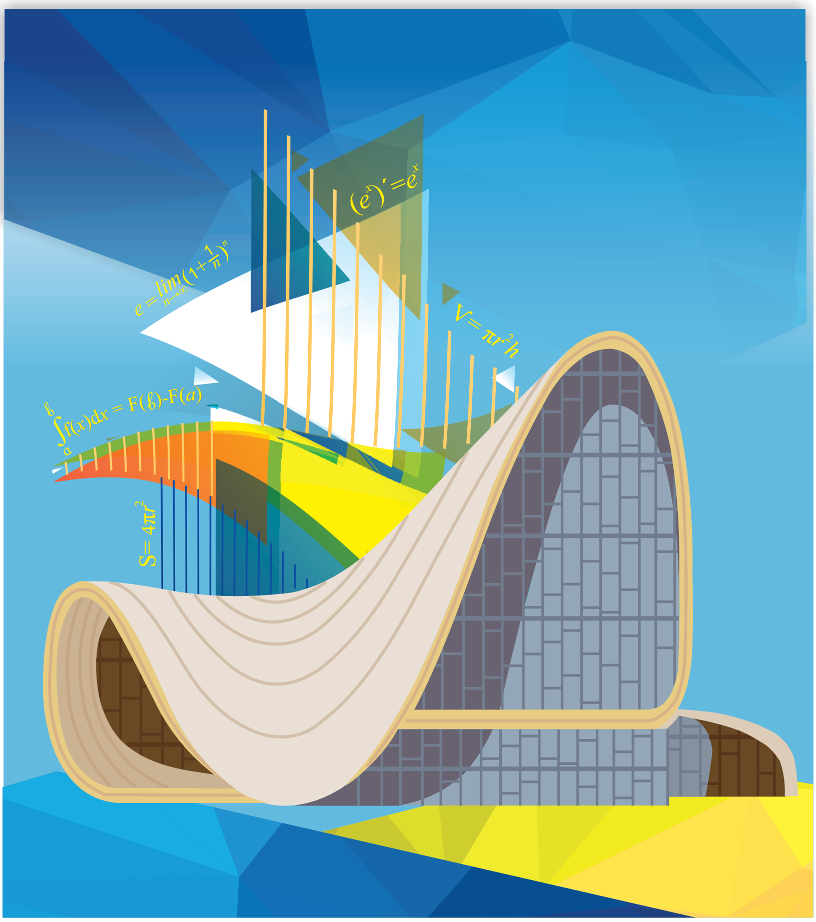
RİYAZİYYAT

METODİK VƏSAİT 11



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi ***Üzeyir Hacıbəylinin,***
sözləri ***Əhməd Cavadındır.***

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

Nayma Qəhrəmanova
Məhəmməd Kərimov
Əbdürrəhim Quliyev

RİYAZİYYAT 11

Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə dərsliyin
METODİK VƏSAİTİ

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi *radius_n@hotmail.com* və *derslik@edu.gov.az* elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur. Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

Radius
Bakı - 2018

Mündəricat

XI sinif Məzmun standartları

XI sinfin sonunda şagird:

- *n* dərəcəli tənlikləri həll edir, Bezu teoremini tətbiq edir;
- yığılan ardıcıllıqların xassələrini tətbiq edir, funksiyaların limitlərini hesablayır, kəsilməz funksiyaların əsas xassələrini tətbiq edir;
- elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır, törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir;
- funksiyanın araşdırılmasına diferensial hesabını tətbiq edir;
- bəzi funksiyaların ibtidai funksiyalarını tapır, elementar funksiyaların inteqralları cədvəlinin və inteqrallama qaydalarının köməyi ilə funksiyaların inteqrallarını hesablayır;
- Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq edir, əyrixətli trapesiyanın sahəsini və fırlanmadan alınan cisimlərin həcmini hesablayır;
- triqonometrik, üstlü və loqarifmik tənliklər sistemini həll edir;
- fəzada koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır, koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir, fəzada verilmiş vektoru komplanar olmayan üç vektor üzrə ayırır;
- müstəvinin və sferanın tənliyinə aid məsələləri həll edir;
- paralel köçürməni və oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir;
- silindirin, konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir, kürənin və hissələrinin səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır;
- müəyyən inteqraldan istifadə edərək, əyrixətli trapesiyanın və digər müstəvi fiqurların sahəsini tapır, ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqaisə edərək, xətani müəyyən edir;
- ölçmənin dispersiyasını və orta kvadratik meylini hesablayır, hadisənin ehtimalının hesablanmasına normal paylama qanununu tətbiq edir.

Məzmun xətləri üzrə əsas və alt-standartlar.

1.Ədədlər və əməllər

1.1. Ədədləri, onların müxtəlif formada verilməsini bilir və aralarındakı münasibətləri müəyyənləşdirir.

1.1.1. *n* dərəcəli çoxhədlinin *n* kökü olduğunu bilir və ona əsasən tənlikləri həll edir.

1.1.2. Çoxhədlinin ikihədliyə bölünməsinə Bezu teoremini tətbiq edir.

1.1.3. Vahidin n dərəcədən kökünün xassələrini bilir və tətbiq edir.

1.2. Riyazi əməlləri, riyazi prosedurları tətbiq edir və onlar arasındakı əlaqəni müəyyənləşdirir.

1.2.1. Ədədi ardıcıllığın və onun limitinin tərifini bilir, yığılan ardıcıllıqların xassələrini tətbiq edir.

1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır.

1.2.3. Funksiyanın kəsilməzlik anlayışlarını bilir və kəsilməz funksiyaların əsas xassələrini tətbiq edir.

2. Cəbr və funksiyalar

Şagird:

2.1. Cəbri çevirmədən müxtəlif situasiyalardakı problemlərin həllində istifadə edir.

2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.

2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.

2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.

2.2. Funksiya anlayışını bilir, həyati problemlərin riyazi modellərini qurur və funksiyaların xassələrinin köməyi ilə bu problemləri həll edir.

2.2.1. Funksiyanın törəməsinin köməyi ilə onun stasionar nöqtələrini tapır, bu nöqtələrin ekstremum nöqtələrin olub-olmadığını yoxlayır.
2.2.2. Funksiyaların araşdırılmasına və qrafikinin qurulmasına diferensial hesabını tətbiq edir.
2.2.3. İbtidai funksiya anlayışını bilir və bəzi funksiyaların ibtidai funksiyalarını tapır.
2.2.4. Qeyri-müəyyən inteqral anlayışını bilir, elementar funksiyaların inteqralları cədvəlinin və inteqrallama qaydalarının köməyi ilə funksiyaların inteqrallarını hesablayır.
2.2.5. Müəyyən inteqralın tərifini bilir və Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq edir.
2.2.6. Müəyyən inteqralın köməyi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayır.
2.2.7. Müəyyən inteqralın köməyi ilə fırlanmadan alınan cisimlərin həcmini hesablayır.
2.2.8. Funksiyanın cütlük-təklik, dövrilik xassələrindən müəyyən inteqralların səmərəli üsulla hesablanmasında istifadə edir.
2.3. Tənlikləri və bərabərsizlikləri həll edir.
2.3.1. Triqonometrik tənliklər sistemini həll edir.
2.3.2. Üstlü və loqarifmik tənliklər sistemini həll edir.

3. Həndəsə

Şagird:

3.1. Həndəsi təsvir, fəza təsəvvürü, məntiqi mühakimə və koordinatlar üsulunun köməyi ilə fiqurların xassələrini araşdırır.
3.1.1. Fəzada Dekart koordinat sistemi anlayışını, vektor anlayışını bilir, koordinatları ılə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır.
3.1.2. Fəzada koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir.
3.1.3. Müstəvinin və sferanın tənliyini bilir, onlara aid məsələlər həll edir.
3.1.4. Fəzada verilmiş vektoru komplanar olmayan üç vektor üzrə ayırır.
3.1.5. Fırlanmadan alınan fiqurları tanıyır.
3.2. Fəzada həndəsi çevirmələri tətbiq edir, fəza fiqurlarının səthlərinin sahələrini və həcmlərini hesablayır.
3.2.1. Paralel köçürməni məsələlər həllinə tətbiq edir.
3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir.
3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.
3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.
3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.
3.2.6. Kürənin hissələrinin (kürə seqmenti, kürə sektoru) səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır.

4. Ölçmə Şagird:

4.1.Ölçmə və hesablama vasitələrindən istifadə edərək, dəqiq və ya təqribi hesablamalar aparır.
4.1.1. Müəyyən inteqraldan istifadə edərək, əyrixətli trapesiyanın və digər müstəvi fiqurların sahəsini tapır.
4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.

5. Statistika və ehtimal

Şagird:

5.1. Statistik məlumat toplayır, sistemləşdirir, təhlil edir və nəticəni təqdim edir.
5.1.1. Ölçmənin dispersiyasını və orta kvadratik meylini hesablayır.
5.2. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarını başa düşür və tətbiq edir.
5.2.1. Hadisənin ehtimalının hesablanmasına normal paylama qanununu tətbiq edir.

Giriş

Dərsliyin strukturu

Dərslik 10 bölmədən ibarətdir.

Birinci bölmə "Çoxhədlilər" başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

1.1. Ədədləri, onların müxtəlif formada verilməsini bilir və aralarındakı münasibətləri müəyyənləşdirir.

1.1.1. n dərəcəli çoxhədlinin n kökü olduğunu bilir və ona əsasən tənlikləri həll edir.

1.1.2. Çoxhədlinin ikihədliyə bölünməsinə Bezu teoremini tətbiq edir.

1.1.3. Vahidin n dərəcədən kökünün xassələrini bilir və tətbiq edir.

Bu bölmədə çoxhədlini müxtəlif üsullarla vuruqlara ayırmaqla n dərəcəli tənliklərin köklərini müəyyənetmə və real situasiya məsələlərini həlletmə bacarıqlarının formalaşdırılması nəzərdə tutulur. Aşağı siniflərdə ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarmaqla, müxtəsər vurma, binomların açılışı düsturlarından istifadə etməklə çoxhədliləri vuruqlarına ayırma tapşırıqları yerinə yetirilmişdir. Bu bölmədə verilən dərslərdə isə çoxhədlinin çoxhədliyə (əsasən ikihədliyə) bölünməsi aşağıdakı bacarıqların formalaşdırma ardıcıllığı ilə verilmişdir.

1. Bölmə əməlini bölünən, bölən, qalıq və qismət komponentləri ilə ifadəetmə.

Şagird bölmə əməlini verilən çoxhədlilərə görə $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{B}(x)} = \mathrm{Q}(x) + \dfrac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{B}(x)}$ şəklində ifadə etməyi bacarmalıdır.

2. Çoxhədlinin $x - m$ ikihədlisinə bölmənin sintetik qaydası (Hörner sxemi).

Sintetik qayda şagirdə çoxhədlinin əmsallarına görə bölmə əməlini tez yerinə yetirməyə imkan verir.

3. Qalıq haqqında teorem. Qalıq haqqında teoremdən istifadə etməklə hər hansı $\mathrm{P}(x)$ çoxhədlisini $x - m$ şəklində ikihədliyə böldükdə qalığın $\mathrm{P}(m)$-ə bərabər olduğunu başa düşür. Bu teorem verilən ikihədlinin çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını, həmçinin bölmə əməlinin düzgün yerinə yetirildiyini yoxlamağa imkan verir.

4. Çoxhədlinin vuruqları haqqında teorem qalıq haqqında teoremə əsaslanaraq vuruqlarını müəyyən etməyə imkan verir.

5. Rasional köklər haqqında teorem. Bu teoremin şərtinə görə seçib yoxlamaqla n dərəcəli çoxhədlinin rasional köklərini (əgər varsa) tapmaq mümkündür.

6. Cəbrin əsas teoremi isə çoxhədlinin köklərinin sayı haqqında teoremdir.

Şagird bu teoremin kökləri tapmağın hər hansı bir qaydası olmadığını, yalnız köklərin varlığı haqqında teorem olduğunu başa düşür.

İkinci bölmə "Fəza koordinat sistemi və vektorlar" başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

3.1.1. Fəzada Dekart koordinat sistemi anlayışını, vektor anlayışını bilir, koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır.

3.1.2. Fəzada koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir.

3.1.4. Fəzada verilmiş vektoru komplanar olmayan üç vektor üzrə ayırır.

3.1.3. Müstəvinin tənliyini və sferanın tənliyini bilir, onlara aid məsələlər həll edir.
3.2.1. Paralel köçürməni məsələlər həllinə tətbiq edir.
3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir.

Bu bölmədə üçölçülü koordinat sistemini və bu sistemdə nöqtənin təsviri dərsləri ilə ilkin bacarıqlar formalaşdırılır. Sonrakı dərslər isə koordinatlara görə fəza koordinat sistemində müxtəlif məsələləri həlletmə bacarıqlarına ayrılmışdır. İki nöqtə arasındakı məsafəni, parçanın orta nöqtəsinin və parçanı verilən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatlarının, üçbucağın ağırlıq mərkəzinin koordinatlarının müəyyən edilməsi qaydaları və bu qaydaların tətbiqi ilə məsələ həlli bacarıqları bu dərslərə aiddir. Bu bölmədə həmçinin fəzada vektorlar və onlar üzərində əməllərin xassələrinə yer verilmişdir. Vektorun ort vektorlarla yazılışı, verilən vektora görə vahid vektorun müəyyən edilməsi, iki vektorun skalyar hasilinin tapılması bacarıqlarını əhatə edən dərslər də bu bölmədə verilmişdir. İki vektorun skalyar hasilinə aid dərslərdə yeni yanaşma ilə daha çox praktik əhəmiyyətli tapşırıqlara yer verilmişdir. Belə ki, şagird iki vektorun skalyar hasilindən istifadə etməklə praktik əhəmiyyət daşıyan iki vektor arasında qalan bucağı tapmağın mümkün olduğunu başa düşür.

Düz xəttin və müstəvinin tənlikəri geniş şəkildə izah edilmiş və tətbiqi tapşırıqlarla verilmişdir. Texnologiyanın sürətli inkişafı bu gün vektorların daha geniş müstəvidə öyrədilməsini tələb edir. Belə ki, kompüter proqram təminatında vektorlardan geniş istifadə edilir. Biz kompüterin ekranında istənilən informasiyanı, şəkli istədiyimiz koordinatlarda yerləşdirə bilirik. Bütün bunlar istənilən nöqtənin koordinatlarını vektorlarla müəyyən etməyin mümkün olması ilə bağlıdır. Odur ki, indiyə qədər işlədilən fəzada istənilən nöqtənin yerini müəyyən edən abstrakt “radius-vektor” anlayışı əvəzinə mahiyyəti daha açıq ifadə edən “yer vektoru” anlayışı daxil edilmişdir. Bu anlayış praktik əhəmiyyəti qabarıq əks etdirməklə problemləri daha tez anlamağa kömək edir.

Üçüncü bölmə ”Limit” başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.
1.2.1. Ədədi ardıcıllığın və onun limitinin tərifini bilir, yığılan ardıcıllıqların xassələrini tətbiq edir.
1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır.
1.2.3. Funksiyanın kəsilməzlik anlayışını bilir və kəsilməz funksiyaların əsas xassələrini tətbiq edir.

Limit anlayışı beynəlxalq təcrübə öyrənilməklə yeni yanaşma ilə verilmişdir. Belə ki, limit əvvəlcə real situasiyalar üzərində araşdırılmaqla ədədbiyyatlarda formal tərif adlanan təriflə verilmişdir. Limitin ciddi tərifi də (“ε-δ” dilində) dərslikdə verilmişdir. Lakin verilən tapşırıqlar formal tərifi əhatə edir.

Həmçinin limiti üç üsulla (bunlardan ilk ikisi emprik üsula daha yaxın olduğu üçün əyanidir və əhəmiyyətlidir) qrafiklə, cədvəllə və analitik üsulla müəyənetmə qaydaları verilmişdir. Şagird qrafikə görə limiti vizual olaraq təxmin edir, qiymətlər cədvəlində isə verilən qiymətə həm soldan, həm də sağdan yaxınlaşmaları hesablamaqla limitin qiymətini tapmış olur (varsa).

Bununla şagirdə sonrakı “Limitin varlığı” dərsini daha asan qavramaq üçün daha münbit şərait yaradılmış olur. Limitin xassələri, görkəmli limitlər isə limiti analitik üsulla tapmağa imkan verir.

Funksiyanın kəsilməzliyinin müəyyən edilməsi xeyli mürəkkəb mövzu olduğundan uyğun anlayışlar addım-addım, möhkəmləndirilərək, mövzunu təfsilatlı əhatə edən çox sayda tapşırıqlarla verilmişdir. Triqonometrik funksiyaların daxil olduğu xüsusi limitlər sonrakı dərslərdə yer almışdır. Sonsuz limitlər və sonsuzluqda limit anlayışları yeni yanaşma ilə çoxlu sayda tətbiqi tapşırıqlarla verilmişdir.

Ədədi ardıcıllığın limiti, monoton və məhdud ardıcıllığın limiti mövzularına da bu bölmədə yer verilmişdir.

Dördüncü bölmə “Fırlanma fiqurları. Silindr, konus, kürə” başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir.

3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.6. Kürənin hissələrinin (kürə seqmenti, kürə sektoru) səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır.

Bu bölmədə tətbiq olunan yeni yanaşma şagirdin hər bir fiqurun səthinin sahəsinin təcrübi olaraq, hazır fiquru kəsərək açması və verilən kartondan, kağızdan düzəldə bilməsi məşğələlərinə geniş yer verilməsidir. Bu məşğələlərə istər silindirin, istər konusun, istərsə də sferanın səthinin sahəsinin hesablanması tapşırıqlarında geniş yer verilmişdir. Şagird bu tapşırıqları yerinə yetirməklə səthin sahəsinin real olaraq nəyi ifadə etdiyini başa düşdükdən sonra məlumatları həndəsi anlayışlarla daha düzgün əlaqələndirə biləcək və düsturları məsələ həllinə daha rahatlıqla tətbiq edə biləcəkdir.

Beşinci bölmə “Funksiyanın törəməsi” başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.

2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.

2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.

Törəmə anlayışının mahiyyəti indiyə qədər hərəkətin sürətini əks etdirən ani sürət anlayışı ilə məhdudlaşdırılmadan törəmənin təbiətdə baş verən bütün dəyişmələri ən incə detallarda, ən kiçik vaxt intervalında qiymətləndirməyə imkan verən praktik əhəmiyyəti heç bir riyazi anlayışla müqayisəyə belə gəlməyən limitin köməyilə riyaziyyatın ən böyük kəşfi olduğunun təqdim edilməsinə çalışılmışdır.

Biz bütün dəyişmələri düzgün müəyyən edə bilsək, planlarımızı daha uğurla həyata keçirə bilərik. Odur ki, törəmənin ən geniş və əhəmiyyətli tətbiqi olan maliyyə məsələləri və maliyyə terminləri - marjinal maya dəyəri, marjinal gəlir, marjinal mənfəət anlayışları daxil edilmişdir. Şagird həmçinin indiyə qədər həll etdiyi statistik məlumatın müəyyən edilməsini tələb edən situasiyalar qədər, dinamik məlumatların tapılması məsələlərinin, yəni sərbəst dəyişən kəmiyyətin qiymətinə görə asılı dəyişən kəmiyyətin ani qiymətlərinin tələb edildiyi situasiyaların olduğunu başa düşür. Temperaturun, gəlirin, sahənin, adamların sayının, istehsal edilən, satılan məhsulun, tibdə daxili orqanların strukturunun, dərmanın bədəndə sorulma sürəti və s. kimi situasiyalarda ani dəyişmə sürətinin müəyyən edilməsi böyük əhəmiyyətə malikdir. Bir sözlə, həyat dəyişmələrlə mövcuddur, dəyişmələr isə diferensialın köməyilə müəyyən edilir. Bu bölmədə müxtəlif funksiyaları diferensiallama üsulları və çoxlu sayda tətbiq tapşırıqları verilmişdir.

Altıncı bölmə "Fırlanma fiqurlarının həcmi" başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.6. Kürənin hissələrinin (kürə seqmenti, kürə sektoru) səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır.

Fırlanma fıqurlarının həcmi düsturlarının istər emprik yollarla isbatı, istərsə də analitik yolla isbatının verilməsinə çalışılmışdır. Məsələn, kürənin həcminin Arximed izahı şəkillərlə addım-addım elə verilmişdir ki, şagird kürənin həcminin onu əhatə edən silindrin həcmi ilə əlaqəsini izləyə bilir. Bununla yanaşı kürənin həcminin həndəsi isbatı da verilmişdir. Həmçinin silindrin, konusun həcminin emprik olaraq bu fiqurlar formasında olan qabların maye tutumları ilə əlaqələndirilməklə, yenə də həcmin müəyyən edilməsinin emprik üsulu verilmişdir. Şagird bu təcrübələri özü şəxsən yerinə yetirməklə həndəsi anlayışların uzun zaman yadında qalmasına və praktik əhəmiyyətini düzgün qiymətləndirməsinə nail ola bilər.

Yeddinci bölmə "Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın araşdırılması" başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

2.2.1. Funksiyanın törəməsinin köməyi ilə onun stasionar nöqtələrini tapır, bu nöqtələrin ekstremum nöqtələri olub-olmadığını yoxlayır.

2.2.2. Funksiyaların araşdırılmasına və qrafikinin qurulmasına diferensial hesabını tətbiq edir.

Funksiyanın analitik düsturuna görə qrafikinin qurulması, xassələrinin müəyyən edilməsi dərslərində nəzəri materiallara az yer verilməklə izahlar daha çox nümunələr üzərində verilmişdir. Bu bölmədə törəmənin geniş tətbiq situasiyalarına aid optimallaşdırma məsələləri verilmişdir. Optimallaşdırma məsələləri verilən situasiyaya görə kəmiyyətin maksimum və ya minimum qiymətlərinin tapılması məsələləridir. Məsələn, konsturksiyaetmə zamanı daha az material sərf etməklə daha yüksək məhsuldarlığa nail olmaq, maliyyədə verilən şərtlər daxilində gəlirin nə zaman ən yüksək olduğunu və ya maya dəyərinin nə zaman ən aşağı olduğunu müəyyən etmək, sahənin və həcmin optimallaşdırılması məsələləri və s. belə məsələlərdəndir. Optimallaşdırma məsələlərinin həlli addımları verilmişdir ki, bu da şagirdə problemə yanaşmanın və həllin planlı olaraq, ardıcıl araşdırmasını yerinə yetirməsinə imkan verir. Bunun üçün şagirdlər məsələnin aşağıdakı addımlarla həllinə təşviq edilir:

1. Məsələni diqqətlə oxuyun. Uyğun şəkli çəkin.
2. Uyğun dəyişənlərin və sabitlərin, nəyin dəyişdiyinin, nəyin sabit qaldığının və hansı vahidlərdən istifadə olunduğunun siyahısını tutun. Çəkdiyiniz şəkildə ölçü vahidləri varsa, onları işarələyin.
3. Uyğun x parametri seçin və axtarılan kəmiyyəti $f(x)$ funksiyası kimi ifadə edin. Bu funksiyanın ekstremumlarını tapın.
4. Alınmış nəticəni real situasiyaya uyğun izah edin.

Səkkizinci bölmə "İnteqral" başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

2.2.3. İbtidai funksiya anlayışını bilir və bəzi funksiyaların ibtidai funksiyalarını tapır.

2.2.4. Qeyri-müəyyən inteqral anlayışını bilir, elementar funksiyaların inteqralları cədvəlinin və inteqrallama qaydalarının köməyi ilə funksiyaların inteqrallarını hesablayır.

2.2.5. Müəyyən inteqralın tərifini bilir və Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq edir.

2.2.6. Müəyyən inteqralın köməyi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayır.

2.2.7. Müəyyən inteqralın köməyi ilə fırlanmadan alınan cisimlərin həcmini hesablayır.

2.2.8. Funksiyanın cütlük-təklik, dövrilik xassələrindən müəyyən inteqralların səmərəli üsulla hesablanmasında istifadə edir.

Şagird diferensiallama ilə verilən nöqtədə funksiyanın ani dəyişməsinin müəyyən edildiyini, inteqrallamanın isə diferensiallamanın tərs əməli olmaqla ani qiymətlərin bütün qiymətlərini cəmləməklə verilən aralıqda artımı müəyyən etməyə imkan verdiyini başa düşür. Müəyyən inteqralın hesablanması zamanı beynəlxalq dərslik təcrübəsinə əsaslanan yeni yanaşma tətbiq edilmişdir. Belə ki, funksiya qrafikinin verilən parçada əhatə etdiyi sahə (hüdüdlandırdığı) anlayışı daxil edilməklə indiyə qədər istifadə edilən əyrixətli trapesiyanın sahəsi anlayışından imtina edilmişdir. Şagird əyrinin əhatə etdiyi sahə dedikdə sahənin qiymətinin funksiyanın modelləşdirdiyi situasiyadakı kəmiyyətə uyğun olduğunu, başqa sözlə desək, onun qiymətinin ölçü vahidinin manat, dərəcə, km, kq və s. istənilən fiziki kəmiyyət ola biləcəyini başa düşür. Əyrixətli trapesiya anlayışı isə dəyişməni statistik məlumat olaraq sahə vahidi ilə ölçülən bir kəmiyyət olması assosiyasını yaradır. İnteqralın tətbiq tapşırıqları mövzulara ayrılmaqla geniş şəkildə verilmişdir. Diferensiallama ilə verilən bütün situasiyalar burada da yer almışdır. Məsələn, törəmə bakteriyaların ani artımı haqqında məlumat verirsə, inteqral verilən vaxt aralığında bakteriyaların sayındakı artımı göstərir. Bu qarşılıqlı əlaqəni şagird situasiyaların hər iki dərsdə təkararlanması ilə əyani şəkildə əlaqələndirə bilir.

Daha sonra isə fırlanma fiqurlarına ümumi şəkildə hər hansı funksiyanın qrafiki ilə əhatələnmiş müstəvi hissəsinin ox ətrafında fırlanmasından alınan fiqurlar kimi baxılır. Fırlanma cisimlərinin həcmini verilən sərhədlər daxilində funksiyanın müəyyən inteqralını hesablamaqla tapır.

Doqquzuncu bölmə "Statistika və ehtimal" başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

5.1.1. Ölçmənin dispersiyasını və orta kvadratik meylini hesablayır.

5.2. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarını başa düşür və tətbiq edir.

5.2.1. Hadisənin ehtimalının hesablanmasına normal paylama qanununu tətbiq edir.

Statistikik məlumatı təhlil etmək üçün dispersiya və standart meyl (orta kvadratik meyil) kimi statistik ölçüləri müəyyən etmə qaydası ümumi şəkildə və nümunələr üzərində araşdırılır. Statistik məlumatı qiymətləndirmək üçün məlumatın normal paylanma qrafiki də həm ümumi şəkildə, hən də nümunlər üzərində araşdırılır. Həmçinin məlumatı təqdim etmənin qutu-qulp diaqramı üzərində qurulmuş tapşırıqlara yer verilmişdir. Qutu-qulp diaqramı məlumatın hansı intervalda sıxlaşdığını (qutu), bu sıxlaşmadan sağda və solda daha az sayda məlumata görə (qulplara görə) məlumatın dəyişmə diapazonun necə dəyişdiyini aydın görməyə imkan verir.

Ehtimalın hesablanması dərslərində elementar hadisələr fəzasına və hadisənin növünə görə ehtimalın hesablanmasına icmal-baxış keçirilmiş nümunələr, tapşırıqlar verilmişdir. Yeni anlayış olaraq şərti ehtimal daxil edilmişdir. Şərti ehtimalın hesablanma qaydası nümunə üzərində geniş izah edilmişdir.

Onuncu bölmə "Tənliklər, bərabərsizliklər, tənliklər sistemi" başlığı ilə aşağıdakı əsas və alt məzmun standartlarını əhatə edir.

2.3.1. Triqonometrik tənliklər sistemini həll edir.

2.3.2.Üstlü və loqarifmik tənliklər sistemini həll edir

Mənimsəmə qabiliyyəti zəif olan şagirdlər üçün tövsiyə edilən fəaliyyətlər:

1. Araşdırma və praktik məşğələlərin müzakirəsində iştirakına alışmaq;
2. Riyazi anlayışın izah olunmasına ayrılmış ilk dərsdə düsturun, tərifinin birbaşa tətbiqi ilə həll edilən tapşırıları yerinə yetirdiyinə diqqət etmək, ev tapşırığı olaraq öyrənmə tapşırıqları səviyyəsində tapşırıqlar vermək;
3. Öyrənmə tapşırıqlarını sadə qısa şərhlərlə, izahlarla yerinə yetirməsinə təşviq etmək;
4. Həndəsi məsələlərin həllində xətkeş, pərgardan istifadə etməklə şəkillərin çəkməsinə, kəsib yapışdırma məşğələlərinin yerinə yetirməsinə nail olmaq;
5. Teorem və qaydaları izahdan sonra öz sözləri ilə dəftərində yazmaq və nümunə göstərmək.

Mənimsəmə qabiliyyəti yüksək olan şagirdlər üçün tövsiyə edilən fəaliyyətlər:

1. Dərslikdə verilmiş bütün tətbiq tapşırıqlarını yerinə yetirməsinə nail olmaq;
2. Müəllim üçün vəsaitdə dərslikdə isbatı nəzərdə tutulmamış bəzi teoremlərin isbatı, həmçinin isbat edilmiş teoremin alternativ isbatı verilmişdir. İstedadlı şagirdlərin bu isbatı müstəqil yerinə yetirmələri tövsiyə edilir. Bu işlər şagirdin portfoliosuna tikilir.
3. Layihə işlərini daha geniş və tətbiqi şəkildə yerinə yetir

Əhəmiyyətli linklər

1. http://www.algebra-class.com
2. www.classzone.com
3. http://www.shodor.org/interactivate/activities
4. http://www.mathwarehouse.com
5. http://www.netplaces.com
6. http://www.purplemath.com
7. https://www.khanacademy.org

1-ci bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
1.1. Ədədləri, onların müxtəlif formada verilməsini bilir və aralarındakı münasibətləri müəyyənləşdirir. 1.1.1. *n* dərəcəli çoxhədlinin *n* kökü olduğunu bilir və ona əsasən tənlikləri həll edir. 1.1.2. Çoxhədlinin ikihədliyə bölünməsinə Bezu teoremini tətbiq edir. 1.1.3. Vahidin *n* dərəcədən kökünün xassələrini bilir və tətbiq edir.	1-4	Çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi. Qalıq haqqında teorem	4	7-12
	5	Çoxhədlinin vuruqları haqqında teorem	1	13-14
	6-7	Rasional köklərin tapılması	2	15-17
	8-9	Cəbrin əsas teoremi	2	18-21
	10-12	Çoxhədli funksiya Rasional funksiya	3	22-28
	13	Ümumiləşdirici tapşırıqlar	1	29
	14	Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları.	1	
		Cəmi	14	

Dərs 1-4. Çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi. Qalıq haqqında teorem. 4 saat. Dərslik səh. 7-12

Məzmun standartı.
1.1.2. Çoxhədlinin ikihədliyə bölünməsinə Bezu teoremini tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:

- çoxhədlini çoxhədliyə bölməni budaqlı bölmə üsulundan istifadə etməklə yerinə yetirir;
- bölünən, bölən, qismət və qalığı yazır;
- çoxhədlini çoxhədliyə bölməni ifadə edən $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{B}(x)} = \mathrm{Q}(x) + \dfrac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{B}(x)}$ bərabərliyini yazır və həllin yoxlanmasına tətbiq edir.
- çoxhədlinin ikihədliyə bölünməsini sintetik bölmədən istifadə etməklə yerinə yetirir, nəticəni $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{x-m} = \mathrm{Q}(x) + \dfrac{r}{x-m}$ şəklində yazır.
- qalıq haqqında teoremi çalışmaların həllinə tətbiq edir.

Çoxhədlinin çoxhədliyə, xüsusi halda ikihədliyə budaqlı bölünməsinin tam ədədləri bölmə qaydasına analoji yerinə yetirildiyi şagirdlərin diqqətinə çatdırılır. Tam ədədləri bölmədə hər bir mərtəbə vahidinin böləndüyünü, hər bölmə addımından qismətə bir rəqəmin yazılması, mərtəbə vahidinin sayının sıfır olduğu halda qismətə sıfır yazılmasına əməl etməyin vacib olduğu vurğulanır. Bəs çoxhədlilərin bölünməsində bu qaydalara necə əməl olunur? Dərslikdə verilən nümunə üzərində və ya bir başqa nümunə ilə budaqlı bölmə izah edilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.1. 1) Bölmə əməlini budaqlı bölmə ilə yerinə yetirin.

Həlli: c) Əvvəlcə bölünən çoxhədlini dəyişənin dərəcəsinin azalma sırası ilə yazaq, sonra budaqlı bölməni yerinə yetirək.

$$
\begin{array}{rl}
-x^3+2x^2+4x+5 & \big|\ \underline{\ x+2\qquad\ } \\
-\ \underline{-x^3-2x^2} & \ \ -x^2+4x-4 \\
4x^2+4x & \\
-\ \underline{4x^2+8x} & \\
-4x+5 & \\
-\ \underline{-4x-8} & \\
13 &
\end{array}
$$

$\mathrm{P}(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 5$ çoxhədlisini $\mathrm{B}(x) = x + 2$ ikihədlisinə böldükdə qismətdə $\mathrm{Q}(x) = -x^2 + 4x - 4$, qalıqda $\mathrm{R}(x) = 13$ alınır.

Həllin doğruluğunu

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

bərabərliyinə görə yoxlayaq:

$B(x) \cdot Q(x) + R(x) = (x + 2)\cdot(-x^2 + 4x - 4) + 13 =$

$= -x^3 + 4x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 8 + 13 = -x^3 + 2x^2 + 4x + 5 = P(x)$

D.4. Bölmə əməlini yerinə yetirin.

b) $(x^4 + 2x^2 + 4):(x^2 - 2)$

Həlli: Bölünən və bölən çoxhədlini dəyişənin dərəcəsinin azalma sırası ilə yazaq, iştirak etməyən dərəcəli hədləri 0 əmsalı ilə daxil edək və budaqlı bölməni yerinə yetirək.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 0\cdot x^3 + 2x^2 + 0\cdot x + 4 & x^2 + 0\cdot x - 2 \\ \cline{2-2}
-\;x^4 + 0\cdot x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 + 4 \\ \cline{1-1}
4x^2 + 0\cdot x + 4 & \\
-\;4x^2 + 0\cdot x - 8 & \\ \cline{1-1}
12 &
\end{array}$$

Beləliklə, $\dfrac{x^4 + 2x^2 + 4}{x^2 - 2} = x^2 + 4 + \dfrac{12}{x^2 - 2}$

D.5. $x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot Q(x)$ olarsa, Q(2)-ni hesablayın

Həlli: Verilən şərtə görə $x^3 - x^2 - 5x + 6$ çoxhədlisi $x - 2$ ikihədlisinə qalıqsız bölünür. Bölmə əməlini yerinə yetirərək qismət çoxhədlisini tapaq.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 - 5x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\;x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & x^2 + x - 3 \\ \cline{1-1}
x^2 - 5x \qquad & \\
-\;x^2 - 2x \qquad & \\ \cline{1-1}
-3x + 6 & \\
-\;-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Deməli, $Q(x) = x^2 + x - 3$ olur. Onda, $Q(2) = 2^2 + 2 - 3 = 3$ alarıq.

Çoxhədlinin bölünməsində daha çox ikihədliyə bölmə tapşırıqları yerinə yetirildiyindən sintetik bölmənin əhəmiyyət daşıdığı qeyd edilir.

Nümunə. $(2x^4 + 3x^3 - x - 5) : (x + 2)$

1. Bölünən çoxhədlinin əmsalları çoxhədlinin dərəcəsinin azalma sırasına görə yazılır. İştirak etməyən dərəcəli hədd sıfır əmsalı ilə daxil edilir.
2. $x - m$ bölən ikihədlisinin m sabiti solda yazılır.

$$x + 2 = \qquad 2x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 5$$
$$= x - (-2) \qquad \text{bölünənin əmsalları}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
-2 & \overbrace{2 \quad 3 \quad 0 \quad -1 \quad -5} & & & & \\
\times & & -4 & 2 & -4 & 10 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad -1 \quad 2 \quad -5}_{\text{qismətin əmsalları}} & & & & 5 \ \text{qalıq}
\end{array}$$

$$2x^3 - x^2 + 2x - 5$$

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x - 5}{x + 2} = 2x^3 - x^2 + 2x - 5 + \frac{5}{x + 2}$$

Şagirdlərin riyazi yazı bacarıqlarına, riyazi prosedurları sözlə ifadə etmə bacarıqlarına xüsusi diqqət yetirilməsi tövsiyə edilir. Məsələn, şagird çoxhədlinin bölünməsini yerinə yetirərkən hansı məqama diqqət etməli olduğunu, mühüm qaydaların necə işləndiyini sözlə ümumi şəkildə təqdim etməyi və nümunə üzərində göstərməyi bacarmalıdır. Bu dərs üzrə aşağıdakı kimi mühüm məqamlar var.

Budaqlı bölmə çoxhədlini bölmənin daha ümumi üsuludur.

Sintetik bölmə bölən $x - m$ şəklində ikihədli olduqda alternativ üsuldur.

Bölmə əməlinin nəticəsi $\dfrac{P(x)}{x - m} = Q(x) + \dfrac{r}{x - m}$ kimi yazılır.

Bölmə əməlinin düzgün yerinə yetirildiyini $P(x) = (x - m)\ Q(x) + r$ düsturuna görə yoxlamaq olar.

Qalıq haqqında teorem(Bezu teoremi) ümumsinif müzakirəsi ilə araşdırılır.

Teorem	**Nümunə**
$P(x)$ çoxhədlisinin $x - m$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq $P(x)$ çoxhədlisinin $x = m$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir: $r = P(m)$	$(x^3 - 4x^2 + 5x + 1):(x - 3)$ $\begin{array}{c\|cccc} 3 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ & & 3 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 7 \end{array}$ $P(3) = 7$

Şagird qalıq haqqında teoremə görə qalığın m-in verilən qiymətində çoxhədlinin P(m) qiymətinə bərabər olduğunu başa düşür. Bunun üçün aşağıdakı tip tapşırıqların yerinə yetirilməsinə diqqət edilir. Məsələn, qalıq haqqında teoremdən və sintetik bölmədən istifadə etməklə aşağıdakı nümunələrə baxılır.

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ çoxhədlinin P(2) qiymətini hesablayın.

1. Qalıq haqqında teoremin bu nümunəyə tətbiqi sözlə yazılır.

"Qalıq haqqında teoremə görə $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ çoxhədlisinin $x - 2$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq çoxhədlinin $x = 2$ nöqtəsindəki P(2) qiymətinə bərabərdir.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 5 & 3 \\ & & 2 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 5 \end{array}$$

2. Sintetik bölmədən istifadə etməklə qalığı tapaq: $r = 5$

3. Deməli $P(2) = 5$, yoxlayaq: $P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 3 = 8 - 16 + 10 + 3 = 5$

Qalıq haqqında teoremin aşağıdakı sadə yazılışları ilə bunu izah etmək olar.

Biz $P(x)$ çoxhədlisinin $x - m$ ikihədlisinə bölünməsini aşağıdakı bərabərliklə ifadə edirik: $P(x) = (x - m) \cdot Q(x) + r$, əgər $x = m$ olarsa,

$$P(m) = (m - m)\, Q(m) + r = 0 \cdot Q(m) + r = r$$

b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax - 7$ çoxhədlisinin $(x + 1)$-ə bölünməsindən alınan qalıq 5 olarsa, a həqiqi ədədini tapın. Qalıq haqqında teoremə görə $P(-1) = 5$

$(-1)^4 - 2(-1)^3 + a(-1) - 7 = 5 \quad 1 + 2 - a - 7 = 5;\ a = -9$ və

çoxhədli $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x - 7$ kimi olar.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.10. Verilmiş $P(x)$ çoxhədlisini $x - m$ ikihədlisinə sintetik qayda ilə bölün, alınan qalığı bu çoxhədlinin P(m) qiyməti ilə müqayisə edin.

c) $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$; $m = -2$

Həlli: $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$ çoxhədlisini $(x + 2)$ ikihədlisinə sintetik qayda ilə bölək. Burada $x + 2 = x - (-2)$, yəni $m = -2$ olduğunu nəzərə alaq.

$$4x^3 + 5x^2 - 6x - 4$$

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 4 & 5 & -6 & -4 \\ * & \downarrow & -8 & 6 & 0 \\ \hline & 4 & -3 & 0 & -4 \end{array}$$

$4x^2 - 3x + 0$ qalıq

Qalıqda $r = -4$ alınır. İndi isə P(–2) qiymətini hesablayaq:

$P(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 4 = -32 + 20 + 12 - 4 = -4.$

Göründüyü kimi, $r = P(-2)$.

D.11. Qalıq haqqında teoremə görə verilən çoxhədlinin: 1) $x - 4$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalığı müəyyən edin.
a) $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$

Həlli: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ bölünən çoxhədli,
$B(x) = x - 4$ bölən olarsa,
baxılan halda $m = 4$ olduğundan alınan qalığı $r = P(m)$ düsturuna görə müəyyən edə bilərik:

$$r = P(4) = 4^3 + 3\cdot 4^2 - 5\cdot 4 + 2 = 64 + 48 - 20 + 2 = 94.$$

D.16. a) c-nin hansı qiymətində $P(x) = -2x^3 + cx^2 - 5x + 2$ çoxhədlisini həm $x - 2$, həm də $x + 1$ ikihədlisinə böldükdə qalıq eyni olar?

Həlli: $P(x) = -2x^3 + cx^2 - 5x + 2$ çoxhədlisini $(x - 2)$-yə böldükdə alınan qalıq $r_1 = P(2)$, $(x + 1)$-ə böldükdə isə alınan qalıq $r_2 = P(-1)$ olur.
Şərtə görə $r_1 = r_2$ olduğundan,

$$P(2) = P(-1)$$

olmalıdır. Buradan:

$$-2\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 2 = -2\cdot(-1)^3 + c\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1) + 2,$$
$$-16 + 4c - 10 + 2 = 2 + c + 5 + 2,$$
$$3c = 33,$$
$$c = 11.$$

$c = 11$ olduqda qalıqlar eyni olar.

D.18. $P(x)$ çoxhədlisi $(x - 1)$-ə qalıqsız bölünür, $(x + 2)$-yə bölündükdə isə qalıq 3-ə bərabər olur. Bu çoxhədlini $(x^2 + x - 2)$-yə böldükdə alınan qalığı tapın.

Həlli: Şərtə görə $P(1) = 0$, $P(-2) = 3$ olmalıdır. $P(x)$ çoxhədlisini $(x^2 + x - 2)$-yə böldükdə alınan qalıq ümumi halda $R(x) = ax + b$ şəklində birdərəcəli çoxhədli ola bilər. Deməli, $P(x) = (x^2 + x - 2)\cdot Q(x) + ax + b$ və ya $P(x) = (x + 2)\cdot(x - 1)\cdot Q(x) + ax + b$. Buradan $P(1) = a + b$, $P(-2) = -2a + b$

olduğundan, verilənlərə görə $\begin{cases} a + b = 0, \\ -2a + b = 3 \end{cases}$ sistemini yaza bilərik. Bu sistemdən $a = -1$, $b = 1$ tapılır. Deməli, $P(x)$ çoxhədlisini $(x^2 + x - 2)$-yə böldükdə alınan qalıq $R(x) = -x + 1$ olur.

İşçi vərəq №1

Adı_________ Soyadı___________ **Tarix______**

1) Bölmə əməlini budaqlı bölmədən istifadə etməklə yerinə yetirin.

$(3x^2 - 2x + 1) : (x - 1)$

$(3 - 4x - 2x^2) : (x + 1)$

$(x^3 + 8) : (x + 2)$

2) Bölmə əməlini sintetik bölmədən istifadə etməklə yerinə yetirin.

$(x^2 - 5) : (x - 5)$

$(4x^2 - 5x + 3) : (x + 3)$

$(4x^3 + 2x - 3) : (x - 2)$

3) Sintetik bölmənin verilmiş sxeminə görə *a, b, c* əmsallarını tapın.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & -4 & 0 & 7 & -1 \\ & & 6 & 4 & b & 30 \\ \hline & 3 & a & 4 & 15 & c \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 5 & 6 \\ & & a & c \\ \hline & 1 & b & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} 3 & a & -2 & 3 & c \\ & & b & 21 & 72 \\ \hline & 3 & 7 & 24 & 68 \end{array}$$

4) Qalıq haqqında teoremdən və sintetik bölmədən istifadə etməklə P(a) -nı tapın.

$P(x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 6;\quad a = -2$	$P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x;\quad a = -2$
$P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9;\quad a = 1$	$P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x;\quad a = -1$
$P(x) = 6x^3 - x^2 + 4x + 3;\quad a = 3$	$P(x) = 2x^3 - x^2 + 10x + 5;\quad a = 1/2$
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 9;\quad a = -1$	$P(x) = 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 45;\quad a = 3$

İşçi vərəq №2

Adı_________ Soyadı___________ Tarix______

1) $P(x) = bx^3 + ax^2 + 3x$ çoxhədlisini $x + 1$ -ə böldükdə qalıq -10, $x - 2$-yə böldükdə qalıq 26 olur. a və b ədədlərini tapın.

2) $P(x) = x^3 - 2x^2 + a$ çoxhədlisini $(x - 3)$-ə böldükdə alınan qalıq $(x + 3)$-ə böldükdə alınan qalıqdan 3 dəfə çoxdur.
a) a ədədini tapın.
b) $P(x)$ çoxhədlisinin $x + 2$-yə bölünməsindən alınan qalığı tapın.

3) Verilən ikihədlinin verilən çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını yoxlayın.

a) $x + 2$, $P(x) = 4x^2 - 2x + 5$

b) $3x - 6$, $P(x) = 3x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 3x - 30$

Dərs 5. Çoxhədlinin vuruqları haqqında teorem. Dərslik səh. 13-14.
Məzmun standartı:
1.1.2. Çoxhədlinin ikihədliyə bölünməsinə Bezu teoremini tətbiq edir.
1.1.3. Vahidin n dərəcədən kökünün xassələrini bilir və tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:
• qalıq haqqında teoremdən istifadə etməklə verilən ikihədlinin çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını müəyyən edir;
• vuruqlar haqqında teoremi nümunələr üzərində izah edir.

İlk olaraq çoxhədlini vuruqlara ayırmanın indiyə qədər öyrənilən üsulları yada salınır. Nümunələr göstərilməklə müzakirə edilir.
1. $16x^4 - 81$ çoxhədlisini müxtəsər vurma düsturlarının tətbiqi ilə vuruqlarına ayıraq.
$16x^4 - 81 = (4x^2)^2 - 9^2 = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = (2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9)$
2. Qruplaşdırma üsulu və ortaq vuruğu mötərizə xaricinə çıxarma üsulu.
$x^3 + 3x^2 - 7x - 21 = x^2(x + 3) - 7(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 7)$
Bu üsullardan istifadə edərkən biz müxtəsər vurma düsturlarını tətbiq edirik. Həmçinin kvadrat üçhədlini vuruqlara ayırma qaydası yada salınır.
İndi isə yüksəkdərəcəli çoxhədliləri vuruqlarına ayırmaq üçün vuruqlar haqqında teoremdən və çoxhədlini bölmə üsullarından istifadə edəcəyik.

Çoxhədlini çoxhədliyə böldükdə qalıq sıfıra bərabər olarsa, deməli, bölən çoxhədli bölünən çoxhədlinin vuruğudur.

$$\frac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \frac{r}{x-m}, \quad \frac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \frac{0}{x-m}, \quad P(x) = (x-m)Q(x)$$

<table>
<tr><th colspan="2">Çoxhədlinin vuruqları haqqında</th></tr>
<tr><th>Teorem</th><th>Nümunə</th></tr>
<tr><td>m ədədi P(x) çoxhədlisinin köküdürsə, $x - m$ ikihədlisi P(x)-in vuruğudur.

Bu təklifin tərsi də doğrudur, yəni $x - m$ ikihədlisi P(x) çoxhədlisinin vuruğudursa, onda P(m) = 0.</td><td>$P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ çoxhədlisi üçün
$P(-1) = 3(-1) + 2(-1)^2 + 1 = 0$
olduğundan $x + 1$ ikihədlisi P(x) çoxhədlisinin vuruğudur.</td></tr>
</table>

Şagird qalıq haqqında teoremə görə verilən ikihədlinin çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını müəyyən etdikdən sonra digər vuruğun sintetik bölmə ilə müəyyən edilməsinə aid tapşırıqlar yerinə yetirilir.

Nümunə 1. $f(-3) = 0$ olduğunu bilərək, $f(x) = 2x^3 + 11x^2 + 18x + 9$ çoxhədlisini vuruqlarına ayırın.
Həlli: $f(-3) = 0$ olduğundan, $x - (-3) = x + 3$ ikihədlisi $f(x)$ çoxhədlisinin vuruqlarından biridir, digər vuruğu sintetik bölmənin köməyilə tapaq.

	$2x^3$	$11x^2$	$18x$	9
-3	2	11	18	9
		-6	-15	-9
	2	5	3	0

$2x^3 + 11x^2 + 18x + 9 = (x + 3)(2x^2 + 5x + 3)$

$2x^2 + 5x + 3 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = -3/2$

$2x^3 + 11x^2 + 18x + 9 = 2(x + 3)(x + 1)(x + 3/2)$

Şagird həm bölmə üsullarından istifadə etməklə, həm də vuruqlar haqqında teoremi birbaşa tətbiq etməklə verilən ikihədlinin çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını müəyyən edir. Məsələn, aşağıdakı tapşırıqda şagird teoremi birbaşa tətbiq edir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.3. $f(a) = 0$ olduğunu bilərək, çoxhədlini vuruqlarına ayırın.
1) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 12x + 80;\ a = 10$
Həlli: $f(10) = 0$ olduğundan, $f(x)$ çoxhədlisi $(x - 10)$ ikihədlisinə qalıqsız bölünməlidir. Sintetik bölməni tətbiq edək: $x^3 - 12x^2 + 12x + 80$

10	1	-12	12	80
		10	-20	-80
	1	-2	-8	0
	$x^2 -$	$2x$	$- 8$	$r = 0$

Deməli, $x^3 - 12x^2 + 12x + 80 = (x - 10)(x^2 - 2x - 8)$ şəklində yazmaq olar. Buradan kvadrat üçhədlinin vuruqlarına ayrılışını yazmaqla alarıq:

$$x^3 - 12x^2 + 12x + 80 = (x - 10)(x - 4)(x + 2)$$

D.7. Vuruqlar haqqında teoremdən istifadə etməklə göstərin ki, $x + 1$ ikihədlisi $P(x) = x^{25} + 1$ çoxhədlisinin vuruğudur, $Q(x) = x^{25} - 1$ çoxhədlisinin isə vuruğu deyil.
Həlli: Qalıq haqqında teoremə görə $P(-1) = 0$ olmalıdır.
Yoxlayaq: $P(-1) = (-1)^{25} + 1 = -1 + 1 = 0$, deməli $x + 1$ vuruğu $P(x)$ çoxhədlisinin vuruğudur. $Q(-1) = (-1)^{25} - 1 = -1 - 1 = -2$, deməli $x + 1$ vuruğu $Q(x)$ çoxhədlisinin vuruğu deyil.

Dərs 6-7. Rasional köklərin tapılması. 2saat. Dərslik səh. 15 - 17.

Məzmun standartı. 1.1.3. Vahidin n dərəcədən kökünün xassələrini bilir və tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:
• qalıq haqqında teoremdən istifadə edərək verilən ikihədlinin çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını müəyyən edir.
• ikihədli vuruğa görə sintetik bölmədən istifadə etməklə çoxhədlinin digər vuruqlarını müəyyən edir.

Tarixi mənbələrdə Tartalyanınn Kardanoya qarşı “Sən mənim düsturumu oğurlamısan“ mətni şagirdlərlə birgə araşdırılır. Bu məlumat şagirdlərə kub tənliklərin həllinin Kardano üsulunu öyrənməyə motivasiya edə bilər. Onlara internet mənbələrdən bu üsulu araşdırmaq tapşırıla bilər.

Tarixi mübahisə - kub tənliklərin ümumi şəkildə həllini ilk dəfə kim vermişdir - Kardano, yoxsa Tartalya? Əslində mübahisə üç italyan riyaziyyatçısı arasındadır. Yoxsulluq və aclıq içində yaşayan riyaziyyatçı Tartalya üçdərəcəli tənliklərin həlli düsturunu tapdığını bildirdi. Bu məsələ ilə başqa bir italyan riyaziyyatçısı Kardano da məşğul olurdu. Bu xəbəri eşidən Kardano Tartalyanın yanına gəlir və düsturu ona izah etməsini istəyir, əvəzində isə bu işi dərc edəcəyini vəd edir. Lakin Tartalya razı olmur. Kardano isə israrını davam etdirərək Tartalyadan bu düsturu almağa nail olur. (Mənbələrdə Kardanonun düsturun sirlərini Tartalyanın kub tənliklərin həlli haqqında yazdığı poemadan öyrəndiyi də qeyd edilir.). Bir müddət sonra Kardano bu kəşfi öz adına nəşr etdirir. Bundan əsəbləşən Tartalya Kardanaya qarşı çıxışlara başlayır. Kardano isə Tartalyaya qarşı çox istedadlı tələbəsi olan və dörddərəcəli tənliklərin həlli düsturunu verən Ferraridən istifadə edir. Bu mübahisədən çox sonralar norveç riyaziyyatçısı Nils Abel və fransız riyaziyyatçısı Evarist Qalua tərəfindən göstərildi ki, ümumi halda 5 və 5-dən yüksək dərəcəli tənliklərin kökləri radikallarla ifadə edilə bilməz.

Rasional köklərin axtarılması haqqında teorem nümunə üzərində araşdırılır. Bu dərsdə biz rasional köklərin axtarılması haqqında teoremi öyrənəcəyik. Bəs, çoxhədlinin kökləri hansı ədədlər ola bilər? Çoxhədlinin köklərinin hansı ədədlər ola biləcəyi haqqında şagirdlərlə söhbət aparılır. Tutaq ki, aşağıdakı kimi vuruqlarına ayrılmış çoxhədli var. Bu çoxhədlinin kökləri haqqında nə demək olar?

$$\mathrm{P}(x) = \underbrace{(x+3)}\underbrace{(2x-1)}\underbrace{(x+\sqrt{2})}\underbrace{(x-\sqrt{2})}\underbrace{(x-4+5i)}\underbrace{(x-4-5i)}$$

Köklər: $-3,\quad \frac{1}{2},\quad -\sqrt{2},\quad \sqrt{2},\quad 4-5i,\quad 4+5i,$

rasional kök

irrasional kök

kompleks kök

həqiqi köklər

həqiqi olmayan köklər

Çoxhədlinin kökləri rasional, irrasional, kompleks ədədlər ola bilər. Çoxhədlinin iki və daha çox sayda təkrarlanan kökləri ola bilər.

Rasional köklər haqqında teorem. Əgər $\frac{p}{q}$ sadə (ixtisar olunmayan)

rasional ədədi $n > 0$ olmaqla əmsalları tam ədədlər olan
$\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ çoxhədlinin kökündürsə, onda p ədədi a_0-ın, q ədədi isə a_n-nin tam bölənidir.

Teoremin isbatı orta məktəb kursunda nəzərdə tutulmur. Lakin bu teoremin isbatı sadədir.
p/q ədədi P(x)-in sıfırı olduğundan

$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0$ münasibətini yaza bilərik.

Tənliyin hər iki tərəfini q^n-ə vursaq,

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

alarıq, buradan

$$a_np^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - \ldots - a_0q^{n-1})$$

olar.
Bərabərliyin hər iki tərəfi tam ədədlərdir, deməli q ədədi a_np^n həddinin bölənidir. p/q sadə rasional ədəd olduğundan, onların ortaq vuruğu yalnız ±1 ola bilər, yəni p və q ədədləri qarşılıqlı sadə ədədlərdir, deməli p^n və q ədədləri də qarşılıqlı sadə ədədlərdər, onda p ədədi a_n ədədinin bölənidir. Analoji qayda ilə bərabərliyi a_0q^n həddinə görə həll edib bərabərliyin sağ tərəfində p vuruğunu mötərizə xaricinə çıxarsaq alarıq:

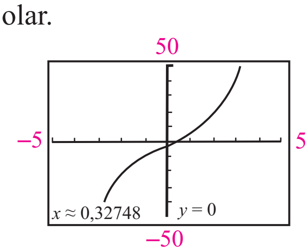
$$a_0q^n = p(-a_np^{n-1} - \ldots - a_1q^{n-1})$$

Sonuncu bərabərlikdən p ədədinin a_0q^n ədədinin vuruğu olduğu alınır. p ədədi q ilə qarşılıqlı sadə olduğundan, p ədədi a_0-ın bölənidir.

Burada bir məqama xüsusi diqqət yetirilir. Rasional köklər haqqında teorem "əmsalları tam ədədlər olan çoxhədlinin mütləq rasional kökləri olmalıdır" fikrini vurğulamır. Rasional köklərin (əgər varsa), p və q uyğun olaraq a_0 və a_n-nin bölənləri olmaqla, p/q rasional ədədləri arasından axtarılmalı olduğunu vurğulayır. Bu teorem məhz bu səbəbdən rasional köklərin axtarılması haqqında teorem adlanır. Aydındır ki, hər bir ədədin bir neçə vuruğu ola bilər və rasional kök çoxlu sayda ədədlər arasından axtarılmalı olur ki, bu da yorucu işə çevrilir. Çoxhədlinin köklərini uyğun funksiyanın qrafikini qrafkalkulyatorla quraraq, qrafikə görə hansı rasional ədədin çoxhədlinin kökü olduğunu təxmin etmək olur. Ona görə də, riyaziyyatın müasir tədrisi şagirdin qrafkalkulyatordan istifadəsinə hər an təşviq edilməsini vacib edir.

Çoxhədlinin bir rasional kökünün müəyyən edilməsi ilə onun digər vuruqlarını sintetik bölmənin köməyilə müəyyən edib, çoxhədlini vuruqlara ayıraraq digər rasional, irrasional və ya kompleks (xəyali) köklərini tapmaq olar. Çoxhədlinin rasional kökü olmaya bilər. Bu halda köklər irrasional və ya kompleks ədədlərdir. İrrasional kökləri qrafik üsulla təqribi olaraq tapmaq olar.

Məsələn, $P(x) = x^3 + 6x - 2$ çoxhədlinin rasional kökü yoxdur, lakin qrafikdən göründüyü kimi təqribi qiyməti $x \approx 0,32748$ olan bir irrasional və daha iki kompleks kökü vardır.



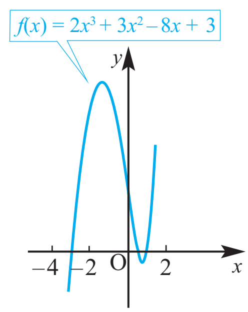
Rasional, irrasional və kompleks kökləri olan çoxhədlilərin nümunə göstərilməsi tövsiyə edilir.
Məsələn, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 2$ çoxhədlisi rasional və irrasional kökləri olan çoxhədliyə aid nümunə ola bilər.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.12. Baş həddinin əmsalı $a = 2$ olan üçdərəcəli $P(x)$ çoxhədlisi üçün $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$ olduğu məlumdur. Çoxhədlinin vuruqlara ayrılış şəklini yazın.
Həlli: $P(x)$ üçdərəcəli çoxhədlisi üçün $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$ olduğu məlumdursa, onda $P(x)$ çoxhədlisinin $(x + 2)$, $(x - 1)$ və $(x - 2)$ vuruqları vardır. x^3-nun əmsalı 2-yə bərabər olduğundan $P(x)$-in vuruqlara ayrılışı

$$P(x) = 2\cdot(x + 2)(x - 1)(x - 2)$$

şəklindədir.



D.13. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ funksiyasının qrafiki şəkildə göstərildiyi kimidir.
Qrafikə görə funksiyanın sıfırlarını müəyyən edin. Rasional kökün tapılma qaydasından və sintetik bölmədən istifadə etməklə də sıfırları tapın, qrafikə görə yoxlayın.

Həlli: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ çoxhədlisinin rasional sıfırları varsa, ±1; ±3; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{3}{2}$ ədədləri arasındadır. Qrafikə görə təxmin etmək olar ki, $x = -3$ bu çoxhədlinin köküdür. Sintetik bölmə qaydası ilə çoxhədlinin $x + 3$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalığın 0 olduğunu yoxlayaq:

–3	2	3	–8	3
	↓	–6	9	–3
	2	–3	1	0

Deməli, $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x + 3)(2x^2 - 3x + 1)$ olur. Çoxhədlinin digər köklərini $2x^2 - 3x + 1 = 0$ tənliyini həll etməklə tapırıq: 1 və $\frac{1}{2}$.
Verilən qrafikdən də çoxhədlinin sıfırlarının düzgün tapıldığını görmək mümkündür.
Qiymətləndirmə. Dərslikdə verilmiş tapşırıqlar yerinə yetirilir. Müşahidə yolu ilə qiymətləndirmə aparılır. Çoxhədlilərin köklərinin tapılması çox vaxt apardığından qruplarla iş bölgüsü ilə yerinə yetirilə bilər. Şagirdin bir rasional kökü müəyyən etdikdən sonra (mümkün rasional köklər arasından seçib çoxhədlidə yoxlamaqla) sintetik bölmənin tətbiqi ilə çoxhədlinin digər vuruğunu

müəyyən etməsi və bu vuruqlara görə artıq məlum üsullarla (kvadrat üçhədli, müxtəsər vurma düsturlarının tətbiqi və s.) digər kökləri tapma bacarıqlarına diqqət edilir. Yalnız çoxhədlinin bütün xətti vuruqlarını yazdıqdan sonra şagirdin çoxhədlinin bütün köklərini düzgün tapacağına əmin olmaq olar.

Dərs. 8-9. Cəbrin əsas teoremi. Dərslik səh. 18-212 saat

Məzmun standartı. 1.1.1. n dərəcəli çoxhədlinin n kökü olduğunu bilir və ona əsasən tənlikləri həll edir.

1.1.3. Vahidin n dərəcədən kökünün xassələrini bilir və tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:

• cəbrin əsas teoremini nümunələr üzərində təqdim edir;

• çoxhədlini bütün xətti vuruqlarının hasili şəklində ifadə edir;

• n dərəcəli çoxhədlinin n vuruğunun və n kökünün olduğunu nümunələr üzərində göstərir;

• n dərəcəli çoxhədlinin rasional, irrasional, kompleks köklərini tapır.

Biz keçən dərsimizdə qeyd etdik ki, çoxhədlinin köklərini tapmaq üçün çoxhədlinin tam olaraq xətti vuruqlarına ayrılması böyük əhəmiyyət daşıyır.

Cəbrin əsas teoremi çoxhədlini bütün təkrarlanan köklərini göstərən xətti vuruqları ilə ifadə edilməsinə imkan verir. Cəbrin əsas teoremi ilk dəfə alman riyaziyyatçısı Karl Gauss (1777-1855) tərəfindən isbat edilmişdir.

Teorem. Dərəcəsi sıfırdan böyük olan istənilən çoxhədlinin kompleks ədədlər çoxluğunda ən azı bir kökü var.

Dərslikdə verilmiş teoremdən çıxan nəticə odur ki, n dərəcəli çoxhədlini n sayda xətti vuruğun hasili kimi göstərmək olar:

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ldots(x - c_n)$$

Teorem nümunələr üzərində izah edilir.

1. $P(x) = x - 3$ bir dərəcəli çoxhədlisinin bir kökü var. Biz verilən çoxhədlini sıfıra bərabər etməklə alınan tənlikdən köklərini tapırıq. $x - 3 = 0$; $x = 3$

2. İki dərəcəli çoxhədlinin iki kökü var.

$P(x) = x^2 + 3x + 4$ çoxhədlisinin iki xətti vuruğu var və iki kökü var.

$x^2 + 3x + 4 = 0$, $(x + 1)(x + 3) = 0$; $x_1 = -1$ və $x_2 = -3$

3. Üç dərəcəli çoxhədlinin üç xətti vuruğu və üç kökü var.

$P(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4) = x(x + 2i)(x - 2i)$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2i$ və $x_3 = -2i$

4. Dörd dərəcəli çoxhədlinin dörd vuruğu və dörd kökü var.

$P(x) = x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x + i)(x - i)$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -i$ və $x_4 = i$

Şagirdlərin diqqətinə o da çatdırılır ki, cəbrin əsas teoremi köklərin varlığını hökm edir, köklərin tapılma alqoritmini göstərmir.

Çoxhədlinin mümkün rasional köklər siyahısından bir kökü müəyyənləşdirmək (işin əsas hissəsi budur-çoxhədlinin ilk vuruğunu tapmaq), daha sonra isə sintetik bölmə qaydasından istifadə edərək digər vuruqlarını müəyyən etməklə köklərini tapmaq olar. Çoxhədlinin bütün xətti vuruqlarını tapdıqdan sonra köklərini yazmaq olar. Çoxhədlinin baş əmsalı 1-ə bərabər olmadıqda mümkün rasional köklərin siyahısı çox artır. Odur ki, daha çox $a_n = 1$ olan çoxhədlilər nəzərdən keçirilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.18. Tənliyi həll edin. e) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$

Həlli: Verilmiş tənliyinin rasional kökləri varsa, $\pm1, \pm2, \pm4$ ədədləri arasındadır.

$x = 1$ ədədinin verilən çoxhədlinin kökü olduğunu yoxlayaq. Onda

$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 =$
$= (x - 1)(x^3 - x^2 + 4x - 4).$

$$\begin{array}{c|ccccc} & x^4 - & 2x^3 + & 5x^2 - & 8x + & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 5 & -8 & 4 \\ & \downarrow & 1 & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

Verilmiş tənliyi $(x - 1)(x^3 - x^2 + 4x - 4) = 0$ və ya

$(x - 1)^2 (x^2 + 4) = 0$ şəklində yazaq. Buradan $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2i$, $x_4 = -2i$

Şagirdlərin diqqətinə bir daha çatdırılır ki, n dərəcəli çoxhədlinin ən çoxu n kökü ola bilər.

D.24. İdman köynəkləri istehsal edən şirkətin mənfəətini $P(x) = -x^3 + 4x^2 + x$ kimi modelləşdirmək olar. Burada P mənfəəti (milyon manatla), x isə istehsal olunan köynəklərin sayını (milyonlarla) ifadə edir. Hesabata görə şirkət 4 milyon köynəyin satışından 4 milyon manat mənfəət əldə etmişdir. Şirkət daha az sayda köynək istehsal etməklə eyni mənfəəti əldə etmək istəsə, köynəklərin sayı nə qədər olmalıdır?

Həlli: Verilən şərtə görə $-x^3 + 4x^2 + x = 4$ tənliyinin 4-dən fərqli kökünü tapmalıyıq. Bu tənliyi $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ şəklində yazaq. $x^3 - 4x^2 - x + 4$ çoxhədlisini $(x - 4)$-ə sintetik qayda ilə bölək.

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -4 & -1 & 4 \\ & \downarrow & 4 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x - 4)\cdot(x^2 - 1) = (x - 4)\cdot(x - 1)(x + 1)$ olduğundan 4-dən fərqli köklər -1 və 1-dir. $x = -1$ real situasiyaya uyğun deyil. Deməli, şirkət 1 milyon köynək istehsalından 4 milyon manat mənfəət əldə edər.

Qiymətləndirmə. Cəbrin əsas teoremini başa düşdüyünü yoxlamaq üçün şagirdə(lərə) verilən köklərə uyğun vuruqlara ayrılış şəkli ilə çoxhədlilər yazması tapşırılır. Məsələn, kökləri 2, –3, həmçinin 3 dəfə təkrar (–1) kökü olan çoxhədlini yaz, dərəcəsini müəyyən et. Şagird $P(x) = (x - 2)(x+3)(x+1)^3$ çoxhədlisini yazır. Çoxhədlinin 5 vuruğu və 1+1+3=5 dərəcəli olduğunu təqdim edir.

İşçi vərəq № 3

Adı_________ Soyadı___________ Tarix______

1) Verilən ədədin çoxhədlinin kökü olub-olmadığını yoxlayın.

$f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4, \quad x = 1$ $\qquad$ $f(x) = x^4 - x^2 - 3x - 3, \quad x = -1$

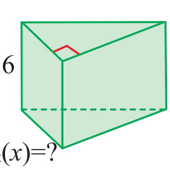
$f(x) = x^4 - x^2 - 3x + 3, \quad x = 2$ $\qquad$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3, \quad x = -i$

2) Çoxhədlinin bütün köklərini tapın.

a) $f(x) = x^3 + 72 - 5x^2 - 18x$
b) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 40$
c) $f(x) = x^3 - 8x^2 - 23x + 30$
d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

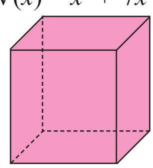
3) Verilənlərə görə düz prizmaların tələb olunan ölçülərinin ifadəsini yazın.

$V(x) = 2x^3 - 17x^2 + 27x + 18$



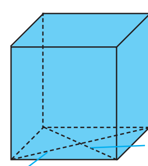
düz prizma

$V(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$



düzbucaqlı paralelepiped

$V(x) = x^4 - 1$



oturacağı romb olan düz prizma

İşçi vərəq №4

Adı_________ **Soyadı**___________ **Tarix**______

1) Baş əmsalı 1, kökləri verilən ədədlər olan ən kiçik dərəcəli P(x) çoxhədlisini yazın. Dərəcəsini göstərin.

3; 0; –2

1; –1; 2; –2; 3

–1; –1; 3 və 4

3; $2 + \sqrt{5}$, $2 - \sqrt{5}$

1; 1; i; $-i$

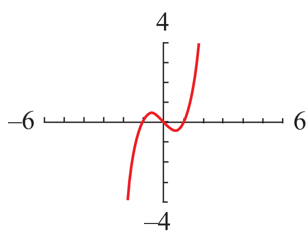
2) Hər bir qrafikin hansı çoxhədliyə aid olduğunu müəyyən edin. x oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absislərinin tam ədədlər olduğuna görə çoxhədliləri vuruqlarına ayırın.

a. $P(x) = x^2 + 5x + 4$ **b.** $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

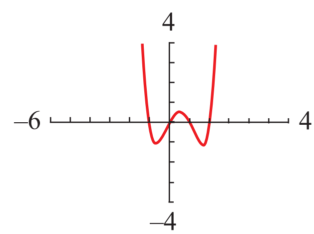
c. $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$ **d.** $P(x) = x^3 - x$

e. $P(x) = x^5 - 5x^2 + 4$ **f.** $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

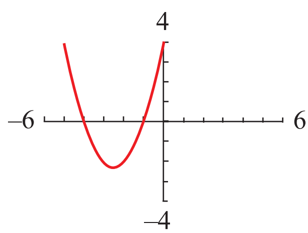
A.



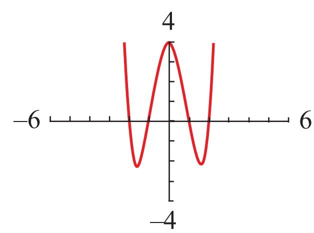
B.



C.



D.



İşçi vərəq № 5

Adı_________ Soyadı___________ Tarix______

Cədvəli doldurun.

Çoxhədlilər	Kökləri	Köklərin cəmi	Köklərin hasili
$f(x) = x^2 - 5x + 6$			
$f(x) = x^3 - 7x + 6$			
$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$			
$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x$			

a) Cədvəli doldurduqdan sonra köklərin cəmi ilə çoxhədlinin əmsalları arasındakı əlaqə haqqında fikirlərinizi ümumiləşdirib yazın.

a) Cədvəli doldurduqdan sonra köklərin hasili ilə çoxhədlinin əmsalları arasındakı əlaqə haqqında fikirlərinizi ümumiləşdirib yazın.

3) Göstərin ki, kompleks ədədin və qoşmasının cəmi həqiqi ədəddir.

4) Göstərin ki, kompleks ədədin və qoşmasının hasili həqiqi ədəddir.

Dərs 10-13. Çoxhədli-funksiya. Rasional funksiya.
Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 4 saat. Dərslik səh. 22-29.

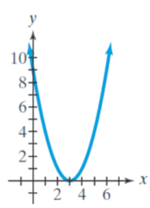
Məzmun standartı. 1.1.1. n dərəcəli çoxhədlinin n kökü olduğunu bilir və ona əsasən tənlikləri həll edir.

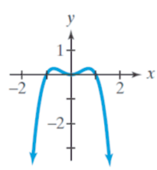
Şagird bacarıqları:
• çoxhədli funksiyanın baş həddinin əmsalının işarəsinin və dərəcəsinin tək və ya cüt olmasının onun qrafikinə necə təsir etdiyini başa düşdüyünü nümunələr üzərində izah edir;
• çoxhədlinin köklərini tapır və onların x oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absisi olduğunu başa düşür.
• çoxhədli funksiyanın qiymətinin müsbət və mənfi olduğu aralıqları müəyyən edir.
• çoxhədli funksiyanın qrafikini sxematik qurur.
• asimptotlarından istifadə etməklə sadə rasional funksiyaların qrafikini qurur.

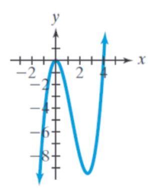
Xətti (birdərəcəli), kvadratik (ikidərəcəli) funksiyaları həmçinin, üçdərəcəli kub funksiyalardan bəziləri ilə artıq tanış olduqları müzakirələrlə müəyyən edilir. İndi isə yüksək dərəcəli çoxhədli funksiyaları öyrənəcəkləri diqqətə çatdırılır.

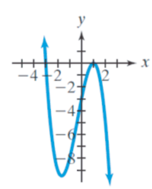
Çoxhədliləri müəyyən edən anlayışlar təkrar edilir. Çoxhədlinin dərəcəsi, baş həddin əmsalı, çoxhədlinin standart yazılışı, sıfırları kimi anlayışların çoxhədlinin qrafikinin qurulmasında istifadə edildiyi diqqətə çatdırılır. Məhz baş hədd - onun əmsalının işarəsi və dərəcənin tək və ya cüt olması, çoxhədli funksiyanın qrafikini xarakterizə edir.
Bir neçə çoxhədli funksiya və qrafikləri nümayiş etdirilir.

