса “Из каких источников вы получаете последние новости?” следующий: 85% из интернета, 35 % из газет, 25 % из обоих источников. Представьте информацию диаграммой Вена. Если среди респондентов случайно выберут одного, найдите соответствующую вероятность: а) Люди, которые получают информацию не из газеты, а из интернета. б) Люди, которые получают информацию из обоих источников.

Решение: Ученики поместив соответствующую информацию в диаграмме Эйлера-Вена определяют какой процент приобретает информацию только из интернета, а какой процент людей из обоих источников.



а) $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ б) $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

Рабочий лист № 7

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



- Определяет число пермутаций.

1) Айтен, используя буквы своего имени, хочет написать пин код из четырех букв. Сколько вариантов есть у Айтен?

2) 12 человек выстроились в ряд для того, чтобы сделать фотографию.

Сколько возможных вариантов соответствует условию:

- а) Сардар и Гасан хотят стоять рядом;
- б) Сардар и Гасан не хотят стоять рядом.



3) Что больше?

1) ${}_8P_6$, или ${}_6P_2$

2) ${}_9P_7$, или ${}_9P_2$

3) ${}_{10}P_3$, или ${}_8P_4$

4) Эльшан хочет придумать пароль из семизначного числа. Сколько у него возможных вариантов?

5) Из 24 учеников, собирающихся в экспедицию нужно выбрать троих. Один из них должен найти лагерь, другой должен заняться хозяйственными делами, а третий должен подготовить календарный план. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

6) Найдите значение n , если ${}_nP_r = 210$ и $r = 3$, .

7) Вычислите.

$$\frac{{}_5P_3}{{}_5P_2} =$$

$$\frac{{}_7P_3}{{}_7P_2} =$$

$$\frac{{}_4P_3}{{}_4P_2} =$$

$$\frac{{}_8P_6}{{}_8P_3} =$$

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Решает задачи используя формулы пермутации и комбинезона.

Задачи на комбинезон и пермутации

Определите к какому типу комбинаторных задач относится следующие задачи. Заключите соответствующее слово в кавычки и решите её.

1) Для приготовления пирога Натаван хочет использовать два продукта из следующих 5: грибов, сыра, помидор, курицы, яиц. Сколько вариантов выбора у нее есть?

Пермутация, комбинезон

2) Учитель Махира по биологии говорит, что тот кто при оценивании ответит на 15 вопросов из 20, тот будет иметь хороший результат. Сколько таких возможных вариантов существует?

Пермутация, комбинезон

3) Код парковки велосипеда состоит из 4 цифр. Найдите число кодов.

Пермутация, комбинезон

4) Ясемен планирует на летних каникулах прочитать 9 книг. Она хочет отобрать первые три книги. Найдите количество возможных вариантов?

Пермутация, комбинезон

5) Не производя вычислений, объясните равенство числа сочетаний 2-х элементов из 10-ти и 8-х элементов из 10-ти и обобщите равенство

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r}.$$

Имя _____ Фамилия _____

Число _____



• Решает задачи используя формулу пермутации.

Комбинезон, пермутация, вероятность

Классный руководитель должен выбрать трёх членов в школьный совет из 3 мальчиков и 5 девочек случайным образом.

- Сколькими вариантами могут быть выбраны члены совета?
- Какова вероятность, что все три члена совета будут мальчиками?
- Найдите вероятность того, что ни один мальчик не будет членом совета.

Сколько трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 2, 4, 5, 6?

Найдите вероятность того, что одна из случайно выбранных цифр нечетная.

В урне 6 белых и 5 черных шаров. Какова вероятность, что из 3-х вытасканных шаров два шара окажутся белыми? Допишите и вычислите

Учтите: Общее число событий: ${}_{11}C_{\quad}$

Возможное число благоприятных событий: ${}_6C_{\quad} \times {}_5C_1$

$P(E) = \underline{\hspace{2cm}}$

Известно, что из 12 мониторов, поступивших в магазин для продажи три с браком, однако, не известно какие именно. Специалист сначала выделил пять из них для проверки.

- Сколько возможных вариантов выбора он имеет в 5 таких группах?
- Сколько возможных вариантов выбора группы с неисправным монитором у него есть?
- Чему равна вероятность того, что все три бракованные мониторы в первой группе?