$f(x) = (x-3)^2$ $\quad$ $f(x) = -x^4 + x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3 - 4x^2$ $\quad$ $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x - 3$









Qrafiklərə dərəcənin tək və ya cüt olması, baş həddin əmsalının işarəsinin mənfi və ya müsbət olmasının funksiyaya necə təsir etdiyi müzakirə edilir. Müzakirə ümumiləşdirilir.
1. Funksiyanın qrafikinin (qollarının) istiqamətləri müyyənləşdirilir

Baş əmsal a_n	n cütdür	n təkdir
a_n müsbətdir	yuxarı və yuxarı	aşağı və yuxarı
a_n mənfidir	aşağı və aşağı	yuxarı və aşağı

2. $n > 1$ dərəcəli çoxhədlinin ən çoxu $n - 1$ sayda “dönmə” nöqtəsi (artmanın azalma ilə və ya tərsinə əvəz olunduğu nöqtə) ola bilər, tək dərəcəli çoxhədlinin cüt sayda, cüt dərəcəli çoxhədlinin isə tək sayda dönmə nöqtəsi olur.

Qrafiki qurma addımları araşdırılır, verilən nümunə qrafikini şagirdlər dəftərlərində qururlar. Fikirlərini ümumiləşdirirlər.

• Çoxhədli funksiyanın qrafikinin x oxunu kəsmə nöqtələrinə, baş həddin əmsalının işarəsinə və dərəcəsinə görə qurmaq olar.

• x oxunu kəsmə nöqtələrini onun köklərini hesablamaqla tapmaq olar.

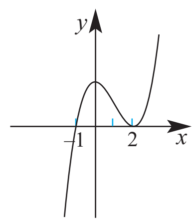
• Əgər çoxhədli vuruqlarına ayrılış şəkli ilə verilmişsə, kökləri asanlıqla tapmaq olar, əgər standart formada verilmişsə, onları
- qruplaşdırma və ya müxtəsər vurma düsturlarından istifadə etməklə;
- qalıq haqqında və rasional sıfırlar haqqında teoremlərdən istifadə etməklə vuruqlarına ayırmaq olar.

7-ci çalışma izah edilir. Əgər çoxhədli funksiya $y = (x - r)^k$ şəklində olarsa, funksiyanın qrafikinə necə təsir edər?

1. Çoxhədli funksiya $y = (x - r)^k$ şəklində olarsa, k cüt ədəd olduqda funksiyanın qrafiki x oxuna r nöqtəsində toxunur və dönür.
2. k tək olarsa, qrafik x oxunu kəsir.

Əgər funksiyanın qrafikinin x oxuna toxunma nöqtəsi varsa, deməli, bu çoxhədlinin cüt dərəcədən təkrarlanan kökləri var.

Məsələn, şəkildəki qrafikə uyğun mümkün kiçik dərəcəli çoxhədli $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$ kimi olacaq. Qrafik $x = 2$ nöqtəsində x oxuna toxunduğu üçün təkrarlanan köklər də bu nöqtəyə yığılmışdır. Onların sayı ən azı 2-dir, lakin 4; 6 və s. də ola bilər.



Qiymətləndirmə. Şagirdin verilən çoxhədlinin dərəcəsini, baş həddin əmsalının işarəsini, qrafikin iki ucunun x-in $-\infty$, $+\infty$ -a yaxınlaşması ilə hansı istiqamətlərə doğru yönəldiyini müəyyən etməsi bacarıqlarına görə formativ qiymətləndirmə aparılır.

2-ci, 3-cü saatlarda asimptotlarından istifadə etməklə rasional funksiyanın qrafikinin qurulmasına aid tapşırıqlar, 4-cü saatda isə bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqların həlli yerinə yetirilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.3. (səh. 28) Verilmiş rasional funksiyanın asimptotlarını tapın.

Həlli:

b) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$x = \pm 1$ olduqda kəsrin surəti 0-dan fərqli, məxrəci isə 0-a bərabər olur. Deməli, $x = 1$ və $x = -1$ düz xətləri verilmiş funksiyanın şaquli asimptotlarıdır. Surətin dərəcəsi məxrəcin dərəcəsindən kiçik olduğundan funksiyanın üfüqi asimptotu var. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x^2 - 1} = 0$ olduğuna görə $y = 0$ düz xətti üfüqi asimptotdur.

d) $y = \dfrac{2x^2 + x + 2}{x + 1}$

$x = -1$ olduqda kəsrin surəti 0-dan fərqli, məxrəci isə 0-a bərabər olur. Deməli, $x = -1$ düz xətti verilmiş funksiyanın şaquli asimptotudur. Surətin dərəcəsi məxrəcin dərəcəsindən bir vahid böyük olduğundan funksiyanın maili asimptotu var. $2x^2 + x + 2$ çoxhədlisini $x + 1$ ikihədlisinə budaqlı bölməni yerinə yetirək.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2 + x + 2 & x + 1 \\ \cline{2-2}
-\;\; 2x^2 + 2x & 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-x + 2 & \\
-\;\; -x - 1 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

Deməli, $\dfrac{2x^2 + x + 2}{x + 1} = 2x - 1 + \dfrac{3}{x + 1}$. Arqumentin modulca böyük qiymətlərində $\dfrac{3}{x + 1}$ kəsri sonsuz kiçilən olduğundan verilmiş funksiyanın qrafiki $y = 2x - 1$ düz xəttinə sonsuz yaxınlaşır. Yəni, $y = 2x - 1$ düz xətti verilmiş funksiyanın maili asimptotudur.

İşçi vərəq № 6

Adı__________ **Soyadı**____________ **Tarix**______

Çoxhədli funksiyaların qiymətinin arqumentin modulca böyük qiymətlərində necə dəyişdiyini yazın.

a) $f(x) = -x^2 - 6x - 7$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

c) $f(x) = x^2 + 2$

d) $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 2 - 5x$

f) $f(x) = -x^5 + 4x^5 - x + 1$

e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$

İşçi vərəq № 7

Adı__________ Soyadı____________ Tarix_______

Funksiyaların qrafikini qurun.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3.$

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

$y = \dfrac{x-1}{x-2}$

1-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları cədvəli

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Çoxhədlini çoxhədliyə bölməni budaqlı bölmə üsulundan istifadə etməklə yerinə yetirir.	
2.	Bölünən, bölən, qismət və qalığı yazır.	
3.	Çoxhədlinin ikihədliyə bölünməsini sintetik bölmədən istifadə etməklə yerinə yetirir.	
4.	Qalıq haqqında teoremi çalışmaların həllinə tətbiq edir.	
5.	Qalıq haqqında teoremdən istifadə etməklə verilən ikihədlinin çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını müəyyən edir.	
6.	Cəbrin əsas teoremini nümunələr üzərində təqdim edir.	
7.	Çoxhədlini xətti vuruqlarının hasili şəklində ifadə edir.	
8.	*n* dərəcəli çoxhədlinin rasional, irrasional, kompleks köklərini tapır.	
9.	Çoxhədli funksiyanın qrafikini sxematik qurur.	
10	Aimptotlarından istifadə etməklə sadə rasional funksiyaların qrafikini qurur.	

Dərs 14. 1-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) Sintetik bölmədə bölən hansı şəkildə olmalıdır? Sintetik bölməyə aid bir nümunə yazın.

2) Hansında qalıq ən böyükdür?

a) $(x^2 - x - 3) : (x - 2)$ b) $(x^2 + x - 3) : (x - 2)$

c) $(x^2 + x + 3) : (x - 2)$ b) $(x^2 - x + 3) : (x - 2)$

3) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x - n$ coxhədlisi $x - 1$ ikihədlisinə qalıqsız bölünürsə, n ədədini tapın.

3) Aşağıda verilən çoxhədlilərin rasional köklərini (əgər varsa) tapın.

a) $f(x) = 6x^2 - 8x + 2$ b) $f(\mathrm{x}) = 0{,}3x^2 + 2x + 4{,}5$ c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$

4) $f(x) = x^3 + 14x^2 + 41x - 56$ çoxhədlisinin mümkün rasional köklərinin siyahısını rasional köklər haqqında teoremdən istifadə etməklə yazın.

5) Hansı ikihədli $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 9x + 18$ çoxhədlisinin vuruğudur?

a) $x - 1$ b) $x + 2$ c) $x + 3$ d) $x - 6$

6) Coxhədlini xətti vuruqlarına ayırın

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

7) a, b, c ədədlərinin yerində hansı ədədlər olmalıdır?

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -2 & 3 & c \\ & & a & 21 & 72 \\ \hline & 3 & 7 & b & 68 \end{array}$$

8) $2x^2 + 6x + 3$ coxhədlisini $x + 2$-yə böldükdə qalıq neçə alınır?

a) 11 b) 3 c) 0 d) -1

9) Hansl ifadə $(x^2 + 3x - 25):(x - 4)$ ifadəsinə ekvivalentdir?

a) $x + 28$ b) $x + 7 + \dfrac{3}{x-4}$ c) $x + 4 + \dfrac{1}{x-7}$ d) $x + 7$

10) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ çoxhədlisinin mümkün ola bilən rasional kökləri hansı çoxluqdakı ədədləri yoxlamaqla tapıla bilər?

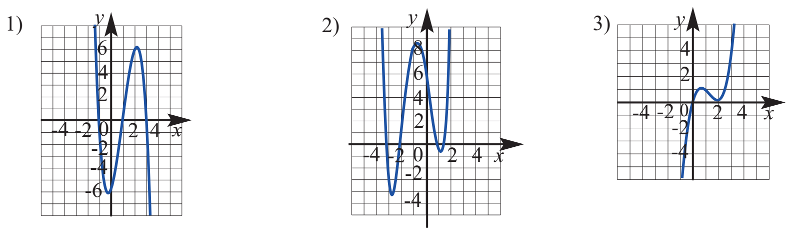
a) $\pm1, \pm2, \pm4, \pm12$ b) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$

c) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8$ d) $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

11) Funksiyaların qrafikini qurun.

a) $y = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$ b) $g(x) = x^4 - 16x^2$ c) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$

12) Hər bir çoxhədliyə uyğun qrafiki seçin.



a) $y = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ b) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ c) $y = -2x^3 + 6x^2 + 2x - 6$

13) Üç həqiqi kökü olan üçdərəcəli çoxhədli funksiyanın neçə "dönmə" nöqtəsi var?

a) 1 b) 2 c) 3 c) 4

14) Hansı doğru, hansı yanlışdır?

a) Cüt dərəcəli çoxhədlinin qrafiki x oxunu həmişə cüt sayda nöqtədə kəsir.

b) İstənilən tək dərəcəli çoxhədlinin qrafiki x oxunu ən azı bir nöqtədə kəsir.

c) İstənilən cüt dərəcəli çoxhədlinin qrafiki x oxunu ən azı bir nöqtədə kəsir.

15) $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x - 9$ çoxhədlisi üçün hansı fikir doğrudur?

a) $P(x)$-i $x + 1$-ə böldükdə qalıq 6-ya bərabərdir.

b) $x - 1$ ikihədlisi $P(x)$-in vuruğudur.

c) $P(3) = 36$

d) $P(x) = (x + 3)(3x^2 - 5x + 17) + 42$

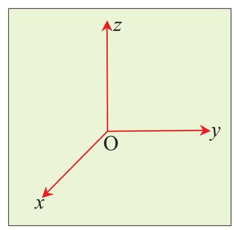
2-ci bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
3.1.1. Fəzada Dekart koordinat sistemi anlayışını, vektor anlayışını bilir, koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır. 3.1.2. Fəzada koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir. 3.1.4. Fəzada verilmiş vektoru komplanar olmayan üç vektor üzrə ayırır. 3.1.3. Müstəvinin tənliyini və sferanın tənliyini bilir, onlara aid məsələlər həll edir. 3.2.1. Paralel köçürməni məsələlər həllinə tətbiq edir. 3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir. 4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.	15-18	Fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi	4	31-38
	19-21	Fəzada vektorlar	3	39-45
	22-24	İki vektorun skalyar hasili. İki vektor arasındakı bucaq	3	46-50
	25	Düz xəttin ümumi tənliyi	1	51-52
	26-28	Müstəvinin tənliyi Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri	3	53-58
	29-30	Sferanın tənliyi	2	59-60
	31	Fəzada və müstəvidə çevrilmələr	1	61-63
	32-33	Ümumiləşdirici tapşırıqlar. Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları	2	64-65
	Cəmi		19	

Dərs nümunəsi

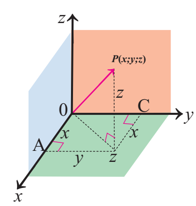
Dərs 15. Fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi. 1 saat. Dərslik səh.31-34
Məzmun standartı.
3.1.1. Fəzada Dekart koordinat sistemi anlayışını, vektor anlayışını bilir, koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır.
Şagird bacarıqları:
- üçölçülü koordinat sistemini qrafik təsvir edir;
- fəza koordinat sitemini təşkil edən koordinat müstəvilərini və onlar üzərində yerləşən nöqtələri koordinatları ilə təqdim edir;
- verilən nöqtəni üçölçülü koordinat sistemində qurur;
- qrafik təsvirlə verilmiş nöqtənin koordinatlarını müəyyən edir.

1. Manipulyativ məşğələ. Öyrənmə. Anlayışın təqdimi. Dərslikdə verilmiş topun hərəkəti üzərində üçölçülü koordinat sistemi haqqında təsəvvür yaradılır. Birölçülü, ikiölçülü, üçölçülü koordinat sisitemləri haqqında müzakirələr aparılır. İndiyə qədər ədəd oxunu bir düz xətlə təsvir edir və üzərində nöqtənin yerini bir koordinatla, düzbucaqlı müstəvi koordinat sistemini *x* və *y* koordinat oxları adlandırdığımız iki qarşılıqlı perpendikulyar düz xətlə və nöqtəni iki koordinatı ilə təsvir edirdik. Ancaq biz üçölçülü fəzada yaşayırıq. Bizi əhatə edən bütün cisimlər üçölçülüdür. Deməli, biz üçölçülü fəza koordinat sistemində nöqtənin koordinatlarını oxumağı və koordinatları verilən nöqtəni yerləşdirməyi bacarmalıyıq.



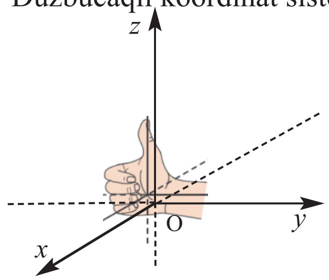
Fəza koordinat sistemi üzərində uzunluq vahidi və "+" istiqaməti göstərilmiş, bir nöqtədə bir-birinə perpendikulyar olan üç ədəd oxunun yaratdığı koordinat sistemidir. Şagirdlər bu tərifə uyğun koordinat sistemini dəftərlərində çəkirlər. **5-7 dəq.**

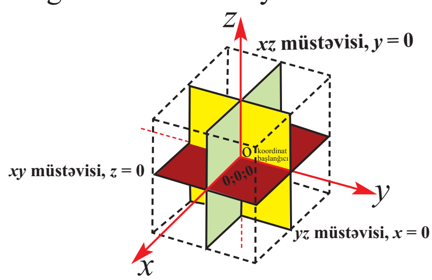
2. Öyrənmə. Üçölçülü düzbucaqlı koordinat sistemində(R^3-də) koordinat oxları. Koordinat müstəviləri (müzakirə). Şagirdlər koordinat sistemində koordinat oxlarının cüt-cüt yaratdığı koordinat müstəvilərini ayırırlar.
x və *y* oxları *x*O*y* və ya *xy* koordinat müstəvisini, *y* və *z* oxları *y*O*z* və ya *yz* koordinat müstəvisini, *x* və *z* oxlarının isə *x*O*z* və ya *xz* koordinat müstəvisini yaratdığını müəyyən edirlər.



Daha sonra şagirdlər real situasiyalar üzərində üçölçülü sistem təsəvvürlərini nümayış etdirirlər. Məsələn, sinif otağının bir küncündən otağın eni, uzunu və hündürlüyünü koordinat oxları kimi təqdim edirlər. *x*O*y*, *y*O*z*, *x*O*z* müstəvilərini uyğun divarlar olaraq ayırırlar. Koordinat müstəvisinə müxtəlif perspektivlərdən baxmaq olar. Kub modeli üzərində şəkildə göstərildiyi kimi təsvir əlverişli nümunədir. Biz kubun tam qarşısında dayanaraq baxsaq, arxa üz *zy* müstəvisinə, bu üzə perpendikulyar olan sol yan üz *zx*, alt üz (oturacaq) isə *xy* müstəvisinə uyğun olacaq. **5-7 dəq.**

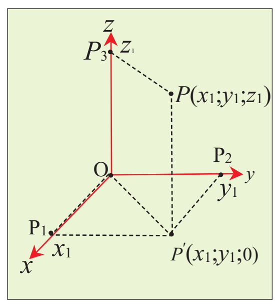
Düzbucaqlı koordinat sisteminə sağ əl sistemi də deyilir.





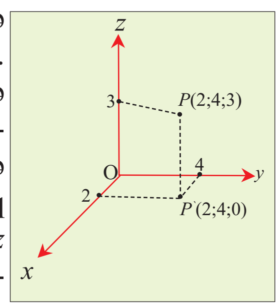
3. Öyrənmə. R^3 sistemində nöqtənin koordinatlarını oxuma və nöqtəni yerləşdirmə (müzakirə, fərdi iş). Nöqtənin yeri fəza koordinat sistemində müstəvi koordinat sisteminə analoji qaydada tapılır. Yalnız müstəvi koordinat sistemində nöqtənin $(x;\ y)$ koordinat cütü Ox və Oy oxundan məsafəni göstərirsə, fəza koordinat sistemində nöqtənin yerini göstərən $(x; y; z)$ koordinat üçlüyü modulca uyğun olaraq yz, xz və xy koordinat müstəvilərindən məsafəni göstərir. Fəzanın hər bir P nöqtəsinə nizamlı $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ üçlüyü uyğundur və tərsinə: P $\leftrightarrow$ $(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Daha sonra nöqtəni fəza koordinat müstəvisində qeydetmə məşğələsi yerinə yetirilir. Verilən müəyyən nöqtəni müstəqil olaraq təsviretmələri üçün şagirdlərə vaxt verilir və yerinə yetirmə səviyyəsi müşahidə edilir. Fəza koordinat sistemini izometrik vərəqlərdə yerinə yetirmək daha əlverişlidir. Ona görə də əvvəlcədən şagirdlərin bu vərəqləri evdə hazırlayıb gətirmələri tövsiyə edilir.



Şagird fəza koordinat sistemində verilmiş P$(x; y; z)$ nöqtəsinin koordinatlarını təqdim edir.

P nöqtəsindən xy müstəvisinə perpendikulyar çəkilir və P′ ilə işarə edilir. P′ nöqtəsindən Ox oxunu kəsən perpendikulyar çəkilir və OP_1 parçası P nöqtəsinin absisinə, x koordinatına, P′ nöqtəsindən Oy oxunu kəsən perpendikulyar çəkilir və OP_2 parçası P nöqtəsinin ordinatına, yəni y koordinatına, P nöqtəsindən Oz oxunu kəsən perpendikulyar çəkilir və OP_3 məsafəsi P nöqtəsinin aplikatına, yəni z koordinatına uyğun olur. x, y, z koordinatları həqiqi ədədlər çoxluğunda qiymətlər alırlar: $x,\ y,\ z \in$ R.



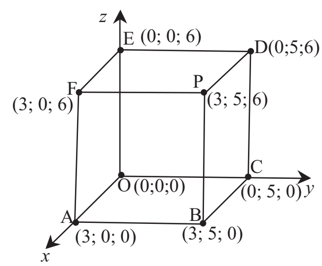
Daha sonra isə nöqtəni koordinat sistemində təsviretmə tapşırıqları P(2; 4; 3) nümunəsi üzərində izah edilir. (Top nümunəsi yenidən yada salınmaqla.) Biz əvvəlcə topun yerdəki koordinatlarına uyğun olaraq P nöqtəsinin (2; 4; 0) koordinatlarını qeyd edib, daha sonra isə bu nöqtədən xy müstəvisinə perpendikulyar qaldıraraq (topun nə qədər hündürlüyə qalxdığı) bu nöqtədən Oz oxuna perpendikulyar çəksək, P nöqtəsinin z koordinatını alarıq. **7-10 dəq**

4. Öyrənmə. R^3 sistemində oktantlar. Aşağıdakı məqamlara diqqət edilməsi tövsiyə edilir. Bu məqamların fəza koordinat sistemi haqqında açar biliklərin olduğu diqqətə çatdırılır.

1. Müstəvi koordinat sistemində koordinat oxları müstəvini dörd rübə bölür, fəza koordinat sistemi isə fəza koordinat müstəviləri ilə səkkiz oktanta bölünür: Oxyz, O$x'yz$, O$x'y'z$, O$xy'z$, O$xy'z'$, O$x'yz'$, O$x'y'z'$ *və* O$xy'z'$.

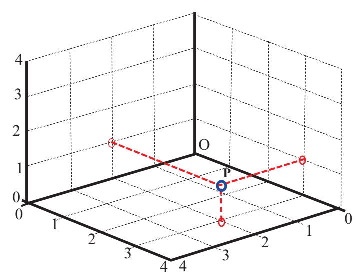
2. Əgər P nöqtəsi birinci oktantda yerləşirsə və P($a;b;c$) isə, digər oktantlarda olan nöqtələr ($-a$; b; c), ($-a$; $-b$; c), (a; $-b$; c), (a; b; $-c$), ($-a$; b; $-c$), ($-a$; $-b$; $-c$) və (a; $-b$; $-c$) şəklində olur.

5. Öyrənmə. R^3 sistemdə koordinat müstəvisi üzərindəki nöqtələrin koordinatları. xy-müstəvisi üzərində olan nöqtənin koordinatı (a; b; 0), yz müstəvisi üzərində olan nöqtənin koordinatı (0; b; c) və zx müstəvisi üzərində olan nöqtənin koordinatı (a; 0; c) kimidir. Uyğun olaraq koordinat oxları üzərində olan nöqtələrin koordinatları (a;0;0), (0;b;0), (0;0;c) kimidir. Koordinat başlanğıcının koordinatı isə (0;0;0)-dır.



Beləliklə, P (3;5;6) nöqtəsi koordinatları ilə verilmişsə, diaqonalı OP olan düzbucaqlı paralelepipedin digər təpə nöqtələrinin koordinatları şəkildə göstərildiyi kimi olacaq.

Bu anlayışların daha yaxşı qavranılması və tətbiq edilməsi üçün bütün tapşırıqların xətkeş, qələmlə yazılı olaraq yerinə yetirilməsi çox vacibdir.



Fəza koordinat sisteminin müxtəlif perspektivlərdən koordinat müstəviləri göstərilməklə çəkilməsi tövsiyə edilir. Bu zaman nöqtənin koordinatlarının mütləq qiymətcə həmin nöqtədən koordinat müstəvilərinə qədər məsafələrə bərabər olduğu daha əyani görünür. Bunu sinif otağında real olaraq canlandırmaq (simulyasiya etmək) və şəkildə göstərildiyi kimi təsvir etmək olar. Şəkildə P(2;3;1) nöqtəsi təsvir edilmişdir.

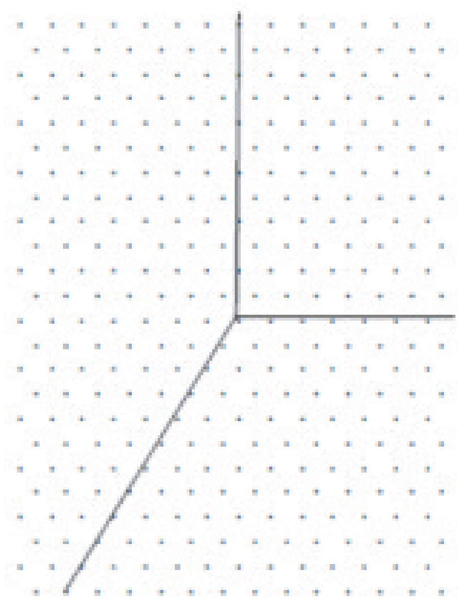
Qiymətləndirmə. Şagirdin fəza koordinat sistemini real situasiyalarda canlandırma, koordinat müstəvilərini, koordinat müstəvilərinin fəzanı böldüyü oktantları təqdimetmə, qeyd edilmiş nöqtənin koordinatlarını müəyyənetmə, koordinatları verilmiş nöqtəni qeydetmə kimi bacarıqları diqqət mərkəzində saxlanılır. Bu vərdişləri formalaşdıran və möhkəmləndirən tapşırıqlar yerinə yetirilir.

İşçi vərəq №1

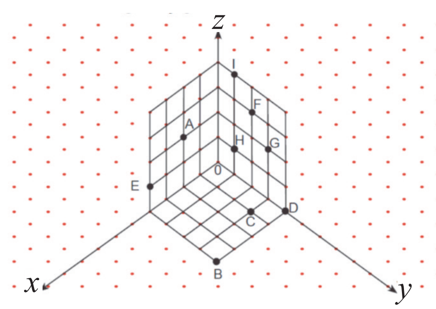
Adı______ Soyadı______ Tarix______

1) Verilən nöqtələri fəza koordinat sistemində qurun.

a) (−3; −4; 1); b) (–1; 1; 1);
d) (2; −1; –2); e) (–3; –3; –3).



2) Fəza koordinat sistemində qeyd edilmiş nöqtələrin koordinatlarını yazın.



A (...., ..., ...) B (...., ..., ...) C (...., ..., ...)
D (...., ..., ...) E (...., ..., ...) F (...., ..., ...)
G (...., ..., ...) H (...., ..., ...) I (...., ..., ...)

3) Əvvəlcə nöqtələrin koordinatlarının işarəsinə görə hansı oktantda yerləşdiyini müəyyən edin. Sonra isə fəza koordinat sistemi çəkərək qurun.
a) (2; 6; 8) b) (–1; 2; 3) d) (–3; 1; –2) e) (–6; –1; –2)

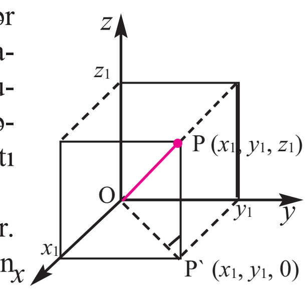
Dərs 16-18. Fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi. 3 saat.
Dərslik səh. 34-37

Məzmun standartı.
3.1.2. Fəzada koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir.
Şagird bacarıqları:
- koordinatları verilən iki nöqtə arasındakı məsafəni tapır;
- parçanı verilən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatlarını müəyyən edir;
- üçbucağın ağırlıq mərkəzinin koordinatlarını müəyyən edir;
- koordinatların tapılmasına aid müxtəlif məsələləri həll edir.

Bu dərs saatında həndəsənin şagirdlər üçün asan anlaşılan və praktik əhəmiyyət daşıyan koordinatlara aid düsturları və onların tətbiqi ilə məsələlərin həlli nəzərdən keçirilir.

Əvvəlcə iki nöqtə arasındakı məsafə düsturunu isbat edərək daha sonra isə koordinat başlanğıcı ilə verilən nöqtə arasındakı məsafəni də bu düstura əsasən izah etmək olar. Lakin fərqli yanaşma ilə bu teoremlərin ardıcıllığını dəyişmək olar. Əvvəlcə koordinat başlanğıcından verilən nöqtəyə qədər məsafəni aşağıdakı şəkillə isbat etmək olar, sonra isə iki nöqtə arasındakı məsafə düsturunun çıxarılışını vermək olar.

1. Koordinat başlanğıcından nöqtəyə qədər məsafə. Şagirdin fəzada nöqtənin və bu nöqtənin digər koordinat müstəvilərindəki perpendikulyar proyeksiyalarının düzbucaqlı paralelepipedin təpə nöqtələri olduğunu başa düşdüyü və bütün bunları qrafik təsvir edəbilmə bacarığı diqqət mərkəzində saxlanılır. İsbatı şagirdlər müstəqil yerinə yetirirlər.



Tutaq ki, fəzada P(x_1;y_1;z_1) nöqtəsi verilmişdir. Koordinat başlanğıcından bu nöqtəyə qədər məsafənin tapılması tələb edilir.

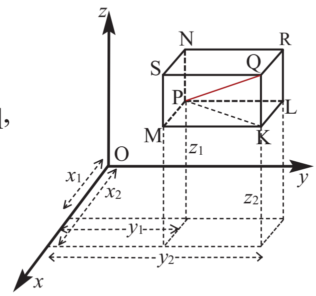
OPP\` üçbucağı düzbucaqlı üçbucaqdır. Onda Pifaqor teoreminə görə

$OP^2 = OP'^2 + PP'^2$
$OP'^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad P'P^2 = z_1^2$. Beləliklə,
$OP^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$.

Şagirdlərə fəza koordinat sistemində ixtiyari P nöqtəsi qurmaq və bu nöqtənin koordinat başlanğıcından məsafəsini müəyyən etmək tapşırılır. Bu açıq tipli tapşırığı yerinə yetirmə bacarığına görə müşahidə yolu ilə qiymətləndirmə aparılması tövsiyə edilir.

2. Fəzada verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafə. Verilən $P(x_1;y_1;z_1)$ və $Q(x_2;y_2;z_2)$ nöqtələri arasındakı məsafəni $P(x_1;y_1;z_1)$ və $Q(x_2;y_2;z_2)$ nöqtələrindən koordinat müstəvilərinə paralel keçirilən paralelepipedin diaqonalını tərəflərinin uzunluğu ilə ifadə etməklə tapmaq olar.

Dərslikdə verilmiş şəkil üzərində iki nöqtə arasındakı məsafə düsturu və isbatı izah edilir.



Paralelepipedin tilləri $MP = |x_2 - x_1|$,

$PL = |y_2 - y_1|$, $KQ = |z_2 - z_1|$ olduğunu nəzərə alsaq,

onun diaqonalının

$PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2$ yaza bilərik.

Buradan

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Parçanı müəyyən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatları

$P(x_1; y_1; z_1)$ və $Q(x_2; y_2; z_2)$ nöqtələrini birləşdirən parçanı $PR : RQ = m : n$ nisbətində bölən R nöqtəsinin koordinatları

$$R\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}; \frac{my_2+ny_1}{m+n}; \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$ kimi tapılır.

Parçanın orta nöqtəsinin koordinatları. $P(x_1; y_1; z_1)$ və $Q(x_2; y_2; z_2)$ nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsinin koordinatları

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$ kimidir.

Üçbucağın ağırlıq mərkəzinin koordinatları

Təpələri $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$ və $L(x_3; y_3; z_3)$ nöqtələrində olan üçbucağın ağırlıq mərkəzinin (medianlarının kəsişmə nöqtəsi) koordinatlarını

$$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$ kimi tapmaq olar.

Hər bir düstur uyğun nümunə ilə izah edilir.

Şagirdlərin nümunənin müzakirəsində iştirakına və dəftərində yerinə-yetirmə səviyyəsinə görə müşahidə yolu ilə qiymətləndirmə aparılır. Qiymətləndirməni vəsaitdə verilmiş işçi vərəqə və ya müşahidə altında tutulan şagirdə öyrənmə tapşırıqlarından seçib verməklə də yerinə yetirmək olar.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.17. Təpə nöqtələri A (17; −2; −1), B (1; −2; 11), C (1; 16; −1) olan üçbucağın BM medianının uzunluğunu tapın.
Həlli:
Əvvəlcə AC tərəfinin M orta nöqtəsinin koordinatlarını tapaq.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{17+1}{2} = 9$$

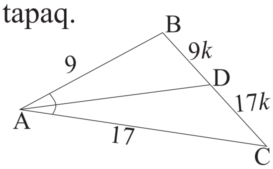
$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+16}{2} = 7$$

$$z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-1+(-1)}{2} = -1.$$ Deməli, M (9; 7; −1).

B(1; −2; 11) və M (9; 7; −1) nöqtələri arasından məsafəni hesablayaq.

$$BM = \sqrt{(9-1)^2 + (7-(-2))^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2} = 17$$

D.23. A (9; 6; 0), B (15; 9; 6), C (21; –3; –8) üçbucağın təpə nöqtələridir. ∠BAC-nin tənböləni BC tərəfini D nöqtəsində kəsir. D nöqtəsinin koordinatlarını tapın.
Həlli: Üçbucağın AB və AC tərəflərinin uzunluqlarını tapaq.



$$AB = \sqrt{(15-9)^2 + (9-6)^2 + (6-0)^2} = 9$$

$$AC = \sqrt{(21-9)^2 + (-3-6)^2 + (-8-0)^2} = 17$$

Tənbölənin xassəsinə görə D nöqtəsi BC tərəfini BD : DC = 9 : 17 nisbətində bölür. Parçanı verilən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatları düsturlarına görə alarıq:

$$x_D = \frac{9\cdot 21 + 17\cdot 15}{9+17} = 17\frac{1}{13}$$

$$y_D = \frac{9\cdot(-3) + 17\cdot 9}{9+17} = 4\frac{11}{13}$$

$$z_D = \frac{9\cdot(-8) + 17\cdot 6}{9+17} = 1\frac{2}{13}$$

Beləliklə, D $(17\frac{1}{13}; 4\frac{11}{13}; 1\frac{2}{13})$ tapılır.

İşçi vərəq №2

Adı______ Soyadı______ Tarix______

1) Verilən nöqtələrin kollinear nöqtələr olduğunu göstərin.

a) $P_1(1; 2; 9)$, $P_2(-2; -2; 11)$, $P_3(7; 10; 5)$;

b) $Q_1(2; 3; 2)$, $Q_2(1; 4; 4)$, $Q_3(5; 0; -4)$.

2) Uc nöqtələri $P_1(x_1;y_1;z_1)$ və $P_2(2; 3; 6)$ olan parçanın orta nöqtəsi $(-1; -4; 8)$-dir. P_1 nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

3) P_3 nöqtəsi $P_1(-3; 4; 1)$ və $P_2(-5; 8; 3)$ nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsidir. Aşağıdakı nöqtələri birləşdirən parçaların orta nöqtəsini tapın.

a) P_1 və P_3

b) P_3 və P_2

Dərs 19-20. Fəzada vektorlar. 2 saat. Dərslik səh. 39-45

Məzmun standartı.
3.1.2. Fəzada koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir.

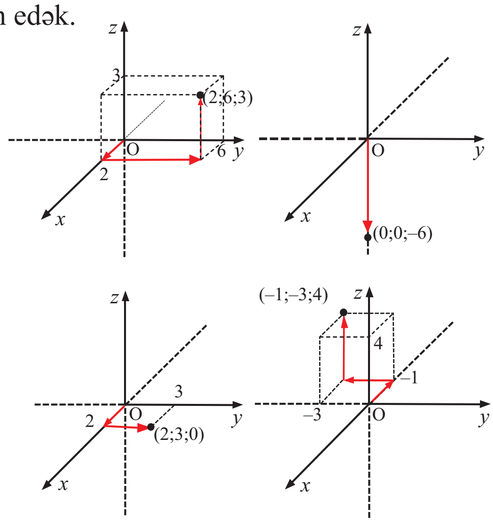
3.1.4. Fəzada verilmiş vektoru komplanar olmayan üç vektor üzrə ayırır.

Şagird bacarıqları:
- fəzada yer vektorunu tanıyır və çəkir;
- fəzada hər bir nöqtənin yerini yer vektoru ilə müəyyən edir;
- vektorun başlanğıc və son nöqtələrinə görə bu vektora bərabər olan yer vektorunu müəyyən edir;
- komponentləri ilə verilmiş vektorun uzunluğunu tapır;
- komponentləri ilə verilmiş vektorlar üzərində toplama və çıxma əməllərini yerinə yetirir;
- komponentləri ilə verilmiş vektorun həqiqi ədədə vurulmasını yerinə yetirir;
- fəzada iki vektorun bərabərliyini müəyyən edir.

Motivasiya. Şagirdlərə fəza koordinat sistemində nöqtənin koordinatlarını qeydetmə addımlarında koordinat oxları və koordinat müstəvilərində hərəkət istiqaməti ilə qeydetmə tapşırıqları verilir. Məsələn,

A(2; 6; 3), B(0; 0; –6), C(2; 3; 0) və D(–1; –3; 4) nöqtələrini fəza koordinat sistemində quraq və yerini müəyyən edək.

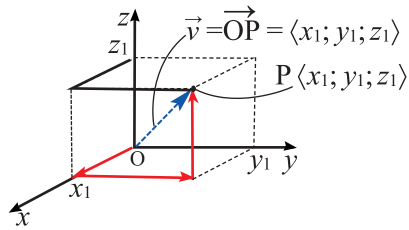
A nöqtəsini qurma addımları vektorlarla göstərilir və nəhayət yerinin harada olduğu müəyyən edilir: A nöqtəsi birinci oktantda yerləşir. Analoji olaraq B nöqtəsinin z oxunun mənfi hissəsində, C nöqtəsi xy müstəvisi üzərində, D nöqtəsinin üçüncü oktantda yerləşdiyi müəyyən edilir.



Şagirdlərin vektorlarla bağlı bilik və bacarıqları müzakirələrlə yoxlanılır. Vektor istiqaməti olan düz xətt parçası kimi təqdim edilməklə vektorial kəmiyyətləri xarakterizə etdiyi izah edilir. Bu kəmiyyətlər yerdəyişmə, sürət, təcil, qüvvə, çəki və s. ola bilər. Həndəsi vektorun uzunluğu bu kəmiyyətlərin qiymətini, istiqaməti isə həmin kəmiyyətin istiqamətini göstərir.

Fəzada vektorlar müstəvi üzərindəki vektorlara oxşar xassələrə malikdir. Fəzada da vektor başlanğıc və son nöqtəsi ilə müəyyən edilir. Əgər vektorun başlanğıc nöqtəsi koordinat başlanğıcında olarsa, bu vektora yer vektoru deyilr. Yer vektoru, adından da göründüyü kimi, fəzada nöqtənin yerini müəyyən edir. Məsələn, $\overrightarrow{OP}$ yer vektoru P nöqtəsinin fəzada yerini müəyyən edir. Fəzanın hər bir nöqtəsini bir yer vektoru müəyyən edir. Yəni nöqtənin koordinatları ilə yer vektorunun komponentləri arasında birqiymətli uyğunluq vardır.

P nöqtəsinin fəzada koordinatları $(x_1; y_1; z_1)$ olarsa, $\overrightarrow{OP}$ vektorunun komponentlərlə yazılışı $\overrightarrow{OP}\,\langle x_1; y_1; z_1\rangle$ kimi olacaq.



Şagirdlər yer vektorunu nöqtənin fəzada yerini göstərən alternativ ifadə formasının olduğunu başa düşürlər. Yəni nöqtəni fəzada üç koordinatı və ya yer vektoru ilə müəyyən edə bilərik.

Fəzada vektorların toplanması və çıxılması, skalyar ədədə vurulması müstəvi koordinat sistemində vektorlara uyğun yerinə yetirilir. Vektorun uzunluğunun hesablanması, başlanğıc və son nöqtələri verilmiş vektorun komponentləri ilə ifadə edilməsi, verilən vektora uyğun yer vektorunun müəyyən edilməsi, vektorların kollinearlığının müəyyən edilməsi tapşırıqları yerinə yetirilir. Aşağıdakı kimi nümunələr şagird bacarıqlarının formativ qiymətləndirilməsi üçün əlverişlidir.

Nümunə. A(–2;3;5) və B(1;0;–4) nöqtələri verilmişdir.

a) $\overrightarrow{AB}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.
b) $\overrightarrow{BA}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.
c) $3\overrightarrow{AB}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.
d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektorunun komponentlərini müəyyən edin.
e) $|\overrightarrow{AB}|$ və $|\overrightarrow{BA}|$–nı hesablayın.
f) $|3\overrightarrow{AB}|$-ni və $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$-ni hesablayın.

Həlli:

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle = \langle 1-(-2), 0-3, -4,-5\rangle = \langle 3,-3,-9\rangle$

b) $\overrightarrow{BA}$ vektoru $\overrightarrow{AB}$ vektoruna əks olduğundan, $\overrightarrow{BA}=\langle -3; 3; 9\rangle$ olar.

c) $3\overrightarrow{AB}= 3\cdot\langle 3; -3; -9\rangle = \langle 9; -9; -27\rangle$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\langle -2+1; 3+0; 5-4\rangle= \langle -1 ; 3; 1 \rangle$.

e) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{9+9+81} = 3\sqrt{11}$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{9+9+81} = 3\sqrt{11}$

f) $|3\overrightarrow{AB}| = 3\cdot|AB|=3\cdot3\sqrt{11}=9\sqrt{11}$

Aydındır ki,

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |\langle -1 ; 3, 1 \rangle| =\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| =\sqrt{11} \neq |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| =$
$= \sqrt{4+9+25} + \sqrt{1+0+16} = \sqrt{38} + \sqrt{17}.$

Dərs 21. Fəzada vektorlar. Vahid vektor. 1 saat Dərslik səh. 43 - 45.

Məzmun standartı.

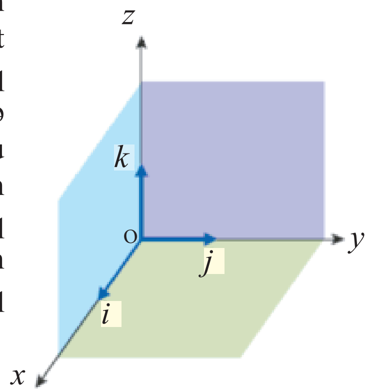
3.1.1. Fəzada Dekart koordinat sistemi anlayışını, vektor anlayışını bilir, koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır

3.1.4. Fəzada verilmiş vektoru komplanar olmayan üç vektor üzrə ayırır.

Şagird bacarıqları:

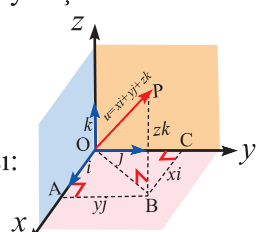
- vektoru ort vektorlarla ifadə edir;
- ort vektorlarla verilmiş vektoru komponentləri ilə və əksinə ifadə edir;
- verilən vektora uyğun vahid vektoru müəyyən edir;
- vahid vektorlara aid məsələləri həll edir.

Vahid vektorun tərifi və qrafik təsviri izah edilir. Şagirdlər vektorun müstəvi koordinat ssitemində x və y koordinatlarına uyğun olaraq iki ort vektorla, fəza koordinat sistemində isə üç ort vektorla ifadə edildiyini başa düşür. Bu vektorlar Ox, Oy, Oz koordinat oxlarının müsbət istiqaməti üzrə yönələn və uyğun olaraq $\vec{i} = \langle 1;0;0\rangle$, $\vec{j} = \langle 0;1;0\rangle$ və $\vec{k} = \langle 0;0;1\rangle$ kimi təyin edilən bazis vektorlardır. Bu vektorların mütləq qiymәti vahidə bərabərdir.



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Daha sonra istənilən yer vektorunun ort vektorlar üzrə ayrılışı nümunə üzərində analitik yazılışla və qarfik təsvirlə izah edilir.



$$\vec{u}(x;y;z) = \langle x;0;0\rangle + \langle 0;y;0\rangle + \langle 0;0;z\rangle =$$
$$= x\langle 1;0;0\rangle + y\langle 0;1;0\rangle + z\langle 0;0;1\rangle = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Məsələn, $\langle 3; -3; 9\rangle$ vektorunun ort vektorları üzrə ayrılışı:

$\langle 3; -3; 9\rangle = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$ kimidir.

İstənilən vektora kollinear vahid vektor var. Məsələn, hər hansı $\vec{0}$-dan fərqli $\vec{u}$ vektoruna kollinear vahid $\vec{v}$ vektorunu $\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ kimi ifadə etmək olar.

Doğrudan da, $|\vec{v}| = |k\vec{u}| = k|\vec{u}| = \frac{1}{|\vec{u}|}|\vec{u}| = 1$.

$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vektoru istiqamətində olan vahid vektoru yazaq.

$\vec{u}$ vektorunun uzunluğunu tapaq.

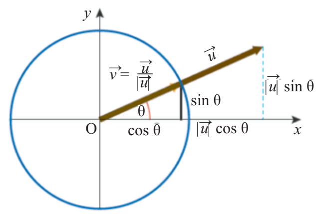
$|\vec{u}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ olduğundan vahid vektor $\frac{\vec{i}}{3} - \frac{2\vec{j}}{3} + \frac{2\vec{k}}{3}$ kimi olacaq.

Bu vahid vektorun komponentlərlə yazılışı $\vec{v} = \langle \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\rangle$ kimi olar.

Əlavə məlumat. Vahid vektorun bir mühüm əhəmiyyəti də onun vasitəsilə vektorun istiqamətinin müəyyən edilməsinə imkan verməsidir.

Belə ki, biz vektorun istiqamətinin x oxunun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdiyi bucaqla müəyyən olunduğunu bilirik.

Şəkildə θ, vektorun x oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqdır. $\vec{u}$ vektoru $\vec{v}$ vahid vektoru ilə eyni istiqamətdədir. $\vec{v} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$. Onda,



$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}, \qquad \vec{u} = |\vec{u}|\,\vec{v} = |\vec{u}|(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

Uzunluğu 2 vahid və x oxunun müsbət istiqaməti ilə 60º bucaq əmələ gətirən vektor bu yazılışa görə

$\vec{u} = 2(\cos 60°\,\vec{i} + \sin 60°\,\vec{j}) = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ kimi olacaq. Əksinə $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ verilmiş olarsa, onun x oxu ilə 60° bucaq əmələ gətirdiyini tapmaqla istiqamətini müəyyən etmiş olarıq.

Dərs 22-24. İki vektorun skalyar hasili. İki vektor arasındakı bucaq. 3 saat. Dərslik səh. 46-50

Məzmun standartı.

3.1.1. Fəzada Dekart koordinat sistemi anlayışını, vektor anlayışını bilir, koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır.

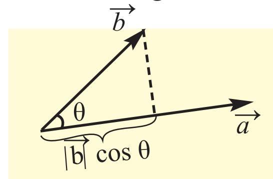
Şagird bacarıqları:

- iki vektorun skalyar hasilini düstura görə hesablayır;
- koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır;
- skalyar hasilə görə iki vektor arasındakı bucağı tapır;
- iki vektorun skalyar hasili qaydasından müxtəlif məsələlərin həllində istifadə edir.

İki vektor toplandıqda, fərqi tapıldıqda və ya ədədə vurulduqda yenə də vektorial kəmiyyətin alındığını bilirik. Lakin iki vektorun skalyar hasili ədəddir. Məsələn, görülən iş qüvvə və yerdəyişmə kimi iki vektorial kəmiyyətin skalyar hasili kimi tapılır, iş skalyar kəmiyyətdir.

İki vektorun skalyar hasili əvvəlcə ikiölçülü koordinat sistemində araşdırılır. İzah edilir ki, əgər $\vec{a}$ və $\vec{b}$ kimi sıfır olmayan iki vektor verilmişsə, onların skalyar hasili bu vektorların modulları ilə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$



θ bucağı $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları arasında qalan bucaqdır və qiymətinin $0 \le \theta \le \pi$ aralığında olduğu qeyd edilir.

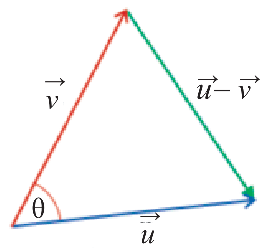
Dekart koordinat sistemində komponentləri ilə $\vec{a}\langle a_1; a_2\rangle$ və $\vec{b}\langle b_1; b_2\rangle$ vektorları verilmişsə, onların skalyar hasili uyğun komponentlərin hasilləri cəminə bərabərdir.

Üçölçülü Dekart koordinat sistemində $\vec{a}\langle a_1; a_2; a_3\rangle$ və $\vec{b}\langle b_1; b_2; b_3\rangle$ iki vektorun skalyar hasili müstəvi koordinat sisteminə oxşar müəyyən edilir:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

Sonra sinifin səviyyəsindən asılı olaraq $\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ bərabərliyinin isbatını izah etmək olar. Skalyar hasilin koordinatlarla düsturunun isbatı aşağıdakı kimidir.

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$$



Kosinuslar teoreminə görə

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\,|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$$

Bu bərabərlik və yuxarıdakı münasibətdən alırıq:

$$2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (u_1^2+u_2^2+u_3^2)+(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-$$

$$-[(u_1+v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2] = 2(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3).$$

Beləliklə,

$$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \text{ və ya } \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Skalyar hasilin qiyməti vektorların arasındakı bucağın növü haqqında fikir yürütməyə imkan verir. Vektorlar arasındakı bucağın qiyməti 0-dan π-yə qədər artdıqca skalyar hasilin qiyməti azalır .

$\theta = 0$, yəni vektorlar eyni istiqamətli olduqda skalyar hasilin qiyməti ən böyük olur: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\theta = \pi/2$ olduqda, skalyar hasil $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ olur.

$\theta = \pi$, yəni vektorlar əks istiqamətli olduqda skalyar hasilin qiyməti ən kiçik olur: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\pi = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Skalyar hasilin praktik əhəmiyyəti böyükdür. Məsələn, skalyar hasilə görə sıfır olmayan iki vektor arasındakı bucağı

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

münasibətindən asanlıqla tapmaq olar.

Skalyar hasilə aid tapşırıqların həm komponentləri ilə, həm də ort vektorlarla verilmiş vektorlar üzərində yerinə yetirilməsi tövsiyə edilir. Dərslikdəki tapşırıqlar əsasən ikiölçülü koordinat sistemində vektorlar üzərindədir. Lakin sinifin və ayrı-ayrı şagirdlərin səviyyəsinə görə üçölçülü sistemdə verilmiş aşağıdakı kimi tapşırıqları yerinə yetirmək olar.

$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ və $\vec{v} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

Skalyar hasil düsturundan $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{-3-12+4}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{9+36+4}} = \dfrac{-11}{21}$

$\cos\theta = \dfrac{-11}{21}$ bərabərliyindən isə $\theta \approx 2{,}12$ radian tapırıq.

İki vektor arasında qalan bucağa görə aşağıdakı nəticələr alınır.

Nəticə 1. Sıfır olmayan iki vektorun skalyar hasili sıfıra bərabərdirsə, bu vektorlar perpendikulyardır və tərsinə.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos 90^\circ = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot 0 = 0$$

Nəticə 2. İki vektorun skalyar hasili üçün $\vec{u}\cdot\vec{v} = \pm|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ olarsa, bu vektorlar kollineardır.

Dərslikdə əsasən ikiölçülü və komponentləri ilə verilmiş iki vektor arasında qalan bucağın tapılması tapşırıqları verilmişdir. Lakin şagirdlərin səviyyəsinə görə R^3-də ort vektorlarla verilmiş vektorlara aid tapşırıqların yerinə yetirilməsi tövsiyə edilir.

Məsələn, $\vec{u} = 7\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{m} = \vec{i} + \vec{k}$ vektorlarının perpendikulyar olub-olmadıqlarını müəyyən edin.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 7(-3) + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 = 0$; $\vec{u}, \vec{v}$ perpendikulyardır.
$\vec{u}\cdot\vec{m} = 7\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1 = 9$; $\vec{u}, \vec{m}$ perpendikulyar deyil.
$\vec{v}\cdot\vec{m} = -3\cdot 1 + 5\cdot 0 + 3\cdot 1 = 0$; $\vec{v}, \vec{m}$ perpendikulyardır.

Dərslikdə verilmiş tapşırıqlarla bağlı izahatlar.
$\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ və $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ bərabərsizliklərinin isbatı:
a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$ olduğundan, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \big||\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta\big| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\cos\theta|$ və $|\cos\theta| \leq 1$ olduğundan, $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$ alarıq. Buradan aydındır ki, $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
b) $$\left.\begin{aligned}|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= |\vec{u}|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + |\vec{v}|^2\end{aligned}\right\} \Leftarrow \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u}$$
Lakin $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}|$ olduğundan,
$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + |\vec{v}|^2 \leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + |\vec{v}|^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$
Buradan alınır ki, $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ (kvadrat köklərini tapmaqla).

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D 8. $\vec{a}\langle 3; 4\rangle$ vektoru istiqamətində 20 N qüvvə (F) tətbiq edilmişdır.
a) $\vec{a}$ vektoru istiqamətində vahid vektoru yazın.
b) $\vec{F}$ qüvvəsini komponentləri ilə yazın.
c) $\vec{F}$ qüvvəsinin təsiri ilə obyektin (0;0) nöqtəsindən (6; 8) nöqtəsinə yerdəyişməsi (metrlə) zamanı görülən işi tapın.

Həlli:

a) $\vec{a}$ vektoru istiqamətində vahid vektor

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\langle 3; 4\rangle}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\langle 3; 4\rangle}{5} = \left\langle \frac{3}{5}\, ; \frac{4}{5} \right\rangle \text{ olar}$$

b) $\vec{F} = 20 \cdot \left\langle \frac{3}{5}\, ; \frac{4}{5} \right\rangle = \langle 12 ; 16\rangle$ olar.

c) Yerdəyişmə vektoru $\vec{d} = \langle 6-0; 8-0\rangle = \langle 6; 8\rangle$ olduğundan, görülən iş
$A = \vec{F}\cdot\vec{d} = 12\cdot 6 + 16\cdot 8 = 72 + 128 = 200$ (Coul) olar.

D 12. 2) k-nın elə qiymətini tapın ki, $\vec{u}\ \langle 0; 1; 1\rangle$ və $\vec{v}\langle k; 2; 1\rangle$ vektorları arasındakı bucaq 45° olsun.

Həlli: Şərtə görə,

$$\cos 45° = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \text{ olmalıdır.}$$

Buradan $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{0\cdot k + 1\cdot 2 + 1\cdot 1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{k^2+2^2+1^2}}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+5}}$,

$k^2 = 4$, $k = \pm 2$ tapırıq.

D 16. a) Təpə nöqtələri A(5;1), B (4;7) və C(–7;–1) olan üçbucağın bucaqlarını tapın.

Həlli: $\vec{AB} = \langle -1;6\rangle$, $\vec{AC} = \langle -12;-2\rangle$ vektorları arasındakı bucağı tapaq.

$$\cos\angle A = \frac{(-1)\cdot(-12) + 6\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+6^2}\cdot\sqrt{(-12)^2+(-2)^2}} = 0, \quad \angle A = 90°$$

İndi isə $\vec{BA} = \langle 1;-6\rangle$ və $\vec{BC} = \langle -11;-8\rangle$ vektorları arasındakı bucağı tapaq.

$$\cos\angle B = \frac{1\cdot(-11) + (-6)\cdot(-8)}{\sqrt{1^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-11)^2+(-8)^2}} = \frac{37}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{185}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447$$

$\angle B \approx 64°$. Onda $\angle C = 180° - (\angle A - \angle B) \approx 26°$

İşçi vərəq №3

Adı______ Soyadı______ Tarix______

1) Təpə nöqtələri A(–1; 3; 0), B(1; 2; –2) və C(1; 5; 1) nöqtələrində olan üçbucağın düzbucaqlı üçbucaq olduğunu göstərin və sahəsini tapın.

2) $\vec{u}\langle 3;5;0\rangle$ və $\vec{v}\langle -5;\ 3;\ 0\rangle$ vektorları verilir.
Vektorlar arasındakı bucağı tapın:
a) $\vec{u}$ və $\vec{v}$ b) $\vec{u}$ və $\vec{u}+\vec{v}$ c) $\vec{v}$ və $\vec{u}+\vec{v}$

Dərs 25. Düz xəttin ümumi tənliyi. 1 saat. Dərslik səh. 51-52
Məzmun standartı.
3.1.1. Fəzada Dekart koordinat sistemi anlayışını, vektor anlayışını bilir, koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır.

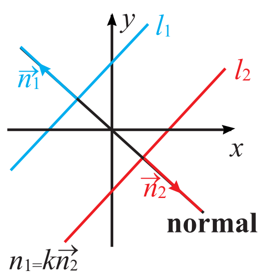
Şagird bacarıqları:
- verilmiş nöqtəsinə və normalına görə düz xəttin tənliyini yazır;
- koordinatları ilə verilmiş iki vektorun skalyar hasilini tapır;
- verilmiş nöqtədən düz xəttə qədər məsafəni tapır.

Düz xətt üzrə yönəlmiş vektora və düz xəttin normalına görə onun ümumi tənliyinin alınması izah edilir. Bu vektorlar qarşılıqlı perpendikulyar olduqlarından onların skalyar hasili sıfıra bərabərdir. Həmin münasibətdən düz xəttin $ax + by + c = 0$ ümumi tənliyi alınır. Uyğun nümunələrlə şagirdlər bunu yoxlaya bilərlər. Həmçinin düz xəttin koordinat müstəvisində yerləşməsinə görə xüsusi hallar araşdırılır.

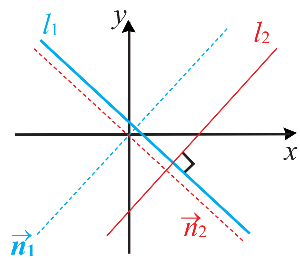
l_1 və l_2 düz xətlərinin normalları uyğun olaraq $\vec{n_1}$ və $\vec{n_2}$ olarsa, aşağıdakı fikirlər doğrudur.

1. Yalnız normalları kollinear olan düz xətlər paraleldir. Yəni, $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$
2. İki düz xətt yalnız o zaman perpendikulyardır ki, normallarının skalyar hasili sıfıra bərabər olsun. Yəni, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$ $\quad \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

İki paralel düz xətt



İki perpendikulyar düz xətt



Düz xətlər arasındakı bucağı onların normalları arasındakı bucaqla müəyyən etmək olar. Normallar arasındakı bucaq isə

$$\cos\theta = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} \text{ və ya } \quad \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} \text{ münasibətindən tapılır.}$$

Nümunə dərs

Dərs 26-28. Müstəvinin tənliyi. 3 saat. Dərslik səh. 53-58

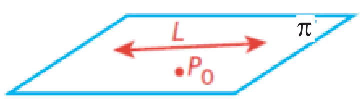
Məzmun standartı.
3.1.2. Fəzada koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir.
3.1.3. Müstəvinin tənliyini və sferanın tənliyini bilir, onlara aid məsələlər həll edir.
4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.

Şagird bacarıqları:
- müstəvinin $ax + by + cz = d$ şəkilindəki tənliyinin müəyyən edilməsinə aid tapşırıqları yerinə yetirir;
- müstəvinin tənliklərinə aid müxtəlif məsələləri həll edir.

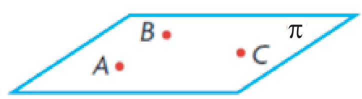
Biz düz xətti müəyyən edən tənlikləri araşdırdıq və düz xəttin həndəsi olaraq iki nöqtə ilə müəyyən edildiyini də əvvəlcədən bilirik.
Bəs, müstəvi haqqında əvvəldən biliklərimiz hansıdır?
Fəzada müstəvilər həndəsi olaraq necə təsvir edilir?
Bu suallar ətrafında növbə ilə müzakirələr aparılır?

1. Müstəvi müəyyən oluna bilər:
- kollinear olmayan üç nöqtə ilə
- düz xətt və ona aid olmayan nöqtə ilə
- iki kəsişən düz xətlə
- iki paralel düz xətlə
- bir nöqtəsinə və normalına görə

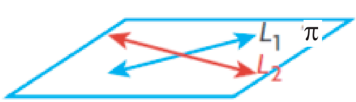
Şagirdlər dəftərlərində və lövhədə olmaqla sözlə ifadə etdikləri fikirləri həndəsi olaraq təsvir edirlər.



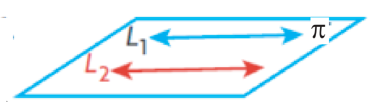
düz xətt və onun üzərində olmayan nöqtə ilə



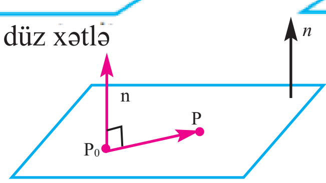
kollinear olmayan üç nöqtə ilə



iki kəsişən düz xətlə

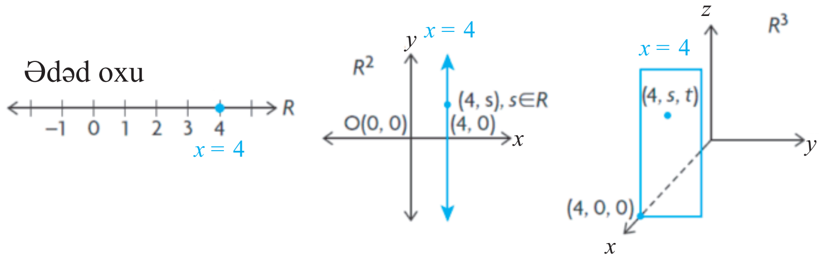


iki paralel düz xətlə
(üst-üstə düşməyən)

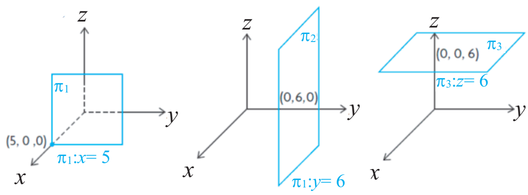


bir nöqtəsinə və normalına görə

Fəzada müstəvilər həndəsi olaraq necə təsvir edilir? Məsələn, $x = 4$ tənliyini birölçülü, ikiölçülü, üçölçülü sistemlərdə təsvir etsək, hansı fərqli təsvirlər ortaya çıxar?



Bəs, $y = a$, $z = a$ tənliklərinin təsviri necə olar?



Şagird $x = a$ müstəvisinin yz, $y = a$ müstəvisinin xz, $z = a$ müstəvisinin xy müstəvisinə paralel olduğunu, koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrinin isə uyğun olaraq $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$ olduğunu başa düşür.

Dərslikdə verilmiş araşdırma tapşırığı müzakirələrlə dəftərdə çəkilməklə yerinə yetirilir.
Şagirdlər apardıqları araşdırmaya görə aşağıdakı kimi ümumiləşdirmə edirlər.

Müstəvi	Ümumiləşmiş təsvir
$x = a$	$x = a$ müstəvisi yz koordinat müstəvisinə paraleldir, x oxunu $(a; 0; 0)$ nöqtəsində kəsir. $x = 0$ müstəvisi yz müstəvisidir.
$y = a$	$y=a$ müstəvisi xz koordinat müstəvisinə paraleldir, y oxunu $(0; a; 0)$ nöqtəsində kəsir. $y = 0$ müstəvisi xz müstəvisidir.
$z = a$	$z = a$ müstəvisi xz koordinat müstəvisinə paraleldir, z oxunu $(0; 0; a)$ nöqtəsində kəsir. $z = 0$ müstəvisi xy müstəvisidir.

Bəs, $ax + by = 0$ şəkilində olan tənliyin R^3 sistemində, fəzada təsviri necə olar? Məsələn, $2x – y = 0$ tənliyinin fəzada təsviri necə olacaq? Şagirdlər bu təsvirin müstəvi olduğunu və xy müstəvisini $2x – y = 0$ düz xətti boyunca kəsdiyini başa düşürlər.

2-ci saat. Müstəvinin tənliyi $ax + by + cz + d = 0$, onun normalı isə $\vec{n} = \langle a; b; c\rangle$ vektorudur. Müstəvinin normalı müstəvi üzərindəki istənilən vektora perpendikulyardır.

Müstəvinin tənliyinin müstəvi üzərindəki nöqtə və bu nöqtədən müstəviyə çəkilmiş normala görə çıxarılışı müzakirə edilir.
Düsturun çıxarılışı nümunələrlə göstərilir.
Nümunə. A(1;2;3) nöqtəsi normal vektoru $\vec{n}\langle -1;3;4\rangle$ olan müstəvi üzərindədir. Bu müstəvinin tənliyini yazın.

Biz bunu iki üsulla yerinə yetirə bilərik.

1-ci üsul. Müstəvi üzərində A-dan fərqli ixtiyari P(x; y; z) nöqtəsi götürək və başlanğıcı A, sonu P nöqtəsində olan vektoru komponentləri ilə yazaq. $\overrightarrow{AP} = \langle x-1; y-2; z-3\rangle$ olacaq. Normal vektor $\vec{n}\langle -1; 3; 4\rangle$ olduğuna görə $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ olmalıdır.

$$\langle -1; 3; 4\rangle \cdot \langle x-1; y-2; z-3\rangle = 0$$
$$-1(x-1) + 3(y-2) + 4(z-3) = 0$$
$$-x + 1 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0$$

$-x + 3y + 4z - 17 = 0$ bu tənliyin hər iki tərəfini -1 -ə vursaq,
$x - 3y - 4z + 17 = 0$ tənliyini alarıq.

2-ci üsul. Müstəvinin tənliyinin $ax + by + cz + d = 0$ şəkilində və onun normalının isə $\vec{n} = \langle a; b; c\rangle$ olduğunu bilirik. Deməli, $\vec{n}\langle -1; 3; 4\rangle$ normalına görə a, b, c məlumdur, yerinə yaza bilərik.
$(-1)x + 3y + 4z + d = 0$; $-x + 3y + 4z + d = 0$ tənliyində müstəvi üzərində olan A nöqtəsinin (1; 2; 3) koordinatlarını yerinə yazsaq, d dəyişənini tapa bilərik.

$$-x + 3y + 4z + d = 0\ , \qquad -1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + d = 0;\ d = -17$$

$-x + 3y + 4z - 17 = 0$ və ya $x - 3y - 4z + 17 = 0$

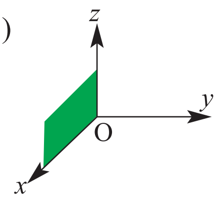
3-cü saatda müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri araşdırılır və tapşırıqlar yerinə yetirilir.
D.13. k-nın hansı qiymətində $4x + ky - 2z + 1 = 0$ və $2x + 4y - z + 4 = 0$ tənlikləri ilə verilən müstəvilər a) paraleldir; b) perpendikulyardır.
Həlli: Müstəvilərin normal vektorları
$\vec{n_1} = \langle 4; k; -2\rangle$ və $\vec{n_2} = \langle 2; 4; -1\rangle$ vektorlarıdır.
a) Əgər müstəvilər paraleldirsə, $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$ olur.
Onda $\frac{4}{2} = \frac{k}{4} = \frac{-2}{-1}$ olmalıdır. Buradan alırıq ki, $k = 8$ olduqda bu müstəvilər paraleldir.
b) $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$ olarsa, mstəvilər perpendikulyar olar. Deməli,
$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$; $4\cdot 2 + k\cdot 4 + (-2)\cdot(-1) = 0$, $k = -2{,}5$ olduqda müstəvilər perpendikulyar olar.

İşçi vərəq №4

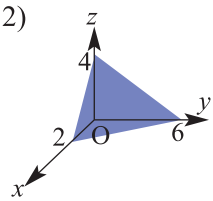
Adı______ Soyadı______ Tarix______

Müstəvilərin qrafik təsvirlərini verilən yazılışlarla uyğunlaşdırın.

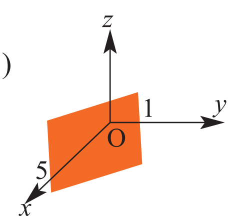
1)



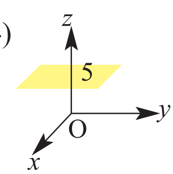
2)



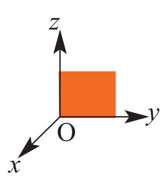
3)



4)



5)



a) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}+\frac{z}{4}=1$

b) $z-5=0$

c) Oxz müstəvisi

d) Oyz müstəvisi

e) $x+5y-5=0$

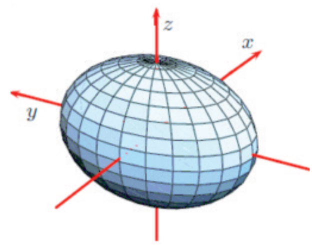
f) Oxy müstəvisi

Dərs 29-30. Sferanın tənliyi. 2 saat. Dərslik səh. 59-60

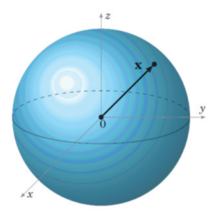
Məzmun standartı.
3.1.2. Fəzada koordinatlar üsulunu müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edir.
3.1.3. Müstəvinin tənliyini və sferanın tənliyini bilir, onlara aid məsələlər həll edir.

Şagird bacarıqları:
- sferanın tənliyini təqdim edir;
- sferanın tənliyinə aid məsələləri həll edir.

Biz indiyə qədər səth dedikdə müstəvi səthləri nəzərdə tuturduq.
Məsələn, $ax + by + cz + d = 0$ tənliyinin həllər çoxluğu ikiölçülü müstəvi səthi müəyyən edir. Lakin fəzada fərqli səthləri də müəyyən etmək mümkündür. Məsələn, R^3 koordinat sistemində mərkəz adlanan nöqtədən radius adlanan məsafə qədər eyni məsafədə olan nöqtələr çoxluğu sferanı yaradır.



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$



Şagirdlər verilən tənlikdə mötərizələri açıb sadələşdirməklə sferanın tənliyini

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ şəkildə yazırlar.

Sferanın radiusu r, mərkəzi koordinat başlanğıcındadır.

Dərslikdə verilmiş tapşırıqlar yerinə yetirilir.
D.6. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 16y + 10z + 54 = 0$ tənliyi ilə verilmiş sferanın mərkəzini və radiusunu müəyyən edin. A(8; 0; 7) nöqtəsindən bu sferaya qədər məsafəni tapın.
Həlli: Sferanın tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:
$(x + 1)^2 - 1 + (y - 8)^2 - 64 + (z + 5)^2 - 25 + 54 = 0,$
$(x + 1)^2 + (y - 8)^2 + (z + 5)^2 = 36.$
Deməli, bu sferanın mərkəzi M(–1; 8; –5) nöqtəsində yerləşir, radiusu isə 6-dır. Onda

$AM = \sqrt{(-1 - 8)^2 + (8 - 0)^2 + (-5 - 7)^2} = \sqrt{9^2 + 8^2 + 12^2} = 17$ və $R = 6$ olduğundan aydındır ki, A nöqtəsindən sferaya qədər məsafə $17 - 6 = 11$ vahid olar.

Dərs 31-32. Fəzada və müstəvidə çevrilmələr. Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 2 saat. Dərslik səh. 61-65

Məzmun standartı.

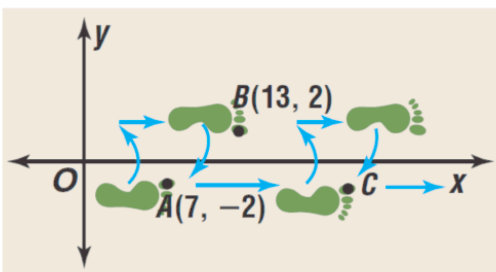
3.2.1. Paralel köçürməni məsələlər həllinə tətbiq edir.

3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:

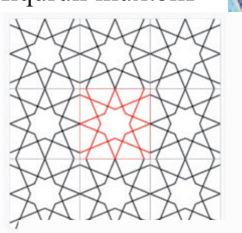
- fəzada paralel köçürmə, dönmə hərəkətlərini təsvir edir;
- verilmiş təsvirlərə görə hansı paralel köçürmə və dönmə hərəkətinin icra olunduğunu müəyyən edir.

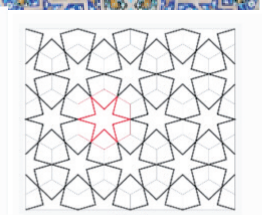
Biz hər gün ətraf aləmdə, yəni üçölçülü fəzada paralelköçürmə, dönmə hərəkətlərini müşahidə edirik. Binaların konstruksiyalarının inşasında və dizaynında bu hərəkətlərin necə əks edildiyini görə bilirik. Məsələn, qar üzərində gedərkən ayaq izləri paralel köçürməyə nümunədir və ya küçələrin, səkilərin müxtəlif formalı daşlarla necə bəzədildiyini görə bilərik. Biz yenə bu dəyişmələri müstəvi səthlər olaraq kağızda təsvir edirik. Paralel köçürmə, dönmə, əksetmə kimi hərəkətlərin və homotetik çevrilmənin tətbiqinin ən möhtəşəm nümunəsi islam incəsənətidir. Bütün dünyada mütləq islam ornamentləri ilə bəzədilmiş taxta, daş oyma nümunələri, çini qablar, tavan, divar işləmələri, türbə və mavzoleylər nümayiş etdirilir.

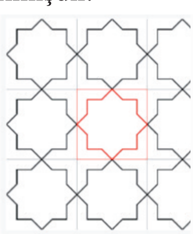


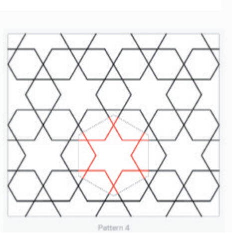
Bütün bunlar fiqurun həndəsi xassələrinə əsaslanmaqla verilən sahəni müəyyən olunmuş bir fiqurun müxtəlif hərəkətlərinə görə boşluq qalmadan doldurma, parketləmə işi əsasında mümkün olur.

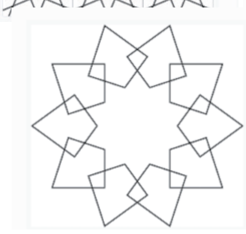
Şəkildəki elementin kompozisiyasının yaradılması addım-adım göstərilmişdir.











2-ci saatda ümumiləşdirici tapşırıqların həlli yerinə yetirilir.

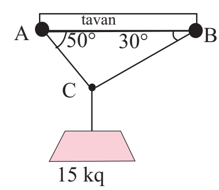
? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D. 5 (səh. 63) P(1; 2; 3) mərkəzli və $k = 3$ əmsallı homotetiyada A(0; –3; 2) nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilir?

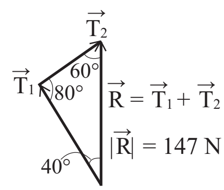
Həlli: A nöqtəsinin çevrildiyi nöqtə $A'(x;y;z)$ olsun. Onda tərifə görə
$\overrightarrow{PA'} = k \cdot \overrightarrow{PA}$ və ya $\langle x-1;\, y-2;\, z-3\rangle = 3 \cdot \langle -1;\, -5;\, -1\rangle = \langle -3;\, -15;\, -3\rangle$
olur. Buradan $x - 1 = -3$, $y - 2 = -15$, $z - 3 = -3$ alırıq.
Onda $x = -2$, $y = -13$, $z = 0$ tapılır. Beləliklə, verilmiş homotetiyada
A(0; –3; 2) nöqtəsi A′(–2; –13; 0) nöqtəsinə çevrilir.

D. 9 (səh. 65) Verilən yükün təsiri altında iplərdə yaranan gərilmə qüvvəsini tapın.

a)



Həlli: Yükə təsir edən ağırlıq qüvvəsini tapaq: P = mg = 15 · 9,8 = 147 N
İplərdə yaranan gərilmə qüvvələrinin modullarının T_1 və T_2 ilə işarə edək.



Sinuslar teoremini tətbiq etməklə alırıq:

$$\frac{T_2}{\sin 40^\circ} = \frac{147}{\sin 80^\circ}, \quad T_2 \frac{147 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 95{,}96 \text{ N}$$

$$\frac{T_1}{\sin 60^\circ} = \frac{147}{\sin 80^\circ}, \quad T_2 \frac{147 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 129{,}27 \text{ N}$$

D. 12 b) m-in hansı qiymətlərində A(3; –1; 0), B(m; 2; 3), C(7; 3; 4) nöqtələri kollineardır?
Həlli: $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{AC}$ vektorlarını komponentləri ilə yazaq.

$$\overrightarrow{AB} = \langle m-3;\, 2-(-1);\, 3-0\rangle = \langle m-3;\, 3;\, 3\rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 7-3;\, 3-(-1);\, 4-0\rangle = \langle 4;\, 4;\, 4\rangle$$

Verilmiş nöqtələrin kollinear olması üçün $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{AC}$ vektorları kollinear olmalıdır. Buradan vektorların kollinearlıq şərtinə görə alırıq.

$$\frac{m-3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \qquad m = 6$$

2-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları cədvəli

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Verilən nöqtəni üçölçülü koordinat sistemində qurur.	
2.	Üçölçülü koordinat sistemində qrafik təsvirlə verilmiş nöqtənin koordinatlarını müəyyən edir.	
3.	Koordinatları ilə verilən iki nöqtə arasındakı məsafəni tapır.	
4.	Koordinatların tapılmasına aid müxtəlif məsələləri həll edir.	
5.	Fəzada nöqtənin yerini yer vektoru ilə müəyyən edir.	
6.	Fəzada komponentləri ilə verilmiş vektorun uzunluğunu tapır.	
7.	Fəzada vektorlar üzərində toplama, çıxma və vektorun ədədə hasili əməllərini yerinə yetirir.	
8.	Verilən vektoru ort vektorlarla ifadə edir.	
9.	İki vektorun skalyar hasilini düstura görə hesablayır.	
10	Skalyar hasilə görə iki vektor arsındakı bucağı tapır.	
11	Düz xətlərin tənliklərinə görə onların qarşılıqlı vəziyyətlərini müəyyən edir (kəsişən, perpendikulyar, paralel, çarpaz).	
12	Müstəvinin tənliyini verilən şərtlərə görə yazır.	
13	Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətlərinə aid məsələləri həll edir.	
14	Sferanın tənlyinə aid məsələlər həll edir.	
15	Fəzada paralel köçürməni müəyyən edir və qrafik təsvir edir.	

Dərs 33. Bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) Təpələri (0; 0), (3; 0), (5; 3) və (2; 3) nöqtələrində olan paraleloqramın diaqonalları arasında qalan bucaqları tapın.

2) Təpə nöqtələri A(14;−5;−4), B(–2;−5;8) və C(–2;13;–4) olan üçbucağın BM medianının uzunluğunu tapın.

3) Uc nöqtələri uyğun olaraq P(3; 4) və Q(5; 7) olan $\overrightarrow{PQ}$ vektorunun x ox-unun müsbət istiqaməti ilə əmələ gətirdyi bucağı tapın.

4) $\overrightarrow{MN}$ vektorunu: 1) komponentləri ilə yazın; 2) ort vektorlarla ifadə edin; 3) uzunluğunu tapın.

a) $M\langle 3;\ 1;\ 4\rangle$, $N\langle 5;-2;-7\rangle$ b) $M\langle 3;\ 1;\ 4\rangle$, $N\langle 5;-2;-7\rangle$

5) $\vec{f} = \langle -1;-2;-5\rangle$ və $\vec{g} = \langle 2;\ 3;-1\rangle$ olduğuna görə $\vec{a}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.

a) $\vec{a} = \vec{f} + 3\vec{g}$ b) $\vec{a} = 2\,\vec{g} - 3\vec{f}$

6) Vektorların uzunluğunu hesablayın.

a) $\vec{a}\,\langle 2;-3;2\rangle$ b) $\vec{u}\,\langle 2;-4;1\rangle$ c) $\vec{m}\,\langle 3;\text{-}1;-2\rangle$

7) Cismin tarazlıqda olması üçün ona təsir edən qüvvələrin vektorial cəmi sıfıra bərabər olmalıdır. Cismə tətbiq edilmiş iki qüvvə $\langle 3;-2;4\rangle$ və $\langle 4;\ 2;1\rangle$ kimidir. Cismi tarazlıqda saxlaya biləcək üçüncü qüvvəni komponentləri ilə yazın.

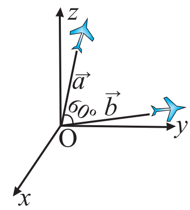
8) A (2;3;4) və B(–1;6;3) nöqtələri verilmişdir. AB parçasının orta nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

9) $\vec{a}\langle 2;\ 3\rangle$ və $\vec{b}\langle -1;6\rangle$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

10) m-in elə qiymətini tapın ki, $\vec{a}\langle -1;3\rangle$ və $\vec{b}\langle -1;m\rangle$ vektorları perpendikul-yar olsun.

11) A(5; 3), B (2; 4), C(0; 0) olmaqla $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{CD}$ vektorları bərabər vektorlardır. D nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

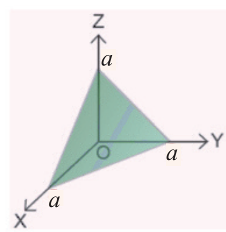
12) $|\vec{a}| = 6$ km, $|\vec{b}| = 8$ km olduğuna və şəkildə verilənlərə görə təyyarələr arasındakı məsafəni tapın.



13) Mərkəzi (1; –2; 3) nöqtəsində olan və (4; 2; 1) nöqtəsindən keçən sferanın tənliyini yazın.

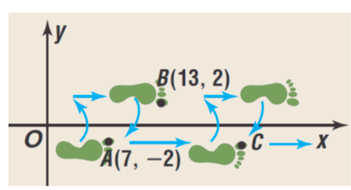
14) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ tənliyi ilə verilmiş sferanın mərkəzini və radiusunu tapın.

15) Koordinat oxlarından bərabər parçalar ayıran müstəvinin tənliyini yazın.

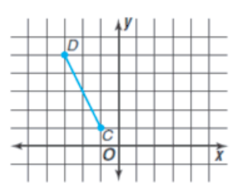


16) Koordinat müstəvisində təsvir edilmiş ayaq izləri əksetmə və paralelköçürmə hərəkətlərinin nəticəsi olaraq təsvir edilmişdir.

A (7; –2) nöqtəsi bu hərəkətlərlə B (13; 2) nöqtəsinə çevrildiyinə görə, qrafik üzərində qeyd edilmiş hərəkətlərə görə C nöqtəsinin koordinatlarını tapın.



17) Şəkildə verilmiş parçanın uc nöqtələrinin koordinat başlanğıcına nəzərən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində 90° dönməsindən sonrakı koordinatlarını yazın.



3-cü bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
1.2.1. Ədədi ardıcıllığın və onun limitinin tərifini bilir, yığılan ardıcıllıqların xassələrini tətbiq edir. 1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır. 1.2.3. Funksiyanın kəsilməzlik anlayışlarını bilir və kəsilməz funksiyaların əsas xassələrini tətbiq edir.	34-35	Funksiyanın nöqtədə limiti. Funksiyanın qiymətlər cədvəlinə və qrafikinə görə limitin təxmin edilməsi.	2	67-71
	36	Limitin varlığı	1	72-73
	37-39	Limitin xassələri	3	74-79
	40-41	Funksiyaların kəsilməzliyi	2	80-85
	42	Triqonometrik funksiyaların daxil olduğu xüsusi limitlər	1	86-87
	43-44	Sonsuz limitlər və sonsuzluqda limit. Şaquli və üfüqi assimptotlar	2	88-92
	45-46	Ədədi ardıcıllığın limiti	2	93-98
	47	Ümumiləşdirici tapşırıqlar	1	99
	48	Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları.	1	
	Cəmi		15	

Dərs nümunəsi

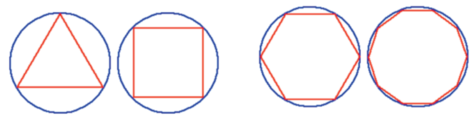
Dərs 34-35. Funksiyanın nöqtədə limiti. Funksiyanın qiymətlər cədvəlinə və qrafikinə görə limitin təxmin edilməsi. 2 saat. Dərslik səh. 67-71.

Məzmun standartı.
1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır.
Şagird bacarıqları:
- limit anlayışını başa düşdüyünü situasiyalar üzərində izah edir;
- cədvəllə verilmiş ədədi məlumatlara görə nöqtədə limiti müəyyən edir;
- funksiyanın verilən qrafikinə görə nöqtədə limiti təxmin edir;
- verilmiş nöqtədə funksiyanın qiyməti ilə limitin qiymətini fərqləndirir.

1. Anlayışın təqdimi. Real situasiya nümunələri (müzakirə). Biz limit anlayışını gündəlik həyatımızda işlədirik. Bir çox hallarda bu hər hansı ölçü ilə bağlı olur. Məsələn, telefon danışıq haqqının, elektrik enerjisi və ya təbii qaz haqqı bitdikdə və s. "limiti qurtarıb" kimi ifadələr işlədilir. Lakin riyaziyyatda limit anlayışı bir qədər fərqlidir.

Limit anlayışına həndəsi yanaşma.

Çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlıların perimetri onun tərəflərinin sayı artdıqca çevrənin uzunluğuna yaxınlaşır.

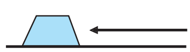


Biz indiyə qədər statistik məlumatlara, dəyişənin verilən qiymətində funksiyanın qiymətini hesablamaqla məsələləri həll edirdik. İndi isə riyaziyyatın riyazi analiz və ya kalkulus adlanan bölməsinin yeni anlayışlarını öyrənəcəyik. Riyazi analizin təməl anlayışı limitdir. Limit riyazi hesablamalara hansı imkanları gətirmiş oldu? Bunu aşağıdakı şəkillərlə qısaca nəzərdən keçirək. Onların hər birini isə sonrakı dərslərimizdə ətraflı olaraq öyrənəcəyik.

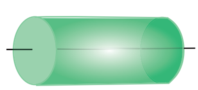
Limit olmadan hesablayırıq.

Düzbucaqlının sahəsini

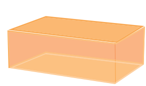
Sabit qüvvənin təsiri altında görülən işi



Silindrin səthinin sahəsini



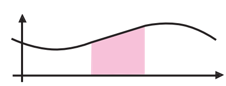
Düzbucaqlı paralelepipedin həcmini



Sonlu ardıcıllığın hədlər cəmini $a_1 + a_2 + ... + a_n = S_n$

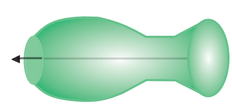
Limitin köməyilə hesablaya bilirik

Əyri xəttin altında qalan sahəni



Dəyişən qüvvənin təsiri altında görülən işi

Əyrinin fırlanmasından alınan fiqurun səthinin sahəsini



Əyri altında qalan müstəvi hissənin fırlanmasından alınan fiqurun həcmini

Sonsuz ardıcıllığın hədlər cəmini $a_1 + a_2 + ... = S$

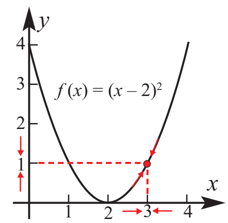
2. Öyrənmə. Limitin qiymətlər cədvəlinə və qrafikə əsasən təxmin edilməsi
Dərslikdə verilən araşdırma tapşırığı ilə və yaxud aşağıda verilən funksiya üzərində limit anlayışı izah edilə bilər.

Tutaq ki, x-in qiymətlərinin 3-ə yaxınlaşdığı halda $f(x) = x^2 - 4x + 4$ kvadrat funksiyanın qiymətlərini araşdırmaq tələb edilir. Funksiyanı tam kvadrata ayırmaqla $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ kimi yaza bilərik.
Funksiyanın qrafiki təpəsi (2;0) nöqtəsində olan paraboladır. x-in qiymətlərinin soldan və sağdan 3-ə yaxınlaşdığını göstərən qiymətlər cədvəli quraq. Cədvəldən görünür ki, x-in qiyməti 3-ə yaxınlaşdıqca f-in qiyməti 1-ə yaxınlaşır.

x soldan 3-ə yaxınlaşır x sağdan 3-ə yaxınlaşır

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	0,810	0,980	0,998	?	1,002	1,020	1,21

$f(x)$ yaxınlaşır 1-ə $f(x)$ yaxınlaşır 1-ə



Bunu funksiyanın qrafikinə görə də müəyyən etmək mümkündür.

x dəyişəni 3-ə yaxınlaşdıqda $f(x) = x^2 - 4x + 4$ funksiyasının qiymətləri 1-ə yaxınlaşır, yəni limiti 1-ə bərabərdir.

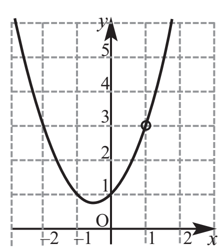
Bu fikirin riyazi yazılışı isə aşağıdakı kimidir.

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 4x + 4) = 1$$

3. Öyrənmə. Funksiyanın qiyməti və limitin qiyməti
Biz indiyə qədər $f(x)$ funksiyasının qiymətini arqumentin verilmiş $x = a$ qiymətində hesablayaraq tapırdıq. Limit isə x-in qiymətinin verilən a qiymətinə çox yaxınlaşması ilə f-in yaxınlaşdığı qiymətin tapılması məsələsini həll edir. Şagirdlərin nəzərinə limit anlayışında “x yaxınlaşır a” dedikdə x -in a ədədinə çox-çox (istənilən qədər) yaxınlaşdığı, lakin ola bilsin ki, ona heç vaxt bərabər olmadığı nəzərdə tutulduğu çatdırılır.

$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ funksiyası $x = 1$ nöqtəsində təyin olunmamışdır.
Yəni, arqument $x = 1$ qiymətini ala bilməz. Lakin limit x-in müəyyən ədədə bərabər qiymətini deyil, x-in bir ədədə yaxınlaşmasında funksiyanın hansı qiymətə yığıldığı haqqında suala cavab verir. Ona görə də funksiyanın $x = 1$ nöqtəsində təyin olunmadığına baxmayaraq, bu funksiyanın $x \to 1$ olduqda limiti var və 3-ə bərabərdir. Bu belə yazılır:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$



$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, x \neq 1$

Dərslikdə verilən tapşırıqlar yerinə yetirilir. Hesablamalar kalkulyatorla aparılır. Limitin qrafik olaraq müəyyən edilməsi tapşırıqlarının qrafiklərin sxematik olaraq dəftərdə çəkilməsi ilə yerinə yetirilməsi tövsiyə edilir.
Müşahidə yolu ilə formativ qiymətləndirmə aparılır.

Dərs 36. Limitin varlığı. Dərslik səh. 72-73

Məzmun standartı.

1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır.

Şagird bacarıqları:

- birtərəfli limit anlayışını funksiyanın qiymətlər cədvəlinə görə, qrafik olaraq izah edir;
- funksiyanın nöqtədə limitinin mövcud olub-olmamasını onun sağ və sol limitinin qiymətinə görə müəyyən edir.

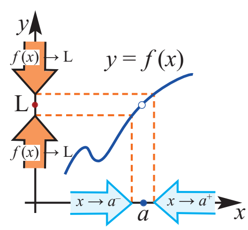
x-in qiymətləri hər hansı ədədə yaxınlaşdıqda funksiyanın limiti haqqında aşağıdakı üç nəticə ola bilər:

1. limit yoxdur;
2. limit var və hər hansı bir ədədə bərabərdir;
3. limit var və $\pm\infty$-dur.

Biz hansı halda limit var, hansı halda limit yoxdur deyirik?

Əgər $f(x)$ funksiyasının qiyməti x-in a ədədinə soldan yaxınlaşması ilə hər hansı L_1 qiymətinə yaxınlaşırsa, bu belə yazılır.

$x \to a^-$ olduqda $f(x) \to L_1$ və ya $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L_1$



Əgər $f(x)$ funksiyasının qiyməti x-in a ədədinə sağdan yaxınlaşması ilə hər hansı L_2 qiymətinə yaxınlaşırsa, bu belə yazılır:

$x \to a^+$ olduqda $f(x) \to L_2$ və ya $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L_2$

Yuxarıda qeyd edilən hər iki yazılış birtərəfli limitlər adlanır.

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L_1$ limiti sol limit, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L_2$ limiti isə sağ limit adlanır.

Əgər həm sol limit, həm də sağ limit eyni L ədədinə bərabər olarsa, yəni,

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L$ və $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$ olarsa, L ədədinə $x \to a$ olduqda $f(x)$ funksiyasının limiti deyilir və $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ kimi yazılır.

$x \to 5$ şərtində verilən $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \le 5 \\ -x + 10 & x > 5 \end{cases}$ funksiyasının limitinin olub-olmadığını araşdıraq.

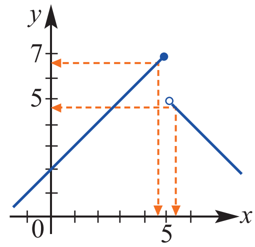
Funksiyanın $x \to 5$ olduqda qiymətlər cədvəlini tərtib edək və qrafikini quraq.

$x \to 5^-$	4,9	4,99	4,999
$f(x)$	6,90000	6,99000	6,99900

$x \to 5^+$	5,1	5,01	5,001
$f(x)$	4,90000	4,99000	4,99900

Həm qrafikdən, həm də qiymətlər cədvəlindən görünür ki, x soldan 5-ə yaxınlaşdıqda, yəni 5-dən kiçik qalaraq 5-ə yaxınlaşdıqda funksiyanın sol limiti

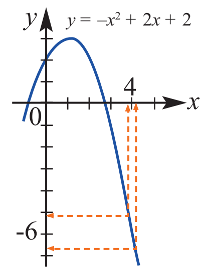
$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 7,$$



x sağdan 5-ə, yəni 5-dən böyük qalmaqla 5-ə yaxınlaşdıqda funksiyanın sağ limiti $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 5$ olur.

Lakin, $\lim_{x\to 5^+} f(x) \neq \lim_{x\to 5^-} f(x)$ olduğundan,

$\lim_{x\to 5} f(x)$ limiti yoxdur.



Başqa bir nümunədə limitin varlığını nəzərdən keçirək.

x-in 4-ə yaxınlaşdığı şərtində $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ funksiyasının limitinin olub-olmadığını araşdıraq.

Yenə də bu şərtə uyğun qiymətlər cədvəli tərtib edək və funksiyanın qrafikini quraq.

$x \to 4^-$	3,9	3,99	3,999
$f(x)$	–5,41000	–5,94010	–5,99400

$x \to 4^+$	4,1	4,01	4,001
$f(x)$	–6,61000	–6,06010	–6,00600

Hər iki mənbədən alınan məlumat funksiyanın sağ və sol limitinin bərabər olduğunu göstərir.

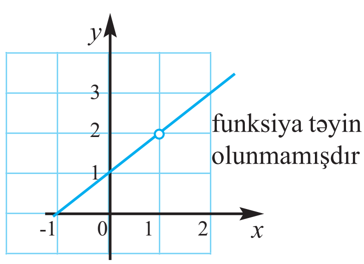
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 6, \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = 6, \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 6.$$

Deməli, $x \to 4$ olduqda funksiyanın limiti 6-ya bərabərdir.

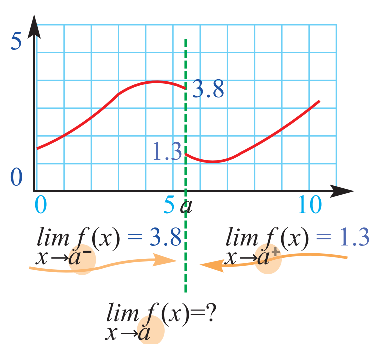
$$\lim_{x\to 4} f(x) = 6.$$

Aşağıdakı kimi iki qrafik üzərində fikirləri ümumiləşdirmək olar.

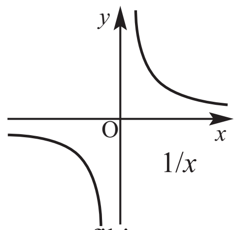
$x = 1$ nöqtəsində funksiya təyin olunmamışdır, lakin bu nöqtədə limiti var.

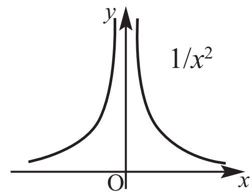


Funksiyanın a nöqtəsində limiti yoxdur.



Qeyd etdiyimiz kimi, limitin qiyməti haqqında üç nəticə ola bilər. Onlardan ikisini, limitin olmadığı və limitin müəyyən ədədə bərabər olduğu halı nəzərdən keçirdik. İndi isə limitin müsbət və ya mənfi sonsuzluğa bərabər olması halını nəzərdən keçirək.





$1/x$ funksiyasının qrafikinə nəzər salsaq, onun $x \to 0$ şərtində limitinin olmadığını görərik. Çünki $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = -\infty$, bu halda limit yoxdur.

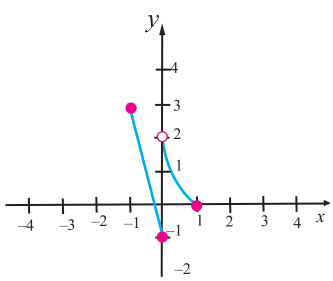
$\dfrac{1}{x^2}$ funksiyası üçün

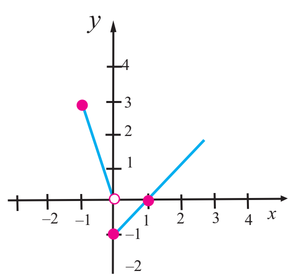
$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$ və $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$ yəni,

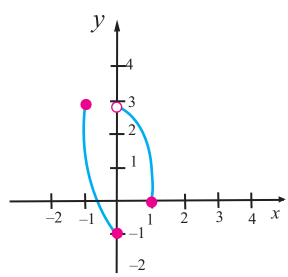
sağ və sol limit + sonsuzluqdur. Deməli x-in qiymətləri həm soldan, həm də sağdan sıfıra yaxınlaşdıqca funksiyanın qiymətləri müsbət sonsuzluğa yaxınlaşır.

Dərslikdə verilən tapşırıqlar yerinə yetirilir. 6-cı tapşırığı necə yerinə yetirəcəkləri barədə şagirdlərlə müzakirə aparılır. Tapşırıqda verilən limit şərtlərini ödəyən qrafikin çəkilməsi tələb edilir. Şagirdlər fikirlərini təqdim edirlər. Məsələn, verilən nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd etdikdən sonra, limitin olmadığı nöqtə haqqında düşünməliyik. Bu nöqtəyə sağdan və soldan yaxınlaşdıqda funksiyanın qiymətləri müxtəlif olmalıdır.

a) $f(-1) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0$ olmaqla $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoxdur.







Şagirdlər müxtəlif funksiyaların qrafiklərini çəkməklə tapşırığı yerinə yetirə bilərlər. Tapşırıq qruplarla iş üçün də əlverişlidir. Hər qrup üzvü öz variantını təklif edir. Qrafiklərə uyğun tənliklər yazılır və təqdim edilir.

Qiymətləndirmə. Şagirdin müzakirələrdə iştiraketmə fəallığına, limitin varlığını müəyyənetmə, uyğun qrafikləri dəftərində çəkmə bacarıqlarına görə formativ qiymətləndirmə aparılır.

Dərs 37-39. Limitin xassələri. 3 saat. Dərslik səh.74-79

Məzmun standartı.
1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır.

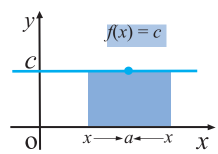
Şagird bacarıqları:
- limitin xassələrini nümunələr üzərində göstərir;
- limitin xassələrini tətbiq edir;
- limiti hesablamanın müxtəlif üsullarını tətbiq edir;
- limitin tətbiqi ilə real həyati situasiya məsələlərini həll edir.

1-ci saat. Limitin xassələri nümunələr üzərində ümumsinif fəaliyyəti ilə nəzərdən keçirilə bilər. Ümumsinif fəaliyyətini aşağıdakı kimi qurmaq olar.
Xassəni müəllim sözlə elan edir, müraciət olunan şagird həmin xassəni lövhədə riyazi olaraq yazır və nümunəyə tətbiq edir. Digər şagirdlər isə dəftərlərində xassəni həm sözlə, həm də riyazi yazılış və nümunə ilə yazırlar.

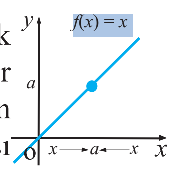
Sabit funksiyanın və eynilik funksiyasının limiti haqqında xassəyə iki fundamental limit də deyilir.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$ Sabitin limiti özünə bərabərdir.

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 3} 5 = 5$, $\lim\limits_{x\to 3} 7 = 7$



Şagird, sabit funksiya dedikdə, x-in bütün qiymətlərində y-in eyni qiymət aldığını başa düşür və bunu qrafik üzərində izah edir. “Biz yaxınlaşma nöqtəsini 3 deyil, 4 və ya 5 götürsək, limitin qiyməti dəyişərmi?” sualına cavab verilir.



Eynilik funksiyasının limiti. $f(x) = x$ və ya $y = x$ eynilik funksiyası üçün $\lim\limits_{x\to a} x = a$ xassəsi araşdırılır. Nümunələr göstərilir. Eynilik funksiyası arqument və funksiyanın qiymətlərinin bərabər olduğu funksiyadır. Deməli, x hansı ədədə yaxınlaşırsa, y də həmin ədədə yaxınlaşır.

Nümunə. $\lim\limits_{x\to -5} x = -5$

Daha sonra, növbə ilə limitin aşağıdakı xassələri nəzərdən keçirilir və əvvəl nəzərdən keçirilmiş xassə ilə birlikdə tətbiq edilir.

Cəmin, fərqin, hasilin, nisbətin limitinin xassələri çox əhəmiyyətlidir, çünki bu xassələr limiti cəbri üsullarla hesablamağa imkan verir.

Cəmin, fərqin, hasilin, nisbətin limiti

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$ və $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{M}$, olarsa, onda:

1. Cəmin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{L} + \mathrm{M}$

2. Fərqin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{L} - \mathrm{M}$

3. Hasilin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{L} \cdot \mathrm{M}$

4. Nisbətin limiti: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}, \qquad \mathrm{M} \neq 0$

5. Qüvvətin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = \mathrm{L}^n,$

Xüsusi halda, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

Sabiti limit işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Bu xassəni, sabitin limiti və eynilik funksiyasının xassələrini əhatə edən nümunə nəzərdən keçirilir. $\lim\limits_{x\to 3} 6x = 6\lim\limits_{x\to a} x = 6\,a$

2-ci saat. Limiti hesablamanın bəzi üsulları nəzərdən keçirilir. Birbaşa yerinə yazma, vuruqlara ayırma, radikaldan azad etmə kimi üsullar nəzərdən keçirilir. Nümunələri şagirdlərin nəzərdən keçirməsi üçün müəyyən vaxt verilə bilər, sonra isə müraciət olunan şagird nümunə izahlarının müşaiyəti ilə lövhədə yaza bilər.
Limiti hesablama tapşırıqlarında şagirdin qiyməti düzgün hesablama bacarıqlarından daha çox limitin xassələrini görmə, tətbiq etmə, təqdim etmə bacarıqlarına diqqət edilir. 7-ci tapşırığın mətnində bu bacarıq xüsusi qeyd edilmişdir.
10-ci tapşırıqda şagird verilən rasioanl funksiyaları ixtisar etməklə sadələşdirir, alınan funksiya üçün təyin olunmadığı qiymətləri qeyd edir.
3-cü saat. Limitin hesablanmasına aid tapşırıqlar yerinə yetirilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}=100$ olduğunu bilərək:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{100}-1)^2}{(x-1)^2}$ limitlərini

hesablayın. Hər bir hesablama addımı üzərində limitin xasələrini göstərin.

Həlli:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^2-1}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{(x-1)(x+1)}}_{\text{məxrəc vuruqlara ayrılır}}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}}_{\text{hasilin limiti xassəsi tətbiq olunur}}=100\cdot\dfrac{1}{1+1}=50$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-1}{x-1}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{50}-1)(x^{50}+1)}{(x-1)(x^{50}+1)}}_{\text{sürət və məxrəc eyni ifadəyə vurulur}}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x^{50}+1}}_{\text{sadələşdirilir.}}=$

$=\underbrace{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^{50}+1}}_{\text{hasilin limiti xassəsi tətbiq olunur}}=100\cdot\dfrac{1}{2}=50$

D.10. Hesablayın.

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}$

Həlli: $x\to -2$ olduqda məxrəcin limiti 0 olduğundan limitin xassələrini birbaşa tətbiq emək olmaz. Ona görə əvvəlcə, kəsrin surət və məxrəcini vuruqlarına ayırıb, kəsri ixtisar edək. Sonra limitin xassələrini tətbiq edək.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x+3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-5}{x+3}=\frac{-2-5}{-2+3}=-7$$

D.11. Müxtəlif üsulları tətbiq edərək limitləri tapın. 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

Həlli: Əvvəlcə, $\sqrt[3]{1+x}=t$ əvəz edərək, kəsri sadələşdirək. Bu halda

$1+x=t^3$, $x=t^3-1$ olduğunu nəzərə alaq və əvəzləməni yerinə yazaq.

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\frac{t-1}{t^3-1}=\frac{t-1}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}$$

Beləliklə, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{1+x})^2+\sqrt[3]{1+x}+1}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{1+0})^2+\sqrt[3]{1+0}+1}=$

$=\dfrac{1}{3}$ alarıq.

İşçi vərəq N 1

Adı_________ **Soyadı**________________ **Tarix**___________

Limitin xassələrini tətbiq etməklə hesablayın.

1. $\lim_{x\to 6}(5x-4)$

2. $\lim_{x\to 7}(4x-3)$

3. $\lim_{x\to -2} 7x^2$

4. $\lim_{x\to -3} 5x^2$

5. $\lim_{x\to 5}(x^2-3x-4)$

6. $\lim_{x\to 6}(x^2-4x-7)$

7. $\lim_{x\to 2}(5x-8)^3$

8. $\lim_{x\to 4}(6x-21)^3$

9. $\lim_{x\to 1}(2x^2-3x+5)^2$

10. $\lim_{x\to 2}(2x^2+3x-1)^2$

11. $\lim_{x\to -4}\sqrt{x^2+9}$

12. $\lim_{x\to -1}\sqrt{5x^2+4}$

13. $\lim_{x\to 5}\dfrac{x}{x+1}$

14. $\lim_{x\to 2}\dfrac{3x}{x-4}$

Limitin xassələrini və limiti hesablama üsullarını tətbiq etməklə hesablayın.

1. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

2. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

5. $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x-2}$

6. $\lim_{x\to 3}\dfrac{4x-12}{x-3}$

7. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

8. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

9. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^4-2x^3+x-2}$

10. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^4+x^3+2x+2}$

11. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

12. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}$

13. $\lim_{x\to 2}[(x+1)^2(3x-1)^3]$

14. $\lim_{x\to -1}[(x+2)^3(3x+2)]$

15. $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

16. $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

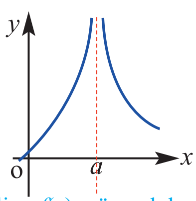
Dərs. 40-41. Funksiyanın kəsilməzliyi. 2 saat. Dərslik səh. 80-85

Məzmun standartı.
1.2.3. Funksiyanın kəsilməzlik anlayışlarını bilir və kəsilməz funksiyaların əsas xassələrini tətbiq edir.

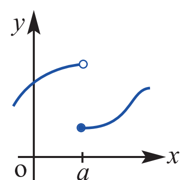
Şagird bacarıqları:
- funksiyanın nöqtədə kəsilən olduğu şərtləri nümunələr üzərində təqdim edir;
- funksiyanın nöqtədə kəsilməz olması şərtini izah edir;
- funksiyanın intervalda kəsilməzliyini izah edir;
- funksiyanın parçada kəsilməzliyini izah edir;
- funksiyanın kəsilməzliyinə aid çalışmaları yerinə yetirir.

Əvvəlki dərslərimizdə funksiyanın verilən nöqtədə təyin olunub-olunmamasının limitin qiyməti üçün əhəmiyyət daşımadığını qeyd etmişdik.

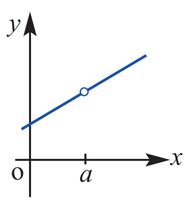
Lakin, $x \to a$ şərtində çoxhədli funksiyaların, $y = \sin x$, $y = \cos x$ triqonometrik funksiyalarının, bəzi rasional funksiyaların qiymətlərini hesablayarkən a ədədini birbaşa yerinə yazmaqla faktiki olaraq funksiyanın qiymətini hesablamaqla limitin də qiymətini hesablayırdıq. Biz bunu ancaq ona görə edə bilirdik ki, bu funksiyalar kəsilməz funksiyalardır. İndi isə funksiyanın $f(a)$ qiyməti ilə x dəyişəni a-ya yaxınlaşdıqda limitin qiymətinin funksiyanın kəsilməzliyində əsas göstəricilər olduğunu öyrənəcəyik. Dərslikdə verilmiş c nöqtəsində kəsilən, müxtəlif situasiyaları əks etdirən qrafiklər sinifdə nümayiş etdirilir. Aşağıda bu situasiyanı əks etdirən başqa nümunələr verilmişdir.



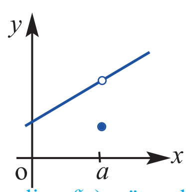
$\lim_{x\to a} f(x)$ mövcud deyil
f(a) təyin edilməmişdir



$\lim_{x\to a} f(x)$ mövcud deyil
f(a) təyin edilmişdir



$\lim_{x\to a} f(x)$ mövcuddur
f(a) təyin edilməmişdir



$\lim_{x\to a} f(x)$ mövcuddur
f(a) təyin edilmişdir
lakin $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

Şagirdlər bu situasiyaları sözlə həm şifahi təqdim etməyi, həm də yazılı olaraq qrafiklərlə izah etməyi bacarmalıdırlar.

Deməli, funksiyanın nöqtədə kəsilməz olması üçün 3 şərt ödənməlidir:

Funksiya :

1. $f(a)$ təyin edilmişdir; 2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ var; 3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

şərtlərini ödədikdə deyirlər ki, a nöqtəsində kəsilməzdir. Əgər bu şərtlərdən hər hansı biri ödənməzsə, deməli, funksiya a nöqtəsində kəsilməz deyil, kəsiləndir.

Məsələn, $f(x)=[x]$ tam hissə x funksiyası hər bir tam $n\in Z$ nöqtəsində kəsiləndir, çünki istənilən $n\in Z$ üçün $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n-1$, $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = n$.

2-ci saat. Funksiyanın açıq intervalda kəsilməzliyi, parçada kəsilməzliklərinin tərifləri izah edilir.

$(a; b)$ intervalının hər bir nöqtəsində kəsilməz funksiyaya bu intervalda kəsilməz funksiya deyilir.

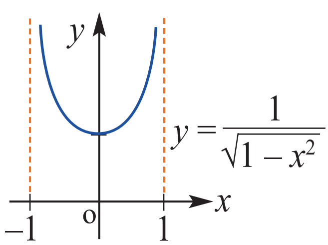
Funksiyanın parçada kəsilməzliyi.Tərif. $[a;b]$ parçasında təyin olunan $f(x)$ funksiyası $(a;b)$ intervalında kəsilməzdirsə və $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ və $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ olarsa, deyirlər ki, funksiya $[a;b]$ parçasında kəsilməzdir deyilir.

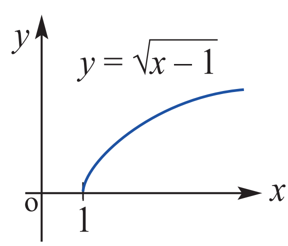
Tərifdən göründüyü kimi funksiyanın parçada kəsilməzliyindən bəhs edilərkən parçanın uclarında sağ və sol limitin varlığından söhbət gedir.

Tərifə görə, əgər $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ olarsa, deməli f funksiyası a nöqtəsində sağdan kəsilməz, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ olduqda isə f funksiyası soldan kəsilməzdir.

Funksiyanın intervalda kəsilməz olması onun parçada kəsilməz olması nəticəsini vermir. Bu halların mövcud olduğu aralıqlar nəzərdən keçirilir. $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; \infty)$, $(b; +\infty)$, $(-\infty; b)$. Məsələn, funksiya $[1; 5)$ aralığında kəsilməz olması üçün, $(1; 5)$ aralığında və 1 nöqtəsində sağdan kəsilməz olmalıdır.

Aşağıdakı funksiyalarla müxtəlif situasiyalar nəzərdən keçirilə bilər.





1-ci funksiya, $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(-1; 1)$ intervalında kəsilməz olmasına baxmayaraq, $[-1; 1]$ parçasında kəsilməz deyil. Çünki nə $f(-1)$, nə də $f(1)$ təyin olunmamışdır.

2-ci funksiya, $y = \sqrt{x-1}$ isə $[1; +\infty)$ aralığında kəsilməzdir.

Çünki, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-1} = \lim\limits_{x\to a}\sqrt{x-1} = \sqrt{a-1} = f(a)$

$a = 1$ qiymətində sağ limit var və funksiyanın bu nöqtədəki qiymətinə bərabərdir.

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = f(1)$$

Deməli, funksiya $a \geq 1$ qiymətini ödəyən istənilən nöqtədə kəsilməzdir.

Funksiyanın nöqtədə, intervalda, parçada kəsilməzliyinə aid, həmçinin funksiyanın aralıq qiymətləri haqqındakı teoremin tətbiqi ilə tapşırıqlar yerinə yetirilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.5. Verilən funksiyaların kəsilmə nöqtələrini müəyyən edin. Bu nöqtələrdə limit varsa, tapın.

Həlli: 3) $p(x) = \dfrac{|x+2|}{x+2}$

$x = -2$ nöqtəsində funksiya təyin olunmayıb. Tərifə görə $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x > -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$ olduğundan, $p(x) = \begin{cases} 1 & x > -2 \\ -1 & x < -2 \end{cases}$

Deməli, $\lim\limits_{x\to -2^+} p(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to -2^-} p(x) = -1$. Sağ və sol limitlər fərqli olduğundan $x \to 2$ olduqda funksiyanın limiti yoxdur.

D.11. 1) Aralıq qiymətlər haqqında teoremi tətbiq etməklə göstərin ki, funksiya verilən aralığın müəyyən nöqtəsində verilmiş qiyməti alır.

a) $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0; 5]$, $f(c) = 11$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0; 3]$, $f(c) = 0$

Həlli: a) $f(x) = x^2 + x - 1$ funksiyası bütün ədəd oxunda, o cümlədən $[0; 5]$ parçasında da kəsilməzdir və $[0; 5]$ parçasının uc nöqtələrində əks işarəli qiymətlər alır: $f(0) = -1 < 0$,

$$f(5) = 25 + 5 - 1 = 29 > 0.$$

Koşi teoremindən çıxan nəticəyə görə elə $c \in (0;5)$ var ki, $f(c) = 11$ olar.

İşçi vərəq N 2

Adı_________ Soyadı________________ Tarix

1) Funksiyaların verilən nöqtədə kəsilməz olub-olmadığını müəyyən edin.

$f(x) = 2x + 5$, $x = 1$

$f(x) = 3x + 4$, $x = 1$

$f(x) = x^2 - 3x + 7$, $x = 4$

$f(x) = x^2 - 5x + 7$, $x = 4$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$, $x = 3$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 6}{x - 5}$, $x = 6$

$f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 5}$, $x = 5$

$f(x) = \dfrac{x + 7}{x - 7}$, $x = 7$

$f(x) = \dfrac{x - 5}{x + 5}$, $x = 5$

$f(x) = \dfrac{x - 7}{x + 7}$, $x = 7$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 - 5x}$, $x = 0$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x^2 + 6x}$, $x = 0$

2) Funksiyaların kəsilməzliyini araşdırın.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6}, & x \neq 6 \\ 13, & x = 6 \end{cases}$$

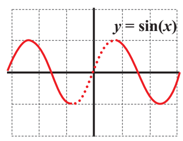
$$f(x) = \begin{cases} x - 5, & x \leq 0 \\ x^2 + x - 5, & x > 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \leq 0 \\ x^2 + x - 4, & x > 0 \end{cases}$$

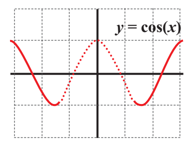
Dərs 42. Triqonometrik funksiyaların daxil olduğu xüsusi limitlər. 1 saat.
Dərslik səh. 86-87
Məzmun standartı.
1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır.

Şagird bacarıqları:
- triqonometrik funksiyaların limitini hesablayır;
- triqonometrik funksiyaların daxil olduğu görkəmli limitləri tanıyır və tətbiq edir.

Triqonometrik funksiyanın limitinin onun qrafiki üzərində izah edilməsi tövsiyə edilir. Limitin qiyməti qrafik üzərində daha əyani görünür.
Məsələn, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0,$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$





Əslində $y = \sin x$ və $y = \cos x$ funksiyaları kəsilməz olduqlarından onların verilən nöqtədəki limitinin qiyməti funksiyanın qiymətinə bərabər olur: $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a,$ $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$
Triqonometrik funksiyanın limitini hesablamaya aid aşağıdakı kimi nümunələri lövhədə müraciət olunan şagirdin iştirakı ilə yerinə yetirmək olar.

a. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(0) = 0$

b. $\lim\limits_{x\to \pi} (x \cos x) = (\lim\limits_{x\to \pi} x)(\lim\limits_{x\to \pi} \cos x) = \pi \cos(\pi) = -\pi$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x = \lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^2 = 0^2 = 0$

Görkəmli limitlərin izahı, isbatı, tətbiqi ümumsinif fəaliyyəti olaraq yerinə yetirilir.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

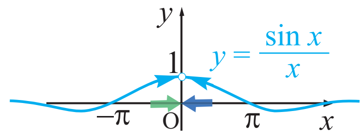
Bu limitlərin tətbiqi ilə hesablama nümunələr nəzərdən keçirilir. Məsələn, ilk olaraq aşağıdakı kimi nümunəyə baxmaq olar.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$ limitinin birbaşa $x = 0$ qiymətinin yerinə yazılması 0/0 kimi qeyri müəyyənlik yaratdığı şagirdlərin diqqətinə çatdırılır. Ona görə də limitin digər xassələrinin tətbiqini üzə çıxaran və ifadənin qiymətini dəyişməyən əlavə riyazi "müdaxilələrə" ehtiyac vardır. Limitin tapılmasını aşağıdakı kimi ekvivalent yazılışlarla yerinə yetirək:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 4 \cdot 1 = 4$$

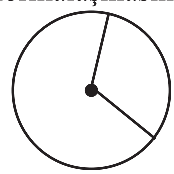
görkəmli limit

Birinci görkəmli limitin isbatı həndəsi olaraq da verilə bilər.



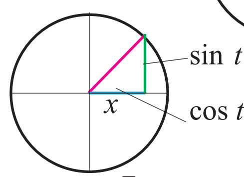
1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Bunu daha istedadlı şagirdlər müstəqil iş kimi yerinə yetirə bilərlər. Əvvəlcə funksiyanın qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafiki üzərində limiti təxmin etməyə çalışırlar. Qrafikdən göründüyü kimi x-in həm soldan, həm də sağdan sıfıra yaxınlaşması ilə y-in qiyməti 1-ə yaxınlaşır. Funksiyanın qiymətlər cədvəlini tərtib etməklə də bu faktın yoxlanılması tövsiyə edilir. Riyazi hesablamalar yorucu ola bilər, lakin alternativ üsullarla eyni riyazi təklifin isbatı şagirdlərin riyazi axtarış həvəslərinin və səbrlərinin, həmçinin müxtəlif yanaşmaları əlaqələndirmə bacarıqlarının formalaşmasına imkan verir.

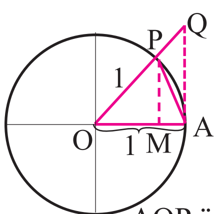


Sektorun sahəsi

Mərkəzi bucağı x *radian*, radiusu r olan dairə sektorunun sahəsi $S = \frac{r^2 x}{2}$ kimidir.



Tutaq ki, O çevrəsi vahid radiuslu çevrədir. Burada $y = \sin t$, $x = \cos t$



$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ limitinə baxaq, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

AOP üçbucağının sahəsi S_1, AOP dairə sektorunun sahəsi S_2, AOQ üçbucağının sahəsi S_3 olsun.

Aydındır ki, $S_1 < S_2 < S_3$

AOP üçbucağının sahəsi $S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot MP = \frac{1}{2} \sin x$

AOP sektorunun sahəsi $S_2 = \frac{1}{2} \cdot x$

AOQ üçbucağının sahəsi $S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot AQ = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$

$S_1 < S_2 < S_3$ olduğundan, $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$

$\sin x < x < \operatorname{tg} x$ bərabərsizliyini $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ kimi və ya onunla

eynigüclü olan $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ bərabərsizlik kimi yaza bilərik.

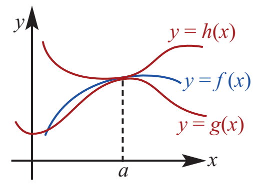
Burada $x \to 0^+$ olmaqla limitə keçsək, $\lim\limits_{x \to 0+} \cos x = 1$ və sabitin də limiti özünə bərabər olduğundan, bərabərsizliyin hər iki tərəfi 1 olur. Deməli, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ və $f(x) = \cos x$ funksiyaları cüt funksiya olduqlarından, bu bərabərlik $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ intervalında da doğrudur.

İsbatın $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ bərabərsizliyinin yazılışından sonrakı hissəsini limit haqqında **"sıxılma" teoremi** ilə göstərmək daha doğrudur.

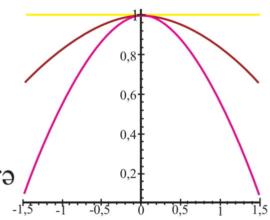
Teorem. f, g, h funksiyaları $g(x) \le f(x) \le h(x)$ şərtini ödəyirsə, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ və $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ olarsa,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$



Göründüyü kimi, $f(x)$ funksiyası $y = h(x)$ və $y = g(x)$ funksiyaları arasında sıxılmışdır.

$g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyasının $h(x) = 1$ və $g(x) = \cos x$ kimi iki funksiyanın arasında sıxıldığını nəzərə alsaq və $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ və $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ olduğu üçün, sıxılma haqqında teoremə görə $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olar.



? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.3. c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$ limitini hesablayın.

Şagirdlər birbaşa yerinə yazdıqda 0/0 kimi qeyri müəyyənliyin alındığını aşkar edirlər. Deməli, məxrəcdəki çoxhədli vuruqlarına ayrılmalıdır.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x+3} \cdot \frac{\sin(x-1)}{x-1}\right] =$$

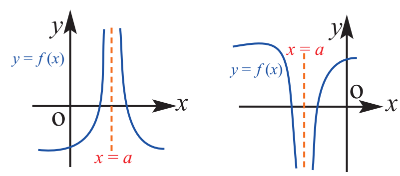
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+3} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Qiymətləndirmə. Şagirdlərin triqonometrik funksiyanın xassələrini bilmə kimi ön bilikləri ilə yanaşı, limitin xassələrini, tətbiqi bacarıqları, teoremlərin izahını və ya isbatını başadüşmə səviyyələri müşahidə altında saxlanılır.

Dərs 43-44. Sonsuz limitlər və sonsuzluqda limit. Şaquli və üfüqi asimptotlar
2 saat. Dərslik səh. 88-92
Məzmun standartı.
1.2.2. Funksiyanın limiti anlayışını, limitin xassələrini və görkəmli limitləri bilir, onların köməyi ilə funksiyaların limitlərini hesablayır.

Şagird bacarıqları:
Sonsuz limitlər $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ və ya $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
■ x-in qiymətinin a ədədinə yaxınlaşması ilə funksiyanın qiymətinin sonsuz azalan və ya artan olduğunu qrafik olaraq göstərir, riyazi yazılışlarla ifadə edir;
■ sonsuz limitlə funksiyanın şaquli asimptotu anlayışını əlaqələndirir və şaquli asimtotu limitə görə müəyyən edir;
Sonsuzluqda limit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ və ya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$
■ sonsuzluqda limiti ifadə edən riyazi yazılışları başa düşdüyünü funksiyanın qrafiki üzərində izahlarla nümayiş etdirir;
■ sonsuzluqda limitlə funksiyanın üfüqi asimptotu anlayışını əlaqələndirir və üfüqi asimtotu limitə görə müəyyən edir;
■ rasional funksiyanın limiti haqqında teoremi tətbiq edir.

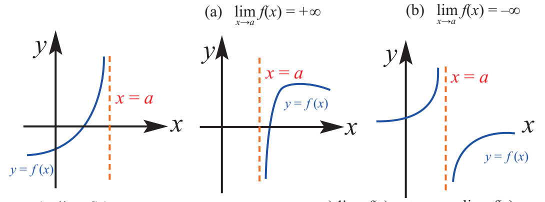
Əvvəlcə sonsuz limit anlayışı izah edilir. Bu anlayışı qrafiklər üzərində təqdim etmək daha anlaşıqlıdır. Məsələn, aşağıdakı qarfiklər x-in hər hansı a ədədinə yaxınlaşması ilə funksiyanın qiymətinin və ya mütləq qiymətinin sonsuz artdığını göstərir. Bu halda limit sonsuzluqla ifadə edilir. Sonsuzluğun hər hansı ədədi qiyməti ifadə etmədiyini, özünün, yaxud mütləq qiymətinin istənilən ədəddən də böyük olmasını başa düşürlər.



(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

L≠ 0; olduqda L/±∞→0; ±∞/L→∞ ; L≠ 0 olduqda L/0→∞. kimi yazılışların qəbul edildiyi şagirdlərin diqqətinə çatdırılır.

Qrafiklərdə x-in sağdan və ya soldan a ədədinə yaxınlaşması ilə funksiyanın qeyri-məhdud olaraq dəyişdiyi görünür.



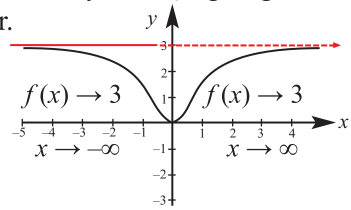
a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ və $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

Ümumiyyətlə, limitin sonsuzluqla ifadə edilməsi aşağıdakı 6 halı əhatə edir. Bunlardan hər hansı birinin varlığı funksiyanın şaquli asimptotunun olması deməkdir.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Asimptotu müəyyən etməyin cəbri üsulunu şagirdlər əvvəlki dərslərdən də bilirlər.

$y = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$ funksiyasının qrafikinə görə arqumentin mütləq qiymətcə sonsuz artması ilə də funksiyanın qiymətinin 3-ə yaxınlaşdığını görürük. Lakin funksiya bu qiymətə bərabər olmur.



$y = \dfrac{3x^2}{x^2+2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3.$

Yuxarıdakı yazılışlar onu göstərir ki, $x \to \infty$ şərtində funksiyanın limiti var və 3-ə bərabərdir.

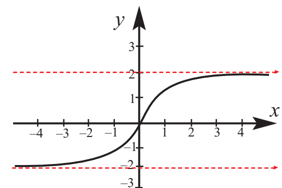
Sonsuzluqda limitin varlığı ümumi şəkildə aşağıdakı kimi yazılır.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$ Yəni, bu yazılış göstərir ki, $x \to +\infty$; $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ olduqda limit var və L-ə bərabərdir.

Rasional funksiyanın üfüqi asimptotu varsa, yeganədir.

Rasional olmayan $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$ funksiyası üçün



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ və $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ olduğundan, $y = 2$ və $y = -2$ üfüqi asimptotları var.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ və ya $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$ limitini tapmaqla funksiyanın üfüqi asimptotunu müəyyən etmək olar.

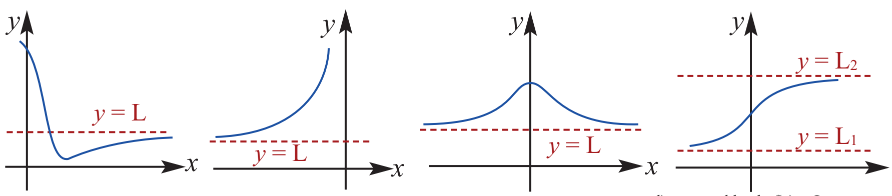
Limitlərin mövcud olub-olmamasına görə aşağıdakı hallar ola bilər:

1. Limitlərdən biri mövcuddur.
2. Hər iki limit mövcuddur və eyni ədədə bərabərdir.
3. Hər iki limit mövcuddur, lakin qiymətləri müxtəlifdir.
4. Bu limitlərdən heç biri mövcud deyil.

Əgər bu limitlərdən hər hansı biri: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$ və ya $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$ mövcuddursa, onda L ədədi funksiyanın üfüqi asimptotudur.

Situasiyaları qrafik nümunələr üzərində göstərək.

$f(x) \to \mathrm{L}$, əgər $x \to -\infty$ və $f(x) \to \mathrm{L}$, əgər $x \to \infty$



a) $x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to \mathrm{L}$ b) $x \to -\infty$ olduqda $f(x) \to \mathrm{L}$ c) $x \to -\infty$ olduqda $f(x) \to \mathrm{L}$, $x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to \mathrm{L}$ d) $x \to -\infty$ olduqda $f(x) \to \mathrm{L_1}$, $x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to \mathrm{L_2}$

Funksiya $1/x$ şəklində olduqda o qeyri-məhdud olaraq $-\infty$ və $+\infty$ aralığında dəyişir. Ümumi şəkildə $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$ və $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-a)^n} = 0$ $(n \in \mathrm{N})$ kimi yazmaq olar.

Rasional funksiyanın limiti haqqında teoremə görə funksiyanın sonsuzluqda necə dəyişdiyi haqqında onun modelini müəyyən etməklə fikir yürütmək olar. Sonsuz böyük qiymətlərdə dəyişmə isə asimptotlarla müəyyənləşdirir.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_0$ çoxhədlisində x-in qiyməti modulca sonsuz artdıqda onun qrafiki $y = a_n x^n$ funksiyasının qrafikinə yaxınlaşır:

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n = \lim_{x\to\infty} [a_n x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_0], \text{ yəni } \lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1$$

Rasional funksiyanın sonsuzluqda dəyişmə modelini tapmaq üçün surət və məxrəcdəki çoxhədli funksiyanın modelini tapıb, sadələşdirməklə funksiyanın sonsuzluqda dəyişmə modelini tapmaq olar.

Aşağıdakı nümunələrə baxaq:

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^4 - x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 7} \qquad g(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 - x + 1}{4x^3 + x^2 - 5x + 4}$$

$f(x)$ funksiyası üçün dəyişmə modeli $\frac{x^5}{3x^2} = \frac{x^3}{3}$ kimi olacaq. Yəni x-in mütləq qiymətinin sonsuz böyük qiymətlərində verilən $f(x)$ funksiyası, $y = x^3/3$ funksiyası kimi dəyişəcək.

$g(x)$ funksiyası üçün dəyişmə modeli $\frac{3x^3}{4x^3} = \frac{3}{4}$ kimi olacaq. Yəni, x-in sonsuz böyük qiymətlərində verilən $g(x)$ funksiyası $\frac{3}{4}$-ə yaxınlaşacaq. $y = \frac{3}{4}$ düz xətti həm də $g(x)$ funksiyasının üfüqi asimptotudur, halbuki yuxarıda verilən $f(x)$ funksiyasının üfüqi asimptotu yoxdur.

Sonsuz limit və sonsuzluqda limit anlayışları rasional funksiyanın üfüqi, şaquli asimptot anlayışları ilə sıx bağlıdır. Asimptotların limitin köməyilə müəyyən edilməsi (və ya cəbri yolla) funksiyanın qrafikinin də çəkilməsini vacib edir. Kifayət qədər abstrakt olan bu anlayışların qavranması şagirdlər üçün çətinlik yarada bilər. Bu çətinliyi qrafik təsvir aradan qaldıra və ya bir qədər azalda bilər.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.5. $x \to +\infty$ və $x \to -\infty$ olduqda $f(x)$ funksiyasının limitini hesablayın.

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & x > 1 \\ \dfrac{4x}{2x-5} & x \le 1 \end{cases}$$

Həlli: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{2x-5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{2x} = 2.$

Qiymətləndirmə. x hər hansı ədədə yaxınlaşdıqda limit sonsuzluqla ifadəetmə situasiyalarını tanıma, şaquli asimptotları müəyyənetmə, həmçinin x-in sonsuzluğa yaxınlaşması ilə funksiyanın qiymətlərinin necə dəyişdiyini, üfüqi asimtotu müəyyənetmə bacarıqlarına görə şagirdi müşahidə yolu ilə qiymətləndirmə aparılır. Rasional funksiyanın limiti teoreminin tətbiqi və nəticələrini təqdimetmə bacarıqlarına xüsusi diqqət yetirilir.

Dərs 45-47. Ədədi ardıcıllığın limiti. Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 3 saat. Dərslik səh.93-99

Məzmun standartı.

1.2.1. Ədədi ardıcıllığın və onun limitinin tərifini bilir, yığılan ardıcıllıqların xassələrini tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:

- limitin tərifini ədədi ardıcıllıqlara tətbiq edir;
- ədədi ardıcıllıqların xassələrini tətbiq edir.

Ədədi ardıcıllığın limitinə sonsuzluqda funksiyanın limitinin xüsusi halı kimi baxmaq olar.Tutaq ki, aşağıdakı kimi sonsuz cəm ifadəsi verilmişdir.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Göründüyü kimi, cəmin hər əlavə olunan ədədi özündən əvvəlkinə görə kiçikdir. Getdikcə əlavə olunan ədəd o qədər kiçilir ki, cəmin müəyyən qiymətindən sonra onun təsiri çox cüzi olur. Cəmin hədlərini aşağıdakı kimi ifadə edək:

$$S_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4},$$

$$S_3=\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

$$S_4=\frac{15}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},$$

....

Bu cəmlər ardıcıllığının limiti varmı? Təbii ki, ardıcıllığı artıq

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

şəkilində yazmaq heç bir çətinlik yaratmır.

Limitin xassələrini tətbiq etməklə S_n ardıcıllığının limitini tapa bilərik:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1-0=1.$$

Dövri onluq kəsrlər də sonlu limiti olan ədədi ardıcıllıqlara bir nümunədir:

$$0{,}3333(3)=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots=\frac{1}{3}$$ və ya

$$3{,}1459\ldots=3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots=\pi$$

Biz artıq $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ olduğunu bilirik, burada x-i n ilə əvəz etsək, $\lim\limits_{n \to \infty} (1/n) = 0$ alarıq ki, bu da

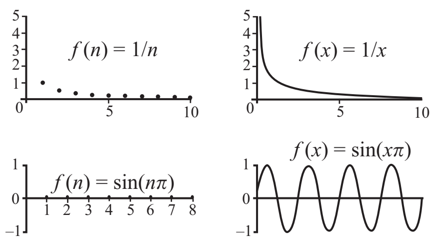
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \ \frac{1}{n}, \ldots\ldots.$$

ardıcıllığının sıfıra yaxınlaşması deməkdir:

Ardıcıllığın limitinə daha əyani nümunə $f(n) = \sin \pi n$ ola bilər.

n natural ədəd olduqda, $\sin 1\pi$, $\sin 2\pi$, $\sin 3\pi$, . . . , $\sin \pi n$,... ardıcıllığı üçün $\lim\limits_{n \to \infty} \sin \pi n = 0$.

Ardıcıllıqların və uyğun funksiyaların qrafiklərini müqayisəli şəkildə təqdim etmək olar.



Əlavə informasiya olaraq şagirdlərə ardıcıllıqların limitinin olub-olmamasına görə yığılan və ya dağılan kimi iki qrupa ayrıldığını söyləmək olar. Sonlu limiti olan ardıcıllıq yığılan ardıcıllıq adlanır, əks halda isə ardıcıllıq dağılandır. Məsələn, $1/n$ ardıcıllığı yığılandır, $(-1)^n$; $\sin\dfrac{\pi n}{2}$; n^2 ardıcıllıqları isə dağılandır.

(1) $2; 2; 2, \ldots,$	yığılır limiti 2
(2) $2\frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}; 2\frac{1}{4}; \ldots,$	yığılır limiti 2
(3) $1; 2;1; 2, \ldots,$	dağılır
(4) $2; 4; 6; 8; \ldots,$	dağılır

2-ci saatda çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlıların perimetrləri ardıcıllığı nümunəsi ilə monoton və məhdud ardıcıllıqların limitinin varlığı izah edilir. Həm sonsuzluqda limitin xüsusi halı, həm də monoton və məhdud ardıcıllıqların limitinin varlığının parlaq nümunəsi olan

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}.$$

ikinci görkəmli limiti və onunla bağlı tapşırıqlar həlli öyrənilir.

3-cü saatda ümumiləşdirici tapşırıqlar həlli yerinə yetirilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D. 6 (səh 98.) Limitləri hesablayın.

Həlli:

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^2$

f) $\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{t+1}{2t+1}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to0}\left(1-\frac{t}{2t+1}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to0}\left(\left(1-\frac{t}{2t+1}\right)^{\frac{2t+1}{-t}}\right)^{\frac{-1}{2t+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

D. 1 (səh 99.)

Limitləri hesablayın (əgər varsa)

11. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)\cdot(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x-2}+1)} = \lim\limits_{x\to3}\frac{x-2-1}{(x-3)\cdot(\sqrt{x-2}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{1}{\sqrt{3-2}+1} = \frac{1}{2}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x-2|}{x-2} = \frac{|0-2|}{0-2} = -1$

D. 7 (səh 99.)

$f(x) = \frac{x+|x|}{x}$ funksiyasının $x = 0$ nöqtəsində sağ və sol limitlərini tapın.

Həlli: $f(x) = \frac{x+|x|}{x} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 2, & x>0 \end{cases}$

olduğundan, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$ olur. Verilən funksiyanın $x = 0$ nöqtəsində limiti yoxdur.

3-cü bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Limiti cədvələ və ya qarfikə görə müəyyən edir.	
2.	Limitin varlığını müəyyən edir.	
3.	Limtin xassələrini və limiti hesablamanın müxtəlif üsullarını tətbiq edir.	
4.	Funksiyanın nöqtədə kəsilməz olduğunu müəyyən edir.	
5.	Funksiyanın parçada kəsilməz olduğunu müəyyən edir.	
6.	Triqonometrik funksiyaların daxil olduğu görkəmli limitləri tanıyır və tətbiq edir.	
7.	Sonsuzluqda limitin tapılamsına aid tapşırıqları yerinə yetirir.	
8.	Rasional funksiyanın şaquli və üfüqi asimptotlarını (varsa) tapır.	
9.	Rasional funksiyanın limiti haqqında teoremi tətbiq edir.	
10	Ədədi ardıcıllığın limitinin tapılmasına aid tapşırıqları yerinə yetirir.	

Dərs 48. 3-cü bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) Funksiyanın qrafikini qurun, $x \to 2$ olduqda limitinin olub-olmadığını yoxlayın.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$ b) $g(x) = |x - 2|$

2) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -3$ olarsa, tələb olunanları tapın.

a) $\lim\limits_{x \to 3} (2 \cdot f(x) - 3 \cdot g(x))$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) + 2}{1 - g(x)}$

3) Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

4) Funksiyanın kəsilmə nöqtələrini göstərin və bu nöqtələrdə sağ və sol limitlərini tapın (əgər varsa).

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ b) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x}$

5) Funksiyanın üfüqi və şaquli asimptotlarını göstərin.

$f(x) = \dfrac{3 - x^2}{x^2}$

6) $n \to \infty$ olduqda ardıcıllığın limitini tapın.

a) $2; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{8}; \ldots\ldots$

b) 0,52; 0,5252; 0,525252; ...

7) Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x\cos x}$

8) $a_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$ ardıcıllığının $n \to \infty$ olduqda limitini tapın.

9) Verilmiş funksiyalardan hansının [–2; 2] parçasında sıfırı var? Fikirinizi əsaslandırın.

a) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = x^3 + x + 2$

10) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x - 1} = 10$ olduğunu bilərək, limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{20} - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$

4-cü bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
3.1.5. Fırlanmadan alınan fiqurları tanıyır. 3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir. 3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir. 3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir. 3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir. 3.2.6. Kürənin hissələrinin (kürə seqmenti, kürə sektoru) səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır. 4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqaisə edərək, xətani müəyyən edir.	49	Fırlanma fiqurları. Silindr	1	101-103
	50-51	Silindrin səthinin sahəsi	2	104-107
	52-54	Konus. Konusun səthinin sahəsi	3	108-114
	55-57	Silindr və konusun müstəvi kəsikləri. Kəsik konusun səthinin sahəsi	3	115-119
	58-60	Kürə və hissələrinin səthinin sahəsi	3	120-125
	61	Kompleks fiqurların səthinin sahəsi	1	126-127
	62-63	Oxşar fiqurların səthinin sahəsi. Ümumiləşdirici tapşırıqlar	2	128-130
	64	Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları.	1	
		Cəmi	16	

Dərs 49. Fırlanma fiqurları. Silindr. 1 saat Dərslik səh. 101-103

Məzmun standartı.

3.1.5. Fırlanmadan alınan fiqurları tanıyır.

3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

Şagird bacarıqları:

- seçilən ox ətrafında müstəvi hissəsinin fırlanması ilə fəza fiqurlarının alındığını başa düşür və uyğun şəkilləri çəkməklə təqdim edir;
- slindri fırlanma fiquru kimi şəkillə təqdim edir;
- silindri müəyyən edən həndəsi elementləri təqdim edir.

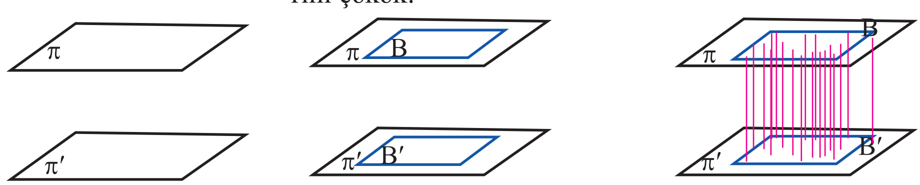
Şagirdlər kompüterdə və qrafik olaraq müxtəlif fırlanma fiqurları çəkirlər. Fırlanma fiqurunun müstəvi fiqurun fırlanması ilə alındığını başa düşürlər. Məsələn, düzbucaqlı üçbucağın katetlərindən biri ətrafında fırlanması ilə konus, düzbucaqlının tərəflərindən biri ətrafında fırlanmasından silindr alındığını, yarımdairənin fırlanmasından kürənin alındığını şəkillər üzərində göstərirlər, həmçinin əyrixətli trapesiyanın fırlanmasından alınan müxtəlif fəza fiqurlarını almağın mümkün olduğu nümayiş etdirilir.

Şagirdlərlə prizmanın ümumi tərifi və onun izahı bir daha addım-addım müzakirə edilir.

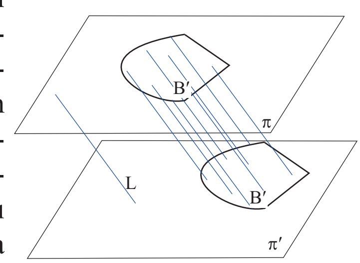
1. π və π' kimi iki paralel müstəvi çəkək

2. Paralel müstəvilər üzərində paralel köçürmə ilə üst-üstə düşən B və B′ çoxbucaqlılarını çəkək.

3. Bu çoxbucaqlıların uyğun nöqtələrini parçalarla birləşdirək.

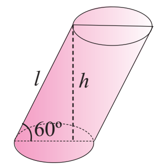


Bu parçaların və paralel müstəvilər üzərindəki çoxbucaqlıların yaratdığı fiqurun prizma olduğunu başa düşürlər. Paralel müstəvilər üzərindəki oturacaqların hansı çoxbucaqlı olmasına görə prizmalar bir-birindən fərqlənir. İndi isə biz prizmaların da daxil olduğu daha ümumiləşmiş fəza fiqurlarını öyrənəcəyik. Həmin fiqurların da oturacaqları paralel müstəvilər üzərindədir. Paralel köçürmə ilə üst-üstə düşən müstəvi fiqurlar və onların bütün uyğun nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçalarının yaratdığı fiqur silindr və ya silindrik fiqur adlanır. Silindrik fiqurların paralel oturacaqları istənilən qapalı fiqur ola bilər, o cümlədən istənilən çoxbucaqlı da ola bilər. Deməli, prizma oturacağı çoxbucaqlı olan silindrdir. Silindrin radiusu, hündürlüyü, doğuranı göstərilir.



? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

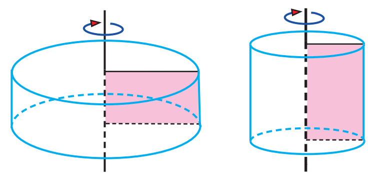
D1 Mail silindrin doğuranı 12 sm olub, oturacaq müstəvisi ilə 60°-li bucaq əmələ gətirir. Silindrin hündürlüyünü tapın.



Həlli: Mail silindrdə doğuran (l), doğuranın meyl bucağı (α) və hündürlük (h) arasındakı münasibət $h = l\ sin\alpha$ kimidir.
Baxılan halda

$h = 12 \sin 60^{\circ} = 12\frac{\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{3}$ (sm) olur.

D2 Tərəfləri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlının tərəflərindən biri ətrafında fırlanmasından alınan silindrin hündürlüyünü və oturacağının diametrini tapın (iki hala baxın).



Həlli: Burada iki hal mümkündür,
I hal: Düzbucaqlı kiçik tərəfi ətrafında fırlandıqda,
$h_1=3$ sm; $d_1=8$ sm olur.
II hal: Düzbucaqlı böyük tərəfi ətrafında fırlandıqda,
$h_2=4$ sm; $d_2=6$ sm olur.

Dərs 50-51. Silindrin səthinin sahəsi 2 saat. Dərslik səh. 104-107

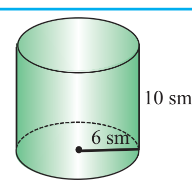
Məzmun standartı.
3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir

Şagird bacarıqları:
- slindrin yan səthinin və tam səthinin hesablanma düsturlarını şəkillə, sözlə və nümunə ilə təqdim edir;
- slindrin yan səthinin və tam səthinin hesablanmasına aid məsələlər həll edir.

Şagirdlərin düsturu aşağıdakı kimi cədvəllə izah etmələri təşviq edilir, tərif və düsturların geniş izahının dəftərlərində yazmaları tövsiyə edilir.

Silindrin tam səthi oturacaqları sahələrinin cəmi ilə yan səthinin sahəsi cəminə bərabərdir.

$$S_{tam} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

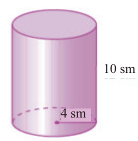


Nümunə: otracağı 6 sm, hündürlüyü 10 sm olan silindrin tam səthi: $S = 2\pi \cdot 6\,(10 + 6) \approx 603$ sm^2

Şagirdlər silindrin yan səthini və tam səthini real situasiyalar üzərində göstərirlər. Real həyati situasiyada yan səthin və tam səthin sahəsini hesablamağın tələb edildiyi situasiyalara nümunələr göstərirlər: qutuların istehsalında sərf olunan materialı, boyama işlərində sərf olunan boyanı, böyük çənləri quraşdırma işlərində sərf olunan metalı hesablamaq üçün və s. Həmçinin maşın və mexanizmlərin silindrik hissələrini quraşdırarkən işin məhsuldarlığını hesablamaq üçün, bu hissənin səthinin sahəsini hesablamaq lazım gəlir. Məsələn, asfalt bərkidən buldozerlərin barabanlarının bir tam dövründə nə qədər sahəni əhatə etdiyini bilməklə işin sürətini hesablamaq mümkün olur. Düzbucaqlı kağız vərəqi yuvarlayaraq bükməklə silindr quraşdırma tapşırıqları yerinə yetirilir. Silindrin yan səthinin açılışının düzbucaqlı olduğunu başa düşürlər. Silindrik boya roliklərinin düzbucaqlı şəklində iz buraxdığını nümunə göstərirlər.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

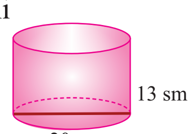
D1 Verilən ölçülərinə görə silindrlərin tam səthinin sahəsini tapın.



Həlli: a) $r = 4$ sm, $h = 10$ sm

$S_{tam}=2\pi r^2+2\pi rh = 2\pi r(r+h) = 2\pi\cdot 4\cdot(4+10) =112\pi$ (sm^2)

D2 Ağzıaçıq silindr formalı qabın həm xarici, həm daxili səthi boyanmalıdır. Boyanmalı sahəni tapın.