Таблица критериев суммативного оценивания по 6-му разделу

№	Критерии	Замечания
1.	Разделяя множество данных по классам группирует и составляет таблицу частот.	
2.	Вычисляет среднее арифметическое соответствующее множеству информации, составленное из особо важных данных	
3.	Представляет информацию в виде гистограмм частот и относительной частоты.	
4.	Дает прогноз соответствующий информациям.	
5.	Вычисляет среднее арифметическое соответственно сгруппированной информации.	
6.	Решает задачи на нахождение членов, знаменателя, количества членов и суммы геометрической прогрессии	
7.	Решает задачи на применение формулы суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	
8	Определяет число пермутаций в зависимости от порядка расположения элементов множества.	
9	Решает задачи с применение формулы вычисления пермутации и комбинезона.	

Урок 162. Задания суммативного оценивания по 6-му разделу.

1. Среди населения был произведен опрос о том, что сколько, приблизительно, денег они тратят ежедневно на продукты. Приведённые ниже данные, являются выборкой полученных результатов.

35 10 30 25 75 10 30 20 20 10 40
 50 40 30 60 70 25 40 10 60 20 80
 40 25 20 10 20 25 30 50 80 20

- a) Составьте таблицу отражающую показатели класса информации, средней оценки класса, частоты, относительной частоты.
- b) Составьте гистограмму частоту
- c) Составьте гистограмму относительных частот.
- d) Найдите среднее арифметическое.

2. Найдите значение ${}_{75}P_2$?

- a) 2550
- b) 2775
- c) 1555
- d) 5550

3. Напишите какая из задач относится к нахождению числа пермутаций, а какая - к нахождению комбинезона? Решите их.

Какую ситуацию более точно отражает выражение ${}_8C_3$?

а) Для мытья волос в парикмахерской предлагают 8 видов шампуня и 3 вида бальзама. В скольких разных вариантах могут быть использованы шампунь и бальзам при мытье волос?

б) У Рашада 8 цветных карандашей. Сколькими разными вариантами он может выбрать 3 карандаша?

в) Для личного PIN- кода были использованы 4 буквы и 4 цифры. Сколько существуют разных вариантов?

г) За столом 8 стульев. Сколькими разными способами можно рассадить за стол 3 людей ?

4. Сколько существует различных способов расположения букв в слове "ВЕКТОР", при условии что буквы В и Т не стоят рядом.

А) 720 В) 240 С) 480 D) 250

5. Сколькими разными способами можно разделить семь разных игрушек между тремя детьми.

а) $7C_3$ б) $7P_3$ в) 3^7 д) 7^3

6. Вычислите: ${}_{20}C_3$

7. Буквы А, В, С, М, Ö, F, G, H, Э и К собраны в мешочек.

а) Сколькими вариантами можно вытащить две буквы?

б) Какова вероятность, что оба эти буквы гласные ?

8. В целях рекламы фирма представляет покупателям рубашки трёх цветов с изображенными на них логотипами. 25 % покупателей выбрали красный цвет, 60% голубой и 15 % черный. Какова вероятность, что случайно выбранный покупатель выберет красную или черную рубашку?

9. Бросается одна игральная кость. Какова вероятность, что выпадет нечетная цифра ил цифра больше 4.

10. Бросается одна игральная кость. Какова вероятность, что выпадет цифра 2 ил 5?

Урок 163-169. Учебник стр. 229-235. Обобщающие задания. 7 часов

Задания, охватывают курс математики 5-9 классов, в которых могут быть рассмотрены заново темы: действия над рациональными числами, отношение, процент, подобие фигур, конгруэнтность и другие.

Урок 170. Годовое суммативное оценивание

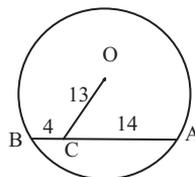
1. Определите знак разности $3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{2}$.

2. Вычислите значение выражения.

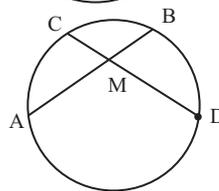
$$(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}) : \sqrt[3]{4}$$

3. O - центр окружности. OC = 13 см, BC = 4 см, AC = 14 см. Найдите радиус окружности.

A) 12 см B) 15 см C) 10 см D) 14 см



4. CM = 4 см, MD = 9 см, AM = 6 см. Найдите BM.



5. Точка A (2 ; 3) лежит на параболы $y = x^2 + 4x + c$. Покажите точку вершины этой параболы.