Həlli: Boyanmalı sahə ağzıaçıq silindrin həm xarici, həm də daxili səthinin cəminə bərabərdir.

a) $d = 20$ sm, $h = 13$ sm

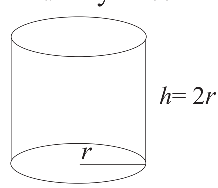
Oturacağın sahəsi $S_{ot} = \pi r^2 = 100\pi$ (sm^2)

Yan səthi $S_{yan} = 2\pi rh = 2\cdot\pi\cdot 10\cdot 13 = 260\pi$ (sm^2)

Rənglənməli sahə

$S=2\cdot(100\pi+260\pi) = 720\pi$ (sm^2)

D7 Hündürlüyü oturacağının diametrinə bərabər olan silindrin yan səthinin sahəsinin tam səthinə olan nisbətini tapın.



Həlli: $S_{yan} = 2\pi rh$, $S_{tam} = 2\pi r(r+h)$ düsturlarında $h= 2r$ olduğunu nəzərə alsaq, axtarılan nisbət

$\frac{S_{yan}}{S_{tam}} = \frac{2\pi rh}{2\pi r(r+h)} = \frac{h}{(r+h)} = \frac{2r}{(r+2r)} = \frac{2}{3}$ kimi olar.

D12 Asfaltbərkidən maşının asfaltı bərkidib düzləyən iki silindrşəkilli hissəsi var. Böyük silindrin hündürlüyü 1,25 m, diametri isə 1,5 m-dir. Bu hissə bir tam dövrdə nə qədər yer səthini düzləyər?

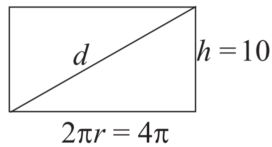
Həlli: Bir tam dövrdə silindirin yan səthi qədər yer düzlənər

$S_{yan} = 2\pi rh = \pi dh = \pi\cdot 1{,}5\cdot 1{,}25 \approx 5{,}89$ (m^2) sahə düzlənər.

D13 Silindrşəkilli hədiyyə qutusunun örtüyünü açma xətti qırıq xətlə nişanlanmışdır. Rəngli ip açma xəttinin bir ucundan başlayaraq silindrə sarınmış (bir qat) və onun digər ucuna bərkidilmişdir. Silindrin oturacağının diametri 4 sm, hündürlüyü 10 sm olarsa, ipin uzunluğunu tapın.

Həlli: İpin uzunluğu silindrin yan səthinin açılışındakı düzbucaqlının diaqonalına bərabər olar.

$$d = \sqrt{10^2 + 16\pi^2} = \sqrt{100 + 157{,}9} = \sqrt{257{,}91} \approx 16 \text{ (sm)}$$

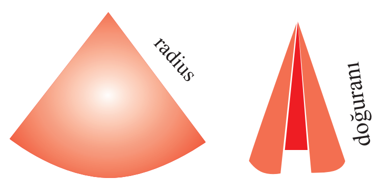


Dərs 52-54. Konus. Konusun səthinin sahəsi. 3 saat.
Dərslik səh. 108-114

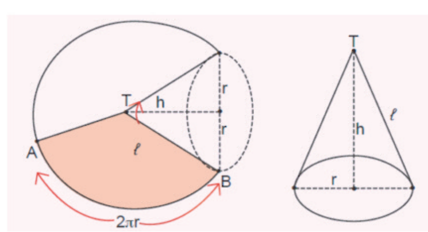
Məzmun standartı.
3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

Şagird bacarıqları:
- müxtəlifölçülü konusu quraşdırır;
- konusun radiusunun, doğuranın hansı asılılıqla dəyişdiyini təqdim edir;
- konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablayır.

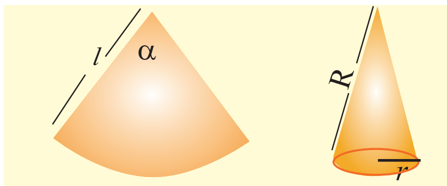
Şagirdlər konusun düzbucaqlı üçbucağın katetlərindən biri ətrafında fırlanmasından alınan fiqur olduğunu başa düşürlər və bunu çəkib göstərirlər.



Həmçinin dairə sektoru şəklində kəsilmiş kağızları yuvarlayaraq konus düzəldirlər. Bu işi bütün sinif fəaliyyəti olaraq yerinə yetirirlər. Bu tapşırıqların manipulyativ olaraq yerinə yetirilməsi çox əhəmiyyətlidir. Şagirdlərin müxtəlif ölçülü dairələr çəkmələri, bu dairələrdən müxtəlif uzunluqlu qövslərə uyğun dairə sektorunu kəsib çıxarmaları, daha sonra riyazi mühakimələr yürütmələri onların həm riyazi təfəkkürlərini, həm dizayn qabiliyyətlərinin formalaşmasına xidmət edir.



Şagird dairə sektorunun qövsünün uzunluğunun konusun oturacağındakı dairənin çevrə uzunluğu, dairənin radiusunun isə konusun doğuranı olduğunu başa düşür. Konusların müxtəlif görünüşlərinin məhz bu dairələrin radiusları və kəsilib çıxarılan dairə hissəsinin qövsünün uzunluğundan asılı olduğunu nümunələrlə göstərirlər. Daha sonra isə riyazi yazılışlarla ifadə edirlər.



$$\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R,$$

$$r = \frac{\alpha}{360} R$$

$$\frac{x}{360} \cdot 2\pi R = 2\pi l$$

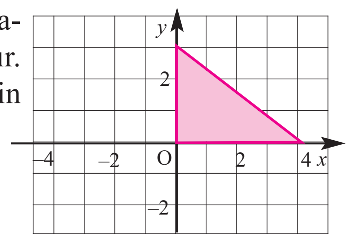
Dərslikdə bu bacarıqları əhtə edən kiçik layihə işi və praktik məşğələ verilmişdir. Nəzərdə tutulan fəaliyyətləri qavrama səviyyəsindən asılı olmayaraq hər bir şagird yerinə yetirmək iqtidarındadır. Lakin bu işlərin qruplarla yerinə yetirilməsi şagirdin sosial aktivliyinin artırılması baxımından əhəmiyyətlidir.

D 11. Şəkildəki üçbucaq aşağıda verilən oxlar ətrafında fırlanır və hər bir halda fəza fiqguru alınır. Alınan fəza fiqurunu təsvir edin, tam səthinin sahəsini π vahidlə tapın:

a) y oxu ətrafında; b) x oxu ətrafında;

c) $x = 4$ düz xətti ətrafında;

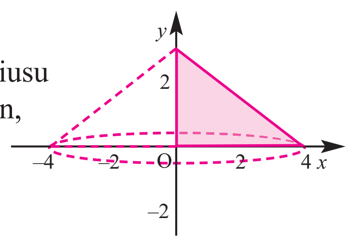
d) $y = 3$ düz xətti ətrafında.



Həlli:

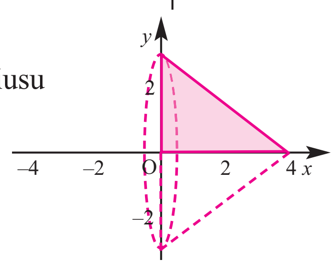
a) y oxu ətrafında fırlanmadan alınan konusun radiusu $r = 4$, hündürlüyü $h = 3$, doğuranı l=5 olduğundan,

$S_{tam} = \pi r^2 + \pi r l = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot 5 = 36\pi$

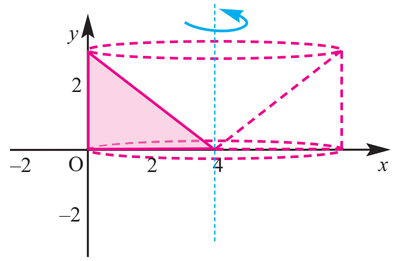


b) x oxu ətrafında fırlanmadan alınan konusun radiusu $r = 3$, hündürlüyü $h = 4$, doğuranı l=5-dir,

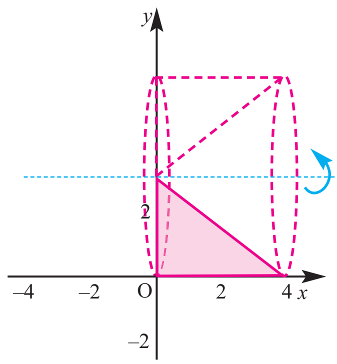
$S_{tam} = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 24\pi$



c) $x = 4$ düz xətti ətrafında fırlanmadan alınan cismin (içərisindən konus oyulmuş silindrin) səthinin sahəsi dairənin sahəsindən, silindrin və konusun yan səthlərindən ibarətdir.
$S_{tam} = \pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 3 + \pi \cdot 4 \cdot 5 = 60\pi$



d) $y = 3$ düz xətti ətrafında fırlanmadan alınan cismin tam səthi dairənin sahəsindən, silindrin və konusun yan səthlərindən ibarətdir.
$S_{tam} = \pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 48\pi$



D 12. Konusun 10 sm^2 olan yan səthi açılanda bucağı 36° olan sektor alınır. Konusun tam səthini tapın.

Həlli:

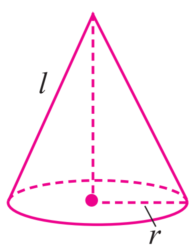
$2\pi r = \frac{36}{360} \cdot 2\pi l$ olduğundan

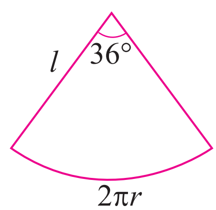
$r = \frac{1}{10} \cdot l$ olar.

Şərtə görə $S_{yan} = \pi r l = 10$

Buradan $\pi \cdot \frac{1}{10} \cdot l \cdot l = 10$

$l = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ alarıq. Onda $r = \frac{1}{\pi}$





Konusun tam səthinin sahəsi

$S_{tam} = S_{yan} + S_{ot} = 10 + \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 11 sm^2$ olur.

Dərs 55-57. Silindrin və konusun müstəvi kəsikləri. Kəsik konusun səthinin sahəsi. Dərslik səh. 115-119. 3 saat

Məzmun standartları.

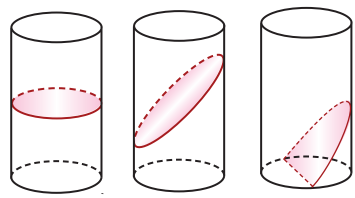
3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

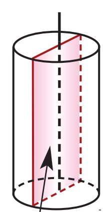
Şagird bacarıqları:

- fiqurun müxtəlif formalı müstəvi kəsiklərini şəkillə təqdim edir;
- müstəvi kəsiklərinə aid məsələlər həll edir;
- Kəsik konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablayır.

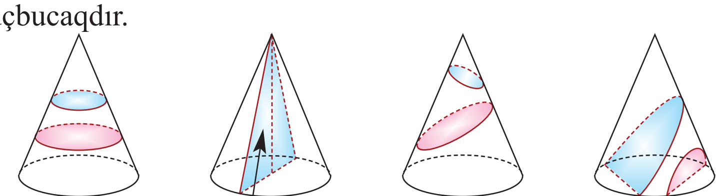
Dərslikdə verilmiş tapşırıqlar yerinə yetirilir



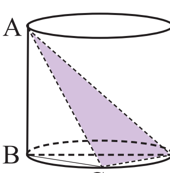
Silindrin müstəvi kəsikləri. Silindrin **oturacağına paralel müstəvi ilə kəsiyi** dairədir, oturacağına paralel olmayan kəsiyi isə ellips ola bilər.
Silindrin oxundan keçən müstəvi ilə kəsiyinə ox kəsiyi deyilir. Silindrin ox kəsiyi tərəfləri h və $2r$ olan düzbucaqlıdır:



Konusun müstəvi kəsikləri. Konusun oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi kəsiyi dairə, fırlanma oxundan keçən kəsik üçbucaqdır.



D.5. Silindrin AB hündürlüyü, BD diametridir. AB = 4 sm, BD = 6 sm, CD = 4 sm olduğuna görə ACD üçbucağının sahəsini tapın.



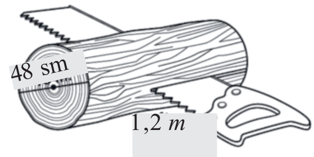
Həlli: B nöqtəsi ilə C nöqtəsini birləşdirək, ΔBCD-də $\angle C = 90°$ olduğundan (diametrə söykənən daxilə çəkilmiş bucaq), $BC \perp CD$. BC kateti AC-nin proyeksiyası olduğundan üç perpendikulyar teoreminə görə $AC \perp CD$.

Δ BCD-dən $BC^2 = BD^2 - CD^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

Δ BCD-dən $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 20 = 36$ və $AC = 6$

Beləliklə, $S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ sm^2

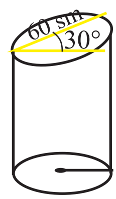
D.7. Silindrik şəkildə olan odun parçası şəkildə verilən qaydada yarıya bölünmüşdür. Bir hissənin tam səthinin sahəsini hesablayın.



Həlli: $S_{tam} = \dfrac{1}{2} S_{yan} + 2\dfrac{S_{ot}}{2} + 2rh = \dfrac{1}{2} 2\pi rh + \pi r^2 + 2rh =$

$= \pi \cdot 0{,}24 \cdot 1{,}2 + \pi \cdot 0{,}24^2 + 0{,}48 \cdot 1{,}2 = 0{,}3456\pi + 0{,}576 = 1{,}66\ (m^2)$

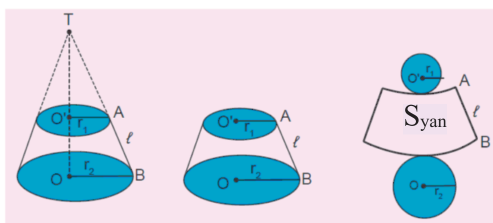
D.8. Qurumuş ağacdan odundoğrayan mişarla şəkildə göstərilən ölçülərdə kötük kəsilmişdir. Kötüyün oturacağının sahəsini tapın.



Həlli: Oturacağın radiusu r olarsa,
$2r = 60\cos 30°$, $r = 15\sqrt{3}$ olar. Onda

$S_{ot} = \pi \cdot r^2 = 675\pi\ sm^2$

2-3-cü saatda kəsik konus anlayışı daxil edilir, kəsik konusun yan səthi və tam səthinin sahəsinin düsturlarının alınması izah olunur.



Kəsik konusun yan səthinin sahəsinin böyük konusun yan səthinin sahəsi ilə ondan oturacağına paralel müstəvi ilə kəsilib ayrılan kiçik konusun yan səthinin sahəsi fərqinə bərabər olduğu ümumsinif müzakirəsi ilə əsaslandırılır və

$$S_{yan} = \pi(r_1 l + r_2 l) = \pi l(r_1 + r_2).$$

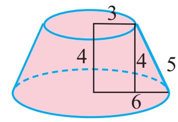
düsturu çıxarılır.

Kəsik konusun tam səthinin sahəsi isə yan səthi ilə alt və üst oturacaqlarının sahələri cəminə bərabərdir:

$$S_{tam} = \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D1 (səh.118) b) Kəsik konusun hündürlüyü 4 sm, oturacaqlarının radiusu uyğun olaraq 3 sm və 6 sm-dir. Konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.



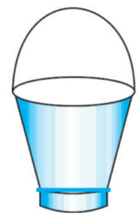
Həlli:

$l = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = \sqrt{(6-3)^2 + 4^2} = 5$ sm

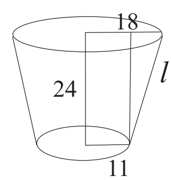
$S_{yan} = 2\pi l(r_1+r_2) = \pi \cdot 5(3+6) = 45\pi$ (sm^2)

$S_{tam} = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi l(r_1+r_2) = 36\pi + 9\pi + 45\pi = 90\pi$ (sm^2)

D5 (səh.119) Kəsik konus formalı vedrənin alt oturacağının diametri 22 sm, açıq olan üst oturacağının diametri isə 36 sm-dir. Vedrənin hündürlüyü 24 sm və vedrənin hazırlandığı metal təbəqənin $1m^2$-nin qiyməti 5 manat olarsa, bir vedrəyə təxminən neçə manatlıq material işlənər?



Həlli:



$l = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$ (sm)

$S = \pi \cdot 25 \cdot (18 + 11) + \pi \cdot 11^2 = 725\pi + 121\pi = 846\pi \approx$

$\approx 2657{,}8\ sm^2 = 0{,}2658\ m^2$

$P = 0{,}2658 \cdot 5 \approx 1{,}33$ manat

D8 (səh.197) Kəsik konusun yan səthi S, oturacaqlarının radiusları isə R və r-dir. Tam konusun yan səthini tapın.

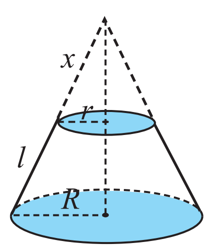
Həlli: Şəkildəki üçbucaqların oxşarlığına əsasən yaza bilərik:

$$\frac{x}{x+l} = \frac{r}{R}, \qquad x(R - r) = rl, \qquad x = \frac{rl}{R-r},$$

Şərtə görə $\pi l(R+r) = S$ olduğundan

$l = \dfrac{S}{\pi(R+r)}$ alırıq.

Tam konusun yan səthi:



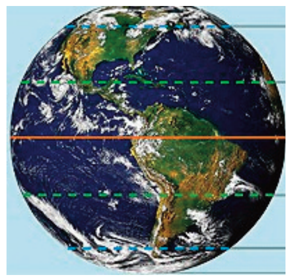
$$S_{yan} = \pi(l+x) \cdot R = \pi\left(\frac{S}{\pi(R+r)} + \frac{rl}{R-r}\right) \cdot R =$$

$$= \left(\frac{S}{R+r} + \pi \cdot \frac{rl}{R-r} \cdot \frac{S}{\pi(R+r)}\right) \cdot R = \frac{S}{R+r} \cdot \left(1 + \frac{r}{R-r}\right) = \frac{SR^2}{R^2 - r^2}$$

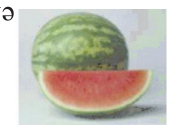
Dərs 58-60. Kürə və hissələrinin səthinin sahəsi. 3 saat.
Dərslik səh. 120-125

Məzmun standartı.
3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.
3.2.6. Kürənin hissələrinin (kürə seqmenti, kürə sektoru) səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır.

Şagird bacarıqları:
- kürənin həndəsi tərifini şəkillə, sözlə izah edir;
- kürənin hissələrini şəkillə, sözlə izah edir;
- kürənin səthinin sahəsini hesablayır;
- yarımkürənin səthinin sahəsini hesablayır.



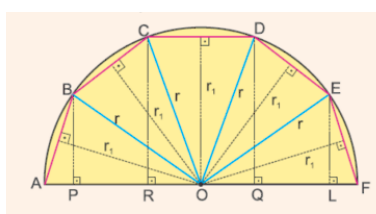
Yer kürəsi kürənin və onun hissələrinin öyrənilməsi üçün əlverişli nümunədir. Şagirdlərin coğrafiya dərsindən öyrəndikləri ilə müzakirələr aparılır. Yer kürəsi temperatur fərqinə görə iqlim qurşaqlarına bölünür. Biz Yerin radiusunun təqribən 6400 km olduğunu bilirik. Bəs Yer kürəsinin səthini necə hesablaya bilərik və ya hər bir iqlim qurşağının sahəsini hesablaya bilərikmi? Biz kürənin öyrənilməsinə aid dərslərdə bu suallara cavab axtaracağıq. Kürənin həndəsi tərifi izah edilir, şəkil üzərində göstərilir. Kürənin hissələrinin həndəsi adları və izahları verilir.



Kürənin səthinin sahəsini hesablama düsturunun çıxarılışı izah edilir. Bu zaman trapesiyanın və kəsik konusun səthinin sahəsindən istifadə edilir. Bu fiqurların sahəsini hesablama düsturları yada salınır. Kəsik konusun yan səthinin sahəsi

$S_{yan} = 2\pi rl$ düsturu ilə tapılır, buarada $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$.

Kürənin səthinin sahəsi düsturu aşağıdakı kimi şəkil üzərində də isbat edilə bilər. Daxilinə düzgün $2n$-bucaqlı çəkilmiş r radiuslu çevrənin yarısına baxaq. r_1 ilə bu çoxbucaqlının apofemini işarə edək. Bu yarımdairənin AF diametri ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun sahəsi kürənin səthinin sahəsinə təxminən bərabər olacaq.



$$S = 2\pi r_1 AP + 2\pi r_1 PR + 2\pi r_1 RO + 2\pi r_1 OQ + 2\pi r_1 QL + 2\pi r_1 LF =$$
$$= 2\pi r_1 \underbrace{(AP + PR + RO + OQ + QL + LF)}_{2r},$$
$$S = 2\pi r_1 2r$$

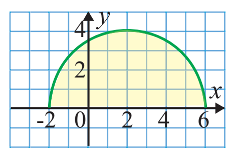
Daxilə çəkilmiş çoxbucaqlının tərəflərinin sayı artdıqca $r_1 \to r$ və onun sahəsi yarımdairənin sahəsinə, fırlanmadan alınan fiqurun sahəsi isə kürənin sahəsinə yaxınlaşır. Beləliklə kürənin səthi üçün $S_{\text{kürə}} = 4\pi r^2$ düsturu alınır.

Kürə qurşağının və kürə seqmentinin səthinin sahəsi düsturu izah edilir. Bu düsturlar kürə səthinin kəsilən h hündürlüyünə görə kürənin diametrinin müəyyən hissəsi kimi çıxarılır.

Dərslikdə verilmiş kürə və silindrlərin səthlərinin nisbəti, kürə səthinin Arximed izahı və bənzər tapşırıqların seçilərək bütünlükdə layihə işi kimi təqdim edilməsi tövsiyə edilir. Layihə işi şagirdin portfoliosuna daxil edilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.4. Şəkildəki yarımdairənin əhatə etdiyi sahə x oxu ətrafında bir tam dövr fırlanmışdır.
a) Hansı fəza fiquru alınmışdır?
b) Bu fiqurun səthinin sahəsini şəkildə verilənlərə görə hesablayın.

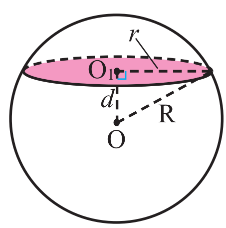


Həlli:

a) Fırlanmadan kürə alınacaq. Şəkildən göründüyü kimi kürənin radiusu 4 sm-dir, onda kürənin səthi $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ (sm^2)

D.9 Kürə mərkəzdən 3 sm məsafədə müstəvi ilə kəsilmişdir. Kəsikdə alınan dairənin çevrə uzunluğu 8π sm olarsa, kürənin və hər bir seqmentin sferik səthinin sahəsini tapın.

Həlli:
Şərtə görə müstəvi kəsiyinin mərkəzdən məsafəsi



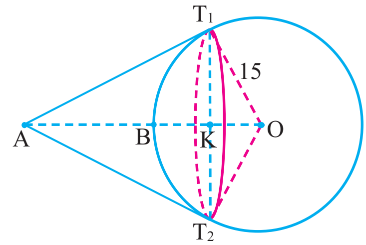
$d = 3$ sm, kəsikdəki dairənin çevrəsinin uzunluğu

$C_{r.} = 2\pi r = 8\pi$ sm-dir. Onda $r = 4$ sm. Pifaqor teoreminə görə $R^2 = d^2 + r^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ olduğundan kürənin

səthinin sahəsi $S_R = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25 = 100\pi$ sm^2 olar.
Alınan seqmentlərin sferik səthlərinin sahələri uyğun olaraq, $S_1 = 2\pi R \cdot H_1 = 2\pi \cdot 5 \cdot 2 = 20\pi$ sm^2,
$S_2 = 2\pi R \cdot H_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 8 = 80\pi$ sm^2 olar.

D 12. Kürənin radiusu 15 sm-dir. Mərkəzdən 25 sm məsafədə olan nöqtədən bu kürə səthinin görünə bilən hissəsinin sahəsini tapın.

Həlli:



ΔAT_1O - dan $OT_1 = 15$, $AO = 25$ olduğuna görə, $AT_1 = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ tapılır.
$\Delta AT_1O \sim \Delta T_1KO$ olduğundan,

$$\frac{AT_1}{T_1K} = \frac{T_1O}{KO} = \frac{AO}{T_1O}, \quad \frac{15}{KO} = \frac{25}{15}, \quad KO = 9$$

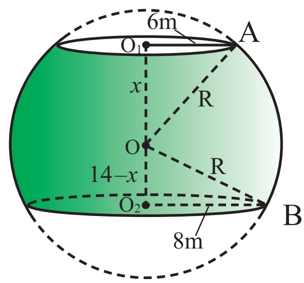
Onda $BK = BO - KO = 15 - 9 = 6$

Yəni kürənin görünə bilən sferik səthinə uyğun seqmentin hündürlüyü 6 sm-dir. Onda,

$$S_{seqment} = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi \text{ sm}^2$$

D 17. Şəkildə verilənlərə görə kürə qurşağının səthinin sahəsini tapın.

Həlli: Kürənin radiusu R olsun.
ΔOO_1B və ΔOO_2A-dan Pifaqor teoreminə görə alırıq.



$x^2 + 6^2 = R^2$
$(14 - x)^2 + 8^2 = R^2$
Buradan, $x^2 + 6^2 = (14 - x)^2 + 8^2$
$x^2 + 36 = 196 - 28x + x^2 + 64$
$28x = 224$
$x = 8$

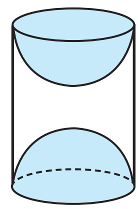
Onda kürənin radiusu $R^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $R = 10$ tapılır.
Kürə qurşağının səthinin sahəsi isə

$$S = 2\pi rh = 2\pi \cdot 10 \cdot 14 = 280\pi \text{ m}^2 \text{ olar.}$$

Dərs 61. Kompleks fiqurların səthinin sahəsi. 1 saat.
Dərslik səh. 126-127
Məzmun standartları.
3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.
3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.
3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.
Şagird bacarıqları:
- komleks fiquru təşkil edən fəza fiqurlarını həndəsi olaraq ayırır;
- kompleks fiqurun səthinin sahəsini onu təşkil edən fəza fiqurlarının səthinin sahəsi kimi hesablayır.

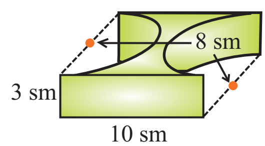
Kompleks fiqurlar və ya mürəkkəb fiqurlar dedikdə müxtəlif fəza fiqurlarından istifadə etməklə quraşdırılmış konstruksiyalar nəzərdə tutulur. Biz ətraf aləmdə daha çox kompleks fiqurlara rast gəlirik.
Şagird kompleks fiqurun tam səthinin sahəsinin onu təşkil edən fiqurların səthlərinin sahələrinin birbaşa toplanması ilə alınmadığını başa düşür və hər bir konstruksiyada müstəvi səthləri və yan səthləri, fırlanmadan alınan səthləri düzgün müəyyən etdiyinə diqqət yetirilir.

D.2. Silindrik formalı ağacdan şəkildə göstərildiyi kimi iki eyni yarımkürə oyulmaqla suvenir hazırlanmışdır. Silindrin hündürlüyü 10 sm, radiusu 4 sm olarsa, suvenirin tam səthinin sahəsini hesablayın.



Həlli: Verilən fiqurun səthi silindrin yan səthi ilə iki yarımkürənin sferik səthinə və ya radiusu silindrin radiusuna bərabər olan kürənin səthinin cəminə bərabərdir. Silindrin hündürlüyü 10 sm, radiusu 4 sm olduğundan
$S_{tam} = S_y + 2S_{yarım\ kür} = 2\pi rh + S_k = 2\pi\cdot 4\cdot 10 + 4\pi\cdot 4^2 = 144\pi$ sm^2

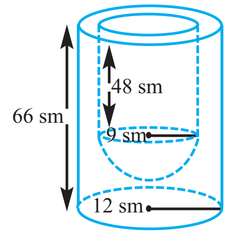
D.9. Fiqurların səthinin sahəsini hesablayın.
Həlli: c) Məsələn, dərslikdə verilmiş fiqurun yan səthi ölçüləri 3×10×8 sm olan düzbucaqlı paralelepipeddən diametri 8 sm olan yarımsilindr oyulub çıxarılmışdır.



Fiqurun sahəsini tapmaq üçün paralelepipedin sahəsindən ($S_{paraleleplped} = 2(3\cdot 10 + 8\cdot 3 + 8\cdot 10) = 268$) iki alt və üst yarımdairələr olmaqla iki dairənin sahəsi ($2S_{dairə} = 2\pi r^2 = 2\pi\cdot 4^2 = 32\pi$), həmçinin paralelepipedin 3 x 8 ölçülü iki qarşı üzünün də sahəsi ($S_{üzlər} = 2\cdot 8\cdot 3 = 48$) çıxılır, nəhayət oyulub çıxarılan silindrin (iki yarımsilindrin) yan səthi ($S_{yan} = 2\pi\cdot 4\cdot 3 = 24\pi$) əlavə edilir. Beləliklə alırıq,
$S_{fiqur} = S_{paraleleplped} - 2S_{dairə} - S_{üzlər} + S_{yan} = 268 - 32\pi - 48 - 24\pi = 220 - 8\pi$ (sm^2)
Tələb olunan sahəni şagirdlərin müxtəlif yanaşmalarla hesablamaları tövsiyə edilir. Baxılan fiqurun sahəsi aşağıdakı kimi də hesablanır:

$$S_{tam} = 2\cdot 3\cdot 10 + 2\cdot(8\cdot 10 - \pi\cdot 4^2) + 2\pi\cdot 4\cdot 3 = 60 + 160 - 32\pi + 24\pi =$$
$$= 220 - 8\pi \text{ (sm}^2\text{)}.$$

D.10. Hündürlüyü 66 sm, oturacağın radiusu 12 sm olan plastik materialdan hündürlüyü 48 sm, radiusu 9 sm olan silindr, daha sonra şəkildə göstərildiyi kimi sferik hissə oyularaq qab düzəldilmişdir.
a) Qabın daxili səthinin sahəsini;
b) Qabın xarici səthinin sahəsini tapın.



Həlli: a) Qabın daxili səthi silindrin yan səthi və yarımkürə səthidən ibarətdir.
$S_{dax.} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 9 \cdot 48 + 2\pi \cdot 9^2 = 18\pi(48+9) = 1026\pi$ (sm^2)
b) $S_{xar.} = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi(R^2 - r^2) = 2\pi \cdot 12 \cdot 66 + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot (12^2 - 9^2) = 1791\pi$ (sm^2)

Dərs 62-63. Oxşar fiqurların səthinin sahəsi. Ümumiləşdirici tapşırıqlar.
2 saat. Dərslik səh. 128-130
Məzmun standartı.
3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir.
Şagird bacarıqları:
- oxşar fiqurların uyğun xətti ölçülərinin nisbətlərinin bərabər olduğunu bilir.
- oxşar fiqurların sahələri nisbətinin oxşarlıq əmsalının kvadratına bərabər olduğunu başa düşür.
- oxşarlıq əmsalına və oxşar fiqurlardan birinin verilən ölçüsünə görə digərinin uyğun ölçüsünü tapır.

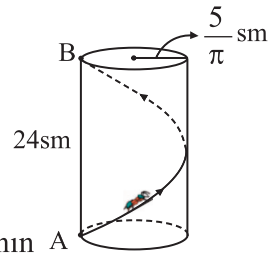
? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.4. İki oxşar silindrin yan səthlərinin sahəsi 48π və 108π kvadrat vahiddir. Kiçik silindrin hündürlüyü böyük silindrin radiusuna bərabərdir. Silindrlərin radiuslarını və hündürlüklərini tapın.
Həlli: Silindrlərin radiuslarını və hündürlüklərini uyğun olaraq r, R və h, H ilə işarə edək. Şərtə görə $h = R$ və $2\pi rh = 48\pi$; $2\pi RH = 108\pi$,
buradan $rh = 24$, $RH = 54$. Oxşarlıq şərtinə görə

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R} = \frac{H}{h}, \qquad \frac{r\cancel{h}}{\cancel{R}H} = \frac{24}{54}, \quad \frac{r}{H} = \frac{4}{9} = k, \quad r = 4k, \quad H = 9k$$

$rh = 24$ olduğundan,
$24k^2 = 24$; $k = 1$, deməli, $r = 4$, $h = 6$, $R = 6$, $H = 9$ olar.

D.7. Qarışqa radiusu $\frac{5}{\pi}$ sm, hündürlüyü 24 sm olan silindrin oturacaq çevrəsi üzərində yerləşən A nöqtəsindən başlayaraq vintvari yolla B nöqtəsinə gəlmişdir. Qarışqanın getdiyi yolun uzunluğunu tapın.



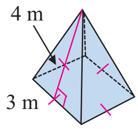
Həlli: Silindrin açılış şəklini çəkmiş olsaq, qarışqanın alınmış düzbucaqlının diaqonalı boyu hərəkət etmiş oduğunu görərik: $d = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ sm

Bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları cədvəli

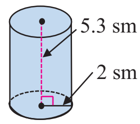
№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Silindri fırlanma fiquru kimi şəkillə, modellə təqdim edir.	
2.	Silindrin yan səthinin və tam səthinin hesablanmasına aid məsələlər həll edir.	
3.	Konusu fırlanma fiquru kimi şəkillə, modellə təqdim edir.	
4.	Konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablayır.	
5.	Kəsik konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablayır.	
6.	Kürənin hissələrini şəkillə sözlə izah edir.	
7.	Kürənin səthinin sahəsini hesablayır.	
8.	Kompleks fiqurların səthinin sahəsini hesablayır.	
9.	Oxşarlıq əmsalına və oxşar fiqurlardan birinin verilən ölçüsünə görə digərinin uyğun ölçüsünü tapır.	

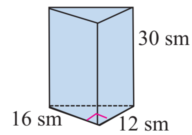
Dərs 64. 4-cü bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) Fiqurların səthinin sahəsini tapın.



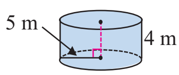
düzgün dördbucaqlı piramida

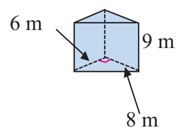


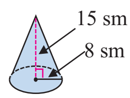


düz üçbucaqlı prizma

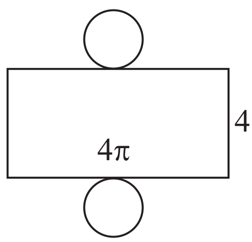
2) Fiqurların səthinin sahəsini tapın.



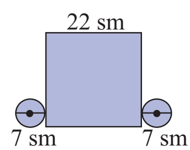




3) Silindrin açılış şəkilində verilənlərə görə bu silindrin tam səthinin sahəsini tapın.



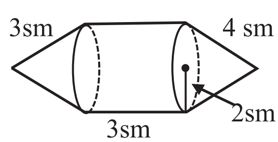
4) Açılış şəkli üzərində göstərilmiş ölçülərinə görə silindrin tam səthinin sahəsini tapın.



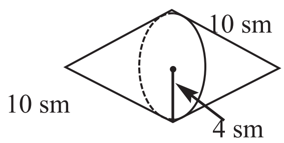
5) Oturacaqlarının sahələri cəmi 32π sm^2 olan silindirn hündürlüyü 60 sm-dir. Silindrin yan səthinin sahəsini tapın.

6) Otuiracaq çevrəsinin uzunıuğu 62,8, doğuranı 15 sm olan konusun yan səthinin sahəsini tapın.

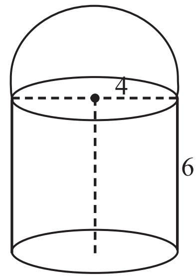
7) Şəkildəki fiqurun səthinin sahəsini tapın.



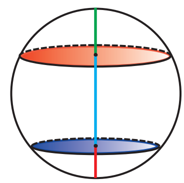
8) Şəkildəki fiqurun səthinin sahəsini tapın.



9) Şəkildəki fiqurun səthinin sahəsini tapın.



10) Radiusu 17 sm olan kürə mərkəzdən müxtəlif tərəflərdə uyğun olaraq 8 sm və 15 sm məsafədə paralel müstəvilərlə kəsilmişdir. Alınmış kürə qurşağının və seqmentlərin sferik səthlərinin sahələrini tapın.



11) Taxıl anbarının silindr formalı hissəsinin hündürlüyü 12 m, diametri 8 m-dir. Konusşəkilli hissənin doğuranın uzunluğu 4,5 m-dir. 10 kvadrat metr sahəyə, 1,5 *l* boya işlədilir. Dəmir səthləri boyamaq üçün istifadə edilən boyalar 8-lik qablarda satılır. Anbarı boyamaq üçün neıə qutu boya lazımdır?

12) Kürə mərkəzindən 8 sm uzaqlıqda müstəvi ilə kəsilərək iki kürə seqmentinə ayrılır. Kəsikdə alınan dairənin çevrəsinin uzunluğu 12π olarsa, böyük kürə seqmentinin səthinin sahəsini tapın.

13) Hər bir qatı silindrşəkilli olan tortun ən geniş olan alt qatının diametri 64 sm, sonrakı qatların diametrləri uyğun olaraq 48 sm və 20 sm-dir. Hər qat 15 sm hündürlüyündə olarsa, tortun bəzədilməli olan səthinin sahəsi nə qədərdir?

14) Radiusu 6 sm, doguranı 10 sm olan konus təpədən 2 sm məsafədə oturacağa paralel müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınmış kiçik konusun və kəsik konusun yan səthinin sahəsini tapın.

5-ci bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır. 2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır. 2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.	65-66	Dəyişmənin orta sürəti, dəyişmənin ani sürəti	2	132-136
	67-68	Funksiyanın törəməsi	2	137-142
	69-70	Diferensiallama qaydaları	2	143-147
	71-72	Hasilin törəməsi. Nisbətin törəməsi	2	148-151
	73-74	Mürəkkəb funksiyanın törəməsi	2	152-155
	75	Törəmənin tətbiqi ilə məsələ həlli	1	156-157
	76	İkinci tərtib törəmə	1	158-160
	77-79	Üstlü və loqarifmik funksiyanın törəməsi	3	161-166
	80-81	Triqonometrik funksiyaların törəməsi	2	167-170
	82-83	Ümumiləşdirici tapşırıqlar. Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları	2	171
	84	Yarımillik summativ qiymətləndirmə tapşırıqları	1	
	Cəmi		20	

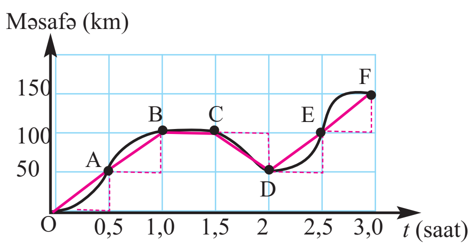
Dərs 65-66. Dəyişmənin orta sürəti, dəyişmənin ani sürəti. 2 saat. Dərslik səh. 132-136

Məzmun standartı.
2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.
2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.

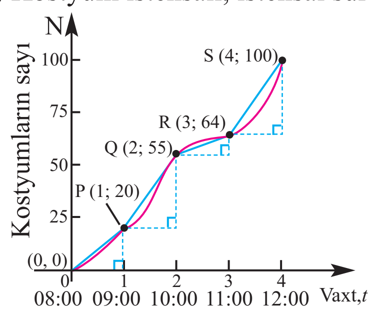
Şagird bacarıqları:
- orta və ani dəyişməni kəmiyyətin dəyişməsi ilə nümunələr üzərində təqdim edir;
- ani və orta dəyişmə sürətini həndəsi olaraq toxunan və kəsənlə əlaqələndirir;
- ani və orta dəyişməyə aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.

Aşağıdakı kimi iki situasiyaya nəzər salaq. Tutaq ki, avtomobil iki saat ərzində 110 km yol qət etmişdir. Deməli, avtomobilin orta sürəti 55 km/saatdır. Başqa bir situasiyada isə avtomobildə oturmusunuz və sürəti izləyirsiniz, sürət siz baxdığınız anda 45 km/saatdan 100 km/saata qədər artdı. Sürətin qiyməti haqqındakı bu iki məlumat bir-birindən fərqlidir. Birinci halda orta sürətdən, ikinci halda isə sürətin ani dəyişməsindən danışılır.

1) Gedilən yol



2) Kostyum istehsalı, istehsal sürəti



Dəyişmə sürətini göstərən müxtəlif situasiyalar qrafik olaraq və ya ədədi məlumatlarla verilə bilər. Nümunələrin müxtəlif həyati situasiyaları əhatə etməsi məqsədəuyğundur. Dəyişmə həyatın bütün sahələrinə xasdır. Hər bir halda da dəyişmə sürətinin vahidi situasiyaya uyğun olmalıdır. Məsələn, yuxarıdakı qrafiklərin birində sürət saatda km-lə ölçülürsə, ikinci halda kostyumun sayı ilə ölçülür.

1-ci qrafikə görə verilən vaxt aralıqlarında orta sürəti tapın.

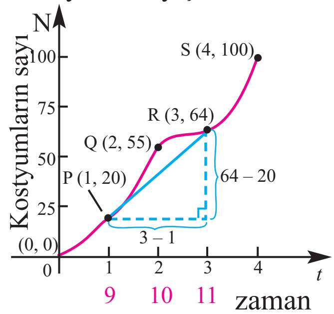
a) [0; 0,5] b) [0,5; 1] c) [1; 1,5] d) [1; 2]

Həlli: a) $\dfrac{50-0}{0{,}5-0} = 100$ km/saat b) $\dfrac{100-50}{1-0{,}5} = 100$ km/saat

c) $\dfrac{100-100}{1{,}5-1} = 0$ km/saat d) $\dfrac{50-100}{2-1} = -50$ km/saat

Kostyum istehsalında dəyişmə sürəti üçün də eyni məlumatları yaza bilərik.

Səhər saat 9-dan 11-ə qədər istehsal olunan məhsulun sayının dəyişmə sürətini tapa bilərik.



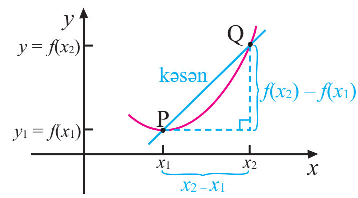
$\dfrac{64-20}{11-9} = \dfrac{34}{2} = 17$ (kostyum) saat 9-dan saat 11-ə qədər istehsal edilən kostyumların sayıdr.

Burada 17, P nöqtəsi ilə R nöqtəsini birləşdirən parçanın bucaq əmsalıdır.

Deməli, biz orta dəyişməni qrafik üzərində seçilmiş iki nöqtəni birləşdirən düz xətt parçasının bucaq əmsalını tapmaqla müəyyən edirik.

Arqumentin $x_2 - x_1$ dəyişməsinə uyğun $f(x)$ funksiyasının qiymətinin dəyişməsi $y_2 - y_1$, dəyişmə sürəti

isə $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ kimi olacaq. Burada



$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ olduğunu nəzərə alsaq, orta

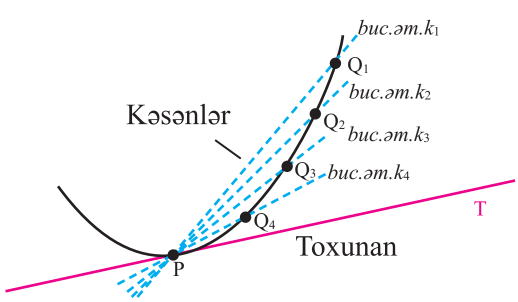
sürət $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ olar, $x_2 \neq x_1$.

Orta sürəti verilən qiymətlər cədvəlinə və qrafik olaraq tapmağa aid nümunə tapşırıqlar ümumsinif fəaliyyəti olaraq yerinə yetirilir.

Şagird orta dəyişmə sürətini müxtəlif funksiyaların qrafiklərinə görə müəyyən edir.

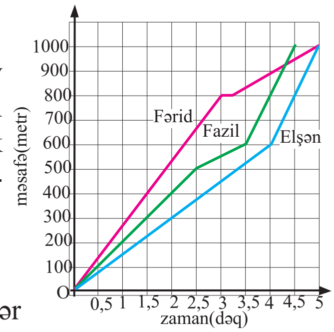
Beləliklə, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ kimi təyin olunan orta sürət həndəsi olaraq kəsənin bucaq əmsalının, $\lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ kimi təyin olunan ani sürət isə $(a; f(a))$ nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalının qiymətinə bərabərdir.

Artımı kiçiltməklə orta sürətdən ani sürətə keçid dərslikdə verilmiş cədvəllə analitik olaraq, həmçinin həndəsi olaraq izah edilir.



Xətti funksiyaların, yəni qrafiki düz xətt olan funksiyaların x-in hansı iki qiymətinin seçilməsindən asılı olmayaraq, dəyişmə sürətinin sabit qaldığı, dəyişmədiyi aşkar edilir, qeyri-xətti funksiyalarda isə x_1 və x_2 nöqtələrinin qrafikin hansı hissəsində seçilməsindən asılı olaraq dəyişmənin qiymətlərinin fərqləndiyini, dəyişdiyini müşahidə edirlər. 1-ci və 2-ci tapşırığın həlli nəticələrini müqayisə etməklə də bu qənatə gəlinir.

3-cü tapşırıq ev tapşırığı kimi verilə bilər və formativ qiymətləndirmə olaraq şagirdin portfolio tapşırığı kimi istifadə edilməsi tövsiyə edilir. Şagird qrafik məlumata görə aşağıdakı məlumatları müəyyənləşdirməyi bacarmalıdır.



Fərid, Fazil və Elşən:
- hansı müddətdə sabit sürətlə hərəkət etmişlər və hər birinin sürəti dəqiqədə neçə kilometr olmuşdur?
- kim hansı hissədə sürətini artırmış və hansı sürətlə qaçmışdır, ən sürətli qaçış hansı vaxt intervalındadır, hissədədir və kimə məxsusdur?

Şagirdlər düz xəttin bucaq əmsalı böyüdükcə, yəni düz xəttin dikliyi artdıqca sürətin artdığını müşahidə edirlər. Məsələn, 3-cü dəqiqəyə qədər ən sürətlə qaçan Fərid olmuşdur, çünki onun hərəkətini əks etdirən düz xətt digərlərinə görə daha dikdir, tgα daha böyükdür, buna baxmayaraq yolun sonuna doğru o bir müddət dayanır və dəyişmə sıfra çevrilir, daha sonra isə sürətini əvvəlki 3 dəqiqədəkinə nisbətən azaldaraq finişə Elşənlə eyni anda çatır.

Yarışın qalibi Fazildir. Şagirdlər analoji qayda ilə Fazilin hərəkəti zamanı sürətin artmasını və azalmasını göstərən hesablamalar və qrafikə görə vizual olaraq əldə etdikləri məlumatları təqdim edirlər. Məsələn, Fazilin ilk 2,5-ci dəqiqə ərzində orta sürəti 500:2,5 = 200 m/dəq-dir. 3,5-ci dəqiqədən başlayaraq isə sürətini daha da artırmış və finişə hamıdan əvvəl çatmışdır. Qrafikə görə demək olar ki, ən böyük orta sürət Fazilə məxsusdur. 4-cü dəqiqədən başlayaraq Elşənin hərəkət qrafiki Fazilin 3,5 dəqiqədən sonrakı hərəkət qrafikinə paraleldir. Paralel düz xətlərin bucaq əmsalları bərabərdir, deməli, onların son 1 dəqiqə ərzində sürətləri bərabərdir.

5-ci tapşırıqda reklama qoyulan ilk məbləğlərin (min manatların) daha çox gəlir gətirdiyi müşahidə edilir. Sonrakı qoyuluşlarda isə gəlir azalır və sabitləşir. Bu real situasiyada artıq reklamı, mal haqqında məlumatın müəyyən bir kütləyə çatdığını və ya alıcı sayının qeyri-məhdud artmasının mümkün olmadığı kimi real situasiyalarla izah edilir.

Burada diqqət edilməli xüsusi bir məqam var. Ani dəyişmə sürəti dedikdə söhbət yalnız hərəkət sürətindən getmir və ölçü vahidi də həmişə m/san olmalı deyil. Real situasiyadan asılı olaraq sahə/zaman, manat/zaman və ya 5-ci tapşırıqda olduğu kimi mal sayı/min manat və s. ola bilər. İki kəmiyyətdən birinin digərindən asılı olaraq ani və ya orta dəyişməsinin ölçü vahidi real həyati situasiyada uyğun ölçü vahidlərinin nisbəti, həm də fiziki kəmiyyətlərin ölçü vahidlərinin nisbəti kimi ola bilər. Bu ölçü vahidi həmçinin törəmə funksiyanın ölçü vahididir.

Dərs 67-68. Funksiyanın törəməsi. 2 saat. Dərslik səh. 137-142
Məzmun standartı.
2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.
2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.
2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.
Şagird bacarıqları:
- törəmənin tərifini analitik yazılışla, həndəsi mənasına görə izah edir;
- törəmənin tərifini real həyati situasiyalara aid nümunələrlə izah edir;
- funksiyanın törəməsini limitin köməyilə hesablayır, verilən nöqtədə törəmənin qiymətini tapır;
- funksiyanın törəməsinin olub-olmadığını müəyyən edir.

1-ci saat. Törəmənin $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ limitinə görə hesablama addımları müzakirə edilir. Limitə görə törəmə funksiyanın analitik düsturu, x-in verilən qiymətlərində törəmə funksiyanın qiymətinin hesablanması, verilən nöqtədə toxunanın bucaq əmsalının müəyyən edilməsi ilə toxunanın tənliyinin yazılması kimi tapşırıqlar yerinə yetirilir. Şagirdlər funksiyanın törəməsinin yeni bir funksiya olduğunu başa düşürlər. Məsələn, $y = x^2$ funksiyasının törəməsinin limitin köməyilə $2x$ olduğu aşkar edilir, yəni kvadratik funksiyannın törəməsi xətti funksiyadır. x-in eyni qiymətində funksiyanın qiyməti və törəmə funksiyanın qiyməti hesablana bilər. Funksiyanın qiyməti statistik məlumatı, törəmə funksiyanın qiyməti isə dinamik məlumatın həmin andakı qiymətini göstərir.

1-ci saatda əsasən nümunə kimi verilmiş tapşırıqlar yerinə yetirilir. Sadə funksiyaların törəməsini limitin köməyi ilə tapırlar. Şagird törəməalma prosesinin diferensiallama olduğunu başa düşür.

Limitin köməyi ilə törəməni hesablayarkən çoxhədliləri vuruqlarına ayırmaqla sadələşdirmək lazım gəlir və bu zaman binomların açılışlarından da istifadə edilir. Odur ki, aşağıdakı kimi tapşırıqlarla bilik və bacarıqların ilkin diaqnostik qiymətləndirilməsinin aparılması tövsiyə edilir.

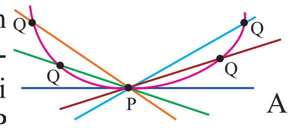
1) Paskal üçbucağından istifadə etməklə binomial açılışları yazın və sadələşdirin.

a) $(a+b)^2$ b) $(a+b)^3$ c) $(a-b)^3$ d) $(a+b)^4$ e) $(a-b)^5$ f) $(a+b)^5$

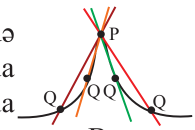
Birinci sətirdəki açılışdan istifadə etməklə cədvəli doldurun.

Qüvvətlərin fərqi	Vuruqlara ayrılış şəkli
a) $a^n - b^n$	$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+$ $\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$
b) $a^2 - b^2$	
c)	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
d) $a^4 - b^4$	
e) $a^5 - b^5$	
f) $(x+h)^n - x^n$	

2-ci saat. Funksiyanın törəməsinin olmadığı hallar araşdırılır. Funksiyanın təyin olunmadığı nöqtələrdə, həmçinin funksiyanın qrafikinə toxunanın çəkilməsinin mümkün olmadığı nöqtələrdə funksiyanın törəməsi yoxdur. Nümunələr dərslikdə verilmişdir. Dərslikdə verilmiş tapşırıqlar yerinə yetirilir.

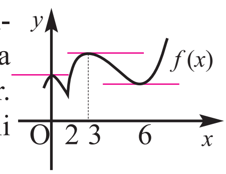


Diferensiallana bilən və bilməyən funksiyalara izah üçün A və B kimi qrafik şəkillər əlverişlidir. A qrafikindən göründüyü kimi Q nötəsi P nöqtəsinə hər iki tərəfdən yaxınlaşdıqca kəsənlər də nəhayət P nöqtəsindəki toxunanla üst-üstə düşür. Deməli, funksiya bu nöqtədə kəsilməzdir və difrensiallana biləndir. B şəklindəki funksiya da kəsilməzdir, lakin Q nötəsi P-yə sağdan və soldan yaxınlaşmada kəsənlər həmişə müxtəlif bucaq əmsallarına malik olurlar.



Dərslikdə verilmiş tapşırıqlar yerinə yetirilir.
$(-\infty; +\infty)$ aralığında təyin olunmuş və $x = 0$, $x = 3$, $x = 6$ nöqtələrində üfüqi toxunanları olan elə qrafik çəkin ki, $x = 2$ nöqtəsində törəməsi olmasın.

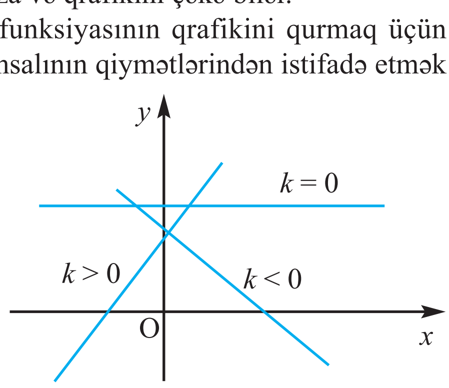
İzahlardan və yerinə yetirilən tapşırıqlara görə şagird artıq intuitiv olaraq funksiyanın pik nöqtələrində (maksimum və ya minimum) toxunanın üfüqi düz xətt olduğunu başa düşür. Uyğun qrafik nümunəsi şəkildəki kimi ola bilər. Bu açıq tipli sualdır. Qrafiklər müxtəlif olacaqdır.



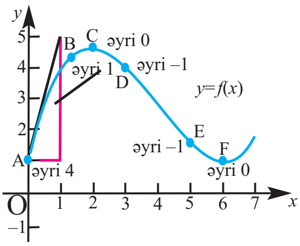
Həmçinin funksiyanın qrafikinə görə törəmə funksiyanın qrafikinin qurulması və əksinə törəmə funksiyanın qrafikinə görə funksiyanın qrafikinin qurulması bacarıqları riyazi təfəkkürün formalaşdırılması üçün mühüm məşğələdir. Bu həm də funksiyanın törəməsinin funksiya olduğunu dərindən anlamağa imkan yaradır. Bu bacarıq verilən nöqtədə toxunanın bucaq əmsalını tapma bacarıqlarıdır. Bu bacarıq isə öz növbəsində $y = kx + b$ tənliyi ilə təyin olunan düz xəttin qrafikinin k-nın işarəsindən asılı olaraq koordinat müstəvisində yerləşmə vəziyyətini və k-nın qiymətindən asılı olaraq düz xəttin dikliyinin dəyişməsini bilməsidir. Bu bacarıqları yoxlayan sual-cavab aparmaq olar. Sadə funksiyaların analitik üsulla törəməsini tapmaqla törəmə funksiyanı yaza və qrafikini çəkə bilər.

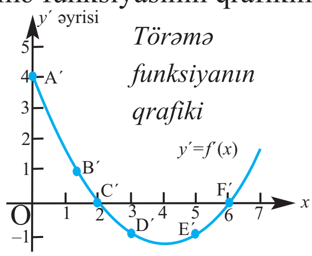
Lakin, hər hansı funksiyanın törəmə funksiyasının qrafikini qurmaq üçün müxtəlif nöqtələrdəki toxunanın bucaq əmsalının qiymətlərindən istifadə etmək lazım gəlir.

Həmçinin koordinat müstəvisi üzərində miqyasla dəqiq qurulmuş qrafiklər verilmişsə, şagird bu nöqtəyə uyğun bir vahid Δx üçün Δy-i həndəsi olaraq düzbucaqlı üçbucağa görə müəyyən edərək $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbətinə görə bucaq əmsalını tapmağı bacarmalıdır. Nümunə olaraq aşağıdakı qrafiki nəzərdən keçirək.



Məsələn, şəkildəki $y = f(x)$ funksiyasının A, B, C, D, E, F nöqtələrində qrafikinə toxunanların bucaq əmsalının qiymətini tapıb koordinat müstəvisinin y oxu üzərində, bu nöqtələrin absislərini isə x oxu üzərində yerləşdirsək, verilən funksiyanın törəmə funksiyasının qrafikini alarıq.

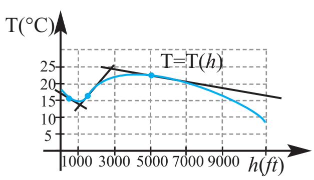




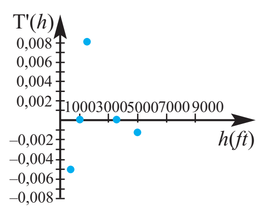
Burada şagird C nöqtəsinə qədər olan qrafikə toxunanların bucaq əmsallarının qiymətinin müsbət olduğunu, yəni x oxundan yuxarıda yerləşdiyini başa düşür, C nöqtəsində bucaq əmsalı sıfra bərabərdir, nöqtə x oxu üzərindədir, C nöqtəsindən başlayaraq isə bucaq əmsalının işarəsi mənfidir, x oxundan aşağıda yerləşməlidir, nəhayət yenidən F nöqtəsində bucaq əmsalı sıfırdır və bu nöqtədən sonra yenidən bucaq əmsalının qiyməti müsbət olur, törəmə funksiyanın qiymətləri x oxundan yuxarıda yerləşir. Bu mühakimələri aparmaqla istənilən funksiyanın qrafikinə uyğun törəmə funksiyanın qrafikini qurmaq olar. Şagird başa düşür ki, funksiyanın qrafikinə çəkilmiş bütün toxunanların bucaq əmsallarının qiyməti törəmə funksiyanın uyğun nöqtədəki qiymətinə bərabərdir.

Daha bir nümunə aşağıdakı kimi ola bilər.

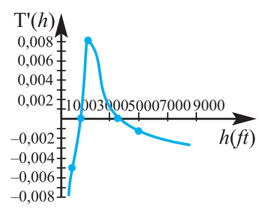
Funksiya



Bucaq əmsallarına uyğun nöqtələr



Törəmə funksiya



Törəmə funksiyanın qrafiki böyük praktik əhəmiyyət daşıyır. Belə ki, bu qrafiklər real həyati situasiyalarda kəmiyyətin (temperaturun, gəlirin, məhsul istehsalının) dəyişmə dinamikasının xəritəsini görməyə imkan verir.
Bu tip tapşırıqların istedadlı şagirdlərə əlavə ev tapşırığı olaraq və riyaziyyat təmayüllü siniflərdə dərs saatı ayrılması ilə öyrədilməsi məqsədəuyğun olardı.

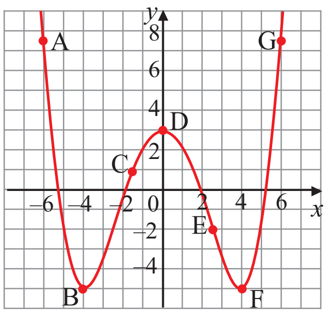
Qiymətləndirmə. Törəmə funksiyanı müəyyənetmə, verilən nöqtədə qiymətini tapma, bu qiyməti verilən nöqtədə toxunanın bucaq əmsalı ilə əlaqələndirmə, verilən nöqtədə törəmənin olub-olmamasını müəyyən etmə bacarıqlarına görə müşahidə yolu ilə formativ qiymətləndirmə aparılır.

İşçi vərəq N1

Adı_______ Soyadı_________ Tarix__________

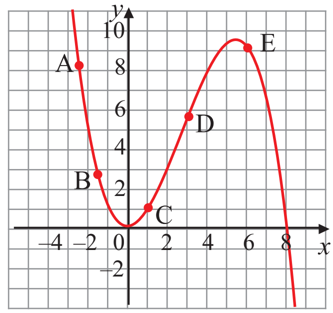
1) Funksiyanın verilən nöqtələrdəki ani sürətlərini müqayisə edin. Fikirlərinizi yazın.

a)



I) B, D və F II) A və G
III) C və G IV) A və E

b)



I) B və C II) A, B və E
III) C və D IV) A və C

2) Verilən nöqtələr arasında orta dəyişmə sürətini müəyyən edin.

a) (–2;–1) və (2;3) b) (3;–5) və (–2;–1) c) (1; 2) və (–1;–2)

3) Sadələşdirin, $a = -2$, $h = 0{,}01$ olduqda qiymətlərini hesablayın.

a) $\dfrac{2(a+h)^2 - 2a^2}{h}$

b) $\dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

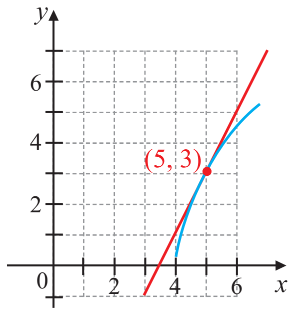
c) $\dfrac{(a+h)^4 - a^4}{h}$

İşçi vərəq N2

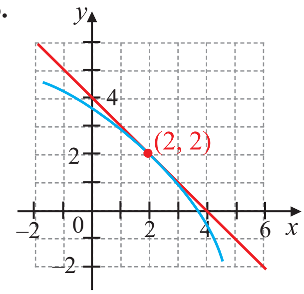
Adı_______ Soyadı_________ **Tarix__________**

1) Toxunanların bucaq əmsalını təxmin edin.

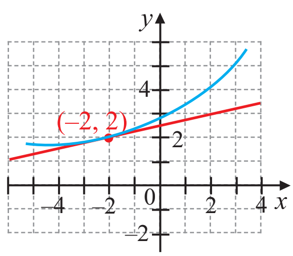
5.



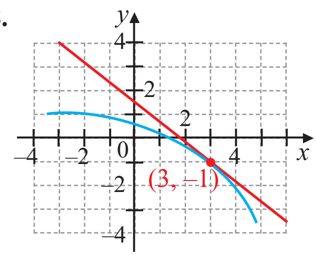
6.



7.



8.



2) a) absisiləri x-in verilən qiymətlərinə uyğun nöqtələrdən keçən funksiyanın kəsəninin tənliyini yazın.

b) absisi verilmiş nöqtədə funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

$f(x) = x^2 + 2x;\quad x = 3,\quad x = 5$

$f(x) = 6 - x^2;\quad x = -1,\quad x = 3$

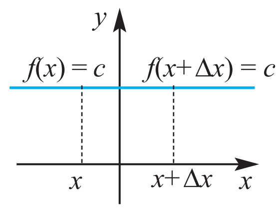
$f(x) = 5/x;\quad x = 2,\quad x = 5$

$f(x) = -3/(x + 1)\,;\quad x = 1,\quad x = 5$

$f(x) = 4\sqrt{x}\,;\quad x = 9,\quad x = 16$

$f(x) = \sqrt{x}\,;\quad x = 25,\quad x = 36$

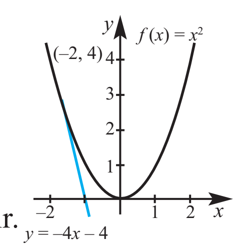
Dərs 69-70. Diferensiallama qaydaları. 2 saat
Dərslik səh. 143-147
Məzmun standartı.
2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.
2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.
Şagird bacarıqları:
- diferensiallama qaydalarını $f(x) = c$, $f(x) = x^n$, $g(x) = c \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) \pm g(x)$ funksiyaları üçün tətbiq edir;
- $f(x) = c$, $f(x) = x^n$, $g(x) = c \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) \pm g(x)$ funksiyaları üçün diferensiallama qaydalarını tətbiq etməklə törəməyə aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.



1-ci saat. Sabit funksiya, qüvvət funksiyası üçün həmçinin funksiyaların cəmini, fərqini diferensiallama qaydaları nəzərdən keçirilir. Sabitin törəməsinin sıfır olduğunu şagird qrafik olaraq da izah edə bilər. Belə ki, qrafikdən dəyişmənin sıfır olduğu aydın görünür.

Funksiyaları diferensiallama qaydalarının törəmənin tərifindən istifadə etməklə isbat edildiyi diqqətə çatdırılır. Qaydaların çıxarılışları uzunmüddətli tapşırıq kimi verilə bilər. Şagirdlər tapşırığı xüsusi vərəqlərdə və ya dəftərdə yazıb hazırlayırlar. Cavablar şagirdin portfoliosuna yerləşdirilir.

Bəzi tətbiq tapşırıqlarının həllinə aid tövsiyələr. Toxunanın tənliyini yazma eyni bucaq əmsalına uyğun nöqtələri müəyyənetmə bacarıqlarına aid verilmiş nümunə müzakirələrlə araşdırılır. Şagirdlər məsələni və həllini dəftərlərində yazırlar. Şagirdlər bucaq əmsalları bərabər olan toxunan düz xətlərin bir-birinə paralel olduğunu, xüsusi halda isə üst-üstə düşdüyünü başa düşürlər.
Toxunanın $y - y_0 = k(x - x_0)$ tənliyi aşağıdakı addımlarla yazılır.
Məsələn, $y = x^2$ funksiyasının qrafikinə absisi $x = -2$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazaq.
1. Verilən nöqtədə $x_0 = -2$ funksiyanın qiyməti tapılır.
$$y_0 = f(-2) = 4$$
2. Funksiyanın törəməsi tapılır: $f'(x) = 2x$
3. Verilən nöqtədə törəmə funksiyanın qiyməti, yəni toxunanın bucaq əmsalının qiyməti tapılır.
$$k = f'(-2) = 2x = -4$$
4. $y - y_0 = k(x - x_0)$ düsturuna görə toxunanın tənliyi yazılır.
$y - 4 = -4(x + 2)$; $y = -4x - 4$
5. Qrafik olaraq təqdim edilir.



? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D 16 a) $f(x) = 3x^2$ və $g(x) = x^3$ funksiyaları üçün x-in elə qiymətlərini tapın ki, uyğun nöqtələrdə hər iki qrafikə çəkilmiş toxunanların bucaq əmsalları bərabər olsun.
b) a bəndində tapdığınız nöqtələrdə hər iki funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Həlli: a) Şagird bucaq əmsallarının funksiyanın törəməsinə bərabər olduğunu bilir, deməli bucaq əmsallarının bərabər olduğu nöqtələr bu funksiyaların törəmələrinin bərabər olduğu nöqtələrdir.

a) $f'(x) = (3x^2)' = 6x$ $\qquad\qquad$ $g'(x) = (x^3)' = 3x^2$

$6x = 3x^2$; $6x - 3x^2 = 0$; $3x(2 - x) = 0$;

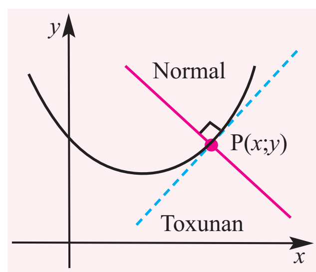
$$x_1 = 0 \text{ və } x_2 = 2$$

b) tapılmış nöqtələrdə hər iki funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazaq.

1. $x = 0$ olduqda $k_1 = f'(0) = 6 \cdot 0 = 0$, $k_2 = g'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ olduğundan absisi $x = 0$ olan nöqtədə hər iki funksiyanın qrafikinə çəkilən toxunanın tənliyi $y = 0$ olur.

2. $x = 2$ olduqda $k_1 = f'(2) = 6 \cdot (2) = 12$, $k_2 = g'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ olduğundan absisi $x = 2$ olan nöqtədə $f(x)$in qrafikinə çəkilmiş toxunanın tənliyi $y - 12 = 12 \cdot (x - 2)$ və ya $y = 12x - 12$;
$g(x)$in qrafikinə çəkilmiş toxunanın tənliyi isə
$y - 8 = 12 \cdot (x - 2)$ və ya $y = 12x - 16$ olur.

D 22. a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ funksiyanın absisi $x = 2$ olan nöqtədə toxunanının bucaq əmsalını müəyyən edin.
b) $f(x)$ funksiyasının absisi $x = 2$ olan nöqtədə normal tənliyini yazın.



Həlli: Şagird toxunanın tənliyinə görə ona perpendikulyar olan normalın tənliyini yazır. Bucaq əmsalları k_1 və k_2 olan perpendikulyar düz xətlər üçün $k_1 \cdot k_2 = -1$ olmalıdır.
Toxunma nöqtəsində $x_0 = 2$, $y_0 = f(2) = -8 + 12 - 4 + 5 = 5$ və toxunanın bucaq əmsalı $k_{tox} = f'(2)$ olur.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 2 \text{ olduğundan } k_{tox} = f'(2) = -12 + 12 - 2 = -2$$

Deməli $k_{normal} = \frac{1}{2}$. Bucaq əmsalı $\frac{1}{2}$ olub, (2; 5) nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazmalıyıq. Beləliklə, normalın tənliyi $y = \frac{1}{2}(x - 2) + 5$ və ya $y = \frac{1}{2}x + 4$ şəklindədir.

İşçi vərəq N3

Adı_______ Soyadı_________ **Tarix__________**

k-nin elə qiymətini tapın ki, verilən düz xətt funksiyanın toxunanı olsun.

Nümunə. $y = kx^2$; $y = -2x + 3$

Həlli: Toxunma nöqtəsində $kx^2 = -2x + 3$ olmalıdır. Lakin k-nı tapmaq üçün bizə daha bir tənlik lazımdır.
Toxunanın bucaq əmsalı –2-yə bərabərdir.
Yəni, funksiyanın törəmə funksiyasının toxunma nöqtəsində (–2) qiymətini aldığı məlumdur.
$y' = 2kx$; $-2 = 2kx$; $-1/k = x$ münasibətini $kx^2 = -2x + 3$ bərabərliyində nəzərə alaq.

$$k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 = -2\frac{1}{k} + 3$$

$$\frac{1}{k} = -\frac{2}{k} + 3, \quad \frac{3}{k} = 3, \; k = 1$$

Beləliklə, $k = 1$ olduqda verilən düz xətt funksiyanın toxunanı olur.

Funksiya:	Toxunan:
$f(x) = x^2 - kx$	$y = 5x - 4$
$f(x) = k - x^2$	$y = -6x + 1$
$f(x) = \frac{k}{x}$	$y = -\frac{3}{4}x + 1$
$f(x) = k\sqrt{x}$	$y = x + 4$
$f(x) = kx^3$	$y = x + 1$
$f(x) = kx^4$	$y = 4x - 1$

Dərs 71-72. Hasilin törəməsi. Nisbətin törəməsi. 3 saat
Dərslik səh. 148-151
Məzmun standartı.
2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.
2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.
2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:

- hasilin $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ qaydasını bilir və tətbiq edir;
- nisbətin $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ qaydasını bilir və tətbiq edir;
- hasilin, qismətin diferensiallama qaydalarını tətbiq etməklə törəməyə aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.

1-ci saat. Hasilin diferensiallama qaydası törəmənin tərifinə əsasən müəyyən edilir. Qaydanın Leybnis yazılışı ilə də verilməsi tövsiyə edilir.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

Öyrənmə tapşırıqları yerinə yetirilir.
Toxunanın tənliyini yazmağa aid məsələ həlli hasil və nisbət şəklində verilmiş funksiyalar üzərində də yerinə yetirilir.
Aşağıdakı nümunəni nəzərdən keçirək.
$y = (x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1)$ funksiyasının $x = 2$ nöqtəsində toxunanının tənliyini yazın.
$y' = (2x)(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 1)(2x - 2)$ ifadəsini sadələşdirməyə ehtiyac yoxdur. $x = 2$ qiymətini yerinə yazmaqla bu nöqtədəki bucaq əmsalını daha sadə hesablamalarla tapmaq olar.
$k = 2\cdot 2(2\cdot 2 - 2\cdot 2 + 1) + (2\cdot 2 - 1)(2\cdot 2 - 2) = 10$
$x = 2$ qiymətində funksiyanın qiymətini tapaq. $y_0 = f(2) = 3 \cdot 1 = 3$

$$y - y_0 = k(x - x_0); \quad y - 3 = 10(x - 2); \quad y = 10x - 17$$

Hasilin diferensiallama qaydasının isbatını anladığını və izlədiyini yoxlamaq üçün şagirdə aşağıdakı kimi reflektiv suallar vermək olar.
- isbatda “sıfır yaradan” $-f(x)g(x) + f(x)g(x)$ – həddin əlavə edilməsində məqsəd nə idi? Bu bizə nə verdi?
- vuruqlara ayırma hansı mərhələdə tətbiq edilmişdir?
- ayrı-ayrı limitləri yazmada məqsəd nə idi?

2-ci saat. Qismətin diferensiallama qaydası törəmənin tərifinə əsasən müəyyən edilir. Şagirdlərlə birlikdə qaydanın isbatı yazılı şəkildə mərhələlərlə yazılı şəkildə yerinə yetirilir. Müraciət olunan şagird göstərilən mərhələdə nə işin görüldüyünü, nə üçün görüldüyünü izah edir.

Məxrəci ədəd olan rasional funksiyaların(çoxhədlilərin) törəməsini taparkən sabit vuruqlu funksiyanın törəməsindən istifadə edildiyi diqqətə çatdırılır.

	Verilən funksiya:	Ekvivalent yazılışı:	Törəməsi:	Sadələşməsi:
a.	$y = \dfrac{x^2+3x}{6}$	$y = \dfrac{1}{6}(x^2+3x)$	$y' = \dfrac{1}{6}(2x+3)$	$y' = \dfrac{2x+3}{6}$
b.	$y = \dfrac{5x^4}{8}$	$y = \dfrac{5}{8}x^4$	$y' = \dfrac{5}{8}(4x^3)$	$y' = \dfrac{5}{2}x^3$
c.	$y = \dfrac{-3(3-2x)}{7x}$	$y = -\dfrac{3}{7}(3-2x)$	$y' = -\dfrac{3}{7}(-2)$	$y' = \dfrac{6}{7}$
d.	$y = \dfrac{9}{5x^2}$	$y = \dfrac{9}{5}x^{-2}$	$y' = \dfrac{9}{5}(-2x^{-3})$	$y' = -\dfrac{18}{5x^3}$

Nisbətin diferensiallanması zamanı rasional ifadəni əlverişli vəziyyətə gətirmək, yəni, sürət və məxrəcinin çoxhədli şəklində olmasına çalışmaq lazımdır. Məsələn, $f(x) = \dfrac{5-1/x}{x+5}$ şəklindəki funksiyanın törəməsinin tapılması tələb edilirsə, rasional ifadənin surət və məxərcini x-ə vuraraq $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2+5x}$ kimi yazdıqdan sonra diferensiallamaq məqsədəuyğundur və bu nümunələr dərsin izahı zamanı şagirdlərin diqqətinə çatdırılır.

Mənfi tam üstlü qüvvəti diferensiallama qaydasını nisbətin diferensiallama qaydasından istifadə etməklə isbat edilməsi şagirdlərə müstəqil iş kimi, cütlərlə və ya qruplarla iş kimi tapşırıla bilər.

Əgər $f(x) = x^n$ funksiyasında n mənfi tam ədəd olarsa, $n = -k$ şərtinin ödənildiyi tam müsbət k ədədi var.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^n] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right]\\ &= \frac{x^k(0)-(1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2}\\ &= \frac{0-kx^{k-1}}{x^{2k}}\\ &= -kx^{-k-1}\\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

Nisbəti differensiallama qaydasını müxtəlif üsullarla almaq olar.
1. Dərslikdə göstərildiyi kimi törəmənin tərifindən istifadə etməklə;
2. Hasilə gətirməklə;
3. Mürəkkəb funksiyanı diferensiallama qaydasından istifadə etməklə.
3-cü qayda sonrakı dərsdə nəzərdən keçiriləcəkdir.

Şagirdlər qruplarla işləməklə aşağıdakı addımlarla 2-ci üsulla bu qaydanı çıxara bilərlər.

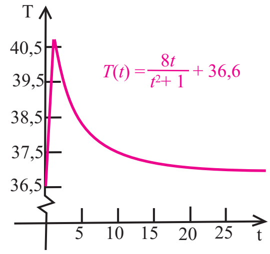
Tutaq ki, $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ olmaqla $f(x)$ və $g(x)$ diferensiallanan funksiyalardır.
1. Yuxarıdakı bərabərliyin hər iki tərəfini g(x) funksiyasına vurun.
2. Bərabərliyin hər iki tərəfinin törəməsini lazım olduqda hasil qaydasını tətbiq etməklə tapın.
3. $q'(x)g(x)$ vuruğunu tapın.
4. $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ yerinə yazın.
5. Sağ tərəfi ortaq məxrəcə gətirin.
6. $q'(x)$ -i tapın.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.6 (səh.151) Xəstənin temperaturunun zamandan asılı olaraq dəyişməsini aşağıdakı funksiya ilə modelləşdirmək olar.

$$T(t) = \frac{8t}{t^2+1} + 36{,}6$$

$t = 2$ saat anında temperaturun dəyişmə sürətini tapın.



Həlli: Temperaturun istənilən t anında dəyişmə sürəti:

$$T'(t) = \left(\frac{8t}{t^2+1} + 36{,}6\right)' = \frac{8\cdot(t^2+1) - 8t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-8t^2+8}{(t^2+1)^2} \text{ olar.}$$

$t = 2$ anında isə

$$T'(2) = \frac{-8\cdot 4+8}{(4+1)^2} = -\frac{24}{25} = -0{,}96 \text{ olacaq.}$$

D.7. Şirkətdəki araşdırmalar göstərir ki, yeni işçinin yığdığı detalların sayı iş yerində keçdiyi təlim günlərinin sayından asılı olaraq aşağıdakı funksiya ilə dəyişir.

$$N(t) = \frac{100t^2}{3t^2+10}$$

Həlli: a) İstənilən gündə işçinin detal yığma sürətini müəyyən etməyə imkan verən funksiyanı müəyyən edin.

b) $N'(2)$ və $N'(10)$ qiymətlərini tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

Həlli:

İşçinin detal yığma sürəti:

a) $$N'(t) = \left(\frac{100t^2}{3t^2+10}\right)' = \frac{200t\cdot(3t^2+10) - 6t\cdot 100t^2}{(3t^2+10)^2} = \frac{600t^3+2000t - 600t^3}{(3t^2+10)^2} = \frac{2000\cdot t}{(3t+10)^2}$$

b) $$N'(2) = \frac{4000}{(12+10)^2} = -\frac{4000}{48400} = \frac{10}{121}$$

$$N'(10) = \frac{20000}{310^2} = \frac{20000}{96100} = \frac{200}{961}$$

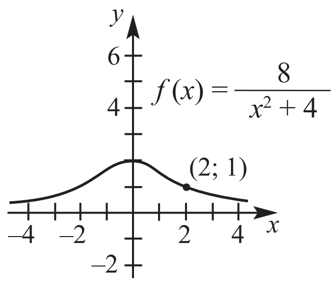
$N'(2) > N'(10)$ olduğundan təlim günlərinin sayı işçinin detal yığmaq qabiliyyətini azaldıb.

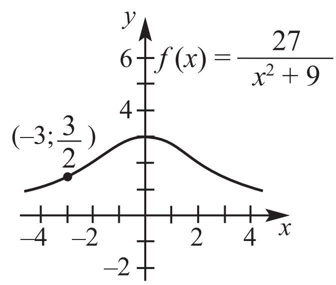
Qiymətləndirmə. Hasilin, qismətin diferensiallama qaydalarının isbatını təqdimetmə, nümunələrə tətbiqetmə bacarıqlarına görə müşahidə yolu ilə formativ qiymətləndirmə aparılır. Ev tapşırığı olaraq qaydaların isbatının hər bir addımın izahlarla, nümunələrlə xüsusi vərəqdə yazılmış şəkildə hazırlanması məqsədəuyğun olardı.

İşçi vərəq N4

Adı_______ Soyadı_________ **Tarix__________**

Funksiyaların qrafikinə verilən nöqtədə çəkilmiş toxunanların tənliyini yazın..





Verilənlərə görə tələb olunanı tapın:

$f(x) = (x^3 - 2) \cdot (2x^2 + 1)$, $f'(1) = ?$

$g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 1}$, $g'(-1) = ?$

Aşağıdakı funksiyalardan hansının üfüqi toxunanı olduğunu müəyyən edin.

$f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

$f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 7}$

Dərs 73-74. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi. 2 saat
Dərslik səh. 152-155

Məzmun standartı.
2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.
2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.
2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.
Şagird bacarıqları:
■ diferensiallamanın $h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$ və ya $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ zəncirvari qaydasını tətbiq edir.
■ hasilin, qismətin diferensiallama qaydalarını tətbiq etməklə törəməyə aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.

Dərslikdə verilmiş öyrənmə bloku şagirdlərlə birlikdə araşdırılır. Mürəkkəb funksiya və mürəkkəb funksiyanın törəmə anlayışı real fiziki hadisə üzərində izah edilə bilər. Əgər biz avtomobillə dağ yolunu qalxırıq və ya eniriksə, zaman keçdikcə hündürlüyün dəyişməsi ilə bizim qulağımızda döyüntü hiss edilməyə başlayır. Bu qulaqdaxili təzyiqlə xaricdəki təzyiqin kəskin dəyişməsi səbəbindən baş verir. Bu hadisədə üç kəmiyyət dəyişir (zaman, hündürlük, təzyiq): zamandan asılı olaraq hündürlük, hündürlükdən asılı olaraq təzyiq. Yüksəkliyə qalxdıqca qulağımızda artan uğultunun səbəbi (guppultu) hər an hiss olunacaq qədər artan təzyiqdir, yəni $\frac{dp}{dt}$ təzyiqin dəyişməsidir. Hətta bu dəyişmə çox böyük olsa, qulaq pərdəsi zədələnə bilər.

Təzyiqin dəyişməsini birbaşa ölçmək mümkün deyil. Lakin, metereoloqlar dəniz səviyyəsindən hündürlüyə görə təzyiqin hər metrdə $\frac{dp}{du}$ dəyişməsini –0,012 (qram/sm^2) kimi qiymətləndirmişlər. Əgər dağ yolunu saniyədə təxminən 3 m sürətlə eniriksə,

$\frac{du}{dt} = -3$. Artıq hər saniyədəki təzyiq dəyişməsini tapa bilərik.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{du}\cdot\frac{du}{dt} = (-0{,}012)\cdot(-3) = 0{,}036$$

Biz mürəkkəb funksiyanın dəyişməsini nəzərdən keçirdik, təzyiq hündürlüyün, hündürlük isə zamanın funksiyasıdır.

Bu hadisədə təzyiq çox ani dəyişdiyindən (sürətlə) qulağın eşitmə sistemini kontrol edən pərdə öz işini görməyə çatdırmır və qulaqda uğultu hiss edilməyə başlayır.

Mürəkkəb funksiyanı diferensiallama qaydasından istifadə etməklə hasili diferensiallama qaydasını yenidən almaq olar. Bunun şagirdlərə müstəqil iş kimi verilməsi məqsədəuyğun olardı.
$q'(x) = f(x)(-1)[g(x)]^{-2}\,g'(x) + f'(x)[g(x)]^{-1}$ yazılışı hasili diferensiallama qaydasının alternativ yazılışıdır və
$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ yazılışını $q(x) = f(x)\cdot g^{-1}(x)$ kimi yazıb, hasili diferensiallama qaydasını tətbiq etməklə almaq olar.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.7. (səh.154) $f(x) = x^2(5 - 4x)^3$ funksiyasının $x = 1$ nöqtəsində törəməsini hesablayın.

Həlli: Burada hasilin və mürəkkəb funksiyanın diferensiallama qaydalarından istifadə etməliyik.

$$f'(x) = (x^2)'(5 - 4x)^3 + x^2((5 - 4x)^3)' = 2x(5 - 4x)^3 + x^2 \cdot 3(5 - 4x)^2 \cdot (-4) =$$
$$= 2x(5 - 4x)^2(5 - 4x - 6x) = 2x(5 - 4x)^2(5 - 10x)$$

Onda $f'(1) = -10$ alarıq.

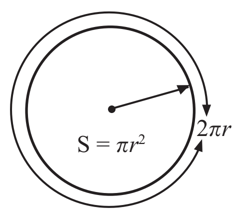
D.15. Neft sızmasının yayılması. Dəniz sahilinin yaxınlığında yerləşən neft quyusundan başlayan neft sızıntısı ətrafa zamandan asılı olaraq radiusu $r(t) = t^2$ qanunu ilə dəyişməklə dairəşəkilli yayılır. $S(r) = \pi r^2$ radiusu r olan dairənin sahəsini ifadə edir.

a) $S[r(t)]$ funksiyasını yazın və situasiyaya uyğun izah edin.

b) $S'(t)$ funksiyasını tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

c) $S'(100)$ qiymətini tapın və izah edin.

Həlli: Əvvəlcə sahənin radiusdan asılı dəyişməsini göstərən funksiyanın törəməsinin mənası izah edilir. Dairənin sahə düsturu $S = \pi r^2$ kimidir. Bu funksiyanın törəməsi $S'(r) = 2\pi r$-dir. π sabit ədəddir. Əgər biz r-in $r_0 = 5$ dm, hər hansı qiymətində törəmə funksiyanın qiymətini tapsaq, məsələn $r_0 = 5$ dm, $S'(5) = 10\pi$ olar. Bu o deməkdir ki, radius hər 1 dm artdıqda sahə 10π dm^2 artır. Ölçü vahidlərinə diqqət edin, sahə dm^2 -la ölçülür, törəmə funksiyanın vahidi isə dm-dir, çünki dairənin sahəsinin törəməsi onun çevrəsinin uzunluğunu göstərir. Şagird tətbiq məsələsini həll edərkən törəmə funksiyanın verilən nöqtədəki qiymətini real həyati situasiyaya uyğun təqdim etməyi bacarmalıdır.



a) $S[r(t)] = \pi \cdot r^2(t) = \pi(t^2)^2 = \pi t^4$; Sızılan neftin yayılma sahəsi zamanın 4-cü qüvvəti ilə mütənasibdir, yəni yayılma zamanın 4-cü qüvvətlə artır.

b) $S'(t) = (\pi t^4)' = 4\pi t^3$; yəni çirkli sahənin yayılma sürəti zamanın kubu ilə düz mütənasib artır.

c) $S'(100) = 4\pi \cdot 100^3 = 4\pi \cdot 10^6$ kv. vahid sahə. Yəni 100-cü saniyədə çirklənmənin yayılma sürəti $4\pi \cdot 10^6$ kv. vahid olmuşdur.

İşçi vərəq N5

Adı_______ Soyadı_________ **Tarix__________**

Mürəkkəb funksiyanın diferensiallama qaydasını tətbiq etməklə törəməni tapın.

$f(x) = (x^2 - 6x + 1)^3$

$f(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^5}{[1 + (x^2 + 3)]^8}$

$f(x) = ((x^2 + 2)^3 + 1)^2$

$f(x) = \sqrt{x^5 + 5x^2}$

$f(x) = (x - 2x^2)^3$

$f(x) = \dfrac{1}{(x^3 + 5x)^4}$

$f(x) = \dfrac{3}{[(x + 2)^2 + 4]^4}$

$f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}[(2x + 1)^3 + 5]$

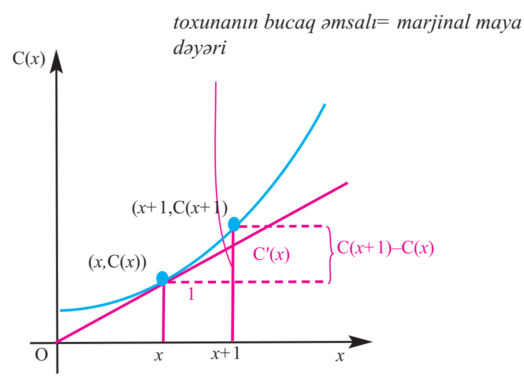
$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Dərs 75. Törəmənin tətbiqi ilə məsələ həlli. 1 saat
Dərslik səh. 156-157

Məzmun standartı.
2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.
2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:
- differensiallamanın qaydalarını tətbiq edir;
- hasilin, qismətin differensiallama qaydalaını tətbiq etməklə törəməyə aid real həyati sitasiya məsələlərini həll edir.

x sayda malın maya dəyərini $C(x)$ ilə işarə etsək, $x + 1$ sayda malın maya dəyəri $C(x + 1)$ olacaq. $C(x + 1) – C(x)$ fərqi $(x+1)$-ci malın maya dəyərini ifadə edir. Bu fərq maya dəyərindəki artımı göstərir və marjinal maya dəyəri adlanır. Marjinal maya dəyərini həmçinin $(x; C(x))$ nöqtəsində qrafikə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalının qiyməti ilə, başqa sözlə, funksiyanın x nöqtəsindəki törəməsini tapmaqla da müəyyən etmək olar. Yəni, $C(x)$ funksiyasının $C'(x)$ törəməsinin qiyməti $(x + 1)$-ci malın maya dəyərindəki dəyişməni, marjinal maya dəyərini təxmin etmək üçün istifadə edilir. Məsələn, tutaq ki, 200 kitabın çapının maya dəyəri 500 manatdır. 201 kitabın çapı üçün sərf olunan pul məbləği isə 501 manat ola bilər. Buradan $C(501) – C(500) = 1$₼, deməli 201-ci kitab təxminən 1 manata başa gəlir. Bu məbləğ marjinal maya dəyəridir və 201-ci kitab üçün doğrudur.



Biz maya dəyərinin, gəlirin, mənfəətin dəyişmə sürətini törəmə ilə ifadə edərək istehsalın (və ya xidmətin) səmərəliliyini ifadə edən marjinal maya dəyəri, marjinal gəlir, marjinal mənfəət kimi iqtisadi göstəriciləri müəyyən edirik.

Marjinal maya dəyəri istehsal edilən mala görə maya dəyərinin verilən andakı dəyişməsidir. Başqa sözlə, marjinal maya dəyəri hər əlavə istehsal edilən malın (və ya xidmətin) maya dəyərini göstərir. $C'(x) = \dfrac{dC}{dx}$

Marjinal gəlir. $R'(x)$ və ya $\dfrac{dR}{dx}$ satılan malın (və ya xidmətin) sayından asılı olaraq gəlirin verilən andakı dəyişməsidir, başqa sözlə marjinal gəlir hər əlavə istehsal edilən maldan (və ya xidmətdən) əldə edilən gəlirdir.

Marjinal mənfəət. $P'(x)$ və ya $\dfrac{dP}{dx}$ satılan məhsuldan (və ya xidmətdən) əldə olunan mənfəətin satılan malın (və ya xidmətin) sayına görə dəyişməsidir (sürətidir). Başqa sözlə hər əlavə istehsal edilən maldan (və ya xidmətdən) gələn mənfəəti göstərir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.17 Marjinal maya dəyəri. Tutaq ki, şirkət x sayda paltaryuyan maşın istehsal etdikdə maya dəyəri $C(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2$ funksiyası ilə hesablanır.

a) 100 maşın istehsal edildikdə bir paltaryuyan maşının orta qiyməti ($C(x)/x$) neçə manat olacaq?

b) 100 paltaryuyan maşın istehsal edildikdə bir paltaryuyan maşının marjinal qiyməti (maya dəyəri) neçə manat olacaq?

c) Göstərin ki, 100 paltaryuyan maşın istehsal edildikdə marjinal maya dəyəri (istehsal qiyməti) 101-ci paltaryuyan maşının istehsal qiymətinə təxminən bərabərdir.

Həlli:

a) $x = 100$ olduqda bir paltaryuyan maşının orta qiyməti:

$$\frac{C(100)}{100} = \frac{2000 + 100\cdot 100 \cdot 0{,}1 \cdot 100^2}{100} = 110 \text{ ₼}$$

b) $C'(x) = 100 - 0{,}2\,x$ olduğundan

$C'(100) = 100 - 0{,}2\cdot 100 = 80$₼ olar.

Deməli, 100 paltaryuyan maşın istehsal edildikdə bir paltaryuyan maşının marjinal qiyməti (maya dəyəri) 80₼ olacaq.

c) $C(101) - C(100)$ fərqini tapmaqla 101-ci paltaryuyan maşının istehsal qiymətini tapa bilərik

$C(101) - C(100) = 100\,(101 - 100) - 0{,}1\,(101^2 - 100^2) = 100 - 20{,}1 = 79{,}9$

Göründüyü kimi b) bəndində tapılmış 100 paltaryuyan maşın istehsal edilkdə verilən funksiyanın marjinal qiyməti 101-ci paltaryuyan maşının qiymətinə təxminən bərabərdir.

D.19. Həftəlik x sayda dəzgah istehsal edib satdıqda, şirkətin əldə etdiyi mənfəəti $P(x) = -0{,}004x^3 - 0{,}3x^2 + 600x - 800$ kimi müəyyən etmək olar. Hal-hazırda şirkətin həftəlik satışı 9 dəzgahdır.
a) Şirkətin həftəlik mənfəətini hesablayın.
b) Şirkətin həftəlik satışı 8 dəzgaha enərsə, həftəlik mənfəət nə qədər azalar?
c) 9 dəzgah satışı halında marjinal mənfəəti hesablayın.
d) a və c bəndindəki nəticələrdən istifadə edərək, 10 dəzgah satıldığı halda mənfəəti təxmin edin.

Həlli:

$P(x) = -0{,}004x^3 - 0{,}3x^2 + 600x - 800$
a) $x = 9$ olduqda şirkətin həftəlik mənfəətini hesablayaq:
$P(9) = -0{,}004 \cdot 9^3 - 0{,}3 \cdot 9^2 + 600 \cdot 9 - 800 = 4572{,}784$₼

b) Həftəlik satış 8 dəzgaha enərsə, həftəlik mənfəət
$P(8) = -0{,}004 \cdot 8^3 - 0{,}3 \cdot 8^2 + 600 \cdot 8 - 800 = 3978{,}752$ ₼ olar.
Deməli, həftəlik satış 9 dəzgahdan 8-ə enərsə, həftəlik mənfəət
$4572{,}784 - 3978{,}752 = 594{,}032$₼ azalar.

c) 9 dəzgah satıldıqda marjinal mənfəəti hesablayaq.
$P'(x) = -0{,}012\,x^2 - 0{,}6\,x + 600$
$P'(9) = -0{,}012 \cdot 81 - 5{,}4 + 600 = 593{,}6$₼

d) $P'(9) \approx P(10) - P(9)$ olduğuna görə a və c bəndlərindəki nəticələrə görə 10 dəzgah satıldığı halda mənfəəti təxmin edə bilərik:
$P(10) \approx 4572{,}784 + 593{,}6 = 5166{,}384$₼

Dərs 76. İkinci tərtib törəmə. 1 saat
Dərslik səh. 158-160

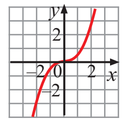
Məzmun standartı.
2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.
2.1.3. Törəmənin həndəsi və fiziki mənasını tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:
■ gedilən yolun zamandan asılılıq funksiyasının törəməsinin sürətlə olduğunu;
■ sürətin zamandan asılıq funksiyasının törəməsinin təcil olduğunu başa düşür;
■ gedilən yolun zamandan asılılıq funksiyasının ikinci tərtib törəməsini təcil kimi təqdim edir;
■ gedilən yol, sürət, təcil kimi fiziki kəmiyyətlərin törəmələrinə görə onların qrafikləri və analitik yazılışları arasındakı əlaqəni təqdim edir.

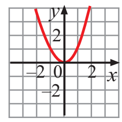
Diferensialı “fluksion” kimi adlandıran İsaak Nyuton “fluksion metodları” adlandırdığı kitabında bu qaydaların hərəkətə neçə tətbiq oluna biləcəyi haqqında yazır. Biz bu dərsimizdə düzxətli hərəkətdə törəmənin tətbiqini araşdıracağıq.

Biz indiyə qədər funksiyadan törəmə alırdıq və törəmə funksiyaya yeni bir funksiya kimi baxırdıq. Bəs törəmə funksiyadan yenidən törəmə almaq olarmı? İkinci dəfə törəmə alınan funksiyadan yeni funksiya alınırmı?

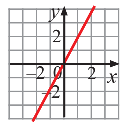
1. $y =$ x^3 funksiyasını yazmaq və qrafikini çəkmək təklif olunur.



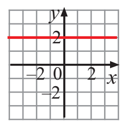
2. $y = \frac{1}{3}x^3$ funksiyasının törəmə funksiyasını yazın və alınan funksiyanın qrafikini çəkin.



3. 2-ci mərhələdə aldığınız funksiyanın törəməsini yazın və alınan funksiyanın qrafikini çəkin.



4. 3-cü mərhələdə aldığınız funksiyanın törəməsini yazın və alınan funksiyanın qrafikini çəkin.



Beləliklə, $y = \frac{1}{3}x^3$ funksiyasından 3 dəfə törəmə almış olduq. Hər dəfə də qarşımıza yeni bir funksiya çıxır. Biz yalnız funksiyanın ikinci tərtib törəməsini almaqla kifayətlənəcək, ikinci tərtib törəmənin tətbiqi ilə məsələlər həll edəcəyik.

Yerdəyişmə, sürət, təcil kimi fiziki kəmiyyətlər birinin diferensiallanması ilə digərinin müəyyən etməyin mümkün olduğu fiziki kəmiyyətlərdir.

Yerdəyişmə müəyyən zaman fasiləsində cismin başlanğıc vəziyyətdən müəyyən istiqamətdə olmaqla məsafəsini göstərir.

Sürət cismin zamandan asılı olaraq yerdəyişməsidir.

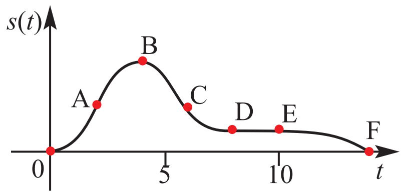
Təcil cismin zamandan asılı olaraq sürətinin dəyişməsidir.

Bu anlayışları fiziki və analitik olaraq ifadə edən aşağıdakı kimi cədvəl tərtib edilməsi tövsiyə edilir.

	Yerdəyişmə	Sürət	Təcil
Tərif	Cismin hərəkətə başladığı nöqtədən müəyyən t vaxtında olan məsafəsi	Yerdəyişmənin (s) zamandan (t) asılı dəyişməsi	Sürətin (v) zamandan (t) asılı dəyişməsi
Asılılıq	$s(t)$	$s'(t) = v(t)$	$v'(t) = a(t)$ $s''(t) = a(t)$
Ölçü vahidləri	m	m/san	m/san^2

Dərslikdə verilmiş funksiyanın qrafiki ilə birinci tərtib törəmə funksiyasının qrafiki, həmçinin birinci və ikinci tərtib törəmə funksiyaları arasındakı əlaqə araşdırılır. İlkin funksiyanın dəyişmələrinin törəmə funksiyada özünü necə göstərdiyi araşdırılır. Şagird toxunanın bucaq əmsalının işarəsinə görə törəmə funksiyanın qrafik hissəsinin x oxundan yuxarıda (müsbət olarsa) və ya aşağıda (mənfi olarsa) yerləşməli olduğunu başa düşür, bucaq əmsallarının sıfra bərabər olduğu (toxunanın x oxuna paralel olduğu) pik nöqtələrinin isə törəmə funksiyanın x oxu ilə kəsişmə nöqtələrinə uyğun gəldiyini başa düşür.

Şəkildəki qrafik motoskiletçinin hərəkətini əks etdirir. Hansı intervalda bucaq əmsalı müsbət, hansında mənfidir? Sürət və təcilin artma və ya azalmasını qrafikə görə izah edin.



İnterval	Bucaq əmsalı	Sürət	Təcil
O-dan A-ya	Bucaq əmsalı müsbətdir, artır	+	+
A-dan B-yə	Bucaq əmsalı müsbətdir, azalır	+	–
B-dan C-yə	Bucaq əmsalı mənfidir, azalır	–	–
C-dən D-yə	Bucaq əmsalı mənfidir, artır	–	+
D-dən E-yə	Bucaq əmsalı sıfırdır, üfüqi xətt	0	0
E-dən F-ə	Bucaq əmsalı mənfidir azalır	–	–

Şagird birinci və ikinci tərtib törəmənin fiziki mənasını, həmçinin sürət və təcilin nə zaman müsbət, nə zaman mənfi, nə zaman sıfra bərabər qəbul edildiyini analitik olaraq yazmağı və fiziki olaraq izah etməyi bacarmalıdır. Məsələn, $v(t)>0$ yazılışı obyektin müsbət, $v(t)<0$ mənfi istiqamətdə hərəkət etdiyini, $a(t)>0$ sürətin artdığını, $a(t)<0$ azaldığını göstərir. $v(t)\cdot a(t)>0$ olarsa, sürət artır, $v(t)\cdot a(t)<0$ olduqda isə azalır.

D.8 Kütləsi 3 kq olan cisim $s(t) = t^2 - 4t$ (yerdəyişmə metrlə, t zamanı saniyə ilə ölçülür) qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. Bu cismə təsir edən F qüvvəsinin qiymətini tapın.

Həlli: $s(t) = t^2 - 4t$ funksiyasının 2-ci tərtib törəməsini almaqla təcili tapaq:
$s'(\mathrm{t}) = 2t - 4$, $s''(\mathrm{t}) = 2$
Deməli, cisim $a = 2$ m/san^2 təcili ilə hərəkət edir.
Nyutonun II qanununa görə cismə təsir edən qüvvə $F = ma$ düsturu ilə hesablanır.
Baxılan halda cismə təsir edən qüvvə $F = 3\cdot 2 = 6$ N olar.

Dərs 77-79. Üstlü və loqarifmik funksiyanın törəməsi. 3 saat
Dərslik səh. 161-166

Məzmun standartı. 2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.

Şagird bacarıqları:

- üstlü funksiyanın differensiallama qaydasını tətbiq edir;
- diferensialama qaydalarını üstlü və loqarifmik funksiyaların daxil olduğu funksiyalara tətbiq edir;
- üstlü və loqarifmik funksiyanın törəməsinin tapılmasına aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.

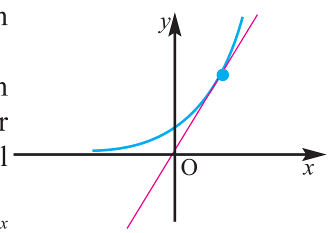
Bu dərslərdə biz $y = a^x$, $y = e^x$ kimi üstlü (eksponensial) funksiyaların x-dən asılı olaraq dəyişmə sürətlərini öyrənəcək, e ədədinin bir çox həyati situasiyalardakı dəyişmələri modelləşdimək üçün istifadə edildiyini müşahidə edəcəyik.

Əvvəlcə e ədədinin limitin köməyi ilə necə alındığını bir daha yadımıza salaq. Bunun üçün aşağıdakı hesablamaları yerinə yetirək.

$(1 + \frac{1}{n})^n$ ifadəsində $n = 1$, $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$ qiymətlərini verməklə kalkulyatorun köməyilə hesablamalar aparaq. Hesablamalar göstərir ki, n-in qiyməti artdıqca ifadənin qiyməti 2,71 ilə 2,72 arasında olur. Bu ardıcıllığın limiti e ilə işarə edilir: $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

e və π ədədləri transendent ədədlərdir. Transendent ədədlər heç bir tam əmsallı cəbri tənliyin kökü olmayan ədədlərə deyilir.

Daha sonra eksponensial funksiyanın törəmə funksiyası haqqında təxminlər yürüdülür. Sizcə, eksponensial funksiyanın törəməsi də ekponensial dəyişən funksiya olacaqmı? Biz bunu üstlü funksiyanın qrafikinə görə təxmin edə bilərikmi? Məsələn, $y = 2^x$ funksiyasının qrafikini çəkək və toxunanın bucaq əmsalını qrafik üzərində xətkeşi gəzdirməklə izləyək. Göründüyü kimi, toxunanın bucaq əmsalı qrafik üzərində qiymətini funksiyanın qiymətinə uyğun dəyişməklə həmişə müsbət qalır.

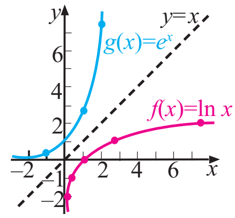


Deməli, $y = 2^x$ funksiyasının törəmə funksiyasının qiymətləri verilən funksiyaya mütənasib olaraq dəyişir və alınan funksiyanın da dəyişməsi ekponensial qaydadır: $y' = (2^x)' = 2^x \ln 2$

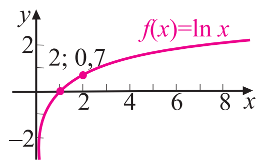
$y = e^x$ funksiyasının törəməsi isə elə $y = e^x$ funksiyasıdır.

Şagirdlərə $y = 1{,}5^x$, $y = 2{,}5^x$, $y = 3^x$, $y = 3{,}5^x$ funksiyalarının hər birinin özünün və törəmə funksiyasının qrafikini eyni koordinat sistemində qurmaq tapşırıla bilər. Hansı halda törəmə funksiyanın qrafiki verilən funksiyanın qrafikindən yuxarıda, hansı halda aşağıda yerləşir? Bu barədə fikirlərini təqdim edirlər.

Tətbiq tapşırıqları yerinə yetirilir. Dərslikdə verilmiş tətbiq tapşırıqlarında verilən situasiyaya aid daha geniş məlumat toplamaları tapşırıla bilər. Məsələn, əhali artımı, bakteriyaların çoxalması, arıların, yosunların çoxalması kimi mövzular daha geniş araşdırmalar aparmaq, müəyyən məlumatı isə törəmənin tətbiqi ilə tapıldığını göstərən təqdimatlar hazırlamaq olar. Bu tapşırıqlar kiçik layihə işi kimi yerinə yetirilə bilər.



2-ci saatda loqarifmik funksiyanın diferensiallama qaydası, qaydanın isbatı nəzərdən keçirilir. Loqarifmik funksiya ilə üstlü funksiyanın qarşılıqlı tərs funksiya olduğu vurğulanır və tərs funksiyaların xassələri yada salınır, qarfiki çəkilir. $y = \ln x$ funksiyası ilə $y = e^x$ funksiyası qarşılıqlı tərs funksiyalardır. Bu funksiyaların xassələri cədvəldə göstərildiyi kimidir.



$y = e^x$	$y = \ln x$
Təyin oblastı: $x \in R$	Təyin oblastı: $x \in (0;+\infty)$
Qiymətlər çoxluğu: $y \in (0;+\infty)$	Qiymətlər çoxluğu: $y \in R$
Bütün təyin oblastında artır.	Bütün təyin oblastında artır.
y oxunu kəsmə nöqtəsi: (0;1)	y oxu ilə kəsişmə nöqtəsi yoxdur.
x oxu ilə kəsişmə nöqtəsi yoxdur.	x oxunu kəsmə nöqtəsi: (1;0)
Üfüqi asimptotu $y = 0$ (x oxudur).	Şaquli asimptotu $x = 0$ (y oxudur).
Maksimumu və ya minimumu yoxdur.	Maksimumu və ya minimumu yoxdur.

3-cü saatda tətbiq tapşırıqları yerinə yetirilir. Tətbiq məsələlərinin həlli zamanı törəmənin verilən nöqtədəki qiymətinin situasiyaya uyğun təqdim edilməsi bacarıqlarına xüsusi diqqət yetirilir. Məsəslən, bakteriyaların çoxalması ilə bağlı 7-ci tapşırıqda $N'(t)$-ni $t = 12$ qiymətində tapın tapşırığının həlli ilə alınan ədəd bakteriyaların 12-ci saatdan sonrakı saatda artım sayını göstərir, yəni onların sayını deyil, sayındakı artımı göstərir.

Diferensiallama qaydalarının üstlü və loqarifmik funksiyaların daxil olduğu funksiyalar üçün də doğru olduğu diqqətə çatdırılır.

Qiymətləndirmə. Şagirdin üstlü və loqarifmik funksiyaların törəmə funksiyasını tapma və bu zaman diferensiallama qaydalarını tətbiqetmə bacarıqlarına görə müşahidə yolu ilə formativ qiymətləndirmə aparılır. Tətbiq tapşırıqlarının həlli zamanı loqarifmik və eksponensial hesablamaları kalkulyatorun köməyilə yerinə yetirmə, həmçinin törəmə funksiyanın qiymətinin real situasiyaya uyğun təqdimetmə bacarıqlarına görə qiymətləndirmə aparılır.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.3. (səh. 162) b) $y = e^{-2x}$ funksiyasının qrafikinə (0;1) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Həlli: b) $y = e^{-2x}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

Toxunanın tənliyi:

$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0)$

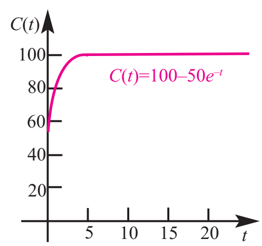
$y'(x) = (e^{-2x})' = -2e^{-2x}$;

$y'(0) = -2$; $y(0) = 1$

$y - 1 = -2\cdot(x - 0) = -2x$

$y = -2x + 1$ olur.

D.10. (səh.163) **Biznes.** Polimer məhsullar istehsal edən zavodun istehsala başladığı müddətdən etibarən A məhsulunun maya dəyərini milyon manatla $C(t) = 100 - 50e^{-t}$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.



Tələb olunanları tapın.

a) Marjinal maya dəyərini

b) $C'(0)$ qiymətini

c) $C'(4)$ qiymətini (yüzdə bir dəqiqliklə)

d) $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ və $\lim\limits_{t\to\infty} C'(t)$ qiymətlərini tapın. Məhsulun maya dəyəri xərclərinin dəyişməsinin keçdikcə 0-a yaxınlaşmasını real situasiyaya uyğun izah edin.

Həlli: $C(t) = 100 - 50\cdot e^{-t}$

a) Marjinal maya dəyəri

$C'(t) = 50\cdot e^{-t}$

b) $C'(0) = 50$

c) $C'(4) = 50\cdot e^{-4} \approx 0{,}92$

d) $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}(100 - 50\cdot e^{-t}) = 100 - 50\cdot\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 100 - 50\cdot 0 = 100$

$\lim\limits_{t\to+\infty} C'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 50\cdot e^{-t} = 0.$

Yəni, istehsal stabilləşir, maya dəyərinin dəyişməsi yoxdur.

Dərs 80-82. Triqonometrik funksiyaların törəməsi. Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 3 saat Dərslik səh. 167-170

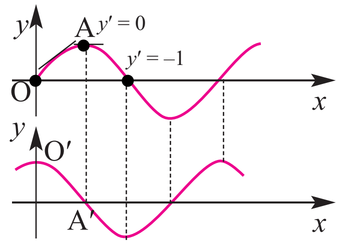
Məzmun standartı. 2.1.1. Funksiyanın törəməsi anlayışını və diferensiallanan funksiyaların xassələrini bilir, törəmənin hesablanmasının əsas qaydaları ilə tanışdır.
2.1.2. Elementar funksiyaların törəmələri cədvəlinin və törəmənin hesablanması qaydalarının köməyi ilə bəzi funksiyaların törəməsini tapır.

Şagird bacarıqları:

- $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyasının törəməsini analitik üsulla, törəmənin tərifinə görə tapır;
- $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyasının qrafikinə görə bucaq əmsallarının işarəsinin dəyişməsinə görə törəməni qrafik üsulla müəyyən edir.

Periodik hadisələri biz ətraf aləmdə hər yerdə görə bilirik. Yer kürəsinin öz oxu ətrafında periodik fırlanması, günəş sistemi planeti olaraq Günəşin ətrafında fırlanması, gecə və gündüzün, fəsillərin bir-birini əvəz etməsi, dəniz dalğalarının qabarması və çəkilməsi, insanın ürək döyüntüsü, nəfəs alması və s. Həmçinin bir çox fiziki hadisələri sinisoidal funksiyaları tətbiq etməklə modelləşdirmək olur. Elektrik, elektromaqnit, optik hadislərin bir çoxu bu qəbildəndir. Hər bir periodik hadisənin də sinus və kosinus funksiyalarının cəbri kombinasiyaları ilə ifadə etməyin mümkün olduğu riyaziyyatçılar tərəfindən isbat edilmişdir. Periodik hadisələrdə də bir-birindən asılı iki kəmiyyətin ani dəyişmələri böyük praktik əhəmiyyət kəsb edir. Bu suallara isə triqonometrik funksiyaları diferensiallamaqla cavab vermək olar.

Əgər şagird bu günkü dərslərə qədər ilkin funksiya ilə törəmə funksiyanın qrafiklərini müqayisəli şəkildə analiz etməyi öyrənmişsə, $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə görə onun törəmə funksiyasının qrafikinin $y = \cos x$ funksiyası olduğunu anlayacaqdır. Məsələn, $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinin OA hissəsində toxunanların bucaq əmsalı müsbətdir, A nöqtəsində isə toxunan x oxuna paraleldir, deməli bucaq əmsalı sıfırdır və törəmə funksiyanın qrafiki bu nöqtədə x oxunu kəsməlidir. Bu cür vizual analiz aparmaqla $y = \sin x$ funksiyasının törəməsinin $y = \cos x$ funksiyası olduğunu təxmin edə bilər. Daha sonra isə törəmənin tərifindən istifadə etməklə şagird təxminlərinin doğru olduğunu yoxlaya bilər.



Analoji qayda ilə $y = \cos x$ funksiyasının törəməsinin hansı funksiya olduğunu müəyyən etmək olar.

Şagirdin verilən nöqtədə funksiyaya çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını müəyyənetmə, triqonometrik funksiyalara diferensiallama qaydalarını tətbiqetmə bacarıqları diqqət mərkəzində saxlanılır. Diferensiallama qaydaları bir daha yada salınaraq nümunələr üzərində tətbiq edilir.

Mürəkkəb funksiyanı diferensiallama qaydasının tətbiqi:

$y = \sin^3 3x$ funksiyasının törəməsini alarkən funksiyanı $y = (\sin 3x)^3$ şəklində yazmaqla mürəkkəb qüvvət funksiyanın diferensiallama qaydasının tətbiq olunduğu izah edilir.

$$y = (\sin 3x)^3 = 3\sin^2 3x\,(\sin 3x)' = 3\sin^2 3x\,(\cos 3x)\,(3x)' = 9\sin^2 3x\cos 3x$$

1-ci dəfə mürəkkəb funksiya

2-ci dəfə mürəkkəb funksiya

Verilən nöqtədə qrafikə çəkilmiş toxunanın tənliyinin yazılması digər funksiyalara analoji qaydada yerinə yetirilir.

1. Funksiyanın törəməsi tapılır. $f'(x)$
2. Verilən nöqtədə (x_0) funksiyanın (y_0) və törəmə funksiyanın qiyməti (k) tapılır.
3. $y - y_0 = k(x - x_0)$ tənliyində qiymətlər yerinə yazılır.

$y = 3\sin 2x$ funksiyasının qrafikinə absisi $\frac{\pi}{4}$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Həlli: 1. Funksiyanın törəməsini tapaq. $y' = (3\sin 2x)' = 6\cos 2x$

2. $x = \frac{\pi}{4}$ nöqtəsində bucaq əmsalının qiymətini tapaq.

$k = 6\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} = 6\cos\frac{\pi}{2} = 0$

Deməli, bu nöqtədə toxunan x oxuna paraleldir.

3. Funksiyanın qiymətini tapaq, $y = 3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3$

4. $y - y_0 = k(x - x_0)$ tənliyində $k = 0$ olduğundan toxunanın tənliyi $y = 3$ olar.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.16 (səh.170) $y = 2\cos x\sin 2x$ funksiyasının qrafikinə absisi $x = \frac{\pi}{2}$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını tapın.

Həlli: Verilmiş funksiyanın törəməsini tapaq:

$y' = (2\cos x\sin 2x)' = (2\cos x)'\sin 2x + 2\cos x(\sin 2x)' =$

$= -2\sin x\sin 2x + 4\cos x\cos 2x$

$x = \frac{\pi}{2}$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalının qiyməti verilən nöqtədə törəmə funksiyanın qiymətinə bərabərdir.

$$k = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2}\sin\pi + 4\cos\frac{\pi}{2}\cos\pi = 0 \text{ olar.}$$

$k = 0$ olması onu göstərir ki, $x = \frac{\pi}{2}$ nöqtəsində $y = 2\cos x\sin 2x$ funksiyasının qrafikinə çəkilmiş toxunan x oxuna paralel olan üfüqi düz xəttdir.

İşçi vərəq N6

Adı_______ Soyadı_________ **Tarix__________**

Funksiyaların törəməsini tapın və triqonometrik eyniliklərdən istifadə etməklə cavabınızı sadələşdirin.

$y = \cos^2 x - \sin^2 x$

$y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$

$y = \sin^2 x - \cos 2x$

$y = 3\sin x - 2\sin^3 x$

$y = \mathrm{tg}x - x$

$y = \mathrm{ctg}x + x$

$y = \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5}$

$y = \dfrac{\sec^7 x}{7} - \dfrac{\sec^5 x}{5}$

$y = \ln(\sin^2 x)$

$y = \dfrac{1}{2}\ln(\cos^2 x)$

İşçi vərəq N7

Adı_______ Soyadı_________ **Tarix__________**

Funksiyaların qrafiklərinə verilən nöqtələrdəki toxunanın tənliyini yazın.

Funksiyalar:	Nöqtələr:
$y = \mathrm{tg}x$	$(-\frac{\pi}{4}; -1)$
$y = \sec x$	$(\frac{\pi}{3}; 2)$
$y = \sin 4x$	$(\pi; 0)$
$y = \mathrm{cosec}^2 4x$	$(\frac{\pi}{2}; 1)$
$y = \mathrm{ctg}x$	$(\frac{3\pi}{4}; -1)$
$y = \sin x\cos x$	$(\frac{3\pi}{2}; 0)$

Meyarlar

Beşinci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Funksiyanın törəməsini limitin köməyi ilə müəyyən edir.	
2.	Törəmənin verilən nöqtədə qiymətini hesablayır.	
3.	Törəmənin verilən nöqtədəki qiyməti ilə toxunanın bucaq əmsalını əlaqələndirir və toxunanın tənliyini yazır.	
4.	$f(x) = c, f(x) = x^n, g(x) = c \cdot f(x)$, $h(x) = f(x) \pm g(x)$ funksiyaları üçün diferensiallama qaydalarını tətbiq etməklə törəməyə aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.	
5.	Hasilin, nisbətin, mürəkkəb funksiyanın diferensiallama qaydasını tətbiq edir.	
5.	İkinci tərtib törəməni alma qaydasını bilir və fiziki mənasını izah edir.	
7.	Törəmənin tətbiqi ilə sadə iqtisadi məsələləri həll edir.	
8.	Üstlü və loqarifmik funksiyanı differensiallama qaydasını tətbiq edir.	
9.	Üstlü və loqarifmik funksiyanın diferensiallama ilə real həyati situasiyaya aid məsələləri həll edir.	
10	Triqonometrik funksiyanın diferensiallama qaydasını tətbiq edir.	

Dərs 83. 5-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) Funksiyaların törəməsini tapın.

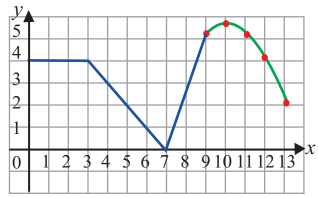
$g(x) = \sqrt{x} + (x-3)^3$ $\qquad y = \dfrac{1}{(4x+5)^2}$ $\qquad f(x) = -5x(2x-3)^4$

2) Verilən funksiyaya görə $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$ və $\dfrac{dy}{dx}$ tapın.

$y = \dfrac{u+1}{u-1}$, $\quad u = 1 + \sqrt{x}$

3) Funksiyanın qrafikinə görə törəmə funksiyanın tələb olunan qiymətini (varsa) tapın.

a) $f'(2)$ b) $f'(3)$ c) $f'(5)$
d) $f'(10)$ e) $f'(12)$ f) $f'(7)$



4) $f(x) = 3x^2 - 7x + 8$ funksiyasının qrafikinə absisi $x = 2$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

5) Aşağıdakı limitləri hesablayın. Bu limitlər hansı funksiyanın törəməsini ifadə edir?

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(x+h) - \mathrm{tg}x}{h}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{h}$

6) Aşağıdakılardan hansı $y = 5^x$ funksiyasının törəməsidir?

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5^x \cdot \ln 5$ $\qquad$ b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ $\qquad$ c) $\dfrac{dy}{dx} = 5e^x$ $\qquad$ d) $\dfrac{dy}{dx} = 5(5^x)$

7) $y = xe^x$ funksiyasının 1-ci və 2-ci tərtib törəməsini tapın.

8) Funksiyaların törəməsini tapın.

$f(x) = (2x+5)(3x-4)$ $\qquad g(x) = 4x^2(x^3 + 5x)$

9) $C(x) = 950 + 15\sqrt{x}$, funksiyası tekstil şirkətində x sayda payız gödəkçəsi istehsal edildikdə maya dəyərinin manatla riyazi modelini ifadə edir. Şirkət 400 gödəkçə istehsal etdikdə maya dəyərində dəyişmə nə qədər olacaq?

10) Funksiyaların törəməsini tapın.

$f(x)= \cos 7x^3$ $\qquad$ $f(x)= (\cos 5x)^4$ $\qquad$ $f(x)= \cos^3 7x$

11) $y = x^5 - 4x^2$ funksiyasının qrafikinə hansı nöqtələrdə çəkilmiş toxunan absis oxuna paraleldir?

12) Bir şəhərdə əhalinin sayının t zamanından (illə) asılılığı
$P(t) = 100000 + 2000t^2$ funksiyası ilə modelləşdirilə bilər.

a) Funksiyaya görə əhalinin artımının sürətini göstərən $\frac{dP}{dt}$ -ni müəyyən edin.
b) 10 ildən sonra bu şəhərdə əhalinin sayı nə qədər olacaq?
c) 10-cu ildə əhalinin artım sürətini tapın.
d) c bəndindəki cavabınızı real situasiyaya uyğun yazın.

13) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ funksiyasının törəməsini əvvəlcə nisbəti diferensiallama qaydasından istifadə etməklə, sonra qüvvət funksiyasını və mürəkkəb funksiyanı diferensiallama qaydasından istifadə etməklə tapın.

14) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x}$ funksiyasının ikinci tərtib törəməsini tapın. $f''(1)$ müəyyən edin.

15) Cisim $s(t) = 2t^2 + 5t$ qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. t zamanı saniyə ilə, s yolu metrlə göstərir. a) $v(t)$-ni tapın; b) $a(t)$-ni tapın. c) $t = 10$ olduqda sürəti və təcili tapın.

16) Yeni məhsuldan x sayda satıldıqda əldə olunan ümumi gəlir
$R(x) = 50x - 0{,}5x^2$ kimi, maya dəyəri isə $C(x) = 4x + 10$ kimi modelləşdirilmişdir.
a) $P(x)$ mənfəət funksiyası ümumi gəlirlə maya dəyərinin fərqi kimi tapılır. Bu funksiyanı yazın.
b) R(30), C(30), P(30) qiymətlərini tapın.
c) $R'(30)$, $C'(30)$, $P'(30)$ qiymətlərini tapın.

Dərs 84. **Yarımillik summativ qiymətləndirmə tapşırıqları.**

1) Funksiyanın qrafikini qurun, kəsilməzliyini araşdırın.

a) $f(x) = \begin{cases} 3, & x < 1 \\ x + 2, & 1 \leq x \leq 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

2) Limiti hesablayın.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

3) $f(x) = x^3 + x + 1$ funksiyasının $[-1; 0]$ parçasında sıfırı olduğunu əsaslandırın.

4) Təpələri A $(0; 2; 6)$, B $(6; -7; -2)$, C $(6; -8; -14)$ nöqtələrində olan üçbucağın BM medianının uzunluğunu tapın.

5) $\vec{a}\langle 2; 2; 1\rangle$ və $\vec{b}\langle 0; 2; -2\rangle$ vektorları arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

6) A $(-5; 2; 3)$, B $(2; 4; 1)$, M $(0; y; z)$ nöqtələri verilmişdir. $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{BM}$ vektorları kollineardır. y və z ədədlərini tapın.

7) n-in hansı qiymətində $x^3 + 2x^2 - 3x + n$ çoxhədlisi $(x + 1)$ -ə böləndükdə qalıq 4-ə bərabər olur?

8) $ax^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ tənliyinin bir kökünün $x_1 = 3$ olduğunu bilərək onu həll edin.

9) $x^3 - 3x + 2$ çoxhədlisini $x - 2$ ikihədlisinə bölün.

10) m-in hansı qiymətində $\vec{a}\langle 2; -1; 3\rangle$ və $\vec{b} = 3\vec{i} + m\cdot\vec{j} - \vec{k}$ vektorları perpendikulyardır?

11) $P_0\,(3; 2)$ nöqtəsindən keçən və $\vec{m}\langle 2; 1\rangle$ vektoruna paralel olan düz xəttin tənliyini yazın

12) Radiusu 4 sm, ox kəsiyinin sahəsi 40 sm^2 olan silindrin tam səthinin sahəsini tapın.

13) A (2; 1; –1) nöqtəsi normalı $\vec{n}\langle 3; -1; 4 \rangle$ olan müstəvinin üzərindədir. Bu müstəvinin tənliyini yazın.

14) $f(x) = 2x^2 - 1$ funksiyanın qrafikinə A (–1; 1) nöqtəsində çəkilən toxunanın bucaq əmsalını tapın.

15) $x(t) = 2t^3 - 5t^2 + 6t$ qanunu ilə düzxətli hərəkət edən zərrəciyin $t = 2$ san anında sürətini tapın.

16) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{x}$ funksiyasının $x = -1$ nöqtəsində törəməsinin qiymətini hesablayın.

17) $f(x) = \ln(2x - 5)$ olduqda $f'(x) > 1$ bərabərliyini həll edin.

18) $f(x) = 3x^3 - \frac{x^2}{2}$ funksiyasının qrafikinə çəkilmiş toxunan absis oxuna paraleldir. Toxunma nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

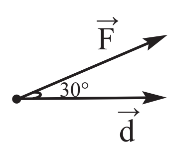
19) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ funksiyası verilmişdir.
a) $f'(x) = 0$ tənliyini həll edin.
b) $f'(x) < 0$ bərabərsizliyini həll edin.

20) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ olarsa, $f'(4)$ -ü hesablayın.

21) Konusun radiusu 8 sm, hündürlüyünün doğurana nisbəti 3:5 kimi olarsa, tam səthinin sahəsini tapın.

22) Kürə mərkəzdən 3 sm məsafədə müstəvi ilə kəsilmişdir. Kəsikdə alınan dairənin sahəsi 16π sm^2-dır. Kürənin səthinin və alınan seqmentlərin hər birirnin sferik səthinin sahəsini tapın.

23) $|\vec{F}| = 4$, $|\vec{d}| = 3$ olarsa, $\vec{F} \cdot \vec{d}$ skalyar hasilini tapın.



24) Verilmiş nöqtələrdən hansılar $2x + 3y + z - 4 = 0$ tənliyi ilə verilmiş müstəvinin üzərində yerləşir?
a) (–1; 2; 0) b) (2; 0; –1) c) (0; 2; –2)

6-cı bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir. 3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir. 3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir. 3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir. 3.2.6. Kürənin hissələrinin (kürə seqmenti, kürə sektoru) səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır.	85-87	Silindrin həcmi	3	173-176
	88-90	Konusun həcmi. Kəsik konusun həcmi	3	177-180
	91-94	Kürə və hissələrinin həcmi	4	181-185
	95-96	Oxşar fiqurların həcmi	2	186-188
	97-98	Ümumiləşdirici tapşırıqlar	2	189-190
	99	Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları	1	
	Cəmi		15	

Dərs nümunəsi

Dərs 85-87. Silindirin həcmi. 2 saat. Dərslik səh.173-176

Məzmun standartı.

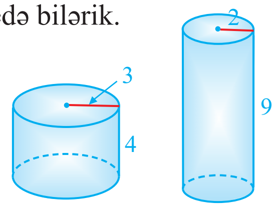
3.2.3. Silindirin yan səthinin, tam səthinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

Şagird bacarıqları:

- həcm anlayışını başa düşdüyünü real situasiyalar üzərində modellə, təcrübə ilə təqdim edir;
- silindrin həcmi düsturunu izah edir, sözlə, analitik yazılışla, şəkillə təqdim edir;
- silindrin həcminin hesablanmasına aid müxtəlif məslələri həll edir.

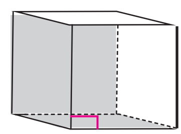
Həcm anlayışı və ümumsinif müzakirəsi. 5 dəq

1-ci saat. Həcm cisimlərin tutduğu fəza hissəsidir. Həcm dedikdə fəza fiqurlarının tutumu başa düşülür. Aşağıda verilən iki silindrdən hansının həcminin daha böyük olduğunu düşünürsünüz? Həndəsi hesablamalar aparmadan təcrübi olaraq bu suala neğə cavab tapmaq olar? Şagirdlər: həcmi həm də maye tutumu kimi müəyyən etmək olar. Biz bu qablara eyni qabla su tökməklə hansı qabın daha böyük tutuma malik olduğunu müəyyən edə bilərik.



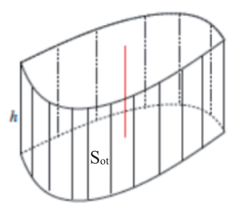
Problemin qoyuluşu və ön biliklərə dayanan müzakirəsi. 5 dəq

Təbii ki, həndəsi düsturların köməyilə də hər bir qabn həcmini hesablamaq olar. Biz artıq silindrin bir növü olan prizmaların həcmini hesablamağı bilirik. Düz prizmanın həcmi oturacağı ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir.

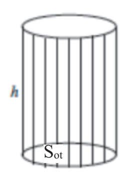


Həcm = oturacağın sahəsi · hündürlük

Şagirdərin diqqətinə çatdırılır ki, oturacağı istənilən formalı qapalı fiqur olan silindrin həcmini eyni qayda ilə oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasili kimi tapmaq olar.



Düz dairəvi silindrin də həcmi oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir. Şagirdlərlə düz dairəvi silindrin hansı xassələri olduğu yada salınır. Silindr yaradan doğuranlar oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olmalıdır, yəni oturacaq müstəvisi ilə 90° bucaq əmələ gətirməlidir.



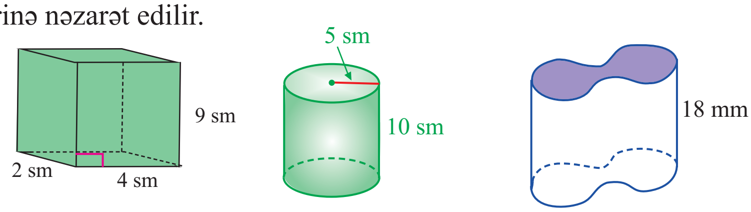
Həcm = oturacağın sahəsi · hündürlük

Silindrin oturacağı hansı fiqurdur və sahəsi necə tapılır?

Müraciət olunan şagird suala cavab verir, digər şagirdlər onun fikrinin doğru olub-olmadığına münasibət bildirirlər.

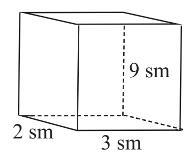
Öyrənmənin yoxlanılması. 7-10 dəq

1. Düsturun birbaşa tətbiqi.
Dərslikdə verilmiş 1-2 nömrəli tapşırıqlarla iş .
Həcmi hesablamanın aşkar etdikləri qaydasını, düsturunu nümunələr üzərində tətbiq edirlər. Bütün şagirdlərin düsturu sözlə və analitik yazılışla dəftərlərinə qeyd etdikləri verilən nümunənin şəklini və üzərindəki ölçüləri qeyd etməklə çəkdiklərinə nəzarət edilir.



Oturacağının sahəsi: 25 mm²

Öyrənmə qabilyəti zəif və müşahidə altındakı şagird lövhədə işləyə bilər. Lövhədə işləyən şagirdlə həll adımları aşağıdakı kimi sual-cavabla müşaiyət edilməklə yerinə yetirilir.



Bu fiqur necə adlanır? Düzbucaqlı paralelepiped.
Oturacağının sahəsini necə tapmaq olar. $S_{ot} = 2 \cdot 3$ sm^2
Hündürlüyü neçəyə bərabərdir? 9 sm
Həcmi necə hesablamalıyıq? $V = S_{ot} \cdot h = 6 \cdot 9 = 54$ sm^3
Sahə vahidləri və həcm vahidləri hansılardır. Biz 54 sm^3-i m^3-lə ifadə etmək istəsək, hansı çevirmələri aparmalıyıq?
54 sm^3 : $(100 \cdot 100 \cdot 100)$ deməli, 1000000-a bölməliyik. 54 sm^3-i m^3-ə çevirərkən əgər siz 100-ə bölmüş olsanız, bu səhv nəticə verər. **5-7 dəqiqə.**

2. Həcm verildikdə düstura görə digər ölçülərin tapılma məsələləri (D3) həll edilir. Bu tapşırıqları müstəqil yerinə yetirmələri üçün **5-7 dəqiqə** vaxt verilir.

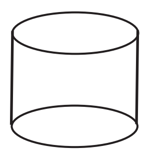
3. Situasiya tapşırıqları D4-D6 və əvvəlki bilikləri əhatə edən tapşırıqlar D8-D9 . yerinə yetirilir. Bu tapşırıqlar müzakirələrlə ümumsinif fəaliyyəti olaraq yerinə yetirilə bilər.
Lakin 4,5,6 və 7 nömrəli tapşırıqların qruplarla iş kimi yerinə yetirilməsi faydalı ola bilər. Bu tapşırıqlar ilkin tətbiq bacarıqlarını əhatə edir.
Qruplar öz aralarında iş bölgüsü aparmaqla məsələləri həll edirlər. Hər bir qrupun təqdimatına görə məsələ həllinin əhatəliliyi, düzgünlüyü müzakirə edilir və qiymətləndirilir. Qrup işlərinin yerinə yetirilməsinə **15 dəqiqə** vaxt verilir.
Qiymətləndirmə. Şagirdlərin müzakirələrdə iştirakına, fikrini təqdimetmə bacarıqlarına, məsələ həlli bacarıqlarına, qruplarla işdə aktivliyinə görə müşahidə yolu ilə formativ qiymətləndirmə aparılır.

2-ci saatda tətbiq tapşırıqları yerinə yetirilır.

Mürəkkəb fiqurların həcmini hesablama tapşırıqlarında şagird konstruksiyanı təşkil edən fiqurların hansı fiqurlar olduğunu müəyyənləşdirir.
Bu tip məsələlərin həllində mühüm məqamlardan biri konstruksiyaya həcmi artıran, yoxsa azaldan situasiyanın olduğunu aşkar etməkdir. Sitiasiyadan asılı olaraq həcmlər ya toplanacaq, ya da çıxılacaq. Şagirdlərə əlavə sual verilir. Səthin hesablanması üçün həcmin hesablama taktikası, yəni ayrı-ayrı fiqurların səthinin sahəsini hesablayıb, toplayıb və çıxmaq doğrudurmu? Bu yanaşmanın səth üçün doğru olmadığı qeyd edilir, konstruksiyasının quruluşuna görə ayrı-ayrı fiqurların müəyyən səthləri itə bilər.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.5. Silindrin hündürlüyü 5 sm, tam səthinin sahəsi 72 π sm²-dır. Silindrin həcmini tapın.



Həlli: $h = 5$, $S_{tam} = 72\pi$; silindrin radiusu R olarsa,
Şərtə görə $2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 5 = 72\pi$
$R^2 + 5R - 36 = 0$. Buradan $R = 4$ tapılır.
Onda, $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 80\pi$ sm³

D.8. Silindrin yan səthi S-ə, oturacaq çevrəsinin uzunluğu C-yə bərabərdir. Silindrin həcmini tapın.

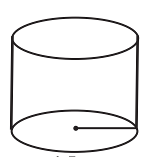
Həlli: Silindrin radiusu R, hündürlüyü h olarsa, verilənlərə görə yaza bilərik:

$2\pi R h = S$, $\quad 2\pi R = C$, $\quad h = \frac{S}{C}$, $\quad R = \frac{C}{2\pi}$,

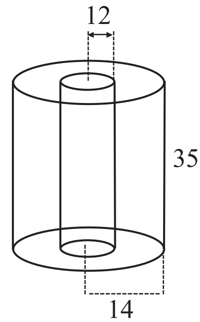
$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \frac{C^2}{4\pi^2} \cdot \frac{S}{C} = \frac{SC}{4\pi}$$

D.14. Şirə, oturacaq radiusu 15 sm, hündürlüyü 20 sm olan qablara doldurulmuşdur. Şirə hündürlüyü 6 sm, oturacaq radiusu 3 sm olan stəkanlarda satılır. Bir stəkan şirənin qiyməti 3 manat olarsa, qabla dolu şirənin satışından neçə manat pul əldə edilər?

Həlli: Həcm
$V = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 \approx 14137{,}2$ sm³
$V_{stəkan} \approx \pi \cdot 3^2 \cdot 6 \approx 54 \cdot \pi \approx 169{,}65$ sm³
$n = \frac{V}{V_{stəkan}} \approx 83$ stəkan şirə, $P \approx 250$ manat

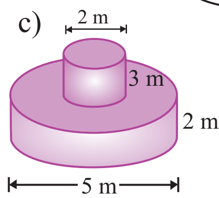


D.15. Borunun daxili diametri 24 sm, xarici diametri 28 sm və uzunluğu 35 sm-dir. Borunun hazırlandığı materialın sıxlığı 0,6 q/sm^3 olarsa, borunun kütləsini tapın.



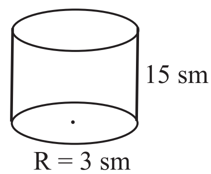
Həlli: $V = \pi\,(14^2 - 12^2) \cdot 35 = \pi \cdot 52 \cdot 32 \approx 5717{,}7$ sm^3
$m = v \cdot \rho = 3431$ q $= 3$ kq 431 q

D.18. Şəkildə verilənlərə görə mürəkkəb fiqurların həcmini hesablayın.



Həlli: c) $V = V_1 + V_2 =$
$=\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 2 + \pi \cdot 1^2 \cdot 3 =$
$= 12{,}5\,\pi + 3\pi = 15{,}5\,\pi$ m^3

D.24. Suvuran nasosun silindrinin porşeninin diametri 60 mm, hərəkət məsafəsi 150 mm-dir. Porşen 1 dəqiqədə 40 dəfə hərəkət edir. Nasosun 1 saatda vura biləcəyi suyun miqdarını tapın.



Həlli: Əvvəlcə silindrin həcmin tapaq.
$V_1 = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\,\pi$ sm^3
1 dəqiqəyə 40 dəfə hərəkət etdikdə $V = 40 \cdot V_1 = 40 \cdot 135\,\pi = 5400\,\pi$ sm^3
1 saatda nasosun vurduğu suyun miqdarı
$V = 60 \cdot 5400 \cdot 3{,}14 \approx 1017876$ sm$^3 \approx 1{,}02$ m^3

Dərs 88-90. Konusun həcmi. Kəsik konusun həcmi. 3 saat.
Dərslik səh. 177-180

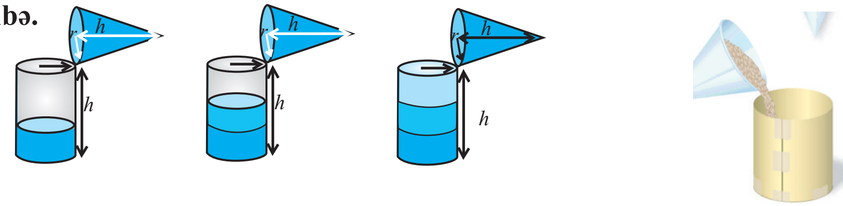
Məzmun standartı.
3.2.4. Konusun, kəsik konusun yan səthlərinin, tam səthlərinin və həcmlərinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

Şagird bacarıqları:
- konusun həcmini emprik üsulla, modellə təqdim edir;
- konusun həcmi düsturunu izah edir, sözlə, analitik yazılışla, şəkillə təqdim edir;
- konusun həcminin hesablanmasına aid müxtəlif məsələləri həll edir.

Animasiyalı nümayiş
https://www.youtube.com/watch?v=0ZACAU4SGyM&feature=youtu.be

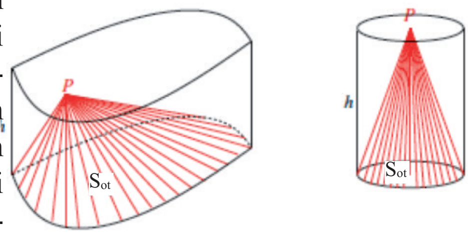
Kartondan oturacaq radiusları və hündürlükləri eyni olan silindir və konusşəkilli modellər düzəldin. Konusşəkilli qabla (qum, düyü və s) silindrik qabı doldurun. Neçə konusşəkilli qab silindrik qabı doldurdu? Üç dolu konusşəkilli qabın silindir qabı doldurduğu fikri doğrudurmu?

Təcrübə.



Şagirdlər təcrübi olaraq yoxlamaqla bu suallara cavab verirlər. Bu təcrübələrin keçirilməsi həcm düsturunu uzunmüddətli yaddaşda saxlama effekti yaratmaqla bərabər düsturun da tətbiqini asanlaşdırır.

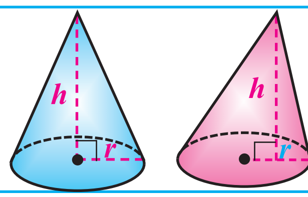
Konusa silindirn ümumi tərifindən yanaşmaq olar. Tutaq ki, P Nöqtəsi silindrin oturacaqlarından birinin üzərindədir. Bu nöqtə ilə digər oturacağın hər bir nöqtəsini birləşdirən bütün parçaların və oturacağın əmələ gətridiyi fiqura konus (və ya konik fiqur) deyilir.



Hər bir şagirdin konusun həcmini emprik yolla, modellə və aşağıdakı kimi düsturla, sözlə və şəkillə təqdim etmə bacarıqlarının formalaşdırılmasına çalışılır. Həmçinin göstərilən Youtube linklərindən bu təcrübələri izləmələri çox vacibdir.

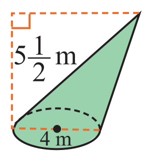
Konusun həcmi oturacağı ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir.

$$V = \frac{1}{3} S_{ot}h, \quad S_{ot} = \pi r^2 \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Mail konusların düz konuslardan nə ilə fərqləndiyi soruşulur. Şagird düz xəttin müstəviyə perpendikulyarlığını real əşyalar üzərində modelləşdirməyi bacarmalıdır. Bu cür modelləşdirmələri sinifdə hər bir şagirdin yerinə yetirməyə təşviq edilməsi tövsiyə olunur.

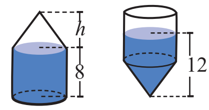
a)



2-ci saat. Kəsik konusun həcmi. Kəsik konusun həcminin alınma düsturu ümumsinif fəaliyyəti olaraq müzakirələrlə yerinə yetirilir. Həcm vahidlərinin qarşılıqlı çevirmələrinə diqqət edilir. Şagirdlər həcmin m^3, sm^3, mm^3 kimi ölçü vahidləri ilə yanaşı həcmin ton, litr, millilitr kimi maye tutumu vahidləri və onlar arasında qarşılıqlı əlaqələri əhatə edən tapşırıqları yerinə yetirirlər.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

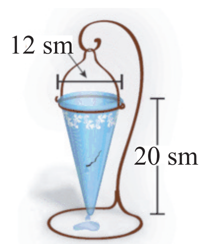
D.12. Hündürlüyü 8 sm olan silindr formalı qab hündürlüyü h olan konus formalı qabla şəkildə göstərildiyi kimi birləşdirilmişdir.Qabı tərs çevirdikdə suyun səviyyəsi 12 sm olmuşsa, konusun h hündürlüyü neçə santimetrdir?



Həlli: Şərtə görə $V = \pi r^2 \cdot 8 = \frac{1}{3} \pi r^2 h + \pi r^2 (12 - h)$ Buradan

$8 = \frac{1}{3} h + 12 - h$ və ya $h = 6$ sm olduğu tapılır.

D.13. Ölçüləri şəkildəki kimi verilən konusşəkilli qabdan dəqiqədə 4 sm³ su damcılayır. Dolu qabın 80%-i nə müddətə boşalar? 1 sm³ = 0,001 l olmasından istifadə edərək qabın tutumunu litrlə ifadə edin.

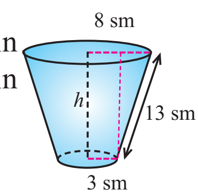


Həlli: Verilənlərə görə $r = 6$ sm, $h = 20$ sm-dir. Onda qabın həcmi

$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 20 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 36 \cdot 20 = \pi \cdot 240 \approx 754$ sm³ $\approx 0{,}75$ litr olur.

Qabdakı suyun 80%-i təxminən $754 \cdot 0{,}8 : 4 \approx 151$ dəqiqəyə boşalar.

D.19. Kəsik konusun doğuranı 13 sm, oturacaqlarının radiusları uyğun olaraq 8 sm və 3 sm olarsa, tam səthinin sahəsini və həcmini hesablayın.
Həlli: Kəsik konusun tam səthi

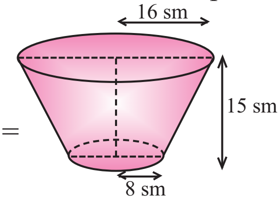


$S_{tam} = \pi l (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 =$
$= \pi \cdot B \cdot (8 + 3) + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 3^2 = \pi (143 + 64 + 9) = 216 \pi$ sm²-dir.
Kəsik konusun həcmini tapmaq üçün əvvəlcə hündürlüyünü tapaq.
$r = 3$ sm, $R = 8$ sm, $l = 13$ sm olduğundan
$h = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{13^2 - (8 - 3)^2} = 12$ sm olur. Onda kəsik konusun həcmi

$V = \frac{\pi}{3} h \cdot (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi}{3} \cdot 12 \cdot (8^2 + 3^2 + 8 \cdot 3) = 4\pi \cdot (64 + 1 + 24) = 388\pi$ sm³ olar.

D.20.

Dəmirdən hazırlanmış ağzıaçıq süd qabı kəsik konusşəkilli olmaqla hündürlüyü 15 sm, oturacaqlarının radiusları 8 sm və 16 sm-dir. Südün 1 litrinin qiyməti 1,35 manat olarsa, qabla dolu südün satışından nə qədər pul əldə edilər? Qaba sərf edilən metalın hər 100 sm^2-nın qiyməti 0,95 manat olarsa, bir qabın materalına nə qədər pul xərclənmişdir?



Həlli: R = 16

$r = 8$ $h = 15$ $l=\sqrt{(R-\nu)^2+h^2} = \sqrt{8^2+15}=17$

$V = \frac{\pi}{3} \cdot 15 \cdot (16^2 + 8^2 + 16 \cdot 8) = 5\pi\,(256 + 64 + 128) =$

$\approx 7037\ sm^3 = 7{,}037\ l$

Südün satışından əldə olunan pul $P = 7{,}037 \cdot 1.35 \approx 9{,}5$ manat olar.

$S = \pi\, l\,(R + r) + \pi r^2 = \pi \cdot 17 \cdot (16 + 8) + \pi \cdot 8^2 = 472\,\pi \approx 1482{,}83\ sm^3$

Onda, qabın materialına $P \approx 14{,}09$ manat pul xərclənər.

Dərs 91-94. Kürə və hissələrinin həcmi. 3 saat. Dərslik səh. 181-185

Məzmun standartı.

3.2.5. Kürənin səthinin sahəsinin və həcminin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

3.2.6. Kürənin hissələrinin (kürə seqmenti, kürə sektoru) səthlərinin sahələrini və həcmlərini tapır.

Şagird bacarıqları:

- kürənin həcmini emprik üsulla, modellə təqdim edir
- kürənin həcmi düsturunu izah edir, sözlə, analitik yazılışla şəkillə təqdim edir
- kürənin həcminin hesablanmasına aid müxtəlif məslələri həll edir

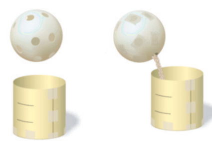
https://www.youtube.com/watch?v=aLyQddyY8ik

https://www.youtube.com/watch?v=h4j8l3p22e8

Təcrübə. 1. Hər hansı top götürün. Onun diametrini təxmin edin.