A) (2; -3) B) (-2; -13) C) (-2; 3) D) (2; 3)

6. Если абсцисса вершины параболы $f(x) = x^2 + bx + 6$ равна 1, то найдите $f(2)$.

A) -3 B) 2 C) 6 D) -6

7. Сколько диагоналей у многоугольника, из одной вершины которого исходят 6 диагоналей?

A) 10 B) 18 C) 27 D) 20

8. Около окружности с радиусом 3 см описан многоугольник, периметр которого равен 12 см. Найдите площадь этого многоугольника.

A) 12 B) 18 C) 36 D) 20

9. Установите соответствие.

- | | |
|-------------------|---|
| 1) пятиугольник | A) Из одной вершины исходят 5 диагоналей. |
| 2) шестиугольник | B) Из одной вершины исходят 3 диагоналей. |
| 3) восьмиугольник | C) Число всех диагоналей равно 9. |
| | D) Сумма внутренних углов равна 720° . |

10. Найдите сумму 20-ти первых членов арифметической прогрессии, если $a_2 + a_{19} = 10$.

A) 120 B) 200 C) 100 D) 180

11. Найдите сумму корней уравнения $||x - 1| + 5| = 8$:

- A) 8 B) 6 C) 3 D) 4

12. Сколько действительных корней имеет уравнение?

$$(x^2 + 4x) \cdot \sqrt{x - 1} = 0$$

13. Найдите длину медианы AM треугольника $\triangle ABC$ с вершинами $A(1; -3)$, $B(3; 6)$, $C(-5; 2)$.

14. Точки $A(2; 12)$ и $B(6; 8)$ принадлежат диаметру. Вычислите длину окружности

15. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству:
 $|x - 1| < 3,2$.

16. При каком наибольшем целом значении b число 4 принадлежит множеству решений неравенства $2x^2 + bx - 54 \leq 0$?

17. Одна сторона треугольника равна 6 см, другая 9 см. Если периметр треугольника меньше 25 см, то найдите наибольшее и наименьшее целое значение третьей стороны треугольника.

18. Найдите длину вектора $2\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = \langle 2; -1 \rangle$ и $\vec{b} = \langle -1; 2 \rangle$.

19. Найдите расстояние от точки $A = (1; 2)$ до центра окружности $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$

20. Сколько разных слов можно составить из букв слова “ХАЗАР” ?

21. В коробке 4 белых и 2 черных шара. Найдите вероятность того, что вытянутые случайным образом 2 шара окажутся обе белыми.

22. Найдите расстояние от начала координат до окружности $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

23. Найдите расстояние между точками образованными пересечением окружности $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 9 = 0$ с осью Oy .

24. Найдите координаты точки В, если $A(-3; 7)$ и $\vec{AB} = \langle 8; -11 \rangle$.

25. При каких значениях k , длина вектора $\vec{a} = \langle k; 3 \rangle$ равна 5.

RİYAZİYYAT 9

Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün
«Riyaziyyat» fənni üzrə müəllim üçün metodik vəsait
Rus dilində

Tərtibçi heyət:

- Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov
- Tərcüməçi: **Güllü Həsənova**
- Məsləhətçi: **Çingiz Qacar**
Azərbaycan Milli Elmlər
Akademiyasının həqiqi üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru
- İxtisas redaktoru: **İlham Hüseynov**
fizika-riyaziyyat elmləri üzrə fəlsəfə doktoru
- Dil redaktoru: **Asəf Həsənov**
- Kompüter tərtibatı: **Rəşad Musayev**
Bədii tərtibatı: **Leyla Bəşirova**
Korrektoru: **Qafur Zamanov**

*Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin
03.06.2016-cı il tarixli 369 №-li
əmrilə təsdiq edilmişdir.*

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi – 2016

Kağız formatı: 70×100 ¹/₁₆.

Fiziki çap vərəqi 15,0.

Səhifə sayı 240.

Tiraj: 430. Pulsuz.

“Radius” MMC-nin mətbəəsində çap olunmuşdur.