2. Diameri və hündürlüyü topun hündürlüyü ilə eyni olan silindrin açılış şəklini kağız üzərində çəkin.

3. Kağızı kəsib qatlayıb, yapışqanlı bantlarla bərkitməklə ağzı açıq silindr quraşdırın. Silindri hündürlüyü boyu 3 bərabər hissəyə bölməklə üzərində işarələr qoyun.



4. Topun ətrafına folqa və ya bərk parça çəkin və sferik torba düzəldin. Torbanı qumla doldurun.

5. Qumu düzəltdiyiniz silindr qaba boşaldın. Silindrin hansı hissəsi qumla doldu?

Model

Kürə səthini üfüqi və şaquli xətlərlə (meridian və paralellərlə) şəbəkə şəklində hissələrə ayırsaq və şəbəkəni təşkil edən hər bir kiçik “düzbucaqlı”nın təpəsini sferanın mərkəzi ilə birləşdirsək, kürənin kiçik “piramidalar”dan təşkil olunduğunu təsəvvür etmək olar.

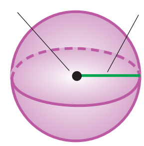
Animasiyalı nümayiş.

https://www.youtube.com/watch?v=aLyQddyY8ik
https://www.youtube.com/watch?v=h4j8l3p22e8

Sferanın həcmi düstiuru da silindr, konusun həcmi dərslərində olduğu kimi təcrübi yolla, modellə və internet linki vasitəsi ilə animasiyalı nümayişləri izləməklə, aşkar edilir, “kəşf edilir”. Kürənin həcmi düsturu sözlə, düsturla, şəkillə olmaqla aşağıdakı kimi təqdim edilir.

Kürənin həcmi $\frac{4}{3}\pi$ ilə radiusu kubunun hasilinə bərabərdir.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

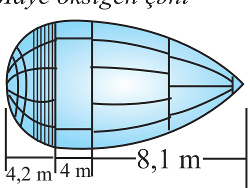


? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

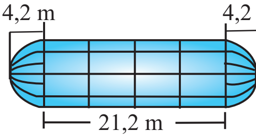
D.6 Kosmik gəmiləri yanacaqla təmin etmək üçün kosmik şatl adlanan orbital gəmilərdən istifadə edilir. Bu gəmilər Yerətrafı orbitdəki gəmilərə lazımi yükləri çatdırmaq üçün istifadə edilir. Şatllar digər kosmik gəmilərdən fərqli olaraq dəfələrlə orbitə gedib qayıtmaq imkanlarına malikdir. Şatlın maye oksigen və maye hidrogen çənləri var.

Maye oksigen çəni formaca yarımkürə, silindr və konusun birləşməsindən düzəldilmişdir. Maye hidrogen çəni isə sonlarında yarımkürə olan silindirdir. Şəkildə verilən ölçülərə görə çənlərin həcmini hesablayın.

Maye oksigen çəni



Maye hidrogen çəni



Həlli: Maye oksigen çəni radiusu 4,2 m olan yarımkürədən, radiusu 4,2 m, hündürlüyü 4 m olan silindrdən və hündürlüyü 8,1 m olan konusdan ibarətdir. Çənin həcmi:

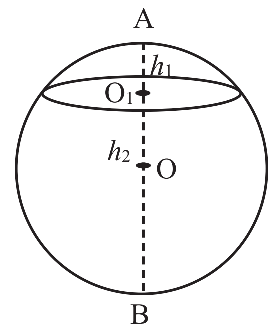
$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 4{,}2^{\,3} + \pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 8{,}1 = 167{,}85\,\pi \approx 526{,}5\ (m^3)$$

Maye hidrogen çəni radiusu 4,2 m olan iki yarımkürədən, radiusu 4,2 m, hündürlüyü 21,2 m olan silindrdən ibarətdir. Çənin həcmi:

$$V_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 4{,}2^{\,3} + \pi \cdot 4{,}2^2 \cdot 21{,}2 = 98{,}784\,\pi + 373{,}968\,\pi =$$
$$= 472{,}752\,\pi \approx 1485{,}2\ (m^3)$$

D.10 Kürənin diametrinə perpendikulyar olan müstəvi diametri 3 sm və 9 sm olmaqla 2 hissəyə bölür. Kürənin həcmi hansı hissələrə bölünür?
Həlli: Şərtə görə $O_1A = 3$ dm, $O_1B = 9$ m.
Deməli, çevrənin diametri $d = 3 + 9 = 12$ sm-dir
$d = 2R$ olduğundan, $R = 12 : 2 = 6$ sm-dir. R radiuslu kürənin

H hündürlüklü seqmentinin $V_{seqm} = \pi H^2(R - \frac{1}{3}H)$



həcm düsturundan kürənin bölündüyü seqmentlərin həcmləri uyğun olaraq

$$V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot (6 - \frac{1}{3} \cdot 3) = 45\,\pi\ (sm^3),$$

$$V_2 = \pi \cdot 9^2 \cdot (6 - \frac{1}{3} \cdot 9) = 243\,\pi\ (sm^3) \text{ olar.}$$

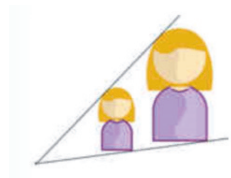
Dərs 95-98. Oxşar fiqurların həcmi. Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 4 saat
Dərslik səh. 186-190

Məzmun standartı
3.2.2. Fəzada oxşarlıq çevirməsini məsələlər həllinə tətbiq edir

Şagird bacarıqları:
- fəza fiqurlarının oxşarlıqlarını onların xətti ölçülərinin nisbətinə görə müəyyən edir
- oxşar fəza fiqurlarının verilən xətti ölçülərinə görə onların həcmləri nisbətini müəyyən edir.
- fəza fiqurlarının oxşarlığından istifadə etməklə müxtəlif məsələləri həll edir.

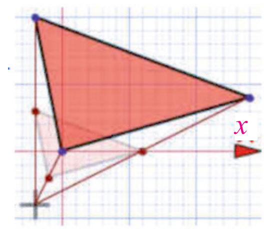
Fəza fiqurlarının oxşarlığı müstəvi fiqurlarda olduğu kimidir. Yəni oxşar fiqurların forması eynidir, yalnız xətti ölçüləri müəyyən əmsalla fərqlənir.

Oxşar fiqurların uyğun bucaqları bərabər, uyğun ölçüləri mütənasibdir.



Oxşar fəza fiqurlarının istənilən xətti ölçülərinin nisbəti bərabər olmalıdır. Bura fırlanma fiqurlarında hündürlük, diametr, radius, çevrə uzunluğu, doğuran və s mümkün ölçülər daxildir. Oxşar fiqurların sahələri nisbəti xətti ölçülərin kvadratları nisbətinə, həcmlərinin nisbəti isə xətti ölçülərin kublarının nisbətinə bərabərdir.

Homotetiya oxşarlıq çevrilməsidir, homotetiya mərkəzi adlanan müəyyən nöqtəyə nəzərən fiqurun k əmsalı ilə böyüməsi və ya kiçilməsidir.



Şagirdlərə aşağıdakı kimi şifahi suallar verilir.

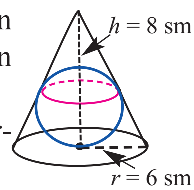
1) İki prizmanın xətti ölçülərinin nisbəti 1: 4 kimidir. Onların sahələri nisbətini söyləyin.

2) İki kürədən birinin radiusu 6, digərininki 9-dur. Onların həcmləri nisbətini söyləyin.

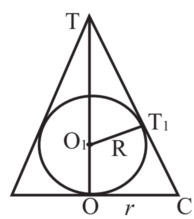
? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D 7. (səh 189) a) Radiusu 6 sm, hündürlüyü 8 sm olan konusun daxilində yerləşdirilmiş ən böyük radiuslu kürənin həcmini tapın.

b) Radiusu r, hündürlyü h olan konusvari qabın daxilində yerləşdirilmiş ən böyük həcmli kürənin radiusunu tapın.



Həlli: a) Radiusu 6 sm, hündürlüyü 8 sm olan konusun doğuranı $l = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ sm olar. Konusun daxilində yerləşmiş ən böyük radiuslu kürə konusun oturacağına və bütün doğuranlarına toxunmalıdır. Konusun ox kəsiyinə baxaq.



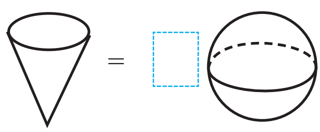
$\Delta TT_1O_1 \sim \Delta TOC$ olduğundan $\frac{R}{6} = \frac{8 - R}{10}$, Buradan $10R = 48 - 6R$, $R = 3$ sm. Onda axtarılan kürənin həcmi $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 =$ $= \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 108\,\pi$ sm^3 olar.

b) Yenə də ox kəsiyinə baxaq və ΔTT_1O_1 və ΔTOC üçbucaqlarının oxşarlığından istifadə edək. $O_1T = h - R$ olduğundan $\frac{R}{r} = \frac{h - R}{\sqrt{r^2 + h^2}}$ münasibətini yaza bilərik. Buradan $R(\sqrt{r^2 + h^2}) = rh - rR$, $R = \frac{h \cdot r}{\sqrt{r^2 + h^2} + r}$ tələb olunan ən böyük həcmli kürənin radiusunu tapmış oluruq.

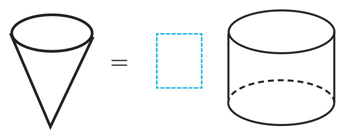
İşçi vərəq N1

Adı ________ **Soyadı** ________ **Tarix** ________

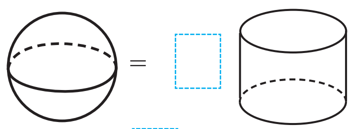
1) Tamamlayın.



$V_{kon} = \square$ kürə



$V_{kon} = \square$ silindr

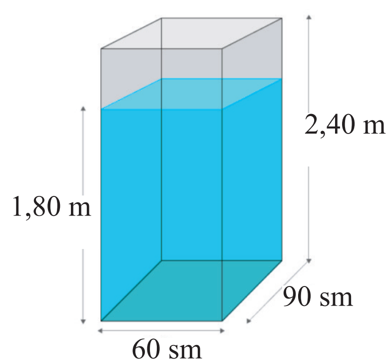


$V_{kon} = \square$ kürə

2) Cədvəli doldurun.

Radius	Çevrə uzunluğu	Dairənin sahəsi	Hündürlüyü 6 sm olan silindrin həcmi	Hündürlüyü 6 sm olan konusun həcmi	Kürənin həcmi
10 sm					

3) Ölçüləri 60 sm × 90 sm, hündürlüyü 2,40 m olan çəndəki suyun səviyyəsi 1,80 m hündürlükdədir. Çənə boyu 1,80 m olan şəxs girsə çəndəki su hansı səviyyəyə yüksələr? Göstəriş: Şəxsi radiusu 20 sm olan silindrik formada fiqur kimi qəbul edin.

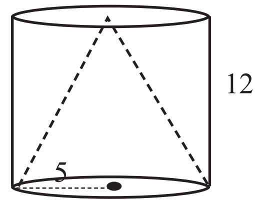


6- cı bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları cədvəli

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Silindrin həcm düsturunu izah edir, sözlə, analitik yazılışla, şəkillə təqdim edir	
2.	Silindrin həcminin hesablanmasına aid müxtəlif məslələri həll edir	
3.	Konusun həcm düsturunu izah edir, sözlə, analitik yazılışla, şəkillə təqdim edir	
5.	Konusun və kəsik konusun həcminin hesablanmasına aid müxtəlif məsələləri həll edir.	
6.	Kürənin həcmi düsturunu izah edir, sözlə, analitik yazılışla, şəkillə təqdim edir	
7.	Kürənin və hissələrinin həcminin hesablanmasına aid müxtəlif məsələləri həll edir	
8.	Oxşar fəza fiqurlarının həcmlərinə aid məsələləri həll edir.	

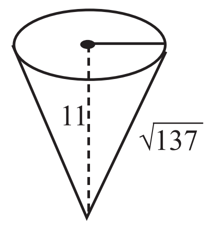
Dərs 99. 6-cı bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) Oturacağçnın radiusu 5 vahid, hündürlüyü 12 vahid olan silindrin daxilinə oturcağının radiusu və hündürlüyü onunla eyni olan konus yerləşdirilmişdir. Konusn xaricində, lakin silindrin daxilində qalan həcmi π vahidlərlə tapın.



2) Həcmi 300π sm^3 olan konusun hündürlüyü 15 sm-dir. Konusun oturacağının radiusunu tapın.

3) Ölçüləri şəkildəki kimi olan konusun həcmini tapın.

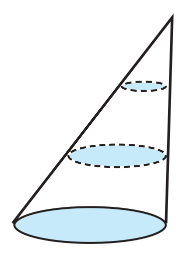


4) a) 3-cü sualdakı konusa oxşar olan hər hansı bir konusun uyğun ölçülərini yazın.

b) 3-cü sualdakı konusa oxşar olaraq müəyyən etdiyiniz konusun həcmini tapın.

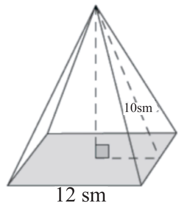
5) Mağazada satılan hündürlüyü 6 sm, oturacağının radiusu 5 sm olan konusşəkilli qızılı suvenirin kütləsi 0,945 q-dır. Qızılın sıxlığı 19, 32q/sm^3-dir. Suvenirin xalis qızıldan olub olmadığını izah edin. Sıxlıq = kütlə/həcm düsturundan istifadə edin.

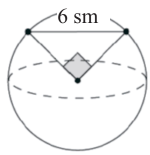
6) Oturacağının sahəsi S, hündürlüyü *h* olan konus oturacağına paralel müstəvilərlə və eyni hündürlüklü qatlara kəsilmişdir. Hər bir hissənin həcmini aşağıdakı addımlarla tapın.
a) ən yuxarıdakı qat (bütöv konusa oxşar konus olaraq, oxşarlıq əmsalı 1/3)
b) orta qatdakı kəsik konus (paralel müstəvilərlə ayrılan iki konusun həcmləri fərqi kimi)
c) alt qatdakı kəsik konus (verilən konusla ayrılan ikinci konusun həcmləri fərqi kimi)



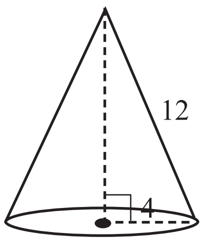
7) Hündürlüyü 1,5 m, oturacağının radiusu 75 sm olan su çəninin tutumunu hesablayın.

8) Hansının həcmi daha böyükdür?





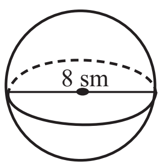
9) Leyla oturacağının radiusu 4 sm, doğuranı 12 sm olan konusun həcmini aşağıdakı kimi tapmışdır. Leylanın məsləni düzgün həll edib-etmədiyini izah edin.

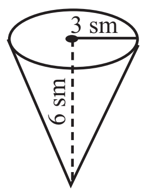


$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 12$$
$$= \frac{16 \cdot 12}{3} \cdot \pi$$
$$= 64 \cdot \pi$$

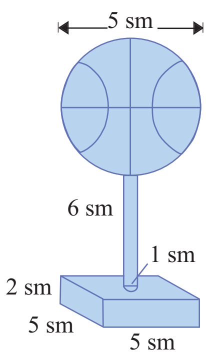
Cavab: konusun həcmi 64π sm^3

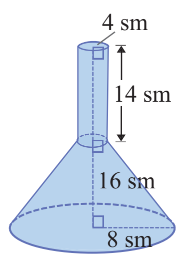
10) Verilən ölçülərə görə hansının həcminin daha böyük olduğunu müəyyən edin.





11) Kompleks fiqurun həcmini tapın.





12) Radiusu 5 sm olan kürədən uyğun seqmentin hündürlüyü 2 sm olan kürə sektoru kəsilib çıxarılmışdır. Kürə sektorunun həcmini tapın. Sektorun həcmi kürənin həcminin hansı hissəsini təşkil edir?

7-ci bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
2.2.1. Funksiyanın törəməsinin köməyi ilə onun stasionar nöqtələrini tapır, bu nöqtələrin ekstremum nöqtələri olub-olmadığını yoxlayır. 2.2.2. Funksiyaların araşdırılmasına və qrafikinin qurulmasına diferensial hesabını tətbiq edir.	100-102	Funksiyanın artma və azalma aralıqlarının tapılması	3	192-196
	103-105	Funksiyanın böhran nöqtələri və ekstremumları	3	197-204
	106-109	Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın qrafikinin qurulması. Çoxhədli funksiyaların qrafikinin qurulması Rasional funksiyaların qrafikinin qurulması	4	205-208
	110-112	Ekstremumun tapılmasına aid məsələ həlli. Optimallaşdırma	3	209-215
	113-115	Ümumiləşdirici tapşırıqlar Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları.	3	216-217
	Cəmi		16	

Dərs 100-102. Funksiyanın artma və azalma aralıqlarının tapılması. 3 saat. Dərslik səh. 192-196

Məzmun standartı.
2.2.1. Funksiyanın törəməsinin köməyi ilə onun stasionar nöqtələrini tapır, bu nöqtələrin ekstremum nöqtələri olub-olmadığını yoxlayır.

Şagird bacarıqları:
- funksiyanın artma və azalma aralıqlarını onun qrafiki üzərində göstərir;
- funksiyanın artma və azalma aralıqlarını funksiyanın törəməsinə görə müəyyən edir.

Biz indiyə qədər qrafikləri funksiyanın qiymətlər cədvəlinə görə qururduq, həmçinin bir neçə əlverişli nöqtəni müəyyən etməklə kvadrat, kub funksiyaların qrafikini sxematik çəkə bilirik. Sadə rasional funksiyaların qrafikini sxematik qurarkən isə funksiyanın asimptotlarını da müəyyən etmək lazım gəlirdi. Amma istənilən funksiyanın qrafikini qrafkalkulyatorun köməyilə asanlıqla dəqiq qurmaq olur. Bəs qrafkalkulyatorlar bu qrafikləri hansı informasiya əsasında qurur? Əsasını limit, törəmə və inteqralın təşkil etdiyi riyaziyyatın bir bölməsi olan riyazi analizin qayda, tərif, teoremlərinin funksiya haqqında müəyyən etdiyi məlumatlar qrafkalkulyatorlara bu işi görməyə imkan verir.

Bu bölmədə biz törəmənin köməyilə funksiyanın artma, azalma aralıqlarını, ekstremumlarını tapmağı, törəmənin köməyilə çoxhədli və rasional funksiyaların qrafikini qurmağı öyrənəcəyik. Həmçinin törəmənin tətbiqi ilə optimallaşdırma məsələlərini həll edəcəyik.

Dərslikdə verilmiş öyrənmə bloku şagirdlərlə birlikdə araşdırılır. Şagird parçada kəsilməz funksiyanın təyin oblastından olan aralıqda $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1, x_2 üçün $f(x_2) > f(x_1)$ və ya $f(x_2) < f(x_1)$ şərtini yoxlamaqla funksiyanın bu aralıqda artan və ya azalan olduğunu müəyyən etməyi bacarmalıdır. Bu məqsədlə funksiyaların qrafiklərinin əks edildiyi işçi vərəqlərdən istifadə etmək olar.

Törəmənin işarəsinə görə funksiyanın artma və azalma intervallarının təyin edilməsi işini əslində bucaq əmsalının işarəsinə görə müəyyən etməklə əvvəlki dərslərimizdə araşdırmışıq. Şagird artıq toxunanın çəkilə bildiyi ekstremum nöqtələrində toxunanın üfüqi düz xətt olduğunu bilir və bu nöqtədə bucaq əmsalının qiymətinin sıfır olduğuna aid çoxsaylı tapşırıqları yerinə yetirmişdir.

Bu dərsdə funksiyanın xassələri, tək və ya cüt funksiyalar, funksiyaların asimptotları, funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluğu, qrafikin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrinin müəyyən edilməsi haqqında biliklərin yada salınması məqsədəuyğundur. Həmçinin funksiyanın törəməsinin tapılması, tənlik və bərabərsizliklərin həlli bacarıqları da törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın araşdırılması bacarıqlarının əsasını təşkil edir. Bu məqsədlə verilən işçi vərəqlərdən istifadə etmək olar.

İşçi vərəq N1

Adı _____ Soyadı_____ **Tarix__________**

1) Tənlikləri həll edin.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $18v^2 = 36v$

d) $a^2 + 5a = 3a + 35$

e) $4{,}9t^2 - 19{,}6t + 2{,}5 = 0$

f) $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$

g) $\dfrac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 1} = 0$

2) Bərabərsizlikləri həll edin. Dəyişənin mümkün olmayan qiyməti varsa, qeyd edin. Qiymətlərini yazın.

a) $2x - 10 > 0$

b) $x(x + 5) < 0$

c) $x^2(x - 4) > 0$

d) $x^2 + 5x - 14 < 0$

e) $(x - 3)(x + 2)(x - 1) \leq 0$

f) $\dfrac{x}{x^2 - 1} \geq 0$

3) Funksiyanın qrafikinin x oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

a) $f(x) = 5x - 15$

b) $g(x) = x^2 - 3x - 28$

c) $h(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

d) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$

4) Funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

a) $y = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 9$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$

d) $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

f) $k(x) = \dfrac{3}{x^2 - 9}$

g) $p(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

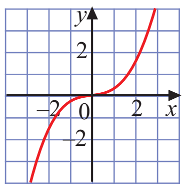
İşçi vərəq N2

Adı _____ Soyadı_____ **Tarix__________**

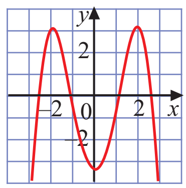
1) Tək və cüt funksiyanın tərifini yazın. Qrafik təsvir edin.

2) Qrafikləri verilmiş funksiyaların tək-cütlüyünü araşdırın.

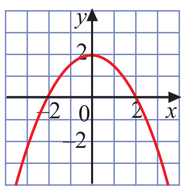
a)



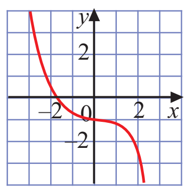
b)



c)



d)



3) Funksiyaların tək, cüt və ya heç birindən olmadığını cəbri üsulla müəyyən edin.

a) $y = 2x$

b) $r(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = -x^2 + 8$

d) $s(t) = x^3 - 27$

e) $h(x) = x + \frac{1}{x}$

İşçi vərəq N3

Adı _____ Soyadı_____ **Tarix__________**

Hansı cədvəlin hansı qrafikə aid olduğunu müəyyən edin. Fikrinizi əsaslandırıb yazın.

1)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	5

2)

x	$f'(x)$
a	*yoxdur*
b	*yoxdur*
c	–1,7

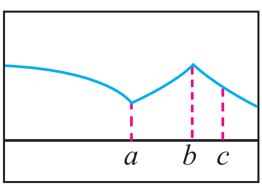
3)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	–5

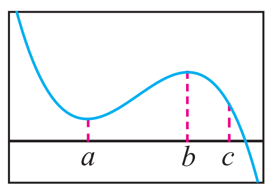
4)

x	$f'(x)$
a	*yoxdur*
b	0
c	–2

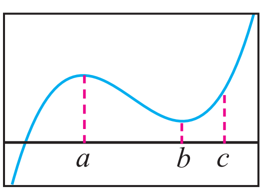
a)



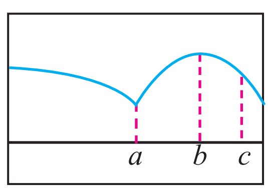
b)



c)



d)

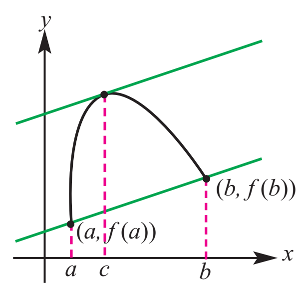


Funksiyanın artma, azalma aralıqlarının törəmənin işarəsinə görə müəyyən edilməsi haqqında teoremin orta məktəb kursunda isbatı nəzərdə tutulmur. Lakin, sinfin və ya şagirdin səviyyəsindən asılı olaraq bunun isbatını vermək olar. İsbat sadədir və parçada orta qiymət haqqında teoremə əsaslanır. Teorem onu ilk dəfə isbat etmiş İtalyada doğulmuş, sonralar Fransada yaşamış böyük riyaziyyatçı Laqranjın şərəfinə Laqranj teoremi də adlandırılır. Napoleon Bonapart Laqranjı riyaziyyatçılar arasında "ən yüksək piramida" adlandırmışdı.

Teorem (Laqranj). Funksiya $[a; b]$ parçasında kəsilməz və $(a; b)$ intervalında diferensiallanandırsa, onda $(a; b)$ intervalında elə $c \in (a; b)$ ədədi var ki,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teoremin həndəsi mənası ondan ibarətdir ki, $[a;b]$ parçasında funksiyanın qrafikinin $(a; f(a))$ və $(b; f(b))$ nöqtələrindən keçən kəsənə paralel olan toxunan düz xətt vardır. Törəmə ilə izahı isə ondan ibarətdir ki, $(a;b)$ intervalında elə c nöqtəsi var ki, bu nöqtədəki qiyməti $f'(c)$-ə bərabər olan ani dəyişmə sürəti, $[a;b]$ parçasındakı orta dəyişmə sürətinə bərabərdir.



Diqqət edin! Teorem ani dəyişmənin qiymətini müəyyən etmir, onun mövcudluğunu hökm edir. Bu teorem böyük praktik əhəmiyyət kəsb edir.

Məsələn, $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ funksiyasının (1; 4) intervalında

$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ şərtini ödəyən c -nin qiymətlərini tapın.

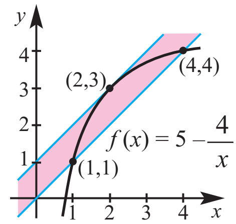
Göründüyü kimi, teoremin şərtləri ödənir: funksiya [1; 4] parçasında kəsilməzdir, (1; 4) intervalında diferensiallanandır, deməli bu intervalda elə bir c qiyməti var ki,

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = 1$$

Bu qiyməti $f'(x)$ funksiyasının ifadəsində yerinə yazmaqla c nöqtəsini müəyyən edək.

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} \qquad \frac{4}{c^2} = 1; \;\; c = \pm 2$$

$c = \pm 2$ qiymətlərindən (1;4) intervalında olan $c = 2$-dir. Deməli, toxunan absisi $x = 2$ olan nöqtədə çəkilmişdir, (1; 1) və (4; 4) nöqtələrindən keçən kəsənə paraleldir. Bunu qrafikdən də görmək olar.



Artıq, funksiyanın artma, azalması haqqında teoremi isbat etmək olar.

Teorem. Əgər funksiya $[a; b]$ parçasında kəsilməz və $(a; b)$ intervalında diferensiallanandırsa:

- $f'(x) > 0$ olarsa, funksiya $[a; b]$ parçasında artandır;
- $f'(x) < 0$ olarsa, funksiya $[a; b]$ parçasında azalandır;
- $f'(x) = 0$ olarsa, funksiya $[a; b]$ parçasında sabitdir.

İsbatı. x_1 və x_2 qiymətləri $x_1 < x_2$ olmaqla $[a, b]$ parçasından götürülmüş hər hansı qiymətlər olsun. f funksiyasına $[x_1; x_2]$ parçasında Laqranj teoremini tətbiq etsək $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ olduğunu yaza biərik.

Burada c ədədi x_1 və x_2 arasında yerləşir: $x_1 < c < x_2$

Bərabərliyin sağ tərəfinin işarəsini $f'(c)$ müəyyən edir. Çünki $(x_2 - x_1)$ müsbətdir.

$f'(c) > 0$ olduqda, $f(x_2) - f(x_1) > 0$; $f(x_2) > f(x_1)$ və ya $f(x_1) < f(x_2)$ olur və funksiya artandır.

$f'(c) < 0$ olduqda, $f(x_2) - f(x_1) < 0$; $f(x_2) < f(x_1)$ və ya $f(x_1) > f(x_2)$ olur və funksiya azalandır.

$f'(c) = 0$ olduqda, $f(x_2) - f(x_1) = 0$; $f(x_1) = f(x_2)$ olur və funksiya $[x_1; x_2]$ parçasında sabitdir. x_1 və x_2-nin ixtiyariliyindən $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında sabitdir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.9. a) Arqumentin hansı qiymətlərində funksiyanın törəməsinin sıfıra bərabər olduğunu tapın.

b) Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını tapın.

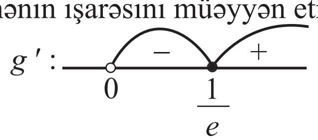
Həlli: 8) a) $g(x) = x \cdot \ln x$, $x > 0$ funksiyasının törəməsini tapaq:

$$g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

$$g'(x) = 0; \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0;$$

$\ln x = -1$; $x = e^{-1}$ törəmənin 0-a bərabər olduğu nöqtədir.

b) $x = \frac{1}{e}$ nöqtəsinin funksiyanın təyin oblastını böldüyü aralıqlarda sınaq nöqtəsi seçməklə törəmənin işarəsini müəyyən etmək olar:



Deməli, $x \in (0; \frac{1}{e}]$ olduqda funksiya azalır, $x \in [\frac{1}{e}; +\infty)$ olduqda isə artır.

D.11 b) b-nin elə qiymətlərini tapın ki, $f(x)=x^3+bx^2+12x+3$ funksiyası bütün həqiqi oxda artan olsun.

Həlli: Funksiyanın törəməsi müsbət olduqda funksiya artandır (sonlu sayda nöqtədə törəmə sıfır ola bilər). İstənilən x üçün $f'(x) \geq 0$ olmalıdır. Funksiyanın törəməsini tapaq. $f'(x)=3x^2+2bx+12$

$3x^2+2bx+12 \geq 0$ bərabərsizliyinin bütün həqiqi oxda doğru olması üçün sol tərəfdəki kvadrat üçhədlinin diskriminantı müsbət olmamalıdır.

$D=4b^2-144 \leq 0$; $b^2-36 \leq 0$, $b \in [-6; 6]$ olduqda verilmiş funksiya bütün həqiqi oxda artan olar.

Dərs 103-105. Funksiyanın böhran nöqtələri və ekstremumları.
3 saat. Dərslik səh. 197-204

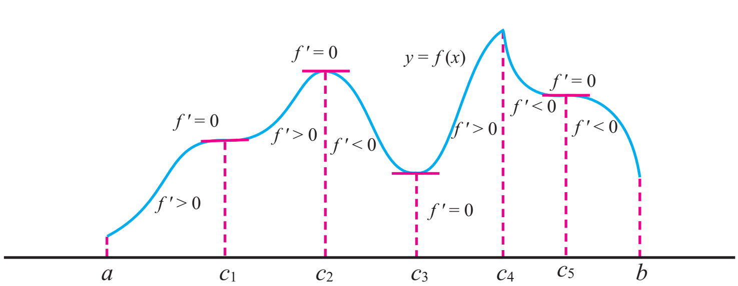
Məzmun standartı.

2.2.1. Funksiyanın törəməsinin köməyi ilə onun stasionar nöqtələrini tapır, bu nöqtələrin ekstremum nöqtələrin olub-olmadığını yoxlayır.

Şagird bacarıqları.

- törəmənin köməyilə ekstremum nöqtələrini müəyyən edir;
- törəmənin işarəsinin dəyişməsinə görə ekstremum nöqtələrinin maksimum və ya minimum olduğunu müəyyən edir;
- ekstremum nöqtələrinin tapılmasına aid məsələlər həll edir.

Bir neçə ekstremum nöqtələrinin əks edildiyi qrafik təsvir üzərində minimum, maksimum nöqtələri müəyyən edilir.



Şagirdlər qrafikdə qeyd edilmiş nöqtələrdə funksiyanın qiyməti, törəmənin qiyməti, bu nöqtələrdəki toxunanın vəziyyəti və bucaq əmsalı haqqında fikir yürüdürlər.

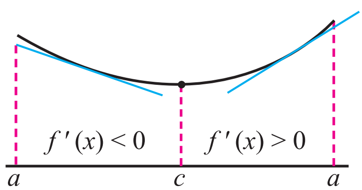
Böhran nöqtələrində funksiyanın törəməsi ya sıfra bərabərdir, ya da bu nöqtədə funksiyanın törəməsi yoxdur.

Böhran nöqtələrində törəmə varsa, toxunanın bucaq əmsalı sıfırdır və toxunan x oxuna paralel olan üfüqi düz xəttdir; törəmə yoxdursa, uyğun nöqtədə qrafikə toxunan yoxdur.

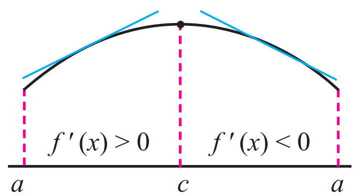
Böhran nöqtəsinin maksimum və ya minimum olduğunu isə böhran nöqtəsindən sağda və solda olan qiymətlərlə törəmənin işarəsini yoxlamaqla tapmaq olar. Aşağıdakı kimi qrafik təsvirlər işarənin dəyişməsinə görə ekstremumları əyani təsvir edir.

Şagird funksiyanın törəməsinin olmadığı nöqtələrdə də ekstremumun ola biləcəyini başa düşür. Bunun aşağıdakı kimi qrafik nümunələr üzərində tanıdılması tövsiyə edilir.

Funksiyanın törəməsinin işarəsinə görə funksiyanın maksimumu, minimumu



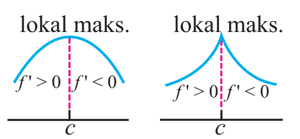
c minimum nöqtəsidir.



c maksimum nöqtəsidir.

c nöqtəsi kəsilməz f funksiyasının böhran nöqtəsi olduqda birinci tərtib törəmə ilə funksiyanın maksimumu və minimumu aşağıdakı qaydalarla tapılır:

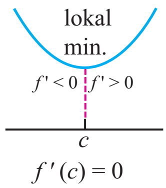
1. c nöqtəsini keçdikdə f' işarəsini müsbətdən mənfiyə dəyişirsə, ($x < c$ üçün $f' > 0$ və $x > c$ üçün $f' < 0$), c nöqtəsi f funksiyasının maksimum nöqtəsidir.

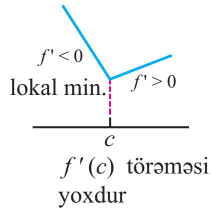


$f'(c) = 0$

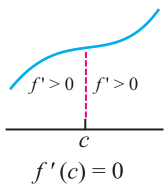
$f'(c)$ törəməsi yoxdur.

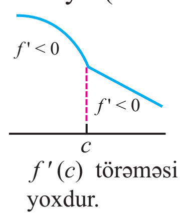
2. c nöqtəsini keçdikdə f' işarəsini mənfidən müsbətə dəyişirsə, ($x < c$ üçün $f' <$ 0 və $x > c$ üçün $f' > 0$), c nöqtəsi f funksiyasının minimum nöqtəsidir.



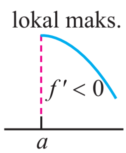


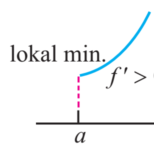
3. c nöqtəsini keçdikdə f' işarəsini dəyişmirsə (f'-in işarəsi c -nin hər iki tərəfində eynidirsə) c nöqtəsi ekstremum nöqtəsi deyil (nə maksimumdur, nə də minimum).



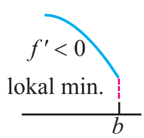


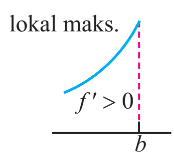
a sol uc nöqtəsi: $x > a$ üçün $f' < 0$, ($f' > 0$) olarsa, a lokal maksimum (minimum) nöqtəsidir.





b sağ uc nöqtəsi: $x < b$ üçün $f' < 0$, ($f' > 0$) olarsa, b lokal minimum (maksimum) nöqtəsidir.





Dərslikdə verilmiş nümunə tapşırıqlarını şagirdlərin müzakirələrlə dəftərlərində yazmaları və ya ev tapşırığı olaraq bir daha müstəqil olaraq araşdırmaqları tövsiyə edilir. Şagirdin müxtəlif funksiyaların araşdırmasını apardığı nümunə təqdimatların aparılması və bu təqdimatların şagird portfoliosunda toplanması məqsədəuyğundur.

Funksiyanın lokal ekstremumlarının tapılmasına aid tapşırıqlar yerinə yetirilir. Ekstremumları tapma tapşırıqlarında aşağıdakılar müəyyən edilməlidir.

1. Stasionar nöqtələr;
2. Törəmənin olmadığı nöqtələr;
3. Uc nöqtələr.

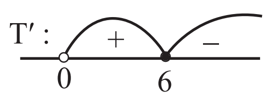
Nümunə. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ funksiyasının $-2 \le x \le 6$ aralığında ƏBQ və ƏKQ-ni müəyyən edin.
Həlli:

1. $f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)' = 3x^2 - 6x^2 - 9$
$f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x^2 - 9 = 0$; $3(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1$, $x = 3$ stasionar nöqtələrdir.
2. f funksiyası çoxhədli funksiya olduğundan bütün ədəd oxunda törəməsi var.
3. Uc nöqtələr: –2 və 6.
$x = -1$, $x = 3$, $x = -2$, $x = 6$ nöqtələrində funksiyanın qiymətlərini hesablayaq.
$f(-2) = 3$, $f(-1) = 10$, $f(3) = -22$, $f(6) = 59$. Bunlar arasından qiymətcə ən böyük olanı mütləq maksimumdur, ən kiçik olanı isə mütləq minimumdir. Funksiyanın $[-2; 6]$ parçasında mütləq minimumu $f(3) = -22$, mütləq maksimumu $f(6) = 59$-dur.

$$\min_{[-2;\,6]} f(x) = f(3) = -22, \quad \max_{[-2;\,6]} f(x) = f(6) = 59$$

D.19. Müşahidələrlə xəstənin T temperaturunun (Farengeytlə) t gündə $T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$; $0 \le t \le 12$, funksiyası ilə dəyişdiyi müəyyən edilmişdir. Bu funksiyaya görə temperaturun ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

Həlli: Xəstənin temperaturunun dəyişməsini, yəni $T(t)$ funksiyasının törəməsini tapaq: $T'(t) = -0{,}2 \cdot t + 1{,}2$.
$T'(t) = 0$ tənliyindən böhran nöqtəsini tapaq: $-0{,}2 \cdot t + 1{,}2 = 0$ və $t = 6$ alırıq.

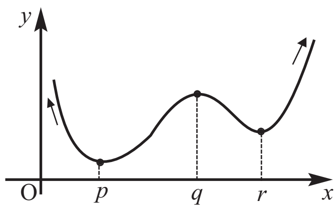


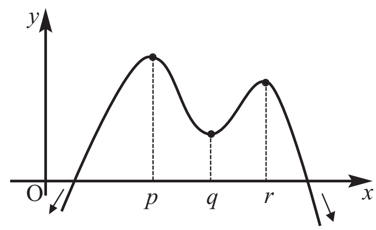
$0 < t < 6$ olduqda $T'(t) > 0$, $t > 6$ olduqda $T'(t) < 0$ olduğundan, $t = 6$ maksimum nöqtəsidir. $T(t)$ funksiyasını $t = 0;12;6$ qiymətlərində hesablayaq:
$T(0) = 98{,}6$ F; $\quad T(12) = -0{,}1 \cdot 144 + 1{,}2 \cdot 12 + 98{,}6 = 98{,}6$ F
$T_{max} = T(6) = -0{,}1 \cdot 36 + 1{,}2 \cdot 6 + 98{,}6 = 3{,}6 + 98{,}6 = 102{,}2$ F
Deməli, temperaturun ƏBQ: $T_{max} = 102{,}2$ F;
ƏKQ isə: $T_{min} = 98{,}6$ F.
Yəni, xəstənin başlanğıcda temperaturu 98,6 F olub və ilk 6 gündə qızdırması artıb, 6-cı gün temperatur özünün ən yüksək həddinə çatıb: $T_{max} = 102{,}2$ F və sonra tədricən xəstənin qızdırması azalıb və $t = 12$-ci gün temperatur öz əvvəlki halına düşüb. $T_{min} = 98{,}6$F

İşçi vərəq N4

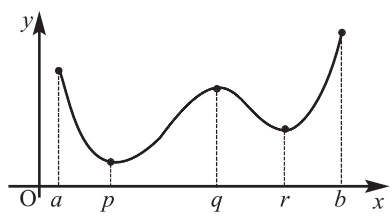
Adı _____ Soyadı_____ **Tarix__________**

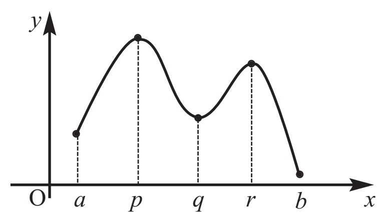
1) Bütün ədəd oxunda kəsilməz funksiyanın lokal maksimum və lokal minimum nöqtələrini yazın.





2) $[a;b]$ parçasında funksiyanın maksimum və minimum nöqtələrini yazın.





3) Aşağıdakı şərtlərə uyğun hər hansı funksiyanın qrafikini çəkin.

a) lokal minimumu (1; 1), lokal maksimumu (3; 3);
b) lokal minimumu (1; 1) və (3; 3);
c) lokal maksiimumu (1; 1) və (3; 3) nöqtələrində olan.

4) Aşağıdakı şərtlərə uyğun qrafiklər çəkin.

$f(2) = 3, f'(2) = 0$ və
a) $x < 2$ olduqda $f'(x) < 0$, $x > 2$ olduqda $f'(x) < 0$.
b) $x < 2$ olduqda $f'(x) < 0$, $x > 2$ olduqda $f'(x) > 0$.
c) $x \neq 2$ olduqda $f'(x) < 0$.
d) $x \neq 2$ olduqda $f'(x) > 0$.

İşçi vərəq N5

Adı _____ Soyadı_____ **Tarix__________**

Funksiyaların böhran nöqtələrini tapın, onlardan hansının maksimum və minimum olduğunu müəyyən edin.

1) $f(x) = x^2 + 8x + 7$

2) $f(x) = 2x^2 - 12x - 7$

3) $f(x) = \sin(x)$

4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

5) $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

6) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 11)$

7) $f(x) = 2x^3 - 96x + 42$

8) $f(x) = 5x - 2$

9) $f(x) = 5x + \cos(2x + 1)$

Verilən parçada funksiyaların ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

$f(x) = x^2 - 6x + 5$, [–2;5]

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$, [0;2]

$f(x) = 2 - x^3$, [–2;1]

$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, [1;3]

$f(x) = x^3 - 3x + 5$, [–2;1]

Dərs 106-109. Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın qrafikinin qurulması. 4 saat. Dərslik səh.205-208

Məzmun standartı.

2.2.2. Funksiyaların araşdırılmasına və qrafikinin qurulmasına diferensial hesabını tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:

- funksiyanın əsas xassələrini, təyin oblastını, qiymətlər çoxluğunu, tək və ya cüt olmasını müəyyən edir;
- funksiyanın qrafikinin x oxunu kəsmə nöqtələrini müəyyən edir;
- funksiyanın böhran nöqtələrini müəyyən edir;
- funksiyanın lokal maksimum və minimumlarını müəyyən edir;
- funksiyanın qrafikini qurur.

İki dərs saatı çoxhədli funksiyanın qrafikinin qurulmasına, iki dərs saatı da rasional funksiyanın qrafikinin qurulmasına ayrılmışdır.

Hər bir halda birinci dərs saatında nümunələrin araşdırılması, ikinci dərs saatında isə tapşırıqların yerinə yetirilməsi məqsədəuyğun olardı.

1-2-ci saat. Çoxhədli funksiyaların qrafikinin qurulmasında qrafikin x oxunu kəsmə nöqtələrinin tapılması böyük əhəmiyyət kəsb edir. Odur ki, çoxhədlinin müxtəlif üsullarla vuruqlara ayrılması bacarıqlarına diqqət edilir. Vuruqlar haqqında teorem yada salınır. Məsələn, $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ çoxhədlisini vuruqlarına ayırmaq üçün 18-in vuruqlarından istifadə etməliyik (rasional köklər haqqında teorem). $x = 1$ qiymətində $f(1) = 0$, deməli $x - 1$ ikihədlisi bu çoxhədlinin vuruğudur.

1. $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ çoxhədlisini $x - 1$ ikihədlisinə bölək.

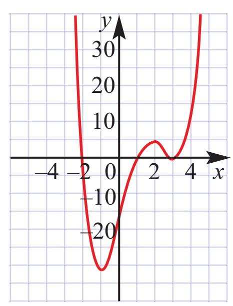
$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4 - x^3} & x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \\
-4x^3 + x^2 & \\
-\underline{-4x^3 + 4x^2} & \\
-3x^2 + 21x & \\
-\underline{-3x^2 + 3x} & \\
18x - 18 & \\
-\underline{18x - 18} & \\
0 &
\end{array}$$

2. $g(x) = x^3 - x^2 - 21x + 18$ çoxhədlisini vuruqlarına ayırmalıyıq. $g(3) = 0$ olduğundan, $x - 3$ ikihədlisi $g(x)$ çoxhədlisinin vuruğudur.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 4x^2 - 3x + 18 & x - 3 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 - x - 6 \\
-x^2 - 3x & \\
-\underline{-x^2 + 3x} & \\
-6x + 18 & \\
-\underline{-6x + 18} & \\
0 &
\end{array}$$

2. $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ olduğundan $f(x)$ funksiyasının vuruqlara ayrılışı $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)^2$ kimi olacaq.

Absisi $x = -2$, $x = 1$ olan nöqtələrdə funksiyanın qrafiki x oxunu kəsir, $x = 3$ təkrarlanan kök olduğundan x oxuna (3;0) nöqtəsində toxunub dönür. Bu funksiyanın qrafiki şəkildəki kimidir. Digər addımları şagirdlər yerinə yetirərək qrafiki qura bilərlər.



Aşağıdakı nümunədə qısa şəkildə olmaqla funksiyanın qrafikinin sxematik qurulması addımları göstərilmişdir. Bu addımlar funksiyanı bütövlükdə xarakterizə edən məqamları göstərir. Ona görə də nümunənin şagirdlərlə ətraflı şəkildə araşdırılması, müzakirə edilməsi və yazılı şəkildə yerinə yetirilməsi çox vacibdir.

Nümunə 2. $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli: Təyin oblastı: Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu

Funksiya qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapaq.
Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələri $x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x = 0$ tənliyindən tapılır.
$x(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = 0$, $x(x-4)^3 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

Deməli, x oxu ilə kəsişmə nöqtələri: (0; 0), (4; 0).
$f(0) = 0$ olduğundan qrafik koordinat başlanğıcından keçir. Böhran nöqtələrini müəyyən edək.
$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 = 4\cdot(x-1)\cdot(x-4)^2 = 0$
Böhran nöqtələri: $x = 1$; $x = 4$
Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını və ekstremumlarını müəyyən edək.

İnterval	$(-\infty; 1)$	$(1; 4)$	$(4; +\infty)$
Sınaq nöqtələri	$x = -1$	$x = 2$	$x = 5$
$f'(x)$-in işarəsi	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
Artma-azalma	$(-\infty; 1]$ -də azalır,	$[1; 4]$-də artır,	$[4; +\infty;)$-da artır

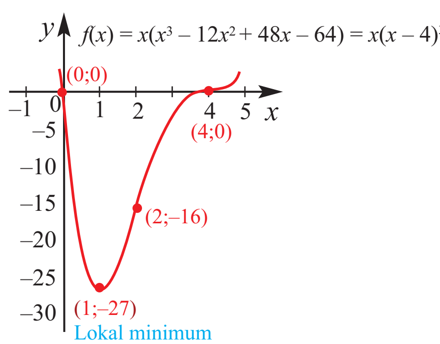
$x_{min} = 1$ dəyişmir

$f_{min} = f(1) = -27$

x sonsuzluğa yaxınlaşdıqda: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Əldə olunan məlumatlar əsasında funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edək.

	$f(x)$	$f'(x)$	Qrafik haqqında
$-\infty < x < 1$		–	azalır
$x = 1$	–1	0	lokal minimum
$1 < x < 2$		+	artır
$x = 2$	–16	+	
$2 < x < 4$		+	artır
$x = 4$	0	0	
$4 < x < +\infty$		+	artır



3-cü saat. Rasional funksiyaların qrafikinin qurulmasını araşdıran nümunələr nəzərdən keçirilir. Rasional funksiyanın asimptotlarının limitin köməyilə tapma dərsləri bir daha təkrar edilməsi məqsədəuyğundur.

Nümunə 4. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli:

1. Təyin oblastı. Funksiyasının təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur.

2. Asimptotların tapılması. Şaquli asmpitotu yoxdur, çünki funksiyanın məxrəci həmişə müsbətdir: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$

Üfüqi asimptotu tapmaq üçün funksiyanın $x \to +\infty$ və $x \to -\infty$ olduqda limitini tapaq.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Deməli, funksiyanın üfüqi asimptotu $y = 0$ xəttidir.

3. Böhran nöqtələri. $f'(x) = 0$

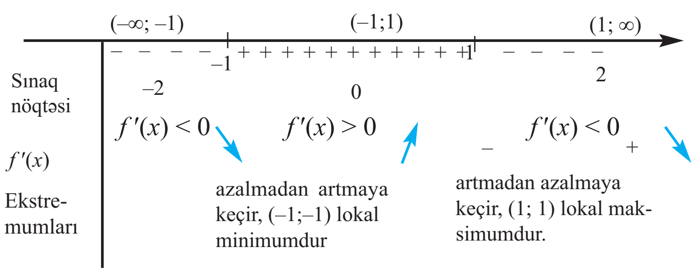
$$f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$\dfrac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$ $\qquad$ $\dfrac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$ $\qquad$ $2 - 2x^2 = 0$ $\qquad$ $x = \pm 1$

böhran nöqtələridir

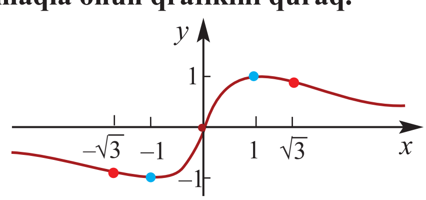
$f(-1) = -1$ $\qquad$ $f(1) = 1$ $\qquad$ $(-1;-1)$ və $(1;1)$ nöqtələri qrafikin üzərindədir.

4. Artma və azalma intervalları. Böhran nöqtələrinin təyin oblastını ayırdığı intervallarda funksiyanın artma və ya azalmasını müəyyən edək.



5. Funksiyanın maksimum, minimum nöqtələrini, monotonluq intervallarını və asimptotunu nəzərə almaqla onun qrafikini quraq.

Qrafikdən göründüyü kimi həm $x \to -\infty$ həm də $x \to +\infty$ şərtlərində funksiyanın qiyməti sıfra yaxınlaşır.



Dərs 110-114. Ekstremumun tapılmasına aid məsələ həlli. Optimallaşdırma. Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 5 saat. Dərslik səh. 209-217

Məzmun standartı.
2.2.1. Funksiyanın törəməsinin köməyi ilə onun stasionar nöqtələrini tapır, bu nöqtələrin ekstremum nöqtələrin olub-olmadığını yoxlayır.
2.2.2. Funksiyaların araşdırılmasına və qrafikinin qurulmasına diferensial hesabını tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:
■ məsələdə dəyişənlər haqqında verilən məlumatlara görə funksiyanın analitik şəklini müəyyən edir;
■ funksiyanın maksimum və ya minimum qiymətini müəyyən etməklə optimallaşdırma məsələlərini həll edir.

Biz törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın qrafikinin qurulmasını öyrəndik. Lakin müasir texnologiyanın inkişafı ilə yaranan və kalkulusun-riyazi analizin əsasında işləyən virtual alətlər funksiyanın qrafikini daha dəqiqi qurur və artıq əllə bu qrafiklərin qurulması öz praktik əhəmiyyətini itirir. Lakin gündəlik həyatımızda iqtisadiyyatın, sənayenin, tibbin və s. sahələr üzrə problemlərin həllində optimallaşdırma məsələləri böyük əhəmiyyət kəsb edir. Burada müxtəlif dəyişənlərin daxil olduğu real situasiyanın analitik riyazi modelini müəyyən etmək ən ilkin işdir. Asılı dəyişənin maksimum və ya minimum olmasını təmin edən sərbəst dəyişənin (verilən şərtlər daxilində) optimal qiymətlərini tapmaq çox müraciət edilən vacib problemlərdir.

Bir çox riyazi məsələlərin həlli də belə məsələlərə nümunə ola bilər. Məsələn, “İki ədədin fərqi 20-yə bərabərdir. Bu ədədləri elə seçin ki, onların hasili ən böyük olsun”. Göründüyü kimi burada sərbəst dəyişən iki ədədin bir-birindən asılılığı şərti verilmişdir. Burada dəyişən iki ədədi x və y kimi işarə etsək, onlar arasında bir asılılığın verildiyini də görərik, bi ədədlərin biri digərindən 20 vahid böyükdür. Deməli, optimallaşdırma məsələsinə uyğun funksiyanın analitik şəkli $f(x) = x(x+20)$ kimi olmalıdır.

Aşağıda optimallaşdırma məsələlərini həll etmək üçün plan verilmişdir. Bu planı şagirdlərin yazması və məsələlərin həllini bu plana uyğun təqdim etmələri tövsiyə edilir.

Sonra şagirdlər dərslikdə verilmiş məsələləri mövzusuna görə təsnif etməklə təqdimat şəklində hazırlaya bilərlər. Məsələn, məsələlər maksimum həcm, minimum material sərfi, maksimum gəlir, maksimum sahə kimi mövzulara ayrılmaqla həll edilə bilər.

Törəmənin tətbiqi ilə məsələ həll etdikdə aşağıdakı suallar üzərində düşünün. Bu suallara cavablar məsələni həll etməyə kömək edəcək.

Sual 1: Məsələnin şərtlərinə görə çəkilən şəkil həllə kömək edirmi?

Sual 2: Məsələnin şərtində hansı məlumatlar verilmişdir?
Aşağıdakı suallara dəqiq cavab axtarın.

- Sabit kəmiyyətlər hansılardır?
- Dəyişən kəmiyyətlər hansılardır? Bu kəmiyyətlərin qiymətləri haqqında məsələdə hər hansı məlumat varmı? Onlar mənfi, çox böyük, çox kiçik ola bilərlərmi?
- Verilən sabit kəmiyyətlə dəyişənlər arasında hansı əlaqə mövcuddur? Bu əlaqəni sözlə ifadə edin.

Sual 3: Məsələnin şərtində nəyi tapmaq tələb edilir?

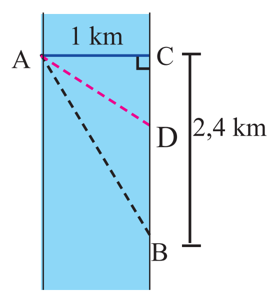
Sual 4: Qiyməti axtarılan asılı dəyişənlə məsələdə verilən sərbəst dəyişən kəmiyyət arasındakı analitik asılılığı necə ifadə etməliyəm? Bu asılılığı funksiya şəklində yazmaq üçün bütün dəyişənləri tələb edilən dəyişənlə ifadə edin. Bu zaman tələb edilən kəmiyətin ala biləcəyi qiymətləri qeyd etməyi unutmayın.

Sual 5: Funksiya hansı intervalda diferensiallanandır?

- Funksiyanın törəməsini tapın.
- Funksiyanın böhran nöqtələrini tapın.
- Böhran nöqtələrinin funksiyanın şərtlərə uyğun təyin oblastına aid olub-olmadığını yoxlayın.
- Böhran nöqtələrinin maksimum və ya minimum olduğunu müəyyənləşdirin.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.10. (Səh.213) **Minimum zaman sərfi.** Rəsul qayıqla eni 1 km olan su hövzəsinin bir sahilindəki A nöqtəsindən digər sahilində yerləşən B nöqtəsinə çatmalıdır. Bunun üçün o aşağıdakı yollardan birini seçə bilər.



1) A nöqtəsindən C nöqtəsinə qayıqla keçdikdən sonra piyada B nöqtəsinə gələ bilər.
2) A nöqtəsindən B nöqtəsinə birbaşa qayıqla gələ bilər.
3) A nöqtəsindən B və C nöqtələri arasında yerləşən hər hansı D nöqtəsinə qayıqla gəlib, D-dən B-yə yenə piyada gələ bilər.
Rəsul qayıqla saatda 3 km və piyada saatda 5 km yol qət edərsə, hansı yolu seçsə, B nöqtəsinə daha tez çatar?

Həlli: Tutaq ki, Rəsul əvvəlcə qayıqla müəyyən bir D nöqtəsinə gəlir, sonra isə piyada B-yə gəlir. CD = x qəbul edək. Onda DB = 2,4 – x olar. A-dan B-yə Rəsulun gəlməsi üçün zaman funksiyası qursaq, şərtə görə

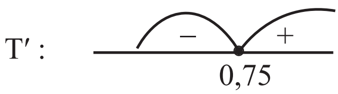
$$T(x) = \frac{AD}{3} + \frac{DB}{5} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{2{,}4 - x}{5} \quad \text{alarıq.}$$

Buradan

$$T'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 3\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt{x^2+1}}$$

$T'(x) = 0$ tənliyini həll edək. $x > 0$ olduğundan

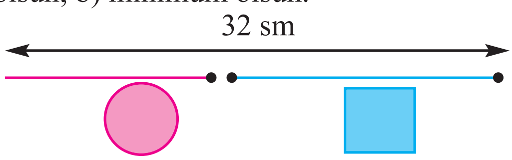
$5x - 3\sqrt{x^2+1} = 0$; $25x^2 = 9(x^2+1)$; $16x^2 = 9$; $4x = 3$; $x = 0{,}75$ km



$x \in (0; 0{,}75)$ olduqda $T'(x) < 0$, $x > 0$ olduqda isə $T'(x) > 0$ olduğundan, $x_{min} = 0{,}75$

Deməli, Rəsul C nöqtəsindən 0,75 km məsafədə olan D nöqtəsinə qayıqla gəlib, sonra piyada B nöqtəsinə getsə, ən tez çatar.

D.11. Şagirdlər 32 sm olan məftildən dairə və kvadrat modelləşdirməlidirlər. Onlar məftili iki yerə hansı ölçüdə kəsməlidirlər ki, fiqurların sahələri cəmi: a) maksimum olsun; b) minimum olsun.



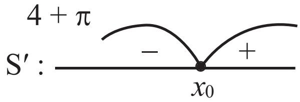
Həlli: Tutaq ki, şagirdlər məftili x və $32 - x$ kimi iki hissəyə böldülər. Onda fiqurların sahələri cəmi:

$$S(x) = \pi r^2 + a^2 = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{32-x}{4}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}x^2 + \frac{1}{16}\cdot(32-x)^2;\ 0 \le x \le 32$$

funksiyası ilə modelləşdirilər. Bu funksiyanın ekstremumlarını tapaq.

$$S'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{8}(32 - x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{8} - 4 = \frac{4+\pi}{8\pi}x - 4;$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{32\pi}{4+\pi}$$



$$x_0 = \frac{32\pi}{4+\pi}$$

$0 < x < x_0$ olduqda $S'(x) < 0$, $x > x_0$ olduqda isə $S'(x) > 0$ olduğundan

$x_0 = \dfrac{32\pi}{4+\pi}$ nöqtəsi minimum nöqtəsidir. $x = 0$ olduqda $S(0) = \dfrac{1}{16}\cdot 32^2 = 64$,

$x = 32$ olduqda $S(32) = \dfrac{1}{4\pi^2}\cdot 32^2 = \dfrac{256}{\pi^2} < 26.$

Deməli, $x = 0$ olduqda $S(x)$ funksiyası [0;32] parçasında ƏBQ-ni alır. Bu o deməkdir ki, şagirdlər məftildən yalnız kvadrat düzəltsələr, ən böyük sahə alınar, bu halda dairə düzəltməyə ehtiyac qalmır.

Optimallaşdırmaya aid maliyyə məsələləri

Biznes və maliyyə sahəsinə aid optimallaşdırma məsələlərini həll etmək üçün indiyə qədər öyrəndiyimiz maliyyə terminlərini və onların riyazi işarələmələrini bir daha yada salaq.

Maya dəyəri, $C(x)$ funksiyası x vahid məhsulun (xidmətin) hazırlanmasının qiymətidir.
Marjinal maya dəyəri, $C'(x)$ maya dəyərinin məhsulun x sayından asılı olaraq dəyişməsidir.
Gəlir, $R(x)$ funksiyası x vahid satılan məhsulun bir məhsul üçün müəyyənləşdirilmiş qiymətə hasili ilə müəyyən edilir. $R(x) = x\,p(x)$
Marjinal gəlir, $R'(x)$ gəlirin satılan məhsulun x sayından asılı olaraq dəyişməsidir.
Mənfəət əldə edilən gəlirlə maya dəyəri funksiyasının fərqi ilə müəyyən edilir: $P(x) = R(x) - C(x)$. Marjinal mənfəət gəlir və maya dəyəri funksiyalarının törəmələri fərqidir: $P'(x) = R'(x) - C'(x)$

Nümunə. Mağaza birinin qiyməti 350₼ olmaqla ayda 200 DVD pleyer (musiqi mərkəzi) satır. Mağazanın marketing meneceri düşünür ki, DVD-pleyerin qiymətinin hər 10₼ azalması ilə aylıq olaraq 20 dənə çox DVD pleyer sata bilərlər. Mağaza bir DVD pleyerin qiymətinə neçə manat endirim etsə, maksimum gəlir əldə edə bilər?

Həlli: Gəliri müəyyən etmək üçün hər 10 manat ucuzlaşma ilə bir DVD pleyerin qiymətini müəyyən etməliyik.

Əgər ayda x sayda DVD pleyer satılarsa, aylıq satış artımı $(x - 200)$ olacaq. Bu halda artıq satılan hər DVD pleyerə düşən qiymət dəyişimi $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ olacaq. Bir ədəd pleyerin qiymətini aşağıdakı kimi müəyyən etmək olar.

$$p(x) = 350 - \frac{1}{2}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

x sayda DVD player satışından gəliri göstərən funksiya aşağıdakı kimi olacaq:

$$R(x) = xp(x) = x\left(450 - \frac{1}{2}x\right) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

$R(x)$ funksiyasının törəməsi: $R'(x) = \left(450x - \frac{1}{2}x^2\right)' = 450 - x$

Funksiyanın böhran nöqtəsi: $x = 450$

$R(x)$ funksiyası kvadratik funksiya olmaqla qrafiki qolları aşağı olan paraboladır. Deməli, $x_{max} = 450$ yəni mağaza birinin qiyməti $p(450)$ olmaqla 450 pleyer satarsa, maksimum gəlir əldə edər. İndi isə bu satışa uyğun bir DVD pleyerin qiymətini tapaq:

$$p(450) = 350 - \frac{1}{2}(450 - 200) = 350 - \frac{1}{2}\cdot 250 = 225$$

Deməli, DVD pleyerlərin bir ədədinin qiyməti 225 manata qədər ucuzlaşdırıla bilər.

7-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları cədvəli

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Funksiyanın artma, azalma intervallarını funksiyanın törəməsinə görə müəyyən edir.	
2.	Törəmənin köməyilə ekstremum nöqtələrini müəyyən edir.	
3.	Birinci tərtib törəmənin işarəsinin dəyişməsinə görə ekstremum nöqtələrinin maksimum və ya minimum olduğunu müəyyən edir.	
4.	Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın qrafikini qurur.	
5.	Məsələdə dəyişənlər haqqında verilən məlumatlara görə funksiyanın analitik şəklini müəyyən edir.	
6.	Funksiyanın maksimum və ya minimum qiymətini müəyyən etməklə optimallaşdırma məsələlərini həll edir.	

Dərs 115. 7-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) Funksiyaların törəməsini tapın.

a) $g(x) = \sqrt{x} + (x - 3)$ b) $f(x) = -5x(2x - 3)^4$

2) Funksiyanın artma, azalma aralıqlarını müəyyən edin.

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140$

3) Funksiyanın ekstremum nöqtələrini tapın.

a) $f(x)= x^3 - 9x^2$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

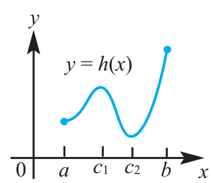
4) b-nin elə qiymətini tapın ki, $f(x) = x^3 + bx^2 + 12x + 3$ funksiyası bütün ədəd oxunda artan olsun.

5) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ funksiyasının ekstremumlarını tapın.

6) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ funksiyasının böhran nöqtələrini tapın.

7) $f(x) = 2x^3 - 24x + 5$ funksiyasının böhran nöqtələrini tapın və maksimum və minimum nöqtələri olaraq təsnif edin.

8) Verilən qrafikinə görə funksiyanın lokal ekstremumlarını, ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.



9) Hansı ədəd $f(x) = 4x - x^2 + 6$ funksiyasının [0; 4] parçasında ən böyük qiymətidir?

a) 0 b)2 c)4 d) 6 e)10

10) Kəsilməz funksiya [2; 10] aralığında azalır, $x = 4$ böhran nöqtəsidir və $f(4) = 2$. Hansı fikir doğrudur?

a) $f(10)$ qiyməti ən kiçik qiymətdir.
b) (4; 2) nöqtəsi lokal ekstremumlara uyğundur.
c) $f'(4)$ yoxdur.
d) $f'(4) = 0$.

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}$ funksiyasının asimptotlarını tapın və qrafikini qurun.

12) Aşağıdakı funksiyalardan hansının təyin oblastında iki ekstremum nöqtəsi var?

a) $f(x) = |x - 2|$

b) $f(x) = x^3 - 6x + 5$

c) $f(x) = x^3 + 6x - 5$

d) $f(x) = \mathrm{tg}x$

e) $f(x) = x + \ln x$

13) $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$, $0 < x < 5$ funksiyası həcmi modelləşdirən funksiyadır. Funksiyanın ekstremum nöqtələrini tapın. Tapdığınız qiymətləri situasiyaya uyğun izah edin.

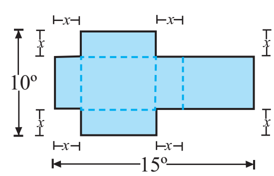
14) f funksiyası $[0; 3]$ parçasında kəsilməz, $(0; 3)$ intervalında diferensiallanandır. Cədvələ görə:
böhran nöqtələrini;
ən böyük qiymətini tapın;
sxematik qrafikini çəkin.

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	+	–
f'	+	–	–

15) Sahəsi 16 m^2 olan düzbucaqlılardan perimetri ən kiçik olanı tapın.

16) $C(x) = x^3 - 10x^2 - 30x$ funksiyası məhsulun maya dəyəri funksiyasıdır. Burada x məhsulun sayını (yüz vahidlə) göstərir. Məhsulun elə x sayını tapmaq mümkündürmü ki, maya dəyəri minimum olsun. Varsa, bu sayı göstərin.

17) Şəkildə ölçüləri 10 sm × 15 sm olan kartondan şəkildə göstərildiyi kimi künclərdən iki konqruyent kvadrat və iki konqruyent düzbucaqlı kəsilib çıxarılmaqla qutu düzəldilməsi planlaşdırılır.
x-in elə qiymətini tapın ki, qutunun həcmi maksimum olsun.



18) Törəmənin tətbiqi ilə $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ funksiyasını araşdırın və qrafikini qurun.

8-ci bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
2.2.3. İbtidai funksiya anlayışını bilir və bəzi funksiyaların ibtidai funksiyalarını tapır. 2.2.4. Qeyri-müəyyən inteqral anlayışını bilir, elementar funksiyaların inteqralları cədvəlinin və inteqrallama qaydalarının köməyi ilə funksiyaların inteqrallarını hesablayır. 2.2.5. Müəyyən inteqralın tərifini bilir və Nyüton-Leybnis düsturunu tətbiq edir. 2.2.6. Müəyyən inteqralın köməyi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayır. 2.2.7. Müəyyən inteqralın köməyi ilə fırlanmadan alınan cisimlərin həcmini hesablayır. 2.2.8. Funksiyanın cütlük-təklik, dövrülik xassələrindən müəyyən inteqralların səmərəli üsulla hesablanmasında istifadə edir. 4.1.1. Müəyyən inteqraldan istifadə edərək, əyrixətli trapesiyanın və digər müstəvi fiqurların sahəsini tapır. 4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.	116-118	İbtidai funksiya. Qeyri-müəyyən inteqral Sabitin və qüvvət funksiyasının inteqralı İnteqralın xassələri	3	219-223
	119-122	Üstlü funksiyanın inteqralı $\frac{1}{x}$ funksiyasının inteqralı. Triqonometrik funksiyaların inteqralları	4	224-228
	123-125	Əyrinin əhatə etdiyi sahə. Müəyyən inteqral və sahə	3	229-235
	126-129	Nyüton-Leybnis düsturu Müəyyən inteqralın xassələri	4	236-246
	130-132	Əyrilərlə hüdudlanmış fiqurun sahəsi	3	247-251
	133-135	Müəyyən inteqral və fırlanmadan alınan fiqurların həcmi	3	252-257
	136-137	Ümumiləşdirici tapşırıqlar	2	258-259
	138	Summativ qiymətləndirmə tapşırıqları	1	
		Cəmi	23	

Dərs 116-118. İbtidai funksiya. Qeyri-müəyyən inteqral. Sabitin və qüvvət funksiyasının inteqralı. İnteqralın xassələri 3 saat. Dərslik səh. 219-228

Məzmun standartı.

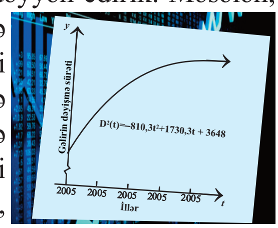
2.2.3. İbtidai funksiya anlayışını bilir və bəzi funksiyaların ibtidai funksiyalarını tapır.

2.2.4. Qeyri-müəyyən inteqral anlayışını bilir, elementar funksiyaların inteqralları cədvəlinin və inteqrallama qaydalarının köməyi ilə funksiyaların inteqrallarını hesablayır.

Şagird bacarıqları:

- inteqrallamanı diferensiallamanın tərs əməli kimi başa düşür;
- funksiyanın törəməsinə görə fikir yürütməklə ibtidai funksiyanı tapır;
- inteqrallama qaydalarını tətbiq etməklə ibtidai funksiyanı tapır;
- inteqrallamaya aid məsələləri həll edir və real situasiyaya uyğun izah edir.

Biz törəmənin köməyilə ani sürəti, ani dəyişməni müəyyən edirik. Məsələn, gedilən yola görə sürəti, gəliri göstərən funksiyaya görə verilən anda gəlirin necə dəyişdiyini, marjinal gəliri, ani temperatur dəyişməsini və s. Bəs, sürətin dəyişməsinə görə verilən zaman aralığında gedilən yolu, marjinal gəlirə görə ümumi gəliri, marjinal mənfəətə görə şirkətin ümumi mənfəətini müəyyən edə bilərikmi? Məsələn, tutaq ki, şirkətin gəliri (yüz min manatla) 2005-ci ildən 2009-cu ilə qədər illik olaraq şəkildə verilmiş funksiya ilə müəyyən olunmuşdur. Əgər D(0)=41,3 yüz min olmuşsa 2009-cu ildə şirkətin ümumi gəliri nə qədər olmuşdur? Bütün bu suallara diferensiallamanın tərs əməli olan inteqrallama ilə cavab vermək olar.



1-ci saatda ibtidai funksiyanın tərifi, qeyri-müəyyən inteqralın $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ yazılışı izah edilir. Bu yazılış göstərir ki,

$F(x) + C$ funksiyalar çoxluğu $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyalar çoxluğudur. Yaxud da $f(x)$ funksiyasının x-ə görə qeyri-müəyyən inteqralı $F(x) + C$ funksiyalar çoxluğudur. Bərabərliyin sol tərəfi qeyri-müəyyən inteqralı ifadə edir.

Sadə funksiyalar (naturalüstlü qüvvət, sabit funksiya və s.) üzərində ibtidai funksiyanı fikir yürütməklə tapma tapşırıqları yerinə yetirilir.

İnteqrallama:	**Törəmə ilə yoxlama:**
$\int 8dx = 8x + C$	$\dfrac{d}{dx}(8x + C) = 8$
$\int 3x^2dx = x^3 + C$	$\dfrac{d}{dx}(x^3 + C) = 3x^2$
$\int e^xdx = e^x + C$	$\dfrac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + C$	$\dfrac{d}{dx}(\ln x + C) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

2-ci saatda inteqrallama qaydaları araşdırılır.

İnteqrallamanın diferensiallamanın tərsi olduğu bir daha qüvvət funksiyasının diferensiallama və inteqrallama prosesləri üzərində izah edilir.

Məsələn, qüvvət funksiyası və törəməsi üçün aşağıdakı qanunauyğunluğu izləmək olar.

$h(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	...	x^n
$h'(x)$	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$5x^4$	...	nx^{n-1}

İnteqrallama törəmənin tərs əməlidir. Qüvvət funksiyasının törəməsini alarkən yerinə yetirdiyimiz addımları tərs düzülüşdə tərs əməllərə çevirsək, ibtidai funksiyanı alarıqmı? İzləyək.

Diferensiallama prosesi

Funksiya	1-ci addım	2-ci addım	Nəticə
x^n	üstə vurulur nx^n	üstdən bir çıxılır nx^{n-1}	nx^{n-1}

İnteqrallama prosesi

Nəticə	2-ci addım	1-ci addım	Funksiya
$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	üstə bölünür $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	üstə bir əlavə edilir x^{n+1}	x^n

Biz ümumi düsturu $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ və ya $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

kimi yaza bilərik.

Düsturun daha ümumi şəklini isə inteqrallamanın cəbri qaydalarına görə yaza bilərik.

$$\int ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

Şagirdlərin diqqətinə çatdırılır ki, qüvvət funksiyasını inteqrallama qaydası n-in -1-dən fərqli bütün qiymətlərində doğrudur. Gələn dərslərdə, $n=-1$ halına yenidən qayıdacağıq. Aşağıdakı inteqrallama qaydası izah edilir və onlar üzərində tətbiqi tapşırıqlar yerinə yetirilir.

Sabiti inteqrallama qaydası: $\int k\,dx = kx + C$

Qüvvət funksiyasını inteqrallama qaydası: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Qüvvət funksiyasını inteqrallamanın genişləndirilmiş qaydası: $\int ax^n dx = \dfrac{ax^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Qüvvət funksiyasını inteqrallamanın ümumi qaydası: $\int (ax+b)^n dx = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3-cü saatda inteqralın xassələri, cəbri qaydalar nəzərdən keçirilir.

$\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int[f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ $(k \neq 0)$cəbri qaydaları izah edilir.

Şagirdlər xassələri başa düşdüklərini onları sözlə, riyazi şəkildə yazmaqla və uyğun nümunələr göstərməklə aşağıdakı kimi cədvəllə təqdim edə bilərlər.

Xassələr:	Nümunələr:
$\int h'(x)dx = h(x) + C$	$\int \frac{d}{dx}(x^2)dx = \int(2x)dx = x^2 + C$
$\frac{d}{dx}(\int h(x)dx) = h(x)$	$\frac{d}{dx}(\int(x^3)dx) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{4}x^4 + C) = x^3$
$\int kh(x)dx = k\int h(x)dx, \quad k \neq 0$	$\int 12x^3dx = 12\int x^3dx = 12(\frac{1}{4}x^4 + C) = 3x^4 + C$
$\int h(x)dx \pm f(x)dx = \int h(x)dx \pm \int f(x)dx$	$\int(2x - 3x^2)dx = \int 2xdx - \int 3x^2dx = x^2 - x^3 + C$

Qruplarla iş

Qruplara müxtəlif $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalar verilir. Qrup üzvləri aşağıdakı təkliflərin doğru olduğunu göstərməlidirlər.

Məsələn, $f(x) = ax^n$; $n \neq -1$ $\quad g(x) = bx^m$; $m \neq -1$

a) $\int[f(x) + (x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$

b) $\int[f(x) - (x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$

c) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k \neq 0$

d) $\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

e) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}, \; n - m \neq -1$

Qruplarla işin nəticəsi müzakirə edilir. Deməli, cəm və fərq üçün inteqrallama qaydası olsa da, hasil və nisbət üçün inteqrallama qaydası mövcud deyil. Hasil və qismət şəklində olan ifadələr cəbri qaydalar tətbiq edilməklə cəm və ya fərq şəklinə (çoxhədli) gətirilməklə, inteqrallama qaydalarını tətbiq etmək olar.

Nümunələr və dərslikdə verilmiş tapşırıqlar yerinə yetirilir. Hər bir etapda öyrənilən inteqrallama qaydaları və aid nümunələrin əks edildiyi cədvəlin tərtib edilməsi tövsiyə edilir.

Dərs 119-122. Üstlü funksiyanın və $\frac{1}{x}$ funksiyasının inteqralı. Triqonometrik funksiyaların inteqralları. 4 saat. Dərslik səh. 224-228

Məzmun standartı.

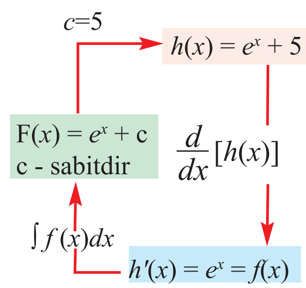
2.2.3. İbtidai funksiya anlayışını bilir və bəzi funksiyaların ibtidai funksiyalarını tapır.

2.2.4. Qeyri-müəyyən inteqral anlayışını bilir, elementar funksiyaların inteqralları cədvəlinin və inteqrallama qaydalarının köməyi ilə funksiyaların inteqrallarını hesablayır.

Şagird bacarıqları:

- üstlü funksiyanı inteqrallama qaydasını tətbiq edir;
- $1/x$ funksiyasının inteqrallama qaydasını tətbiq edir;
- triqonometrik funksiyanın inteqrallama qaydasını tətbiq edir;
- inteqrallama sabitini müəyyənləşdirməklə funksiyanın düsturunu dəqiqləşdirir;
- inteqrallamaya aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.

1-ci saat. İnteqrallama qaydası nəzərdə tutulan funksiyaların inteqrallama cədvəli şagirdlərin diqqətinə çatdırılır. Bir daha inteqrallamanın diferensiallama əməlinin tərsi olan əməl olduğu funksiyalar üzərində izah edilir. Məsələn, aşağıdakı kimi nümunə üzərində diferensiallama ilə inteqrallamanın qarşılıqlı əlaqəsinin sxematik təsvirini vermək olar. Şagirdlər başqa bir nümunə üzərində bu təsviri qururlar.



Funksiyanı inteqrallama

$1/x$ funksiyasının inteqrallama qaydasını aşağıdakı yazılışlarla da izah etmək olar.

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Hər iki tərəfi inteqrallasaq, $\int \frac{d}{dx}(\ln x)dx = \int \frac{1}{x}dx$ kimi yaza bilərik.

İnteqrallama qaydasına görə $\int \frac{d}{dx}(\ln x)dx = \ln x + \mathrm{C}$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + \mathrm{C} \text{ alınar } (x > 0).$$

Ümumiyyətlə, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$

Eyni problemin alternativ formalarda təqdimi şagirdin əlaqələndirmə bacarıqlarının, həmçinin riyazi təfəkkürünün formalaşmasında və inkişafında mühüm rol oynayır.

Aşağıdakı kimi tapşırıqların həllində diqqətli olmaları tapşırılır.
$\ln a$ və e ədədi sabiti ifadə edir. Məsələn, $\frac{7}{x\ln 2}$ funksiyasını inteqrallayarkən $7/\ln 2$ sabit vuruqdur və inteqral işarəsi xaricinə çıxarılır.

$$\int \frac{7}{x\ln 2}\,dx = \frac{7}{\ln 2}\ln x + C,\ x > 0$$

Yaxud da, şagirdlərə $\int \left(\frac{e}{x} - \frac{x}{e}\right)dx$ inteqralını tapmaq təklif edilir. Şagird e/x həddinin ibtidai funksiyasını $e\ln x$ kimi tapır, x/e funksiyasına isə qüvvət funksiyası kimi baxmaqla onun ibtidai funksiyalarından birinin $x^2/2e$ olduğunu müəyyən edir.

Funksiyalara inteqrallama qaydasının tətbiqini aydın görmələri üçün funksiyanı inteqrallamanın ən ilkin qaydalarına qədər addım-addım yazmaları tövsiyə edilir. Aşağıda bir neçə nümunə üzərində bu tapşırıq göstərilmişdir.

funksiya	ekvivalent yazılış	ibtidai funksiya	sadələşdirmə
a. $\int \frac{1}{x^3}dx$	$\int x^{-3}dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{x}{2x^2} + C$
b. $\int \sqrt{x}dx$	$\int x^{1/2}dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c. $\int 2\sin x dx$	$2\int \sin x dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

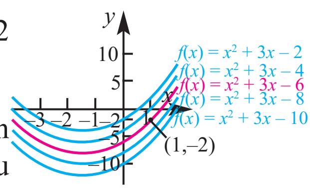
Triqonometrik funksiyaların inteqrallarının tapılmasını şagirdlər qruplarla iş kimi yerinə yetirərək aşağıdakı kimi qaydaları və uyğun nümunəni əks etdirən cədvəl şəklində təqdim edə bilərlər.

Funksiya: $f(x)$	Qeyri-müəyyən İnteqral: $\int f(x)dx$	Nümunə:
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$	$\int \sin(5x + 2)dx = -\frac{1}{5}\cos(5x + 2) + C$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$	$\int \cos(\frac{x}{4} - 1)dx = \int \cos(\frac{1}{4}x - 1)dx = 4\sin(\frac{x}{4} - 1) + C$
$\sec^2(ax + b)$	$\frac{1}{a}\mathrm{tg}(ax + b) + C$	$\int \sec^2(2x + 3)dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}(2x + 3) + C$

2-ci saatda C sabitinin tapılması ilə funksiyanın konkret düsturunun müəyyən edilməsinə aid tapşırıqlar yerinə yetirilir.

Tapşırıqların şərti aşağıdakı kimi verilə bilər.
Törəməsi $f'(x) = 2x + 3$ olan və $f(1) = –2$ şərtini ödəyən funksiyanı müəyyən edin. Yaxud da $f(x) = 2x + 1$ funksiyasının qrafiki M(1;–2) nöqtəsindən keçən (və ya F(1) = –2 şərtini ödəyən) ibtidai funksiyasını tapın.
Şagird bu funksiyaya uyğun olan və C sabitinin qiymətinə görə bir-birindən fərqlənən funksiyalar çoxluğunun mövcud olduğunu inteqralın ümumi həllinə görə başa düşür. Lakin bu halda, xüsusi həll tələb edilir. Həlli analitik və qrafik formada təqdim etmək olar.

$\int(2x + 3)dx = x^2 + 3x + C$, verilən əlavə $f(1) = –2$ şərtinə görə C sabiti müəyyən edilir.



$-2 = 1^2 + 3\cdot 1 + C$, $C = –6$. Deməli, axtarılan funksiya $f(x) = x^2 + 3x – 6$ funksiyasıdır ki, bu ibtidai funksiyalar çoxluğu arasında qrafiki qırmızı rəngli əyri ilə göstərilmişdir.

3-cü saatda inteqralın tətbiqinə aid real həyati situasiya məsələlərinin həlli yerinə yetirilir. Şagirdlərin diqqətinə çatdırılır ki, törəmə funksiya verilən aralıqda ani dəyişməni ifadə edirsə, inteqral bu aralıqdakı ümumi (qlobal) dəyişməni ifadə edir. Biz inteqralın mahiyyətini müəyyən inteqralı keçərkən daha dərindən araşdıracaq və verilən aralıqdakı artımın qiymətini müəyyən edəcəyik. Real həyati situasiyada sürət artımı, əhali artımı, canlıların çoxalması və s. inteqralın köməyilə müəyyən edilə bilər.
Dərslikdə verilmiş tapşırıqlar qeyri-müəyyən inteqral və bir nöqtənin koordinatları haqqında verilmiş məlumata görə dəqiqləşdirmə ilə yerinə yetirilən tapşırıqlardır. Məsələlər həmçinin dəyişənin verilən qiymətində artıq analitik olaraq dəqiqləşdirilmiş funksiyanın qiymətinin hesablanması üzərində qurulmuşdur. Bu tip məsələlər daha çox tətbiqi, situasiya məsələləridir. Bu tip bir məsələni nəzərdən keçirək.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.34 Zərrəcik $v(t)$ sürəti ilə düzxətli hərəkət edir. t_0 başlanğıc anında onun x_0 koordinatı verilmişdir. $x(t)$ koordinatını zamanın funksiyası kimi tapın:

a) $v(t) = 4$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ | b) $v(t) = 6$, $t_0 = 0$, $x_0 = 2$ | c) $v(t) = 2t$, $t_0 = 2$, $x_0 = 3$

Həlli: a) Bilirik ki, $v(t) = x'(t)$, yəni $x(t)$ funksiyası $v(t)$-nin ibtidai funksiyasıdır.
Onda $x(t) = \int v(t)dt = \int 4\, dt = 4t + C$
Başlanğıcda, $t_0 = 0$ olduqda, $x_0 = 0$ şərtindən $4 \cdot 0 + C = 0$ və ya $C = 0$ tapılır.
Deməli, $x(t) = 4t$.

c)$v\ (t) = 2t,\ t_0 = 2,\ x_0 = 3$
$x(t) = \int v\ (t)dt = \int 2\ tdt = t^2 + C$
$t_0 = 2$ olduqda $x_0 = 3$ şərtindən $x\ (2) = 4 + \mathrm{C} = 3 \Rightarrow \mathrm{C} = -1$
Deməli, $x(t) = t^2 - 1$

D.36 **Bakteriyaların çoxalması.** Müşahidə ilə bakteriyaların P(t) sayının

artım sürətinin $\dfrac{dP}{dt} = 200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$ kimi olduğu müəyyən edildi.

Burada t zamanı (saatla) göstərir. Müşahidənin başlanğıcında bakteriyaların sayı 200000 olarsa, 12 saat sonra onların sayı nə qədər olacaq?

Həlli: $\dfrac{d\mathrm{P}}{dt} = 200\ e^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$ olduğundan

$$\mathrm{P}(t) = \int (200e^{0,1t} + 150e^{-0,03t})\ dt = \frac{200e^{0,1t}}{0,1} - \frac{150}{0,03} \cdot e^{-0,03t} + C =$$

$$= 2000 \cdot e^{0,1t} - 5000 \cdot e^{-0,03t} + C$$

Şərtə görə t=0 olduqda $P(0)$=200000-dir.
Onda, $\mathrm{P}(0) = 2000 - 5000 + C = 200000$
Buradan $\mathrm{C} = 203000$ və $\mathrm{P}(t) = 2000 \cdot e^{0,1 \cdot t} - 5000e^{-0,03 \cdot t} + 203000$
t =12 olduqda isə bakteriyaların sayı
$\mathrm{P}(12) = 2000 \cdot e^{1,2} - 5000e^{-0,36} + 203000 \approx 206152$ olacaq.

D.37 **Ekologiya.** Maralların artımı üzərində müşahidə aparan tədqiqat qrupu hesabatında maralların sayının dəyişməsini aşağıdakı tənliklə vermişlər: $\dfrac{dN}{dt} = 3t^3 + 2t, \quad 0 \le t \le 5,$

burada N maralların sayını, t zamanı (illə) göstərir.

Müşahidəyə başlayanda 200 maral var idisə, müşahidənin sonunda onların sayı təxminən neçə olmuşdur?

Həlli: Maralların sayının zamandan asılılığını dəyişmə sürətini inteqrallamaqla tapaq: $N(t) = \int (3t^3 + 2t)\ dt = 0,75t^4 + t^2 + \mathrm{C}$. Müşahidənin başlanğıcında, $t = 0$ olduqda, $N(0) = 0,75 \cdot 0^4 + 0^2 + \mathrm{C} = 200$ olduğundan $\mathrm{C} = 200$ tapılır. Onda maralların sayının zamandan asılılığı $N(t) = 0,75t^4 + t^2 + 200$ funksiyası ilə modelləşdirilər. Müşahidənin sonunda, $t = 5$ olduqda, maralların sayı təxminən $N(5) = 0,75 \cdot 5^4 + 5^2 + 200 \approx 693$ baş olar.

İşçi vərəq N1

Adı _____ Soyadı_____ **Tarix__________**

Qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

$\int(3x^2 + 2e^x)dx$ $\int e^x dx$ $\int \frac{7}{3} e^{3x-4} dx$

$\int \frac{e^{3x} + 2e^{3x} + 4}{e^x} dx$ $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} dx$ $\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$

$\int \frac{(x + 1)^2}{x} dx$ $\int \frac{4}{x\ln 3} dx$ $\int (1 - x)(1 + x + x^2)dx$

$\int \frac{4^x - 1}{2^x + 1} dx$

$\int(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx$ $\int \sin 5x \sin x\, dx$ $\int(\sin^2 x - \cos^2 x)\, dx$

$\int \sin x \cos x\, dx$ $\int \cos 3x \cos x\, dx$ $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$

$\int \sin^2 2x\, dx$ $\int \cos^2 2x\, dx$ $\int \sin^4 x\, dx$

$\int \cos^4 x\, dx$ $\int(1 + \mathrm{ctg}^2 3\theta)\, d\theta$ $\int(1 + \mathrm{tg}^2 3\theta)\, d\theta$

Dərs 123-125. Əyrinin əhatə etdiyi sahə. Müəyyən inteqral və sahə
3 saat. Dərslik səh. 229-235

Məzmun standartı.
2.2.5. Müəyyən inteqralın tərifini bilir və Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq edir.
2.2.6. Müəyyən inteqralın köməyi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayır.
4.1.1. Müəyyən inteqraldan istifadə edərək, əyrixətli trapesiyanın və digər müstəvi fiqurların sahəsini tapır.
4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.

Şagird bacarıqları:
■ əyrinin verilən parçada əhatə etdiyi sahəni təsvir edir;
■ əyrinin verilən parçada əhatə etdiyi sahəni həndəsi düsturların köməyilə kiçik düzbucaqlılara bölüb aproksimasiya metodu ilə tapır;
■ müəyyən inteqralın qiymətini verilən parçada əyrinin əhatə etdiyi sahənin qiyməti olduğunu izah edir.

Sahənin hesablanmasının klassik qaydası, kvadrat vahidlərlə müəyyənetmə qaydası ibtidai siniflərdən başlayaraq öyrədilir. Hər hansı fiqurun sahəsi dedikdə onun əhatə etdiyi kvadrat vahidlərin sayı nəzərdə tutulur. Daha sonralar isə biz müxtəlif müstəvi fiqurların sahəsini hesablamaq üçün həndəsi düsturları öyrəndik. Bu həndəsi fiqurlar qapalı sınıq xətlərin yaratdığı sahələrdir.

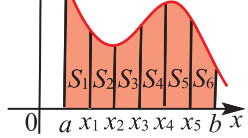
Bəs, sahə düz xətt parçaları ilə deyil, əyri xətlə qapanmış olarsa, onun sahəsini necə hesablamaq olar?

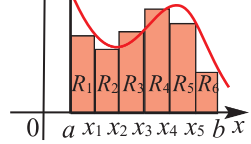
Bu sahənin qiymətinin fiziki hadisələr, real həyati situasiyalar üçün mənası necə izah edilir və praktik əhəmiyyəti nədir?

Bütün bu suallara ani dəyişməni müəyyən edən diferensiallama əməlinin tərsi olan inteqrallama əməli cavab verir.

Hər hansı sahəni müəyyən etməyə imkan verən yanaşmalar şagirdlərlə birlikdə müzakirə edilir. Müstəvi fiqurların əhatə etdiyi sahəni fiquru kiçik kvadratlara bölməklə emprik yolla hesablamaq olar. Eyni yanaşmanı əyrinin əhatə etdiyi sahə üçün də tətbiq etmək olar. Əyrinin əhatə etdiyi sahəni təqribi iki yanaşma ilə-əyrini aşan düzbucaqlıların sahələri cəmi və əyrinin altında qalan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi təqribi olaraq hesablamaq olar.

$y = f(x)$ funksiyasının $[a;b]$ parçasında əhatə etdiyi sahəni, eni Δx olan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi tapaq. Bu düzbucaqlıların sahələri cəmi $f(x)$ funksiyasının verilən intervalda əhatə etdiyi sahəyə qiymətcə yaxın olacaq. Biz düzbucaqlıları daha kiçik zolaqlar halına gətirsək, düzbucaqlıların sahələri cəmi tələb olunan sahəyə daha da yaxın olacaq. Hər bir düzbucaqlının eni $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, hündürlüyü isə təxminən $f(x_i)$ kimidir.

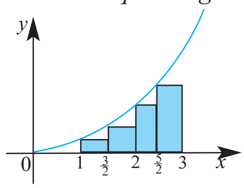




Həmiçinin bu dərsin əsas məqsədlərindən biri əyrinin əhatə etdiyi sahəni düzbucaqlıların n sayının sonsuzluğa yaxınlaşma şərtində onların sahələri cəminin limiti kimi dəqiq tapmağın mümkün olduğunu öyrənməkdir. Yəni biz əvvəlcə sahəni limitlə, daha sonra isə limiti müəyyən inteqralla əvəz etməklə addım-addım Nyuton-Leybnis düsturuna yaxınlaşacağıq.

Burada bir məsələyə diqqət çəkilir. Biz düzbucaqlıların hündürlüyünü bölgünün sol uc nöqtəsindəki, sağ uc nöqtəsindəki və ya bu nöqtələrin orta nöqtəsindəki qiyməti kimi götürə bilərik. Yaxud da sahəni kiçik trapesiyaların sahələri cəmi kimi də hesablaya bilərik. Hər bir halda faktiki (həqiqi) sahənin müəyyən xəta ilə qiymətləndirildiyi diqqətə çatdırılır.

Sol uc nöqtəsinə görə

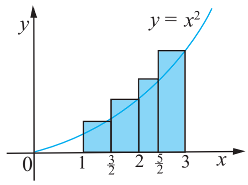


Sahə $=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}f(\frac{5}{2})$

$=\frac{1}{2}(1+\frac{9}{4}+4+\frac{25}{4})$

$=\frac{1}{2}(\frac{54}{4})=6{,}75$

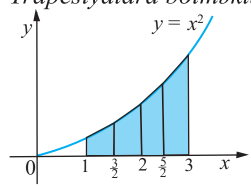
Sağ uc nöqtəsinə görə



Sahə $=\frac{1}{2}f(\frac{3}{2})+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{2}f(\frac{5}{2})+\frac{1}{2}f(3)$

$=\frac{1}{2}(\frac{9}{4}+4+\frac{25}{4}+9)=\frac{1}{2}(\frac{86}{4})=10{,}75$

Trapesiyalara bölməklə



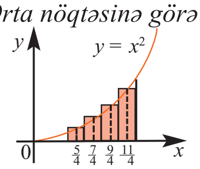
$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(1)+f(\frac{3}{2})]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(\frac{3}{2})+f(2)]+$

$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(2)+f(\frac{5}{2})]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot[f(\frac{5}{2})+f(3)]$

$=\frac{1}{2}[f(1)+2f(\frac{3}{2})+2f(2)+2f(\frac{5}{2})+f(3)]$

$=\frac{1}{4}(1+\frac{9}{2}+8+\frac{25}{2}+9)=\frac{1}{4}(\frac{70}{2})=8{,}75$

Orta nöqtəsinə görə



$A=\frac{1}{2}f(\frac{1+\frac{3}{2}}{2})+\frac{1}{2}f(\frac{\frac{3}{2}+2}{2})+\frac{1}{2}f(\frac{2+\frac{5}{2}}{2})+\frac{1}{2}f(\frac{\frac{5}{2}+3}{2})$

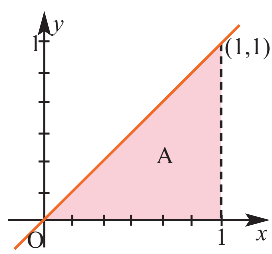
$=\frac{1}{2}((\frac{5}{4})^2+(\frac{7}{4})^2+(\frac{9}{4})^2+(\frac{11}{4})^2)$

$=\frac{1}{32}(25+49+81+121)=\frac{276}{32}$

$=8{,}625$

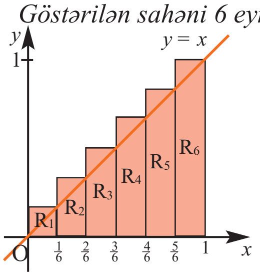
Şagirdlər mühakimələr yürüdürlər. Sol və sağ uc nöqtələrinə görə aproksimasıyanın orta qiyməti (6,75+10,75)/2 = 8,75 trapesiyalar üsuluna görə tapılan aproksimasiyaya yaxındır. Düzbucaqlıların orta nöqtəsinə görə tapılmış sahə də bu qiymətə yaxındır. Deməli, sahə üçün orta nöqtənin qiyməti və trapesiyalar üsulu daha düzgün aproksimasiya sayıla bilər.

Həndəsi olaraq $y = x$ funksiyasının [0;1] parçasında əhatə etdiyi sahəni dəqiq qiymətləndirilə bilən düzbucaqlıların sayını dəyişməklə, aproksimasiya yolu ilə, tapaq, sonra isə n sonsuzluğa yaxınlaşdıqda limitin köməyilə dəqiq sahənin tapıla bildiyini göstərək.



Tələb olunan sahə oturacağı 1, hündürlüyü 1 olan düzbucaqlı üçbucağın sahəsidir: $S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=0{,}5$.

Göstərilən sahəni 6 eynioturacaqlı düzbucaqlıya bölək.



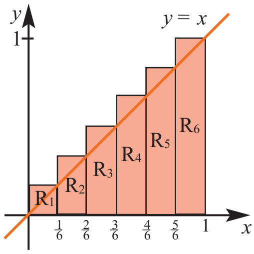
Tələb olunan sahəni oturacağının eni $\frac{1}{6}$, hündürlüyü isə $f(\frac{i}{6})$ olan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi hesablayaq.

$S=\frac{1}{6}f(\frac{1}{6})+\frac{1}{6}f(\frac{2}{6})+\frac{1}{6}f(\frac{3}{6})+\frac{1}{6}f(\frac{4}{6})+\frac{1}{6}f(\frac{5}{6})+\frac{1}{6}f(\frac{6}{6})=$

$=\frac{1}{6}(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6})=\frac{1}{36}(1+2+3+4+5+6)=$

$=\frac{21}{36}\approx 0{,}583.$

Göstərilən sahəni 12 eyni oturacaqlı düzbucaqlıya bölək.



Biz yuxarıdakı addımları təkrar etmədən bu halda sahənin

$$S = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6+7+8+9+10+11+12) =$$
$$= \frac{1}{144} \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} = 0{,}542 \text{ olduğunu görürük.}$$

Göründüyü kimi, düzbucaqlıların sayı artdıqca onların sahələri cəmi ilə real sahə arasındakı fərq azalır.

Sahəni hər bir düzbucaqlının eni $\frac{1}{n}$ olmaqla n sayda düzbucaqlılara bölsək, alarıq:

$$S_n = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \ldots + n) =$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

Düzbucaqlıların sayı (n) sonsuzluğa yaxınlaşdıqca $\frac{1}{n}$ sıfıra yaxınlaşır. Verilən cəmin limiti isə sahəni ifadə edir.

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

Biz bu araşdırmanı bir qədər genişləndirərək, istənilən $f(x)$ funksiyasının qrafikinin $[a;b]$ parçasında əhatə etdiyi sahə üçün ümumi düstur ala bilərik.

$[a;b]$ parçasında müsbət, kəsilməz $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi sahəni hər birinin eni $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olan n sayda düzbucaqlıya bölək.

Qrafikdən göründüyü kimi hər bir düzbucaqlının sağ uc nöqtəsinin qiyməti:

$x_1 = a + \Delta x$

$x_2 = a + 2\Delta x$

$x_3 = a + 3\Delta x$

. . .

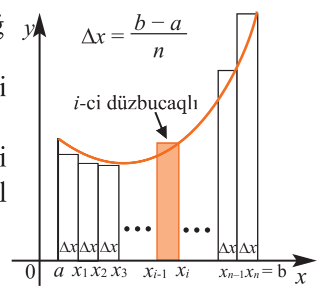
$x_i = a + i\Delta x$

. . .

$x_n = a + (n-1)\Delta x$

Hər bir i-ci düzbucaqlının sahəsi *hündürlük × en = $f(x_i)\Delta x$*

Biz bu düzbucaqlıların sahələri cəminin limitini tapmaqla real sahəni tapa bilərik.



Hər bir düzbucaqlının oturacağı $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ kimidir. Əyrinin əhatə etdiyi sahəni Δx sıfıra yaxınlaşmaqla, hər birinin eni Δx, uzunluğu $f(x_i)$ olan düzbucaqlıların cəminin limiti kimi tapmaq olar.

$$\text{Sahə} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + i\Delta x.$$

Düzbucaqlıların sayını artıraraq aproksimasiya və limitə keçməklə sahəni tapma tapşırıqları yerinə yetirilir. Dərslikdə verilmiş tapşırıqlar əsasən həndəsi təsvirlərə görə düsturlarla sahənin hesablanmasını nəzərdə tutur. Müəllim üçün vəsaitdə limitin köməyilə sahənin hesablanmasına daha geniş (əlavə material kimi) yer verilmişdir. Riyaziyyat təmayüllü məktəblərdə və siniflərdə dərs saatına uyğun olaraq istifadə edilə bilər. Bu tapşırıqların həllində

$\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ natural ədədlərin cəmi (xətti funksiyalarda)

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ tam kvadratlar cəmi (kvadrat funksiyalarda)

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{2}$ tam kublar cəmi (kub funksiyalarda)

eyniliklərindən istifadə edilməsi tövsiyə edilir.

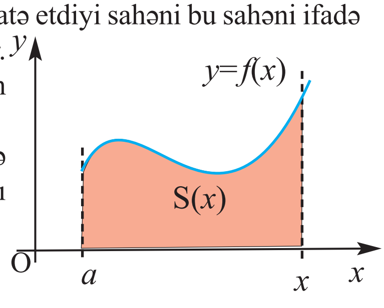
Dərs 126-127. Müəyyən inteqral . Nyuton-Leybnis düsturu. 2 saat.
Dərslik səh. 236-241

Məzmun standartı.
2.2.5. Müəyyən inteqralın tərifini bilir və Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq edir.
2.2.6. Müəyyən inteqralın köməyi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayır.
4.1.1. Müəyyən inteqraldan istifadə edərək, əyrixətli trapesiyanın və digər müstəvi fiqurların sahəsini tapır.
4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.

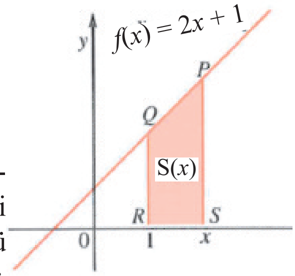
Şagird bacarıqları:

- Müəyyən inteqral üçün Nyuton-Leybnis düsturunu, riyazi analizin (kalkulusun) əsas teoremini isah edir;
- Kalkulusun əsas teoremini tətbiq edir.

$f(x)$ funksiyasının qrafikinin verilən parçada əhatə etdiyi sahəni bu sahəni ifadə edən funksiyanı müəyyən etməklə tapmaq olar. Verilmiş a üçün $[a; x]$ parçasında əhatə olunan sahə x-dən asılı funksiya olacaq: $S(x)$ Burada $S(a) = 0$ olması mühüm şərtdir. Sahə funksiyasının müəyyən edilməsini aşağıdakı nümunələr üzərində nəzərdən keçirək.



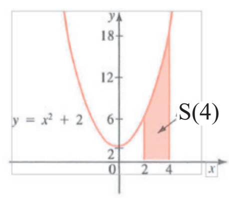
Nümunə. $f(x) = 2x + 1$ funksiyasının qrafikini çəkin, 1-dən hər hansı x qiymətinə qədər parçada əhatə etdiyi sahəni rəngləyin.



a) Bu sahəni ifadə edən funksiyanı müəyyən edin.
b) Sahə funksiyasının törəməsi ilə verilən funksiyanı müqayisə edin.

Həlli: a) Aydındır ki, rənglənmiş sahə PQRS trapesiyanın sahəsidir. Trapesiyanın paralel tərəfləri RQ = $f(1) = 3$, RS = $f(x) = 2x + 1$ kimi, hündürlüyü isə RS = $x - 1$-dir. Onda PQRS trapesiyasının sahəsi:
$S(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(3 + 2x + 1) = x^2 + x + 2$ olacq.

b) $S'(x) = (x^2 + x + 2)' = 2x + 1 = f(x)$, yəni sahə funksiyasının törəməsi elə verilən funksiyadır.



Nümunə. $y = x^2 + 2$ funksiyasının qrafikinin [2; 4] parçasında əhatə etdiyi sahəni tapın.

Həlli: Bu sahə şəkildə S(4) kimi işarə edilməklə şəkildə qrafik təsvir edilmişdir. Sahə funksiyasının törəməsinin verilən funksiya olduğu məlumdur, yəni $S'(x) = x^2 + 2$, funksiyanı inteqrallamaqla $S(x)$ funksiyasının özünü tapa bilərik. $S(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + C$
$S(2) = 0$ şərtindən istifadə edərək C sabitini tapaq.

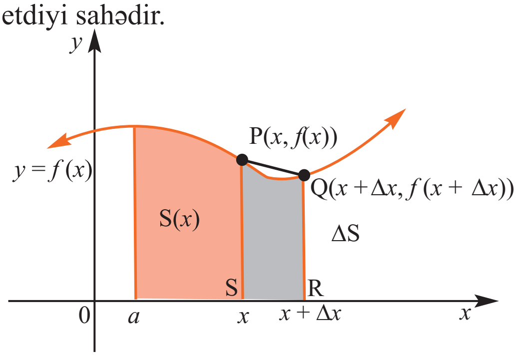
$$\frac{1}{3}2^3 + 2 \cdot 2 + C = 0,\ C = -\frac{20}{3},\ S(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{20}{3}$$

Tələb olunan sahə: $S(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4 - \frac{20}{3} = \frac{68}{3}$

Məsələnin həllindən bu nəticəyə gəlmək olar ki, əyrinin əhatə etdiyi sahə funksiyasının törəməsi bu əyrini ifadə edən funksiyadır: $S'(x) = f(x)$. Bu nəticə tətbiqi məsələləri həll etməyə imkan verir. Belə ki, verilən funksiyanı inteqrallamaqla biz sahə funksiyasını müəyyən edə bilirik.

Əyrinin əhatə etdiyi sahənin törəməsinin verilən funksiya ilə eyni olduğunu, yəni $S'(x) = f(x)$ olduğunu, törəmənin limitlə tərifinə görə aşağıdakı ümumiləşmiş mühakimələrlə də göstərmək olar. Tutaq ki, $S(x)$ sahəsi kəsilməz və müsbət $f(x)$ funksiyasının a-dan x-ə qədər əhatə etdiyi sahədir.

Əyrinin əhatə etdiyi sahə $P(x; f(x))$ nöqtəsinin əyri üzərindəki yerinə görə müəyyən edilir. Əyri üzərində P nöqtəsinə çox yaxın olan $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ nöqtəsi seçək. Bu zaman x koordinatının Δx qədər dəyişməsinə uyğun sahə dəyişməsi ΔS olacaq. Törəmənin tərifinə görə:



$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}; \qquad S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x}$$

S $(x + \Delta x) - S(x)$ fərqi təqribən PQRS trapesiyasının sahəsinə bərabərdir. Δx qiymətini çox kiçik götürməklə fərqi göstərən sahənin qiyməti PQRS trapesiyasının sahəsinin qiymətinə daha da yaxınlaşmış olacaq.

$$S(x + \Delta x) - S(x) = \frac{1}{2}\Delta x\,[f(x) + f(x + \Delta x)]$$

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta x\,[f(x) + f(x + \Delta x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x) + f(x + \Delta x)]}{2} = \frac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$$

Beləliklə, $S'(x) = f(x)$ olduğunu aldıq.

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

Daha sonra isə Nyuton-Leybnis düsturu, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ dərslikdə verilən qrafik təsvir üzərində izah edilir.

Şagird verilən parçada əyrinin əhatə etdiyi sahəni situasiyaya görə uyğun kəmiyyətin artımı kimi təqdim etməyi bacarmalıdır.

Məsələn, belə bir məsələyə baxaq:

Çəndə suyun həcminin dəyişmə sürəti $r(t) = 200 - 10t$ l/dəq. kimi müəyyən edilmişdir. Burada müsbət qiymətlər çənə axıdılan suyun miqdarını müəyyən edir. İlk 10 dəqiqə ərzində çənə axıdılan suyun həcmini tapın. Şagirdlərə sual verilir. Biz hansı inteqralın köməyilə bu suyun miqdarını tapa bilərik? 10 dəqiqə ərzində çənə axıdılan suyun miqdarını

$\int_0^{10}(200 - 10t)dt$ kimi hesablamaq olar.

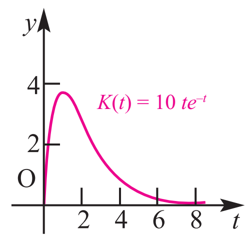
Xassələr tətbiq edilməklə inteqral hesablanır.

Bu inteqralın qiyməti müəyyən zaman aralığında çənə axıdılan suyun miqdarını müəyyən edir, yoxsa çəndəki suyun tam həcmini? İnteqralın qiyməti verilən vaxt intervalında suyun artımını göstərir. Lakin çən boş olarsa, bu müddətdə axıdılan su miqdarı çəndəki suyun ümumi həcmi deməkdir.

Qiymətləndirmə. Müzakirələr zamanı şagirdin söylədiyi mühakimələrə, nümunələri izahetmə, müəyyən inteqralı sahə kimi təqdimetmə bacarıqlarına görə formativ qiymətləndirmə aparılır.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.9 Elektrik enerjisindən istifadə. Kiçik müəssisənin gün ərzində istehlak etdiyi elektrik enerjisinin gücünün (kilovatt) t zamanından asılılığı $K(t) = 10\,te^{-t}$ funksiyası ilə modelləşdirilə bilər. Burada t, saatla vaxtı göstərir və [0;24] aralığındadır.



a) Günün ilk T saatında ($0 \le t \le T$) müəssisə neçə kilovat-saat elektrik enerjisi istifadə edir?
b) Günün ilk 4 saatında neçə kilovat-saat elektrik enerjisi istifadə edilmişdir?
Göstəriş: $K(t) = 10\,te^{-t}$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından birinin $-10(t+1)e^{-t}$ olduğunu nəzərə alın.

Həlli: a) Gün ərzində istehlak edilən elektrik enerjisinin gücünün (kilovatt) t zamanından asılılığı $K(t) = 10\,te^{-t}$ funksiyası ilə modelləşdirildiyindən.
[0; T] müddətində

$$E(T) = \int_0^T K(t)dt = \int_0^T 10te^{-t}dt = \underbrace{-10(t+1)e^{-t}}_{\text{göstərişə görə}}\Big|_0^T = 10\cdot[1-(T+1)e^{-T}] \text{ kilovat-saat}$$

elektrik enerjisi istifadə edilər

b) T = 4 olduqda,
$E(4) = 10(1-5e^{-4}) \approx 9$ kilovat-saat elektrik enerjisi istifadə edilir.

D.14 Sayın dəyişməsi. Ödəmə avtomatının xidmətindən istifadə edən müştərilərin sayının zamandan asılı dəyişmə sürətini $F(t) = 12 + 6\cdot\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada t zamanı (dəqiqələrlə) göstərir. 60 dəqiqə ərzində avtomatın xidmət göstərdiyi adamların sayını (tam ədədə yuvarlaqlaşdırmaqla) tapın.

Həlli: t zamanı ərzində avtomatın xidmət göstərdiyi adamların sayını $N(t)$ ilə işarə etsək, $N'(t) = F(t)$ münasibəti ödənilməlidir.
Buradan: $N(t) = \int_0^t F(t)\,dt.$
N(0) = 0 olduğundan t =60 dəq. ərzində avtomatın xidmət göstərdiyi müştərilərin sayı

$$N(60) = \int_0^{60}\left[12+\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)\right]dt = \left(12t + \pi\cdot\sin\left(\frac{t}{\pi}\right)\right)\Big|_0^{60} = 12\cdot 60 + \pi\cdot\sin\left(\frac{60}{\pi}\right) \approx 721 \text{ olar.}$$

Dərs 128-129. Müəyyən inteqralın xassələri. 2 saat. Dərslik səh. 242-246

Məzmun standartı.
2.2.5. Müəyyən inteqralın tərifini bilir və Nyuton-Leybnis düsturunu tətbiq edir.
2.2.6. Müəyyən inteqralın köməyi ilə əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablayır.
2.2.8. Funksiyanın cütlük-təklik, dövrülik xassələrindən müəyyən inteqralların səmərəli üsulla hesablanmasında istifadə edir.
4.1.1. Müəyyən inteqraldan istifadə edərək, əyrixətli trapesiyanın və digər müstəvi fiqurların sahəsini tapır.
4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.

Şagird bacarıqları:
- müəyyən inteqralın xassələrini sözlə, qrafik təsvirlərlə təqdim edir;
- müəyyən inteqralın xassələrini tətbiq edir.

1-ci saat. Müəyyən inteqralın xassələri nümunələrlə izah edilir. Hər bir müəyyən inteqral sahəni ifadə etdiyindən xassələrin qrafik olaraq göstərilməsi tövsiyə edilir. Bu zaman inteqrallama sərhədlərinin, funksiyanın analitik şəklinin yazılışına diqqət edilir.

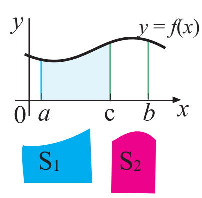
Müəyyən inteqralın xassələri:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_b^a C\, f(x)dx = C\int_b^a f(x)dx$$



Müəyyən inteqralın xassələri həndəsi olaraq və sözlə izah edilir.

Məsələn, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ xassəsini şagird şəkildəki kimi təqdim edə bilər.

$$S = \int_a^b f(x)dx; \quad S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \int_a^c + \int_c^b$$

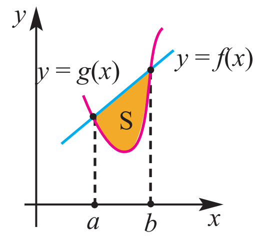
Cəmi

Yaxud da $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ xassəsini $\int_0^2 x^2dx + \int_2^0 x^2dx$ və müəyyən inteqralın digər xassələrindən istifadə etməklə göstərin.

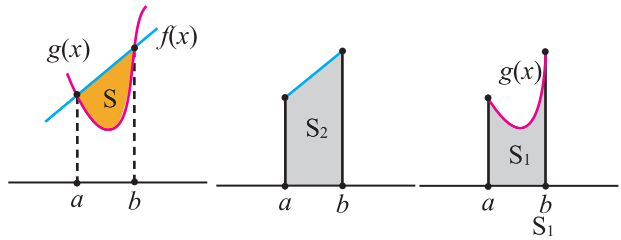
$$\int_0^2 x^2dx + \int_2^0 x^2dx = \int_0^0 x^2dx = 0 \text{ deməli, } \int_0^2 x^2dx = -\int_2^0 x^2dx$$

əvvəlki xassəyə görə

2-ci saat. İki qrafiklə əhatə olunmuş sahəni taparkən inteqralların fərqi xassəsindən istifadə edilir və bu xassə qrafik üzərində həndəsi olaraq izah edilir. Tutaq ki, $[a; b]$ parçasında $y = f(x)$ və $y = g(x)$ funksiyalarının qrafiklərinin hüdudlandırdığı sahəni tapmaq tələb edilir. Bu halda tələb edilən sahə $y = f(x)$ funksiyasının verilən $[a; b]$ parçasında əhatə etdiyi S_1 sahəsi ilə, $y = g(x)$ funksiyasının eyni parçada əhatə etdiyi S_2 sahəsinin fərqinə bərabərdir.



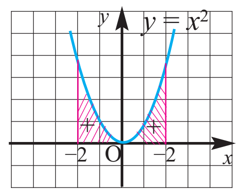
$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$



Həmçinin, funksiyanın tək və ya cüt olmasına görə, simmetriklik xassəsindən istifadə etməklə inteqralı hesablamaq olar.

Məsələn, $\int_{-2}^{2} x^2dx$ inteqralına uyğun sahəni qrafik təsvir edin.

$\int_{0}^{2} x^2dx = \dfrac{8}{3}$ olduğunu bilərək, təsvir edilən sahəni tapın.



Funksiyanın simmetriklik xassəinə görə tələb olunan:

$$\text{sahə} = \int_{-2}^{2} x^2dx = 2\cdot\int_{0}^{2} x^2dx = 2\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ olar.}$$

Şagirdlər funksiyanın tək və ya cüt olması xassəsinə inteqralın aşağıdakı xassələrindən hansının uyğun gəldiyini müəyyən edirlər və qrafik olaraq təsvir edirlər.

Cüt funksiyanın qrafiki y oxuna nəzərən simmetrikdir və koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik parçada

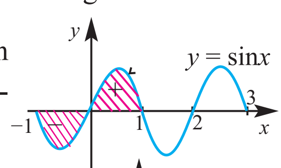
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

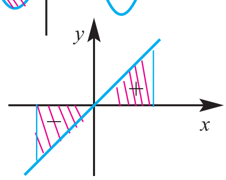
bərabərliyi doğrudur. Bu $y = x^2$ funksiyasının qrafikindən də görünür.

Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir və inteqrallama sərhədləri koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olduqda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

doğrudur. Bu $y = sinx$ funksiyasının, $y = x$ funksiyasının qrafikindən də görünür.





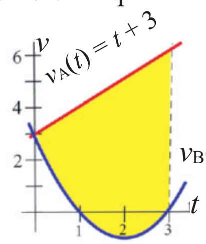
Dərs 130-132. Əyrilərlə hüdudlanmış fiqurun sahəsi. 3 saat. Dərslik səh. 247-251

Məzmun standartı.
4.1.1. Müəyyən inteqraldan istifadə edərək, əyrixətli trapesiyanın və digər müstəvi fiqurların sahəsini tapır.
4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə alınmış nəticələri müqayisə edərək, xətanı müəyyən edir.

Şagird bacarıqları:
- müəyyən inteqralın köməyilə iki əyri arasındakı sahəni hesablayır;
- müəyyən inteqralın köməyilə iki əyri arasındakı sahəni real həyati situasiya ilə əlaqələndirir.

Biz indiyə qədər müəyyən inteqralın köməyilə verilən parçada funksiyanın qrafiki ilə x oxu arasında qalan sahəni hesablayırdıq. Müəyyən inteqralın xassələrindən istifadə etməklə iki qrafik arasında qalan sahəni də hesablamaq olar. Bu sahələrin qiyməti real həyati situasiyadan asılı olaraq fiziki kəmiyyətlərin artımını (qüvvə, iş, enerji, kütlə, sıxlıq, məsafə və s.) həmçinin maliyyə məsələlərində maya dəyəri, gəlir, mənfəət və s. artımını ifadə edə bilər. Nümunə üçün aşağıdakı kimi hərəkət məsələsinə baxaq.

Nümunə. İki zərrəcik eyni nöqtədən eyni anda hərəkətə başladı. A zərrəciyinin sürəti(m/san) $v_A(t) = t + 3$, B zərrəciyinin sürəti isə $v_B(t) = t^2 - 4t + 3$ kimidir.
3 saniyədən sonra bu zərrəciklər arasındakı məsafə nə qədər olacaq?



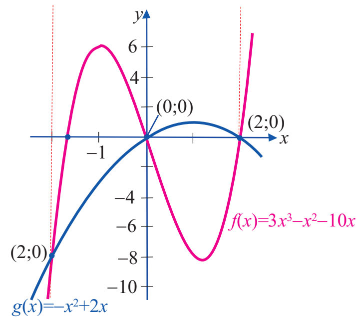
Həlli: Əvvəlcə verilən kəmiyyəti törəmə və inteqral anlayışlarına görə araşdıraq. Bizə sürət funksiyası verilmişdir. Sürət qət edilən məsafənin törəmə funksiyasıdır. Deməli, sürət funksiyasını inteqrallamaqla məsafənin dəyişməsini müəyyən etməyə imkan verən funksiyanı tapa bilərik.
$v_A(t) = t + 3$ və $v_B(t) = t^2 - 4t + 3$ funksiyalarının [0; 3] intervalında müəyyən inteqralı onların 3 saniyədə qət etdikləri məsafəni tapmağa imkan verir. Burada $v_B(t) \le v_A(t)$ olduğundan bu qrafiklər arasında qalan sahə uyğun funksiyaların inteqrallarının fərqinə bərabər olacaq. 3 saniyədən sonra zərrəciklər arasındakı məsafə iki qrafik arasında qalan sahəyə bərabər olacaq. Bu sahəni [0;3] parçasında müəyyən inteqralla hesablaya bilərik.

$$\int_0^3((t+3) - (t^2 - 4t + 3))dt = \int_0^3 (5t - t^2)dt = \left(\frac{5}{2}t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 13{,}5 \text{ (m)}$$

İki əyrinin müxtəlif vəziyyətlərinə görə onlar arasındakı sahə hesablanır.

1. Əyrilər kəsişmirlər
2. Əyrilərin iki kəsişmə nöqtəsi var.

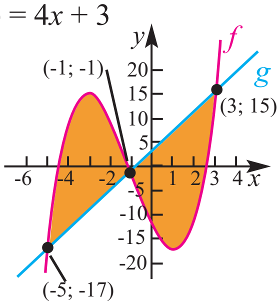
İki funksiyanın qrafiki şəkildə verilən qrafiklərdə olduğu kimi bir neçə nöqtədə də kəsişə bilər. Məsələn, sin$x$ və cos$x$ funksiyasının qrafikləri və ya yüksək dərəcəli çoxhədli funksiyaların qrafiki və s.. Lakin biz sadə halları nəzərdən keçirəcəyik.



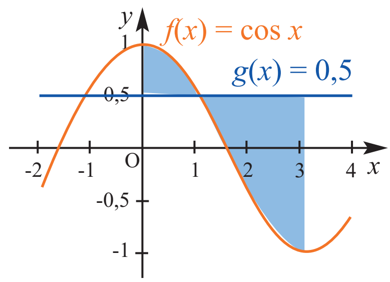
? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.3. Rənglənmiş sahəni hesablayın.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$
$g(x) = 4x + 3$



b) $f(x) = \cos x$ və $y = 0{,}5$, $0 \le x \le \pi$



Həlli:

a) Qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin absisləri şəkildə göstərilmişdir. Bu nöqtələrin absisləri

$x^3 + 3x^2 - 9x - 12 = 4x + 3$ tənliyindən tapılır.

Tənliyi $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$ şəkilində yazaq. Bu tənliyin rasional kökü varsa, tam ədəddir və sərbəst həddin (15-in) böləni olmalıdır.

15-in bölənləri: ± 1, ± 3, ± 5, ± 15

$x = 3$ ədədinin tənliyin kökü olduğunu Hörner sxemi ilə yoxlayaq.

3	1	3	−13	−15
		3	18	−15
	1	6	5	0

Deməli, $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x-3)(x^2 + 6x + 5) = (x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+5)$.

Kəsişmə nöqtələrinin absisləri isə $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$-dür.
Qrafiklərdən göründüyü kimi, axtarılan sahə $[-5; -1]$ aralığındakı sahə ilə $[-1; 3]$ aralığındakı sahələrin cəminə bərabərdir. $[-5; -1]$ aralığında $f(x) \ge g(x)$, $[-1; 3]$ aralığında isə $g(x) \ge f(x)$ doğrudur.

Onda axtarılan sahə

$$S=\int_{-5}^{-1}(f(x)-g(x))\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}(g(x)-f(x))dx=\int_{-5}^{-1}(x^3+3x^2-13x-15)dx+$$

$$+\int_{-1}^{3}(-x^3-3x^2+13x+15)dx=\left(\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{13}{2}x^2-15x\right)\Bigg|_{-5}^{-1}+\left(-\frac{x^3}{4}-x^3+\frac{13}{2}x^2+15x\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$

$$=\frac{1}{4}-1-\frac{13}{2}+15-\frac{625}{4}+125+\frac{325}{2}-75+\left(-\frac{81}{4}-27+\frac{117}{2}-45+\frac{1}{4}\right.$$

$$\left.-1-\frac{13}{2}+15\right)=64+64=128 \text{ (kv. vahid) olar.}$$

b) $f(x)=\cos x,\quad g(x)=0{,}5,\quad 0\le x\le\pi$

Həlli:

Qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq. $\cos x=0{,}5$ tənliyinin $[0;\ \pi]$ parçasında kökü $x=\frac{\pi}{3}$-dür. Qrafiklərdən göründüyü kimi axtarılan sahə $[0;\ \frac{\pi}{3}]$ aralığındakı sahə ilə $[\frac{\pi}{3};\ \pi]$ aralığındakı sahələrin cəminə bərabərdir.

$[0;\ \frac{\pi}{3}]$ aralığında $f(x)\ge g(x)$, $[\frac{\pi}{3};\ \pi]$ aralığında isə $g(x)\ge f(x)$ olduğundan axtarılan sahə

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx=\left(\sin x-\frac{1}{2}x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{3}}+\left(\frac{1}{2}x-\sin x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\sin 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\pi-\sin\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

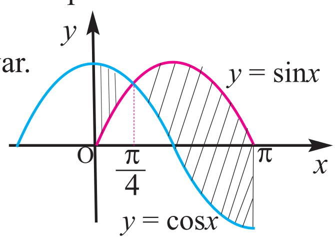
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\text{ (kv. vahid) olar.}$$

D.6. Funksiyaların qrafiklərini verilmiş parçada qurun, hüdudlandırdıqları sahəni hesablayın.

d) $y=\sin x$ və $y=\cos x,\quad x\in[0;\ \pi]$

Həlli:

Qrafiklərin kəsişmə nöqtələri $\sin x=\cos x$ tənliyindən tapılır. Hər iki tərəfi $\cos x$-ə bölək ($\cos x\ne 0$).



$\mathrm{tg}x=1$ tənliyinin $[0;\ \pi]$ parçasında yeganə kökü var. $x=\frac{\pi}{4}$. Onda

$$S=\int_{0}^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_{0}^{\pi/4}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi}=\sqrt{2}-1+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\text{ kv. vahid}$$

D.8. Təpələri koordinat müstəvisinin (2;−3), (4; 6), (6;1) nöqtələrində olan üçbucağın sahəsini müəyyən inteqralın köməyilə tapın.

Həlli:

Təpələri verilmiş nöqtələrdə olan üçbucağı koordinat müstəvisində quraq. B(4; 6) nöqtəsindən keçən $x = 4$ şaquli xətt bu üçbucağın sahəsini 2 hissəyə bölür: S_1 və S_2. Əvvəlcə üçbucağın təpələrini üzərində saxlayan düz xətlərin tənliklərini yazaq. AB düz xətti : $\frac{y+3}{x-2} = \frac{6+3}{4-2}$, $y = 4,5\,x - 12$

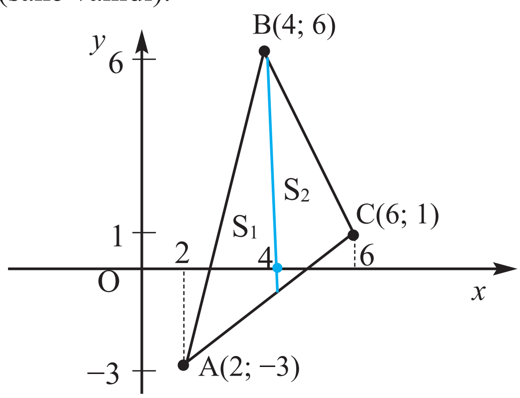
AC düz xətti: $\frac{y+3}{x-2} = \frac{1+3}{6-2}$, $y = x - 5$; BC düz xətti: $\frac{y-6}{x-4} = \frac{1-6}{6-4}$; $y = -2,5x + 16$

Axtarılan sahə [2; 4] aralığında S_1 sahəsi ilə [4; 6] aralığında S_2 sahələrinin cəminə bərabərdir. [2; 4] aralığında AB düz xəttinin AC-dən yuxarıda, [2; 4] aralığında isə BC düz xəttinin AC-dən yuxarıda yerləşdiyini nəzərə alsaq,

$$S = \int_2^4 (4,5x - 12 - x + 5)dx + \int_4^6 (-2,5x + 16 - x + 5)dx = \int_2^4 (3,5x - 7)dx +$$

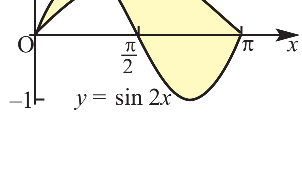
$$+\int_4^6 (-3,5x + 21)dx = \left(\frac{7}{4}x^2 - 7x\right)\Big|_2^4 + \left(-\frac{7}{4}x^2 + 21x\right)\Big|_4^6 = \frac{7}{4}\cdot 16 - 7\cdot 4 - \frac{7}{4}\cdot 4 +$$

$$+ 7\cdot 2 - \frac{7}{4}\cdot 36 + 21\cdot 6 + \frac{7}{4}\cdot 16 - 21\cdot 4 = 28 - 28 - 7 + 14 - 63 + 126 + 28 -$$
$$- 84 = 7 + 7 = 14 \text{ (sahə vahidi).}$$



D.9. Rənglənmiş sahəni hesablayın.

a)



Həlli: Əvvəlcə $[0; \pi]$ aralığında $y = \sin x$ və $y = \sin 2x$ funksiyalarının kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq:

$\sin x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin x\,(1-2\cos x) = 0$

1) $\sin x = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = \pi$

2) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ $\quad x = \dfrac{\pi}{3}$, $\quad x \in [0; \pi]$

Rənglənmiş sahə iki hissədən ibarətdir. Nyuton - Leybins düsturuna görə bu sahə:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right)\Big|_0^{\pi} + \left(-\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) -$$

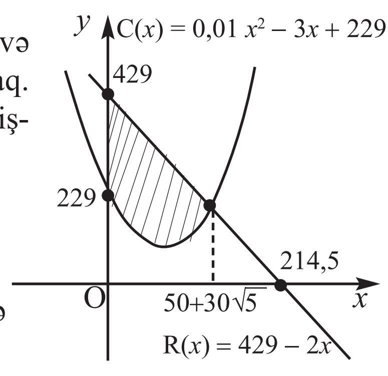
$$-\left(-\frac{1}{2}\cos 0 + \cos 0\right) + \left(-\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 2\pi\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$$

D.11. Şirkətin x sayda telefon istehsalına sərf etdiyi xərclər $C(x) = 0{,}01x^2 - 3x + 229$, gəliri isə $R(x) = 429 - 2x$ funksiyaları ilə modelləşdirilir. Bu funksiyaların qrafikləri və $x = 0$ düz xətti arasında qalan sahəni hesablayın. Bu sahənin qiymətini real situasiyaya uyğun izah edin.

Həlli: $C(x) = 0{,}01\,x^2 - 3x + 229$

$R(x) = 429 - 2x$ funksiyalarının qrafikləri və $x=0$ düz xətti ilə hüdudlanmış sahəni tapaq. Şəkildə bu sahə rənglənmişdir. Əvvəlcə, kəsişmə nöqtəsinin absisini tapaq.



$0{,}01\,x^2 - 3x + 229 = 429 - 2x$

$0{,}01x^2 - x - 200 = 0$

$x^2 - 100x - 20\,000 = 0$

$x = 50 \pm\sqrt{4500}$ Buradan $x > 0$ şərti daxilində

$x \approx 50 + 67 \approx 117$

Verilən aralıqda $R(x) \geq C(x)$ olduğunu nəzərə alaraq yaza bilərik.

$$S \approx \int_0^{117}(429 - 2x - 0{,}01x^2 + 3x - 229)dx = \int_0^{117}(200 + x - 0{,}01x^2)dx$$

$$200x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{300}\Big|_0^{117} = 200\cdot 117 + \frac{117^2}{2} - \frac{117^3}{300} = 23400 + 6844{,}5 -$$

$$-5338{,}71 = 24905{,}79$$

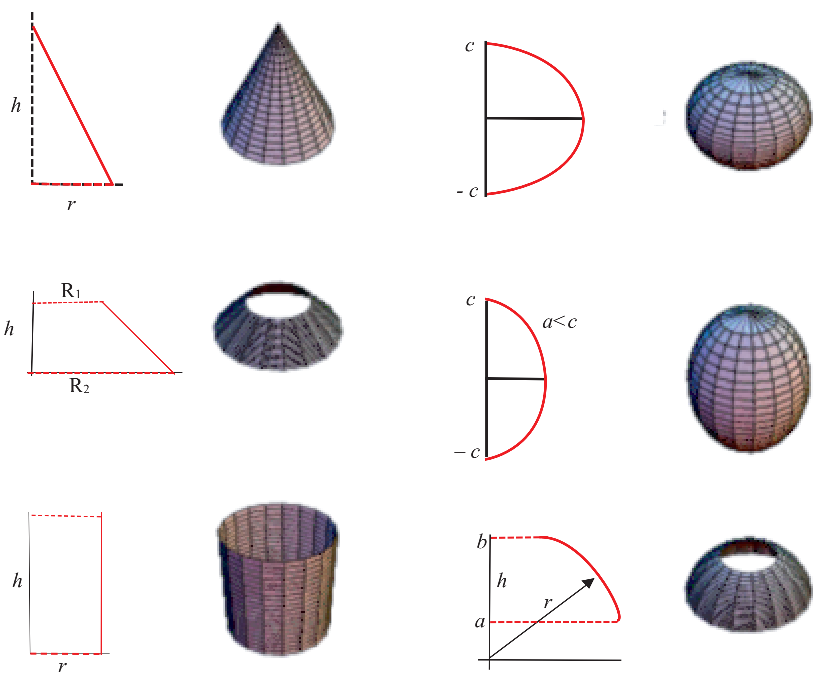
Tapılan sahənin ədədi qiyməti şirkət təxminən 117 telefon istehsal etdikdə əldə olunan mənfəəti göstərir.

Dərs 133-135. Müəyyən inteqral və fırlanmadan alınan fiqurların həcmi. 3 saat. Dərslik səh 252-257

Məzmun standartı.
2.2.7. Müəyyən inteqralın köməyi ilə fırlanmadan alınan cisimlərin həcmini hesablayır.

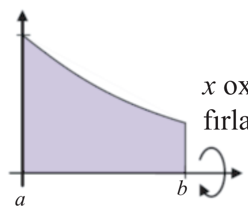
Şagird bacarıqları:
- verilən əyrinin əhatə etdiyi müstəvi hissəsinin fırlanmasından alınan üçölçülü fiquru sxematik təsvir edir;
- fırlanmadan alınan üçölçülü fiqurun həcmini tapır.

Sinifdə aşağıdakı kimi şəkillər nümayiş etdirilməklə hər hansı müstəvi fiqurun müəyyən bir ox ətrafında fırlanması ilə hər gün ətrafda gördüyümüz müxtəlif formalı fəza fiqurlarının modelini yaratmağın mümkün olduğu çatdırılır.

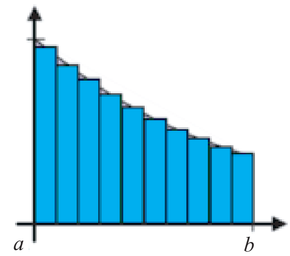


Biz funksiyanın qrafikinin əhatə etdiyi müstəvi hissəsinin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurların (sadə hallar üçün) həcmlərini hesablayacağıq.

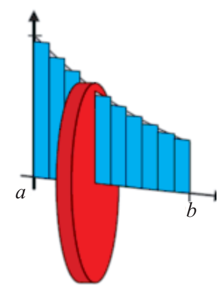
1. Bunun üçün əvvəlcə firlanmada iştirak edən müstəvi hissəsinin eskizi çəkilir. və fırlanma oxu qeyd edilir.

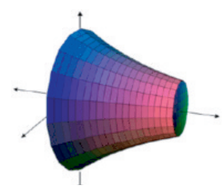


2. Fırlanmadan alınan cismi təsəvvür etmək üçün verilən $[a; b]$ parçasında müstəvi hissəsi oturacağı (eni) Δx, hündürlüyü $f(x_i)$ olan düzbucaqlılara bölünür.



Əgər biz eni Δx, hündürlüyü $f(c_i)$ olan bu düzbucaqlılardan yalnız birinin x oxu ətrafında fırlanmasına baxsaq, fırlanmadan nazik silindrik disk alındığını görərik. Hər bir düzbucaqlı öz ölçüsünə üyğün silindrik disk yaradacaq ki, bu diskin həcmi radiusu $f(c_i)$ olmaqla həcmi $V = \pi r^2 h = \pi(f(c_i))^2 \Delta x$ olacaq. Bütün bu düzbucaqlılar x oxu ətrafında bir tam dövr etdiklərində şəkildəki kimi fiqur alınacaq.Bu düzbucaqlıların aproksimasiyası ilə verilən müstəvi hissəsinin fırlanmasından alınan fəza fiqurunun həcmini tapmaq olar. Düzbucaqlıların Δx enini çox kiçik götürməklə onların n sayını artırmaq və aproksimasiyanı yaxşılaşdırmaq olar. Nəhayət $\Delta x \to 0$ və $n \to \infty$ şərtində alınan limit $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi(f(c_i))^2 \Delta x$ fiqurun həcmini göstərir.



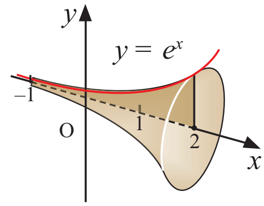


Bu limiti inteqralla ifadə etsək, fiqurun həcmi üçün

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$ düsturunu alarıq.

Beləliklə, kəsilməz $f(x)$ funksiyasının $[a; b]$ parçasında əhatə etdiyi sahənin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$ düsturu ilə tapmaq olar



D.1. Funksiya qrafikinin verilən parçada əhatə etdiyi müstəvi hissəsinin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın. d) $f(x) = e^x$, $[-1; 2]$

Həlli: $[a; b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının əhatə etdiyi müstəvi hissəsinin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin

$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$ həcm düsturuna görə alırıq:

$$V = \pi\int_{-1}^{2} e^{2x}dx = \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\Big|_{-1}^{2} = \frac{\pi}{2}\ (e^4 - e^{-2}) \approx 85{,}55 \text{ (həcm vahidi)}$$

D.3. Verilən xətlərlə hüdudlanmış fiqurun absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

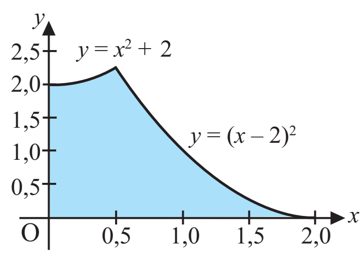
5) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

Həlli: Axtarılan həcm

$$V = \pi\int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi\int_1^4 x dx = \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \pi\left(8 - \frac{1}{2}\right) = 7{,}5\pi \text{ (həcm vahidi)}$$

olur.

D.6. a) $y = x^2 + 2$, $y = (x-2)^2$ funksiyalarının qrafikləri və koordinat oxları ilə əhatə edilmiş rəngli hissənin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiqurunun həcmini tapın. **Göstəriş**. Həcmi [0;0,5] və [0,5;2] aralıqları üzrə olmaqla iki inteqralın cəmi kimi hesablayın.



Həlli: Əvvəlcə qrafiklərin kəsişmə nöqtəsinin absisini tapaq.

$x^2 + 2 = (x-2)^2$

$x^2 + 2 = x^2 - 4x + 4$

$x = 0{,}5$

Axtarılan həcm [0; 0,5] aralığına uyğun həcmlə [0,5; 2] aralığındakı həcmlərin cəminə bərabərdir:

$$V = V_1 + V_2 = \pi\int_0^{0,5}(x^2+2)^2dx + \pi\int_{0,5}^{2}(x-2)^4dx = \pi\int_0^{0,5}(x^4 + 4x^2 + 4)dx + \pi\int_{0,5}^{2}(x-2)^4dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\right)\Big|_0^{0,5} + \pi\cdot\frac{(x-2)^5}{5}\Big|_{0,5}^{2} = \pi\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{5}\cdot\frac{243}{8} =$$

$$= 3\frac{83}{120}\pi$$

Dərs 136-137. Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 2 saat. Dərslik səh. 258-259.

Müəyyən inteqralın izahında, tədrisində onun mahiyyətini ifadə edən aşağıdakı məqamlara hər zaman diqqət yetirilməsi vacibdir.

1. $f(x)$ funksiyası dəyişən kəsiklər çoxluğunu ifadə edir. Bu dəyişən çoxluğa nümunələr:

a) dəyişən sıxlıqlı bir cisim (bircins olmayan metal çubuq, lövhə və s.) ola bilər (onun xətti ölçüsü boyu kütləsinin dəyişməsi);

b) dəyişən sürətlə gedilən yol;

c) dəyişən sahəli kəsiklərə malik cisim;

d) istənilən kəsilməz $f(x)$ funksiyası.

Biz inteqralın tərifini verərkən real qiymətin aproksimasiyası və aproksimasiyanı yaxşılaşdırmaqla limitə keçmə və limiti verilən şərtlərdə müəyyən inteqralla ifadəetmə tapşırıqlarını yerinə yetirdik. Aproksimasiya tapşırıqlarını yerinə yetirmə interqalın qiymətini hesablama tapşırıqlarından daha vacibdir. Çünki şagird biliklərini əlaqələndirməklə riyazi anlayışın mahiyyətinəvarma, mühakiməyürütmə, araşdırma qabiliyyətlərini inkişafetdirmə imkanı əldə edir, kəşfetmə bacarığının məmnunluğunu yaşamış olur.

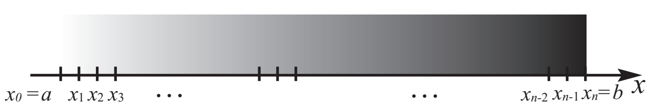
Bir daha diferensial və inteqralın dinamik məlumatı ifadə etdiyi xatırladılır. Göründüyü kimi bütün situasiyalarda dəyişən sözünü işlədirik. Deməli, inteqral kəmiyyətin ümumi aktual qiymətini deyil, verilən parçada artımı göstərir (xüsusi halda bu qiymətlər bərabər ola bilər).

Dərslikdə müxtəlif situasiyalar üçün bu addımlar yazılmış, izah edilmişdir. Tətbiq tapşırıqlarından dəyişən sıxlıqlı kütlə üzərində müəyyən inteqrala "gələn yolu" bir daha göstərək.

Bütün bu düzbucaqlılar x oxu ətrafında bir tam dövr etdikdə şəkildəki kimi fiqur alınacaq.

Əvvəlcə, metal lövhəni x oxu üzərində yerləşdirməklə $f(x)$-in x nöqtəsindəki sıxlıq olduğunu qeyd edək.

Lövhəni n bərabər hissəyə, kəsiyə bölək.



Hər bir $[x_i; x_{i-1}]$, $i = 1, 2, ..., n,$ parçasında sıxlıq təxminən eynidir və bu parçada sıxlığı sabit qəbul etmək olar. Onda hər hansı i kəsiyinin kütləsi $f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$ kimi olacaq, burada c_i nöqtəsi $[x_{i-1}; x_i]$ parçasına daxildir.

Onda lövhənin kütləsi $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i))\,(x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i))\,\Delta x$ cəminə yaxın olacaq.

Verilən cəmin $n \to \infty$ şərtində limiti: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ lövhənin həqiqi kütləsini göstərir. Bu limiti isə $[a; b]$ parçasında müəyyən inteqralla əvəz etmək olar.

Deməli, kütlə = $\int\limits_a^b f(x)dx$, burada $f(x)$ x nöqtəsindəki sıxlıqdır.

Deməli, $f(x)$ hər hansı funksiya olduqda $\int\limits_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqralı müxtəlif situasiyalarda $[a; b]$ parçasında uyğun kəmiyyətin artımını müəyyən edir.

Məsələn, $\int\limits_0^3 x^2dx$, inteqralı $y = x^2$ əyrisinin $[0; 3]$ parçasında əhatə etdiyi sahəni göstərir.

Bu sahə:

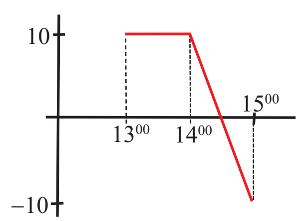
- sıxlığı x^2 qiymətinə bərabər olan (sıxlığı qram/sm ölçülən) cisimin kütləsinə;
- sürəti t^2 (km/saat olan) avtomobilin qət etdiyi yola və s. bərabər ola bilər.

Deməli, sıxlığın müəyyən inteqralı kütləni, sürətin müəyyən inteqralı gedilən yolu, sahənin müəyyən inteqralı həcmi, qüvvənin müəyyən inteqralı işi və s. ifadə edir. Həmçinin, məsələdə verilən situasiyalara görə bu kəmiyyətlər dəyişə bilər.

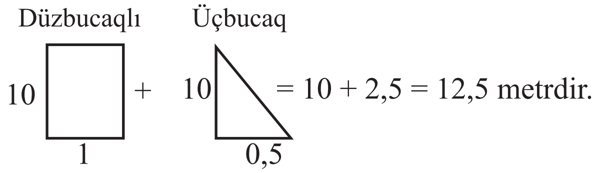
Sahənin həndəsi üsullarla tapılaraq real situasiyada kəmiyyətlə əlaqələndirilməsi məsələlərinin həlli xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Məsələn, aşağıdakı tapşırığın həllini araşdıraq.

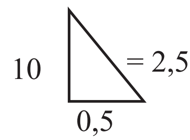
Nümunə. Qrafikdə müşahidə altında olan böcəyin hərəkət qrafiki göstərilmişdir. Böcək saat 13:00-da $x = 12$ nöqtəsindən hərəkətə başlamışdır. Qrafikdə böcəyin gündüz saat birdən saat üçə qədərki hərəkət qrafiki verilmişdir. Böcəyin qət etdiyi yolu və yerdəyişməni $\int\limits_1^3 v(t)dt$ müəyyən inteqralı ilə əlaqələndirin.



Həlli: Qrafikdən görünür ki, böcəyin saat 14:30-a qədər sürətinin işarəsi müsbətdir, yəni böcək (1,5 saat) müsbət istiqamətdə, daha sonra isə, 14:30-dan 15:00-a qədər, istiqamətini dəyişərək mənfi istiqamətdə hərəkət etmişdir. Böcəyin 14:30-a qədər qət etdiyi yol, (başlanğıc nöqtəsindən uzaqlaşması)



14:30-dan 15:00-a qədər qət etdiyi yol isə (yenidən istiqamətini dəyişmiş və başlanğıc nöqtəsinə doğru hərəkət etmişdir) üçbucağın sahəsinə bərabərdir.



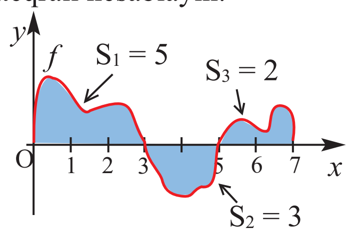
Böcəyin getdiyi yol $S = \int_1^{2,5} v(t)dt + \int_{2,5}^{3} |v(t)|dt = 12,5 + 2,5 = 15$ sm

Böcəyin verilən zaman intervalında başlanğıc nöqtədən yerdəyişməsini $\int_1^3 v(t)dt$ inteqralı ifadə edir. Onun qiyməti $\int_1^3 v(t)dt = 12,5 - 2,5 = 10$ sm yerdəyişməni göstərir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.7 Rəngli hissələrin verilmiş sahələrinə görə inteqralı hesablayın:

a) $\int_0^3 f(x)\,dx$ b) $\int_0^5 f(x)\,dx$ c) $\int_3^7 f(x)\,dx$



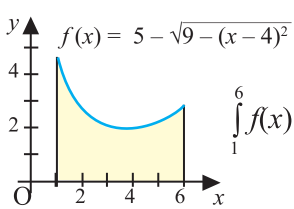
Həlli: Müəyyən inteqralın həndəsi mənasına və xassələrinə görə alırıq:

a) $\int_0^3 (f(x))dx = S_1 = 5;$

b) $\int_0^5 (f(x))dx = \int_0^3 (f(x))dx + \int_3^5 (f(x))dx = S_1 - S_2 = \int (f(x))dx = 5 - 3 = 2;$

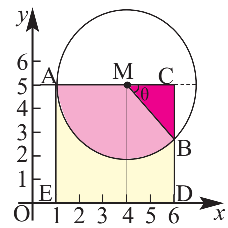
c) $\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^5 (f(x))dx + \int_5^7 (f(x))dx = -S_2 + S_3 = -3 + 2 = -1.$

D.8 Həndəsi mənasına əsaslanaraq verilmiş inteqralı hesablayın.

b) 

$\int_1^6 f(x)\,dx$

Həlli: Axtarılan inteqralın qiyməti şəkildəki rəngli sahənin ədədi qiymətinə bərabərdir. $y = 5 - \sqrt{9 - (x-4)^2}$ bərabərliyini $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 3^2$ şəklində yazaq. Buradan aydın görünür ki, $f(x)$ funksiyasının şəkildə göstərilən qrafiki mərkəzi M (4;5) nöqtəsində radiusu $r = 3$ olan çevrənin AB qövsüdür. Tələb olunan sahə tərəfi 5 olan ACDE kvadratının sahəsi ilə AMB sektoru və MCB düzbucaqlı üçbucağının sahələri cəminin fərqinə bərabərdir:



$S = S_{ACDE} - (S_{AMB} + S_{MCB})$

ΔMCB-dən $\cos\theta = \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{2}{3}$ buradan $\theta \approx 48°$ tapılır.

Onda $\angle AMB \approx 132°$ olduğundan $S_{AMB} \approx \pi \cdot 3^2 \cdot \dfrac{132}{360} \approx 3{,}3\,\pi$.

$S_{MCB} = \dfrac{1}{2} \cdot MC \cdot MB \cdot \sin\theta = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 48° \approx 2{,}23$ olduğundan

$S \approx 25 - (3{,}3\,\pi + 2{,}23) = 22{,}77 - 3{,}3\,\pi \approx 12{,}4$. Beləliklə, $\int\limits_1^6 f(x)\,dx \approx 12{,}4$.

Bu məsələdə inteqrallama sərhədlərini dəyişməklə müxtəlif hallara baxmaq olar. Məsələn, [1;4] parçasında (düzbucaqlının sahəsindən dairənin 1/4 -ni çıxmaqla) və ya [1;7] parçasında (düzbucaqlıdan sahəsindən yarımdairənin sahəsini çıxmaqla) əyrinin əhatə etdiyi sahəni hesablamaq olar.

D.12 Kütləsi m olan cisim Ox oxu boyunca bu ox istiqamətində yönəlmiş qüvvənin təsiri altında $x(t)$ qanunu ilə hərəkət edir. $t = t_0$ anında sürətin v_0-a, koordinatın x_0-a bərabər olduğunu bilərək, $x(t)$-nin düsturunu yazın. Burada F(t) nyutonla, t saniyə ilə, v sürəti $\dfrac{m}{san}$ ilə, m isə kiloqramla ölçülür.

a) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$

b) $F(t) = 14\sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$

Həlli: a) $ma = F$ düsturunda: $m = 3$, $a = x''(t)$, $F(t) = 6 - 9t$ olduğunu nəzərə alsaq, $3 \cdot x''(t) = 6 - 9t$ və ya $x''(t) = 2 - 3t$

münasibətini yaza bilərik. Sonuncu bərabərliyi inteqrallasaq

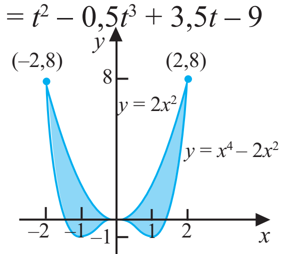
$x'(t) = 2t - 3t^2/2 + C$, yəni $v(t) = 2t - 3t^2/2 + C$ olar. Şərtə görə $v(1) = 4$ olduğundan $4 = 2 - 3/2 + C$, $C = 3{,}5$ tapılır.

Onda $x'(t) = 2t - 3t^2/2 + 3{,}5$. Buradan da

$x(t) = t^2 - 0{,}5t^3 + 3{,}5t + C_1$ alarıq. Şərtə görə $x(1) = -5$ olduğundan

$-5 = 1^2 - 0{,}5 \cdot 1^3 + 3{,}5 \cdot 1 + C_1$, $C_1 = -9$. Beləliklə, $x(t) = t^2 - 0{,}5t^3 + 3{,}5t - 9$

Aşağıda qiymətləndirmə, əlavə tapşırıq kimi istifadə üçün mümunə verilmişdir.



Nümunə. Qrafikdə verilənlərə görə əyrilər arasında qalan rəngli hissələrin sahəsini hesablayın.

Həlli: $y = x^2$ və $y = x^4 - 2x^2$ funksiyalarının hər biri cüt olduğundan şəkildə rənglənmiş fiqur y oxuna nəzərən simmetrikdir. Ona görə y oxundan sağda qalan hissəsinin sahəsini tapıb 2-yə vursaq, axtarılan sahə alınar.

$S = 2 \cdot \int\limits_0^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2)dx = 2 \cdot \int\limits_0^2 (4x^2 - x^4)dx = 2\left(\dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 2 \cdot \left(\dfrac{32}{3} - \dfrac{32}{5}\right) =$

$= 2 \cdot 32 \cdot \dfrac{2}{15} = \dfrac{128}{5}$

Meyarlar

8-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları cədvəli

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	İnteqrallama qaydalarını tətbiq etməklə ibtidai funksiyanı tapır.	
2.	İnteqrallama sabitini müəyyənləşdirməklə funksiyanın analitik yazılışını dəqiqləşdirir.	
3.	İnteqrallamaya aid real həyati situasiya məsələlərini həll edir.	
4.	Əyrinin verilən parçada əhatə etdiyi sahəni təsvir edir.	
5.	Əyrinin verilən parçada əhatə etdiyi sahəni həndəsi düsturların köməyilə, kiçik düzbucaqlılara bölüb aproksimasiya metodu ilə tapır.	
6.	Müəyyən inteqralın qiymətini verilən aralıqda əyrinin əhatə etdiyi sahənin qiyməti kimi tapır.	
7.	Nyuton-Leybnis düsturunu hesablamalara tətbiq edir.	
8.	Müəyyən inteqralın xassələrini tətbiq edir.	
9.	Müəyyən inteqralın köməyilə iki əyri arasındakı sahəni hesablayır.	
10.	Müəyyən inteqralın köməyilə firlanma cisimlərinin həcmini tapır.	
11.	Müəyyən inteqralın tətbiqi ilə real həyati situasiya və sadə fizika məsələlərini həll edir.	

Dərs 138. 8-ci bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) $f(x) = (5x^2 - 2x^{-2} - 1)$ funksiyasının üçün ibtidai funksiyalarını yazın.

2) $f'(x) = 4x^5 - 2x^3 + x - 2$ və $f(0) = 3$ olduğunu bilərək $f(x)$ funksiyasının yazın.

3) $\int_1^2 (3x^3 - 2x^{-1} + x)dx$ inteqralını hesablayın.

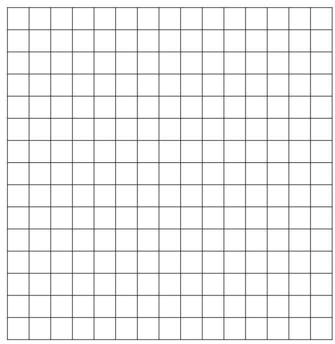
4) Hansı $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ funksiyasının [–5; 5] parçasında əhatə etdiyi sahəni göstərir?

a) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = \frac{500}{3}$ b) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = \frac{3}{500}$ c) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = 3$ d) $\int_{-5}^{5}(3x^3+2x^2)dx = 500$

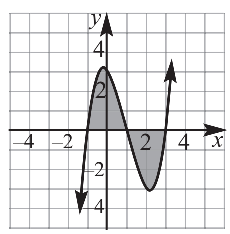
5) $y = -x + 1$ funksiyasının qrafikini [0; 1] parçasında qurun. Əhatə etdiyi sahəni:

a) Funksiyanın qrafikindən istifadə etməklə həndəsi üsulla

b) İnteqrallama qaydasından istifadə etməklə cəbri üsulla tapın.



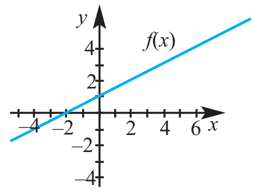
6) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi rəngli sahəni tapın.



7) Verilən şərtlərə görə $f(x)$ funksiyasını müəyyən edin.

$f'(x) = ax^2 + bx$ $\quad f'(1) = 5$ $\quad f''(1) = 11$ $\quad \int_1^2 f(x)dx = 11$

8) Hər bir müəyyən inteqralı $f(x)$ funksiyasının qrafikinə görə həndəsi üsulla tapın.



a) $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ b) $\int_{-4}^{0} f(x)dx$ c) $\int_{2}^{4} f(x)dx$ d) $\int_{-2}^{0} |f(x)|dx$

9) f funksiyası $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 3 \\ x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$ kimi müəyyən olunmuşdur. $\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ funksiyasının qiyməti hansıdır?

a) 2 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

10) $\int_{1}^{10} f(x)dx$ və $\int_{10}^{3} f(x)dx = 7$ olarsa, $\int_{1}^{3} f(x)dx$ inteqralının qiyməti hansıdır?

a) –3 b) 0 c) 3 d) 10 e) 11

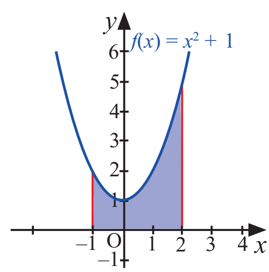
11) İnteqralları tapın.

1) $\int x^2\sqrt{x}dx$ 2) $\int(5\cos x + 4\sin x)dx$ 3) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

12) $\int_{0}^{a}(2ax - x^2)dx = 18$ olarsa, a -nın qiyməti neçədir?

13) $y = x^2$ və $y = 4x$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini tapın.

14) Rənglənmiş sahəni tapın.



15) Hesablayın.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin 3x + \cos x)\, dx$$

16) Verilmiş xətlərlə hüdudlanmış fiqurun absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

$y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$

9-cu bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	**Dərs №**	**Mövzu**	**Dərs saatı**	**Dərslik səh.**
5.1. Statistik məlumat toplayır, sistemləşdirir, təhlil edir və nəticəni təqdim edir. 5.1.1. Ölçmənin dispersiyasını və orta kvadratik meylini hesablayır. 5.2. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarını başa düşür və tətbiq edir. 5.2.1. Hadisənin ehtimalının hesablanmasına normal paylama qanununu tətbiq edir.	139-140	Statistik göstəricilər	2	261-265
	141-142	Məlumatın paylanma formaları. Normal paylanma	2	266-269
	143-144	Qutu-qulp diaqramı	2	270-273
	145-148	Təsadüfi hadisələr və ehtimal. Ehtimalı hesablama düsturları	4	274-279
	149	Ümumiləşdirici tapşırıqlar	1	280-281
	150	Bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə.	1	
	Cəmi		12	

Dərs 139-140. Statistik göstəricilər. 2 saat Dərslik səh. 261-265

Məzmun standartı.
5.1.1. Ölçmənin dispersiyasını və orta kvadratik meylini hesablayır.

Şagird bacarıqları:
■ Məlumatı ədədi orta, median, moda kimi mərkəzəmeylli və ən böyük fərq kimi paylanmanı xarakterizə edən statistik göstəricilərinə görə təqdim edir;
■ Müxtəlif formalarda verilmiş məlumat bazasına görə meyli, dispersiyanı, standart meyli hesablayır;
■ Standart meylin qiyməti ilə məlumatın qiymətlərinin paylanması arasında əlaqəni başa düşdüyünü nümunələr göstərməklə izah edir;

Statistikanı öyrənməyin əhəmiyyəti haqqında şagirdlərlə söhbət aparılır.

Statistika riyaziyyatın bir bölməsi olaraq məktəbdə öyrənilir. Lakin statistika dünyada baş verən hadisələri öyrənmək və proqnozlar vermək, dünyadakı dəyişmələrin onun gələcəyinə necə təsir edəcəyini araşdıran elm sahəsidir. Bəzən biz hər hansı elmi istiqaməti bir neçə sözlə ifadə edə bilirik.

Məsələn, İqtisadiyyat - pul; Psixologiya - biz niyə düşünürük, nə düşünürük? Biologiya - həyat; Antropologiya - kim; Tarix - nə, nə vaxt, harada; Fəlsəfə - nə üçün; Maliyyə - neçə manat və s. Bəs, statistikanı hansı sözlə ifadə etmək olar? Statistika bütün sahələrdə dəyişməni öyrənir. Statistikanın əsasını məlumat təşkil edir. İnsanlar hər gün müxtəlif on-line mağazalardan, banklardan pul alırlar. Onlar sizi haradan tanıyır, harada yaşadığınızı bilir? Onlar sizin haqqınızda məlumatı öz bazalarına daxil etmişlər və bu məlumatlar hər bir şirkətin öz işini qurması üçün çox əhəmiyyətlidir. Məlumat bazasını təşkil edən dəyişənlərə və onların qiymətlərinə, kateqoriyalarına və bir çox başqa əlamətlərinə görə müxtəlif suallara cavab tapılır. Bütün elm sahələrini müəyyən edən suallar həm də statistikanın cavab verdiyi suallardır. Statistika məlumatın toplanması, sistemləşdirilməsi və təhlil edilməsi, nəticələrin təqdim edilməsi funksiyalarını yerinə yetirir.

Biz indiyə qədər məlumatın sistemləşdirilməsi işini onları müxtəlif cür qruplaşdıraraq cədvəl və ya qrafik formalarda tərtib etməklə yerinə yetirirdik. İndi isə məlumatları kvartillərdə sistemləşdirməklə qutu-qulp adlandıracağımız yeni təqdimat formasını öyrənəcəyik.

Məlumatın təhlili isə müxtəlif statistik göstəricilərə görə aparılır. Biz indiyə qədər ədədi orta, median, moda, ən böyük fərq kimi göstəricilərlə statistik məlumatları təhlil edirdik. İndi isə məlumatın paylanmasını xarakterizə edən göstəricilərə görə məlumatı təhlil etməyi öyrənəcəyik.

Bunlar meyil, dispersiya və standart meyldir. Nə üçün məlumatın paylanmasını göstərmək üçün yuxarıda sadaladığımız statistik göstəricilərdən başqa göstəricilərə də ehtiyac duyuruq. Aydındır ki, məlumatın paylanması haqqında sadalanan göstəricilərdən ən böyük fərq göstəricisi müəyyən təsəvvür yarada bilər. Lakin bu fərq seçimə daxil olan elementlərdən yalnız ikisinə aid olduğundan digər məlumatların hansı intervalda sıxlaşdığı və ya bir-birindən nə qədər aralıda olduğu, kənaraçıxmaların olub-olmadığı haqqında aydın təssəvvür yaratmır.

Lakin meyil, dispersiya və standart meyil bu imkanları yaradır. Belə ki, hər hansı məlumatın külliyyat daxilində necə yerləşdiyi haqqında təsəvvür yaratmaq üçün onun bu məlumata xas olan ədədi ortadan nə qədər fərqləndiyini bilmək mühümdür. Həmçinin ayrı-ayrı məlumatların ədədi orta ətrafında nə qədər sıx toplanması və ya səpələnməsi də mühüm məlumatlardır ki, biz məlumatın təhlili zamanı ədədi orta və standart meyil kimi statistik göstəricilərlə bu suallara cavab verəcəyik. Qiymətləri $x_1, x_2, \ldots . x_n$ olan məlumat üçün

ədədi orta $x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ kimi,

dispersiya $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$ kimi,

standart meyil $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ kimi hesablanır.

Standart meylin hesablanma addımları ümümsinif müzakirəsi ilə dərslikdə verilmiş nümunə üzərində araşdırılır və ümumiləşdirilir. Hesablamaların kalkulyatorda hansı klavişlərlə aparıldığı araşdırılır.

Standart meyil və dispersiya mürəkkəb hesablamalarla bağlı olduğundan onun kalkulyatorla yerinə yetirilməsi tövsiyə edilir. Bu zaman məlumatın daxil edilməsi və uyğun klavişlərdən istifadə edilməsi bacarıqlarına diqqət edilir.

Bəzi tapşırıqların yerinə yetirilməsinə aid tövsiyələr

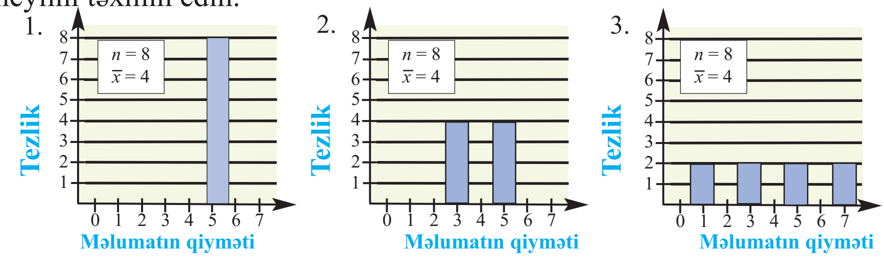
Əvvəlcə 3-4 elementli məlumat bazasına uyğun nümunə üzərində dispersiya və standart meylin hesablanması düsturunun işləmə mexanizminin göstərilməsi daha məqsədəuyğundur. Məsələn, qiymətləri 1; 3 və 8 olan məlumat üçün

ədədi orta $(1 + 3 + 8)/3 = 4$,

dispersiya $\sigma^2 = \dfrac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + 8-4)^2}{3} = \dfrac{9+1+16}{3} \approx 8{,}67$

standart meyil $\sigma \approx 2{,}94$ olur.

D1. Əvvəlcə yazılı hesablama aparmadan qrafiklərə görə külliyyatın standart meylini təxmin edin.



a) Daxil olan hər bir məlumatın qiyməti 4-dür. Ədədi orta 4-dür. Deməli, hər bir meyil sıfıra bərabərdir. Dispersiya və standart meyil də sıfırdır. $\sigma = 0$

b) Seçimə daxil olan qiymətlər ya 3-dür, ya da 5. Ədədi orta 4 olduğundan meyllərin qiymətlərii ± 1-ə bərabərdir. Deməli, standart meyil 1-ə bərabərdir. Hesablamalar aparsanız, standart meylin 1-ə bərabər olduğunu görərsiniz.

$4(3\text{-}4)^2 + 4(5\text{-}4)^2 = 4 + 4 = 8;\ 8/8 = 1,\ \sigma = 1$

c) Külliyyata daxil olan 8 məlumatın hər birinin meyli ya ± 1, ya da ± 3-dür. Standart meyil təxminən 2-yə bərabərdir. Hesablamalar aparsaq, $\sigma \approx 2{,}24$

Qrafik məlumata və ya cədvəllə verilmiş məlumatın qiymətlərinə görə standart meyli hesablama, situasiyaya uyğun izah etmə, standart meylin qiymətinin artması və ya azalması ilə məlumatın paylanma sıxlığının dəyişməsini təqdimetmə bacarıqlarına diqqət edilir.

- standart meyil verilən məlumatların ədədi ortaya görə paylanmasını göstərir.
- Məlumatlar bir-birindən nə qədər aralı (uzaq) paylanmış olarsa, standart meyil bir o qədər böyük olar.
- Məlumatlar bir-birinə nə qədər yaxın olarsa, standart meyil bir o qədər kiçik olar. Başqa sözlə məlumat ədədi ortanın ətrafında sıxlaşmış olarsa, standart meyil bir o qədər kiçik olar. $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ hesablayarkən yalnız müsbət qiymətin nəzərə alındığı diqqətə çatdırılır. Çünki standart meyil məlumatın ədədi ortadan nə qədər uzaqda olduğunu, başqa sözlə məsafəni göstərir. Məsafə isə mənfi ola bilməz. Standart meyillə ədədi orta eyni kəmiyyətlə ölçülür.

Dispersiya və standart meylin ədədi orta ilə bağlı olmayan aşağıdakı şəklə gətirilmiş düsturlarından da istifadə edilir.

$$\sum(x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - 2\bar{x}\sum x + n\bar{x}^2 =$$
$$= \sum(x)^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 =$$
$$= \sum(x)^2 - \frac{(\bar{x}^2)}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{n(\sum x)^2 - (\sum \bar{x})^2}{n(n-1)};$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n(\sum x)^2 - (\sum \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Şagirdlərin diqqətinə çatdırılır ki, $\sum x^2$ ilə $(\sum x)^2$ eyni ifadə deyil.

Qeyd: $\sum x^2$ əvvəlcə x-i kvadrata yüksəldib cəmləməni, $(\sum x)^2$ isə cəmləyib sonra kvadrata yüksəltməni nəzərdə tutur.

D.6. **(səh. 265)** Şəkildəki dairəvi diaqramda 2016-cı ildə Bakı şəhərində orta təhsil alanların rayonlar üzrə paylanması göstərilmişdir.

***Mənbə**. Azərbaycan Respublikası. İllik hesabat. 2016*

Həlli:

a) 1. Məlumatların ədədi ortasını tapaq:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+10+12+11+4+13+6+6+8+1+7+15}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3};$$

2. Ən böyük fərq :
$15 - 1 = 14$ oldu.

3. Dispersiyanı tapaq.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{12} = \frac{(7-\frac{25}{3})^2 + (10-\frac{25}{3})^2 + (12-\frac{25}{3})^2 +}{12}$$

$$+ (11-\frac{25}{3})^2 + (4-\frac{25}{3})^2 + (13-\frac{25}{3})^2 + 2\cdot(6-\frac{25}{3})^2 + (8-\frac{25}{3})^2 + (1-\frac{25}{3})^2 +$$

$$+ (7-\frac{25}{3})^2 + (15-\frac{25}{3})^2 =$$

$$= \frac{4^2 + 5^2 + 11^2 + 8^2 + 13^2 + 11^2 + 2\cdot 7^2 + 1^2 + 22^2 + 4^2 + 20^2}{12\cdot 9} =$$

$$= \frac{16+25+121+64+169+121+98+1\,484+16+400}{12\cdot 9} = \frac{1515}{108} \approx 14{,}03$$

4. Standart meyil isə $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{14{,}03} \approx 3{,}75$ olur.

b) Ən böyük meyil Pirallahı rayonuna məxsusdur.

d) Bakı şəhərində təhsil alanların ümumi sayı

$$\frac{59088}{15} \cdot 100 \approx 393\ 920 \text{ nəfərdir}$$

İşçi vərəq N1

Adı_____ Soyadı__________ **Tarix_________**

Hansı məlumatın standart meylinin daha böyük, hansının daha kiçik olduğunu hesablamalar aparmadan söyləyin. Fikirlərinizi əsaslandırın. Bu məlumatların oxşar və fərqli cəhətləri hansılardır?

a)

(I)	
0	9
1	5 8
2	3 3 7 7
3	2 5
4	1

Açar: 4 | 1 = 41

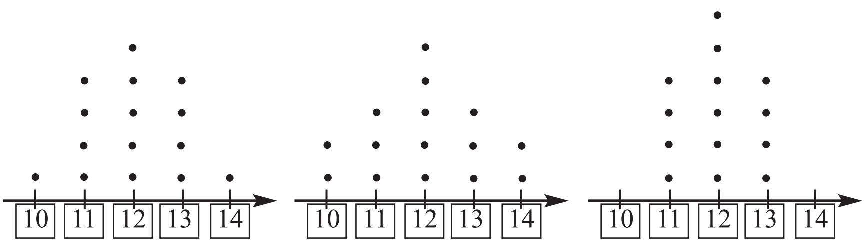
(II)	
0	9
1	5
2	3 3 3 7 7 7
3	5
4	1

Açar: 4 | 1 = 41

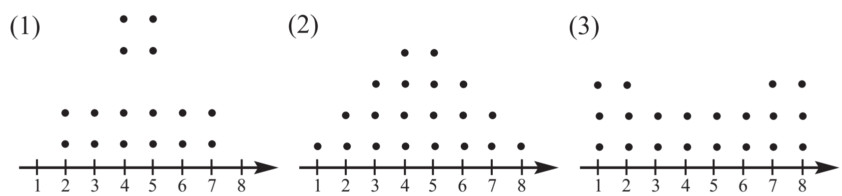
(III)	
0	
1	5
2	3 3 3 3 7 7 7 7
3	5
4	

Açar: 4 | 1 = 41

b)



c)

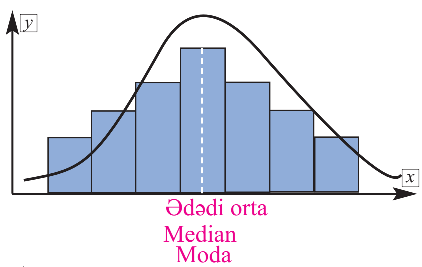


Dərs 141-142. Məlumatın paylanma formaları. Normal paylanma. 2 saat
Dərslik səh. 266-269

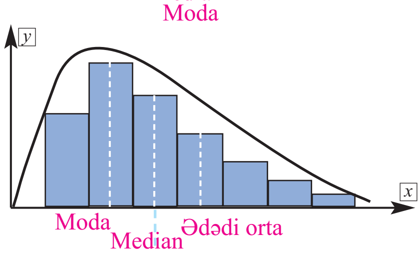
Məzmun standartı.
5.1.1. Ölçmənin dispersiyasını və orta kvadratik meylini hesablayır.
5.2.1. Hadisənin ehtimalının hesablanmasına normal paylama qanununu tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:
- Seçimə (külliyyata) görə normal paylanma əyrisni qurur və situasiyaya uyğun təqdim edir;
- Normal paylanmada ədədi orta və standart meylə görə məlumatı qrafik təqdim edir;
- Normal paylanmada tələb olunan şərtlərə uyğun məlumatları hesablamalarla müəyyən edir və təqdim edir;
- Normal paylanma əyrisinə görə ehtimala aid məsələlər həll edir;

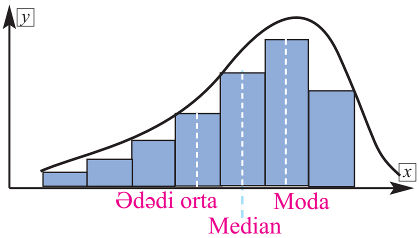
Məlumatın paylanma formaları çox müxtəlif ola bilər. Onların müəyyən statistik göstəricilərə görə 3 qrupda birləşdirilmiş formalarından geniş istifadə edilir.
1. Normal paylanma, buna simmetrik paylanma da deyilir.
2. Saga yığılmış (əyilmiş) forma, buna müsbət yığılma da deyilir.
3. Sola yığılmış (əyilmiş) forma, buna mənfi yığılma da deyilir.



Normal paylanmada ədədi orta, median və moda üst-üstə düşür. Məlumatın bir yarım hissəsi digərinin güzgü əksidir. Paylanma simmetrikdir.

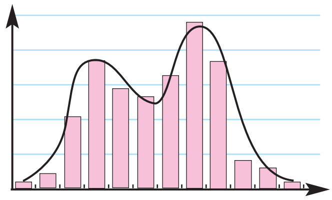


Sağa sürüşmüş (müsbət yığılma) formada moda ən kiçik, median ondan böyük, ədədi orta isə mediandan böyük (ədədi orta ən böyük) olur.



Sola sürüşmüş formada ədədi orta mediandan, median isə modadan kiçik (ədədi orta ən kiçik) olur.

Bu formalardan əlavə statistik məlumatın binomial paylanma formasından da geniş istifadə edilir. Lakin dərslikdə bu forma haqqında danışılmır.



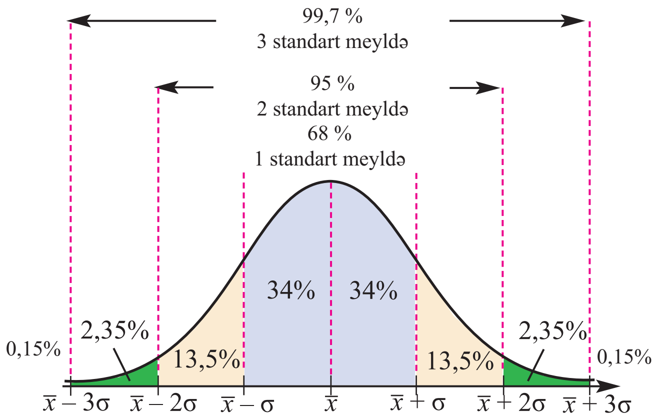
Paylanma növlərini izah etmək üçün həyati situasiyalardan nümunələr gətirmək olar. Ümumi kütləyə aid olan bir sıra göstəricilər təxminən normal paylanmaya uyğun gəlir, məsələn, müəyyən yaşda olan qadınların və ya kişilərin boyu, İQ testlərin nəticələri və s.

Sola, sağa sürüşmüş məlumata nümunə gənclərin gündəlik telefonla danışıq müddəti, müsbət sürüşməyə , mənfi sürüşməyə nümunə isə yaşlı insanların gündəlik mobil telefonla danışıq müddətləri ola bilər.

Normal paylanmada emprik qaydaya görə məlumatın daha çox hansı qiymətlərdə toplaşdığını, daha az sayda hansı qiymətlər intervalında olduğunu müəyyən etmək mümkündür.

Normal paylanma

Normal paylanma formasına görə **simmetrik paylanma** və ya **zəng formalı** paylanma da adlandırılır.



Ədədi orta və standart meyil verildiyi halda normal paylanma əyrisinin qurulmasına aid tapşırıqlar yerinə yetirilir. Hər bir şagirdin normal paylanmada məlumatın sıxlığını göstərən yuxarıdakı şəkil kartını hazırlaması və məsələ həlli zamanı istifadə etməsi məqsədəuyğundur. Şagird verilən məlumata görə əyrinin əhatə etdiyi sahəni rəngləməklə təqdim etməyi bacarmalıdır.

Bu cür paylanmaya paylanmanın 68-95-99 emprik qaydası deyilir.

$\bar{x} \pm \sigma$ intervalı 68%-ə

$\bar{x} \pm 2\sigma$ intervalı 95%-ə

$\bar{x} \pm 3\sigma$ intervalı 99%-ə uyğun gəlir.

Məlumatın paylanması haqqında məlumat Çebişev teoremindən istifadə etməklə də müəyyən edilir. Bu teoremin tədrisi nəzərdə tutulmur, lakin əlavə məlumat olaraq sinfin səviyyəsindən asılı olaraq verilə bilər.

Çebışev teoremi. İstənilən məlumatın ədədi ortadan k standart meylində (k>1) yerləşən hissəsi $1-\frac{1}{k^2}$ kimidir.

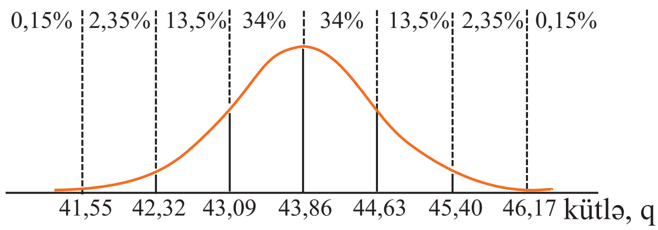
Çebişev teoremindən çıxan nəticələr:

$k = 2$ olduqda, $1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$, yəni məlumatın dörddə üç hissəsi və ya 75%-i ədədi ortadan 2 standart meyil uzaqlığında yerləşir.

$k = 3$ olduqda, $1-\frac{1}{3^2}=\frac{8}{9}$, yəni məlumatın 88,9%-i ədədi ortadan 3 standart meyil uzaqlığında yerləşir.

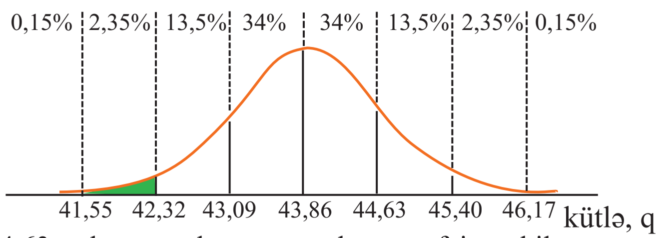
Məsələn, orta kütləsi 43 q nəzərdə tutulmuş bildirçin yumurtalarının yığıldığı 10 qutu yoxlanılmış və orta kütlənin 43,86, standart meylin isə 0,77 olduğu müəyyən edilmişdir. Şagirdlər rənglənmiş qrafik hissələrinin hansı kütlə dəyişməsinə uyğun olduğunu müəyyən edirlər.

1. Ədədi orta üfüqi xəttin orta nöqtəsində qeyd edilir. Orta nöqtədən sağda simmetrik olaraq ($\bar{x}+\sigma$), solda isə ($\bar{x}-\sigma$) qiyməti qeyd edilir. ($\bar{x}+2\sigma$), ($\bar{x}+3\sigma$) və ($\bar{x}-2\sigma$), ($\bar{x}-3\sigma$) qiymətləri də analoji qayda ilə qeyd edilir.

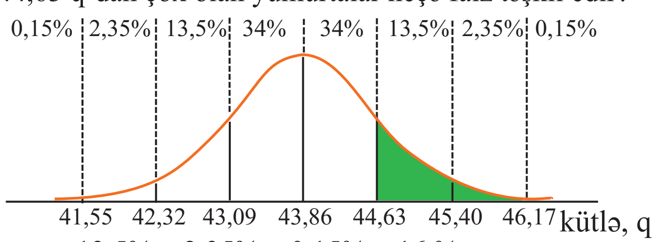


2.Kütləsi 42,32 q-dan az olan yumurtalar neçə faiz təşkil edir.

Paylanmadan göründüyü kimi bunlar 2,35% + 0,15% = 2,5% təşkil edir. Qrafikin uyğun hissəsi rənglənir.

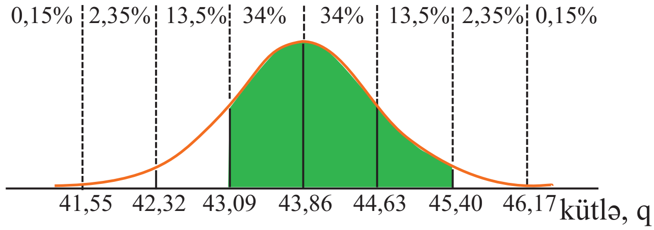


3.Kütləsi 44,63 q-dan çox olan yumurtalar neçə faiz təşkil edir?



13,5% + 2,35% + 0,15% = 16 %

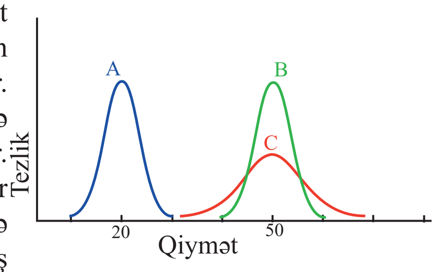
3. Kütləsi 45,40 q-la 43,09 q arasında olan yumurtalar neçə faiz təşkil edir?



13,5% + 34% + 34% = 81,5 %

Normal paylanmaya görə ən böyük fərqi də tapmaq mümkündür. Biz bilirik ki, bu halda məlumatın 99,7%-i 3 standart meyil daxilində yerləşir.
Deməli, ən yüngül yumurta $43{,}86 - 3 \cdot 0{,}77 = 41{,}55$ q,
ən ağır yumurta $43{,}86 + 3 \cdot 0{,}77 = 46{,}17$ q; Ən böyük fərq: 17– 41,55 = 4,62 q.

Şagirdlərin diqqətinə bir daha standart meylin ədədi ortaya görə məlumatın paylanmasını göstərdiyi fikri vurğulanır. Yəni, normal paylanma ədədi ortanın və standart meylin qiymətinə görə qurulur. Eyni ədədi ortaya uyğun müxtəlif cür dartılmış və sıxılmış paylanma əyrisinə rast gəlmək olar. Əyri nə qədər sıxılmış olarsa, məlumat bir o qədər ədədi ortanın ətrafında sıx toplanmaşdır.

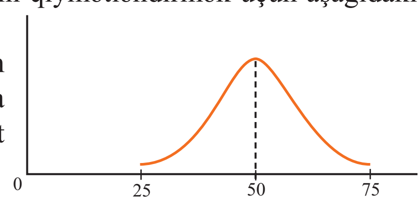


Nə qədər dartılaraq genişlənmiş olarsa, məlumatın ədədi ortadan daha uzaqlarda paylandığını göstərmiş olar.

Şagirdlərin summativ qiymətləndirmənin nəticəsinə uyğun normal paylanma əyrisi qurmaları tövsiyə edilir. Qiymətləndirməni dəyişərək 80 və ya 100 ballıq sistemə də keçirmək olar.

Standart meylin qiymətindən asılı olaraq normal paylanma əyrisinin formasının necə dəyişdiyini şagirdlərin başa düşdüklərini qiymətləndirmək üçün aşağıdakı tapşırığı yerinə yetirmək olar.

Lövhədə ədədi orta və standart meylin qiymətinə uyğun hər hansı normal paylanma əyrisi çəkilir, Məsələn, ədədi orta 50, standart meyil 4.



Müraciət olunan şagird tapşırığı lövhədə yerinə yetirir: ədədi orta dəyişmir, standat meyil 8 olur, bu əyrini eyni koordinat sistemində çəkir.

Başqa bir şagird ədədi orta dəyişərək 75 olub, standart meyil eyni qaldığı hala uyğun əyrini çəkir.

Şagird ədədi ortanın qiymətinin dəyişməsini, standart meylin isə eyni qalmasını, əyrinin yalnız x oxu boyunca sağa və ya sola sürüşməsi olduğunu başa düşür. Standart meylin dəyişməsi isə əyrinin sıxılması (daralması) və ya dartılması (genəlməsi) ilə müşayiət olunduğunu başa düşür.

Normal paylanmaya aid tapşırıqlar yerinə yetirilir. Həmçinin normal paylanmaya görə ehtimala aid məsələlərin həll edilməsi nəzərdə tutulur. Burada normal paylanma əyrisinin əhatə etdiyi müəyyən sahədən götürülmüş təsadüfi məlumatın hesablanmasına aid məsələlər yerinə yetirilir. Həmçinin ehtimalın standart paylanmasına görə qurulmuş normal paylanmaya aid tapşırıqlar yerinə yetirilir.

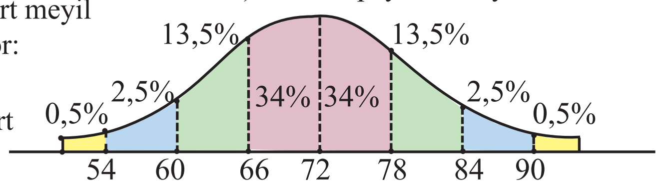
D.2. (səh. 267.) 1) Sınaq imtahanına uyğun normal paylanmada ədədi orta 72 (bal), standart meylin 6 (bal) olduğu məlumdur. 1) Aşağıdakı məlumatları yazın:

a) ədədi ortadan 1 standart meyil ətrafında yerləşənlər;
b) ədədi ortadan 2 standart meyil ətrafında yerləşənlər;
c) ədədi ortadan 3 standart meyil ətrafında yerləşənlər.
2) Normal paylanmaya uyğun əyrini çəkin. Hər intervalı faizlə göstərin.

Həlli: Məlumdur ki, sınaq imtahanına uyğun normal paylanmada ədədi orta $\bar{x} = 72$, standart meyil $\sigma = 6$-dır.

a) Ədədi ortadan 1 standart meyil qədər uzaqlıqda yerləşənlər:
$(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma) = (72 - 6; 72 + 6) \equiv (66; 78)$

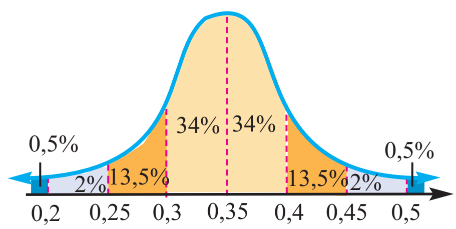
2) Normal paylanma əyrisi.



b) Ədədi ortadan 2 standart meyil qədər uzaqlıqda yerləşənlər:
$(x - 2\sigma; x + 2\sigma) = (60; 84)$

c) Ədədi ortadan 3 standart meyil qədər uzaqlıqda yerləşənlər: (54; 90)

D.6. (səh 269.) Şəkildə göstərilən normal paylanma 1800 gəncin əl-göz reaksiya vaxtını göstərir. Ümumi nəticələrə görə tərtib edilmiş normal paylanmada ədədi orta 0,35 saniyə, standart meyil 0,05 saniyədir.



a) Test edilən təxminən neçə nəfərin reaksiya vaxtı 0,25-lə 0,45 saniyə arasındadır?

b) Təsadüfi bir gənc seçilsə, onun əl-göz reksiya vaxtının 0,4 saniyədən çox olanlar arasından olma ehtimalı nə qədərdir?

$x = 0{,}35$, $\sigma = 0{,}5$

a) testreaksiya vaxtı (0,25; 0,45) intervalına düşənlər 2 standart meyil uzaqlığında olanlardır. $(x - 2\sigma, x + 2\sigma)$

İki standart meyil uzaqlıq faizlə $(13{,}5 + 34) \cdot 2 = 95\%$ olacaqdır. Təxminən bu qədər test edilən gənclərin sayı isə $1800 \cdot \frac{95}{100} = 18 \cdot 95 = 1{,}710$ olacaqdır.

b) Əl-göz reaksiya vaxtının 0.4 saniyədən çox olması $(x + \sigma, x + 2\sigma)$ intervalına düşmə deməkdir. Bu isə %-lə $13{,}5 + 2 + 0{,}5 = 16\%$ deməkdir.

Onda təsadüfi seçilmiş bir gəncin əl-göz reaksiya vaxtının 0,4 saniyədən çox olanlar arasında olma ehtimalı $P(\tau; 0{,}4) = \frac{16}{100} = 0{,}16$ olar.

Dərs 143-144. Qutu-qulp diaqramı. Dərslik səh. 270-273

Məzmun standartı.

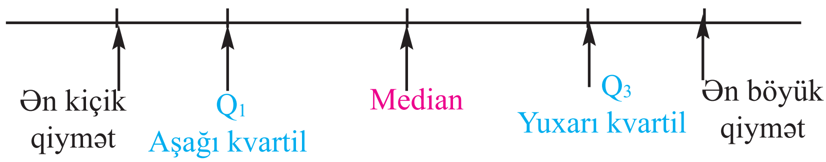
5.1. Statistik məlumat toplayır, sistemləşdirir, təhlil edir və nəticəni təqdim edir.

5.1.1. Ölçmənin dispersiyasını və orta kvadratik meylini hesablayır.

Şagird bacarıqları:

- Məlumatı kvartillərə ayırır;
- Məlumatı qutu-qulp diaqramı ilə təqdim edir.

Median məlumatı iki bərabər hissəyə ayırır. Bu bərabər hissələr isə kvartil adlanan (bu hissələrə uyğun medianla) qiymətlə yenidən iki hissəyə bölünürlər.



Mediandan solda yerləşən məlumat hissəsini aşağı kvartil adlanan və Q_1 ilə işarə edilən kvartil, mediandan yuxarıda yerləşən məlumatı yuxarı kvartil adlanan və Q_3 ilə işarə edilən kvartil iki bərabər hissəyə ayırır. Aşağı və yuxarı kvartillərin fərqi orta hissədə yerləşən məlumatı, məlumatın yarısının (50%-lik məlumatın) dəyişmə diapozonunu müəyyən edir. Median və kvartillər məlumatı dörd bərabər hissəyə (25%-lik) ayırır. Şagirdlərlə kvartillərin müəyyən edilməsinə aid bir neçə tapşırıq yerinə yetirilməsi tövsiyə edilir.

Q_1 Median Q_3

3			3			3			3		
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37

Çünki, qutu-qulp diaqramının qurulmasının əsasını kvartillərin müəyyən edilməsi təşkil edir.

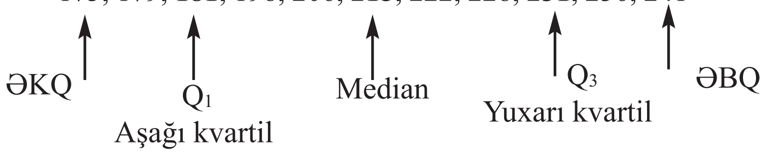
D.2 Məlumatı qutu-qulp diaqramı ilə göstərin və situasiyaya uyğun təqdim edin.

206, 173, 198, 241, 179, 236, 181, 231, 215, 222, 228

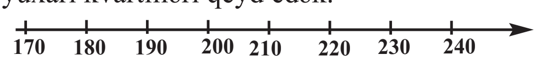
Həlli: Məlumatı qutu-qulp diaqramı ilə təqdim edək.

1-ci addım. Məlumatı artan sıra ilə düzək və medinanı, aşağı və yuxarı kvartilləri tapaq.

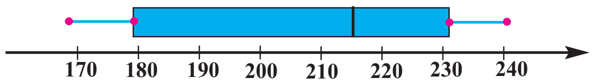
173, 179, **181**, 198, 206, **215**, 222, 228, **231**, 236, 241



2-ci addım. Ədəd oxu üzərində verilən məlumatı yerləşdirək.
Medianı, aşağı və yuxarı kvartilləri qeyd edək.



3-ci addım. Q_1 qiymətindən Q_2 qiymətinə qədər qutunu çəkək.
Q_1 qiymətindən ƏKQ-yə qədər sol qulpu, Q_2 qiymətindən ƏBQ-yə qədər sağ qulpu çəkək.



Qutu-qulp diaqramının qurulması ilə yanaşı məlumatı klasterlərə uyğun təqdimetmə bacarığına da diqqət edilir.
Verilən məsələyə uyğun qutu-qulp diaqramına görə şagird aşağıdakı kimi məlumatları təqdim etməyi bacarmalıdır.
Qutunun sağ qulpu 25% məlumata uyğundur. Aşağı kvartilin qiyməti 181-dir, yəni məlumatın 25%-i 181-dən az, 50%-i 181 ilə 231 arasında, 25%-i isə 231-dən çox, 241-dən kiçikdir. Sol və sağ qulpların uzun və ya qısa olması isə qiymətlərin bir-birinə yaxın və uzaq olmasından asılıdır. Qiymətlər bir-birindən uzaqda yerləşdikdə qulp uzun, yaxın yerləşdikdə isə qulp qısa olur.
Qutu-qulp diaqramına görə ən böyük fərq də aydın görünür. Həmçinin kvadrillər fərqindən 1,5 dəfə çox və ya az olan məlumatın kənaraçıxma hesab edildiyi şagirdlərin diqqətinə çatdırılır.

Dərs 145-149 Təsadüfi hadisələr və ehtimal. Ehtimalı hesablama düsturları. Ümumiləşdirici tapşırıqlar. 5 saat Dərslik səh. 274-281

Məzmun standartı.
5.2. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarını başa düşür və tətbiq edir.
5.2.1. Hadisənin ehtimalının hesablanmasına normal paylama qanununu tətbiq edir.

Şagird bacarıqları:
- sınaq, hadisə, elementar hadisələr fəzası, təsadüfi hadisə kimi anlayışları başa düşdüyünü nümayiş etdirir;
- ehtimalları toplama qaydasını uyuşan və uyuşmayan hadisələrin ehtimallarının hesablanmasına tətbiq edir;
- ehtimalları vurma qaydasını asılı olmayan hadisələrin ehtimallarının hesablanmasına tətbiq edir;
- şərti ehtimal düsturunu məsələ həllinə tətbiq edir

Şagirdlər aşağı siniflərdən ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları ilə tanışdırlar. Bu anlayışların hər birinin izahının nümunələrlə ümumsinif müzakirəsində təqdim edilməsi məqsədə uyğundur. Daha sonra isə uzunmüddətli ev tapşırığı olaraq verilə bilər.

Uzunmüddətli portfolio tapşırığı. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarını yazılı olaraq izah edin və nümunələr göstərin.

Müzakirələr zamanı aşağıdakı anlayışların yada salınmasına və düzgün izahının verilməsinə diqqət edilir.

Təsadüfi hadisə - hadisənin nəticələrinin necə ola biləcəyi məlumdur, lakin onların hansı tezliklə baş verəcəyi məlum deyil.

Sınaq - təsadüfi hadisənin baş verməsi üçün edilən cəhd; bu müşahidə və ya təcrübə ilə ola bilər.

Nəticə - sınağın nəticəsində alınan ölçülü kəmiyyət, say və s.

Elementar hadisə - sınaqların nəticələrinin qruplaşdırılması ilə adlandırılan (məsələn, zərin 2 xalının düşməsi hadisəsi) və başqa bir hadisəyə ayrıla bilməyən.

Elementar hadisələr fəzası - sınaqların bütün mümkün elementar hadisələri çoxluğudur.

Uyuşmayan hadisələr - hadisələrin hər biri müstəqil təsadüfi hadisədir. nəticələrin bir-birilə heç bir əlaqəsi yoxdur.

Uyuşan hadisələr - hadisələrin üst-üstə düşən nəticəsi vardır.

Asılı hadisələr - bir hadisənin baş verməsi ehtimalı digərinin baş vermə ehtimalına təsir edir.

Asılı olmayan hadisələr - bir hadisənin baş verməsi ehtimalı digərinin baş vermə ehtimalına təsir etmir.

Təcrübi ehtimal - uzunmüddətli təcrübə və müşahidələrin nəticəsində müəyyən edilmiş ehtimal

Nəzəri ehtimal - hesablama modellərinə görə müəyyən edilmiş ehtimal

Ehtimalların toplanma qaydası - A və B hadisələri uyuşmayan hadisələrdirsə: P(A və ya B) = P(A) + P(B)

Ehtimalların vurulma qaydası - Asılı olmayan A və B kimi iki hadisəsinin başvermə ehtimalını hesablamaq üçün tətbiq edilir: P(A və B) = P(A) × P(B)

Şərti ehtimalın izahını dərslikdə verilmiş nümunə ilə yanaşı aşağıdakı nümunə ilə də izah etmək olar.

Nümunə. Torbada 1-dən 10-a qədər nömrələnmiş eyniformalı kartlar var. Təsadüfi çıxarılmış bir kartın 3-dən böyük ədəd yazılmış kart olduğu məlumdursa, bu kartın üzərində cüt ədədin olma ehtimalını tapın.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (və ya elementar hadisələr fəzası)

A - cüt ədəd hadisəsi üçün nəticələr

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

B - 3-dən böyük ədədlər üçün nəticələr: $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Əlverişli hadisə: $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

$$P(A) = \frac{5}{10}, \quad P(B) = \frac{7}{10}, \quad P(A \cap B) = \frac{4}{10}, \quad P(A|B) = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.3. səh 275 Qan qrupları O (I qrup), A (II qrup), B (III qrup) və AB (IV qrup) kimi işarə edilir. Qırmızı aypara təşkilatının verdiyi məlumata görə, qəzanın baş verdiyi şəhərdə əhaliinin 45%-i O, 40% -i A, 11%-i B, qalanları isə AB qrupuna aiddirlər. 1) Könüllü qan verən şəxsin qan qrupunun:
a) AB (IV qrup) olması ehtimalını; b) A (II qrup) və ya B (III qrup) olması ehtimalını; c) O (I qrup) olmaması ehtimalını tapın.

Həlli:

1) a) AB qrupundan olanlar şəhər əhalisinin 100% – (45% + 40% + 11%) = =4%-ni təşkil etdiyindən, könüllü qan verən şəxsin qan qrupunun AB olma ehtimalı

$$P(AB) = \frac{4}{100} = 0{,}04 \text{ olacaq}$$

b) Oxşar mühakimə ilə qan qrupunun A və ya B olma ehtimalı

$$P(A \text{ və ya } B) = P(A) + P(B) = \frac{40}{100} + \frac{11}{100} = 0{,}51 \text{ olar.}$$

c) Könüllü qan verən şəxsin qan qrupunun O olmaması ehtimalı

$$P(\overline{O}) = 1 - P(O) = 1 - \frac{45}{100} = 0{,}55 \text{ olacaq.}$$

D.3. səh.279. Tutaq ki, hər hansı bir şəxsin 80 yaşa qədər yaşaması (B hadisəsi) ehtimalı $P(B) = 0{,}3$, 90 yaşa qədər yaşaması (A hadisəsi) ehtimalı isə
$P(A) = P(A \cap B) = 0{,}2$ -dir.
a) 80 yaşına çatmış şəxsin 90 yaşa qədər yaşaması ehtimalını hesablayın.
b) $P(B|A)$ hadisəsinin ehtimalı 1-ə bərabərdir. Bu fikri əsaslandırın və situasiyaya uyğun izah edin.

a) Şəxsin 80 yaşına çatma hadisəsi B, 90 yaşına çatma hadisəsi A-dır. Onda 80 yaşına çatmış şəxsin 90 yaşına çatma hadisəsi B hadisəsinin baş vermə şərti ilə A hadisəsinin baş verməsi olacaqdır. Şərti ehtimal düsturuna görə bu ehtimal

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3} \text{ olar.}$$

Hadisələrin asılı olub-olmadığını yoxlamaq üçün onlardan birinin baş vermə ehtimalının digərinin ehtimalına təsir edib-etmədiyini yoxlamaqla da müəyyən etmək olar. Şagirdlərə bu aşağıdakı nümunə üzərində izah edilə bilər.
Tutaq ki, E və F elə iki hadisədir ki, P (E və F) = 0,24, P(E) = 0,4 və P(F) = 0,6
E və F asılı olmayan hadisələrdirmi?
Əgər E və F hadisələri asılı olmayan hadisələrdirsə, P(E|F) = P(E) olmalıdır.
Yoxlayaq.

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}24}{0{,}60} = 0{,}40$$

$$P(E|F) = P(E) = 0{,}04$$

Deməli, E və F hadisələri asılı olmayan hadisələrdir.

D.4. Zər üç dəfə atılmış, A və B hadisələri aşağıdakı şərtlə müəyyən edilir.
A hadisəsi: hər üçüncü atışda 4 xal düşmüşdür;
B hadisəsi: hər birinci atışda 6 xal, hər ikinci atışda 5 xal düşmüşdür.
B hadisəsinin baş verməsi şərtilə A hadisəsinin baş verməsi ehtimalını hesablayın.

Həlli: Burada mümkün hadisələrin sayı 216-dır.

A hadisəsi:

$$A = \begin{cases} (1,1,4)\ \ (1,2,4)\ ...\ (1,6,4)\ (2,1,4)\ (2,2,4)\ ...\ (2,6,4) \\ (3,1,4)\ (3,2,4)\ ...\ (3,6,4)\ (4,1,4)\ (4,2,4)\ ...(4,6,4) \\ (5,1,4)\ (5,2,4)\ ...\ (5,6,4)\ (6,1,4)\ (6,2,4)\ ...(6,6,4) \end{cases}$$

B hadisəsi:

$$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\},\ P(B) = \frac{6}{216}$$

A və B üçün ortaq olan bir hadisə var.

$$A \cap B = \{(6,5,4)\},\ \ P(A \cap B) = \frac{1}{216}$$

Onda tələb olunan şərti ehtimal $P(A|B) = \dfrac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \dfrac{1}{6}$ olar.

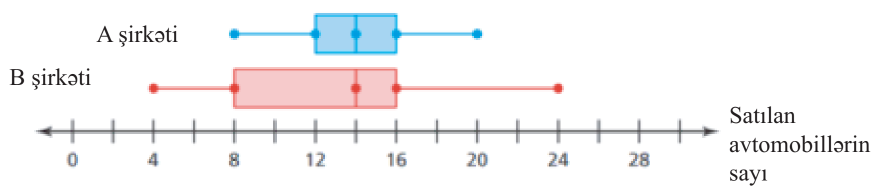
D.5. (səh.279). Avtomobil təkərləri istehsal edən şirkət məhsullarının 2%-nin defektli ola biləcəyi haqqında məlumat yaymışdır. Əgər siz bu şirkətdən 4 təkər almısınızsa, onlardan ən azı birinin defektli olma hadisəsini tapın.

Həlli: P(təkərlərin ən azı birinin defektli olması) =
= 1 – P (təkərlərin 4-nün də defektli olmaması) = 1 – $(0{,}98)^4 \approx 0{,}078$

İşçi vərəq № 1

Adı__________ Soyadı____________ **Tarix______**

1) Qutu-qulp diaqramı avtomobil satışı ilə məşğul olan iki şirkətin satışı haqqında məlumatı əks etdirir. Diaqrama görə tələb olunan məlumatları müəyyən edin və iki şirkətin satışındakı fərqi təqdim edin.



1. Ən kiçik qiyməti: A şirkəti __________ B şirkəti _________
2. Aşağı kvartil:
   A şirkəti_______________ B şirkəti _________

3. Median:
A şirkəti_______________ B şirkəti _________

4. Yuxarı kvartil?
A şirkəti_______________ B şirkəti _________

5. Ən böyük qiyməti:
A şirkəti __________ B şirkəti _________

6. Yuxarı və aşağı kvartillər arasındakı fərq:
A şirkəti __________ B şirkəti _________

2) İki zər atılır. a) heç olmasa birində 3 xal düşməsi ehtimalını;
b) heç olmasa birində cüt xal düşməsi ehtimalını tapın.

3) Komandanın 10 oyunçusunun vurduqları qolların sayı cədvəldə verilmişdir.

oyunçuların sayı	4	2	3	1
vurduğu qolların sayı	0	1	2	3

Verilən məlumatlara görə medianı, modanı, ədədi ortanı, ən böyük fərqi, dispersiyanı tapın.

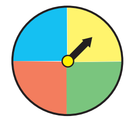
9-cu bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə meyarları cədvəli

№	Meyarlar	Şagird haqqında qeydlər
1.	Məlumatı ədədi orta, median, moda kimi mərkəzəmeylli və ən böyük fərq kimi paylanmanı xarakterizə edən statistik göstəricilərinə görə təqdim edir	
2.	Müxtəlif formalarda verilmiş məlumat bazasına görə meyli, dispersiyanı, standart meyli hesablayır	
3.	Seçimə (külliyyata) görə normal paylanma əyrisni qurur və situasiyaya uyğun təqdim edir	
4.	Normal paylanmada tələb olunan şərtlərə uyğun məlumatları hesablamalarla müəyyən edir və təqdim edir	
5.	Məlumatı qutu-qulp diaqramı ilə təqdim edir.	
6.	Sınaq, hadisə, elementar hadisələr fəzası, təsadüfi hadisə kimi anlayışları başa düşdüyünü nümayiş etdirir	
7.	Ehtimalları toplama qaydasını hadisələrin ehtimallarının hesablanmasına tətbiq edir	
8.	Ehtimalları vurma qaydasını asılı olmayan hadisələrin ehtimallarının hesablanmasına tətbiq edir	
9.	Şərti ehtimala aid məsələləri həll edir	

Dərs 150. 9-cu bölmə üzrə summativ qiymətləndirmə tapşırıqları

1) İki zər atılmışdır. Zərlərin birində 4 xalın düşməsi ehtimalını hesablayın.

2) Çərxi-fələk taxtası dörd bərabər hissəyə bölünmüşdür. Aşağıdakı cədvəl çarxın 20 dəfə fırladılmasına uyğun nəticədir. Çarxın hansı rəngdə dayanmasının təcrübi ehtimalı nəzəri ehtimalla üst-üstə düşür?



Çərxi-fələk taxtası			
Qırmızı	Yaşıl	Mavi	Sarı
5	9	3	3

3) Seminar iştirakçılarından 30 nəfər ingilis, 20 nəfər alman dilində danışır. Onlardan 5 nəfər həm ingilis, həm də alman dilində danışır. Təsadüfi bir iştirakçı seçilsə, onun yalnız alman dilində danışan olmasının ehtimalını tapın.

4) Zər üç dəfə atılmışdır.
a) Əvvəlcə 1, sonra 2, üçüncüdə isə 3 xalın düşmə hadisəsinin ehtimalını tapın.
b) 4 xalın düşməmə ehtimalını tapın.

5) Hər birinə aid iki nümunə yazın:
a) elementar hadisə;
b) mürəkkəb hadisə;
c) uyuşan hadisələr;
d) uyuşmayan hadisələr.

6) Məlumata uyğun ədədi ortanı dispersiya və standart meyli tapın.

11 10 8 4 6 7 11 6 11 7

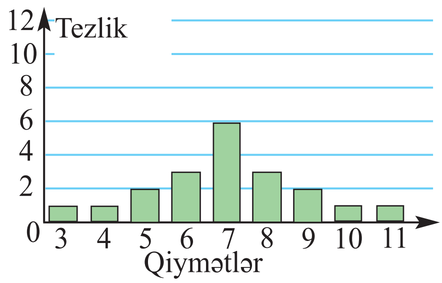
7) Nailə keçən il birinin qiyməti 4,50₼ olan üç, 6,25₼ olan beş, 3,80₼ olan üç DVD almışdı. DVD-lərin orta qiymətini və qiymətlərin standart meylini tapın.

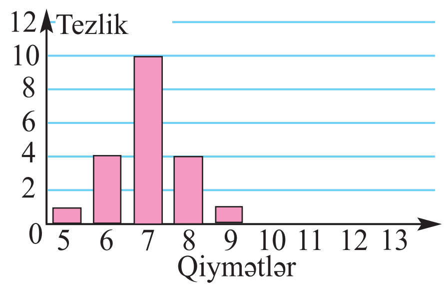
8) Normal paylanmada ədədi ortadan: a) 1 standart meyil; b) 2 standart meyil; c) 3 standart meyil qədər uzaqlıqda olan nöqtələri qeyd edin. Hər bir aralığa uyğun faizləri qeyd edin və normal paylanma əyrisi çəkin.

9) Ədədi ortanın 75-ə, standart meylin 5-ə bərabər olduğu normal paylanmada məlumatın neçə faizi 69-dan böyük qiymətlərə uyğundur?

10) 10 000 əl lampası batareyalarının orta istismar müddəti 30 saat olmaqla standart meyil 3 saatdır.
1) 1,2,3 standart meyil daxilində olan istismar müddətini müəyyən edin.
2) Batareyaların neçə faizinin istismar müddəti:
   a) 27 saatla 33 saat arasındadır?
   b) 21 saatdan çox, 24 saatdan azdır?
   c) 30 saatdan çoxdur?

11) Hansı qrafikdə məlumatın standart meyli daha böyükdür? Fikrinizi əsaslandırın.





12) Mümkün ən yüksək balın 80 bal olduğu qiymətləndirmədə şagirdlərin topladıqları bal aşağıdakı kimidir.

68, 59, 71, 65, 75, 58, 46, 54, 67, 61, 51, 69, 56, 59, 78, 80, 64, 72

a) Qutu-qulp diaqramını qurmaq üçün lazım olan beş qiymətin adını yazın.
b) Bu qiymətləri verilən məlumata görə müəyyən edin.
c) İlk ən çox bal toplayan 25% şagirdin balları hansı intervaldadır?
d) Ballar arasındakı ən böyük fərq neçədir?
e) Şagirdlərin neçə faizi 65-dən çox bal yığmışdır? (yoxlamalı)
f) Siz 70 bal toplamış olsanız, ən çox bal toplayan 25%-liyə daxil ola bilərsinizmi?

10-cu bölmə üzrə planlaşdırma cədvəli

Əsas və alt məzmun standartları	Dərs №	Mövzu	Dərs saatı	Dərslik səh.
2.3.1. Triqonometrik tənliklər sistemini həll edir. 2.3.2.Üstlü və loqarifmik tənliklər sistemini həll edir	151-152	İrrasional tənliklər və bərabərsizliklər	2	283-284
	153-155	Üstlü tənliklər sitemi. Loqarifmik tənliklər sistemi. Triqonometrik tənliklər sistemi	3	285-288
	156-172	Ümumiləşdirici tapşırıqlar. İllik summativ qiymətləndirmə tapşırıqları.	17	289-310
	Cəmi		22	

Dərs 151-155 İrrasional tənliklər və bərabərsizliklər. Üstlü tənliklər sistemi. Loqarifmik tənliklər sistemi. Triqonometrik tənliklər sistemi. 5 saat Dərslik səh. 283-286

Məzmun standartı.
2.3.1. Triqonometrik tənliklər sistemini həll edir.
2.3.2.Üstlü və loqarifmik tənliklər sistemini həll edir
Şagird bacarıqları:
- üstlü tənliklər sistemini həll edir
- loqarifmik tənliklər sistemini həll edir
- triqonometrik tənliklər sistemini həll edir

İrrasional tənlik və bərabərsizlik, üstlü və loqarifmik tənliklər sisteminə aid tapşırıqlar yerinə yetirilir. Hər bir tənliklər sisteminə aid nümunələr verilmişdir. Şagird tənliklər sisteminin həlllər çoxluğunun bu sistemi ödədiyini yoxlamağı bacarmalıdır. Triqonometrik tənliklər sisteminin verilmiş aralıqda yerləşən düzgün seçildiyinə diqqət edilir. Həmçinin sadə tənliklər nümunəsində qrafik həll üsuluna yer verilməsi tövsiyə edilir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D.3 Tənliyi ödəyən neçə həqiqi ədəd var?

c) $\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{x - 4} = 3$

Həlli: Dəyişənin mümkün qiymətləri coxluğu

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ x - 4 \geq 0 \end{cases}$$ sistemindən tapılır.

Bu sistemin 1-ci bərabərsizliyi $-2 \leq x \leq 2$, 2-cisi isə $x \geq 4$ olduqda ödənir. $[-2;2] \cap [4;+\infty) = \varnothing$ olduğundan tənliyi ödəyən həqiqi ədəd yoxdur.

D.4 Bərabərsizlikləri həll edin.

12) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 2$

Həlli: Bərabərsizliyi aşağıdakı kimi yazaq.

$$\sqrt{(x-3)^2} \leq 2$$

Buradan $|x - 3| \leq 2$ bərabərsizliyini alarıq. Onun həlli

$$-2 \leq x - 3 \leq 2$$

ikiqat bərabərsizliyinin həllinə gətirilir. Beləliklə,

$$1 \leq x \leq 5 \text{ tapılır.}$$

D.1 (səh 285) Tənliklər sistemini həll edin.

i) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 10, \\ x - y = 2 \end{cases}$

Həlli: Sistemin 2-ci tənliyindən $y = x - 2$ tapılır. Bu əvəzləməni 1-ci tənlikdə yerinə yazaq.

$$3^x + 3^{x-2} = 10$$

$$3^{x-2} \cdot (3^2 + 1) = 10$$

$$3^{x-2} = 1, \quad x = 2$$

Onda əvəzləmədə $y = 0$ tapılar. Verilmiş sistemin həlli (2;0) cütüdür.

D.1 (səh 286) Tənliklər sistemini həll edin.

i) $\begin{cases} \log_2 x + 2^{\log_2 y} = 6, \\ x^y = 32 \end{cases}$

Həlli: Sistemin 2-ci tənliyinin hər iki tərəfini 2 əsasdan loqarifmləyək.

$$\log_2 x^y = \log_2 32,$$
$$y \cdot \log_2 x = 5$$

Əsas loqarifmik eyniliyi də nəzərə almaqla verilmiş sistemi ona eynigüclü sistemə gətirək
$$\begin{cases} \log_2 x + y = 6, \\ y \cdot \log_2 x = 5 \end{cases}$$

Cəmi 6, hasili 5 olan ədədlər 1 və 5-dir.

1-ci hal
$$\begin{cases} \log_2 x = 5, \\ y = 1 \end{cases}$$
$x = 32, y = 1$

2-ci hal
$$\begin{cases} \log_2 x = 1, \\ y = 5 \end{cases}$$
$x = 2, y = 5$

Verilmiş sistemin həlli (2; 5) və (32; 1) cütüdür.

Dərs 156-172 Ümumiləşdirici tapşırıqlar. İllik summativ qiymətləndirmə. 17 saat. Dərslik səh. 289-310

Ümumiləçdirici tapşırıqları 5-11-ci sinif məzmun standartlarını əhatə edir.

? Dərslikdə verilmiş bəzi tapşırıqların həlli:

D 13. (səh 290)

Ədədləri müqayisə edin.

1) $a = 5^{200}$, $b = 3^{300}$, $c = 28^{100}$ 2) $m = \log_4 3$, $n = \log_5 4$

Həlli: 1) $a = 5^{200} = (5^2)^{100} = 25^{100}$
$b = 3^{300} = (3^3)^{100} = 27^{100}$
$c = 28^{100}$

şəklində yazmaqla aydın olur ki, $a < b < c$.

2) Aydındır ki, $m > 0$, $n > 0$

$$\frac{m}{n} = \frac{\log_4 3}{\log_5 4} = \log_4 3 \cdot \log_4 5$$ şəklində yazaq.

Ədədi orta və həndəsi orta haqqında teoremə görə $a \geq 0$, $b \geq 0$ olduqda
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Buradan, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$\frac{m}{n} = \log_4 3 \cdot \log_4 5 \leq \left(\frac{\log_4 3 + \log_4 5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\log_4 15}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_4 16}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

Deməli, $\frac{m}{n} < 1$, yəni $m < n$

D 93. (səh 299)

Həlli: Həndəsi silsilə əmələ gətirən ədədlərin biri n olarsa, 2-cisi şərtə görə $n + 3$ olar. 3-cü hədd isə x olsun.

n; $n + 3$; x ədədləri həndəsi silsilə əmələ gətirir. Həndəsi silsilə hədlərin xassəsinə görə $(n + 3)^2 = nx$ olmalıdır.

Buradan $x = \dfrac{(n+3)^2}{n} = \dfrac{n^2 + 6n + 9}{n} = n + 6 + \dfrac{9}{n}$

Şərtə görə x natural ədəd olmalıdır. Onda $\dfrac{9}{n}$ də natural ədəddir, yəni n ədədi 9-un bölənidir. Bunlar isə 1; 3; və 9-dur. Deməli, verilən şərtləri ödəyən silsilələrin sayı 3-dür.

D 113. b) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$

Həlli:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} =$$

$$\sqrt{\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| =$$

$$= \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & x > 2 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

D 194. (səh 310)

a) $\sin 18° \cdot \sin 54° = \sin 18° \cdot \cos 36° = \dfrac{2\cos 18° \cdot \sin 18° \cdot \cos 36°}{2\cos 18°} =$

$$= \frac{\sin 36° \cdot \cos 36°}{2\cos 18°} = \frac{2\sin 36° \cdot \cos 36°}{4\cos 18°} = \frac{\sin 72°}{4\sin 72°} = \frac{1}{4}$$

İllik summativ qiymətləndirmə

1) Funksiyanın qrafikini qurun, $x \to 0$ olduqda limitinin olub-olmadığını yoxlayın.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ b) $g(x) = |x| - 1$

2) Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x+2}$

3) A (0; –1; 4) və B (8; 8; –8) nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

4) A (–1; 2; 0) və B (5; 8; –12) nöqtələri verilmişdir. AB parçasını AM : MB= = 2 : 1 nisbətinə bölən M nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

5) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + m$ çoxhədlisini $(x - 2)$ çoxhədlisinə böldükdə qalıq 3-ə bərabərdir. m-i tapın.

6) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ tənliyinin kökləri rasional ədədlərdir. Bu kökləri tapın.

7) A (2; 0; 1), B (4; 2; –1), M (x; –1; 3) nöqtələri verilmişdir. $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{BM}$ vektorları perpendikulyardır. M nöqtəsinin absisini tapın.

8) A (0; 2; –1) və B (3; –1; 0) nöqtələri verilmişdir. A nöqtəsindən keçib $\overrightarrow{AB}$ vektoruna perpendikulyar olan müstəvinin tənliyini yazın.

9) $f(x) = 2^{x^2+1}$ funksiyası verilmişdir. x-in hansı qiymətlərində $f'(x) = f(x)$ bərabərliyi ödənir?

10) $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}x$ funksiyası verilmişdir. x-in hansı qiymətlərində $f'(x) = 0$ tənliyini həll edin.

11) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ funksiyasının [–1; 2] parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

12) Kütləsi $m = 5$ kq olan cisim $s(t) = 3t^2 - t$ (m) qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. Hərəkətə başladıqdan 5 san sonra cismin kinetik enerjisini hesablayın.

13) $f(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x}$ funksiyasının qrafiki B(1; 0) nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyasını tapın.

14) Müəyyən inteqralı hesablayın.

a) $\int_{1}^{2}(4x^3 - 2x + 1)dx$ b) $\int_{0}^{8}\sqrt[3]{x^4}\,dx$

15) $y = 4 - x^2$ və $y = 0$ xətləri ilə hüdudlanmış sahəni hesablayın.

16) Verilən xətlərlə hüdudlanmış fiqurun absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

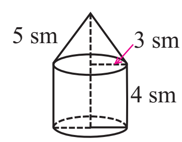
$y = x + 1,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

17) Konusun yan səhtinin açılışı radiusu 8 sm, bucağı 90° olan dairə sektorudur. Bu konusun ox kəsiyinin sahəsini tapın.

18) Sferadan 9 sm məsafədə olan M nöqtəsindən bu sferaya toxunanlar çəkilmişdir. M nöqtəsindən toxunma nöqtələrinin hər birinə qədər məsafə 15 sm-dir. Sferanın sahəsini tapın.

19) Diaqonalı $3\sqrt{2}$ sm olan kvadratın tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan silindrin həcmini tapın.

20) Şəkildə göstərilən ölçülərinə görə cismin tam səhtini və həcmini hesablayın.



21) Metal pul 10 dəfə atılır. 6 dəfə xəritə üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalını tapın.

22) Məlumatlara uyğun ədədi ortanı, dispersiyanı və standart meyli tapın:

11; 8; 10; 12; 9; 6; 11; 10; 8; 5

23) $f(x) = x^3 - 3x^2$ funksiyasının qrafikini qurun.

24) Kürənin mərkəzindən 9sm məsafədə müstəvi kəsiyinin sahəsi 144π sm²-dir. Kürənin səthinin sahəsini və həcmini tapın

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 11

Ümumtəhsil məktəblərinin 11-ci sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə dərsliyin
Metodik Vəsaiti

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi redaktoru: **Əbdürrəhim Quliyev**

Dil redaktoru: **Asəf Həsənov**

Kompüter tərtibatı: **Mustafa Qəhrəmanov**

Korrektor: **Tərlan Qəhrəmanova**

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2018-184

Kağız formatı: 70×100 1/16.
Fiziki çap vərəqi 15.
Səhifə sayı 240.
Tiraj:4076. Pulsuz.
Bakı 2018

Radius nəşriyyatı
Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53

PULSUZ